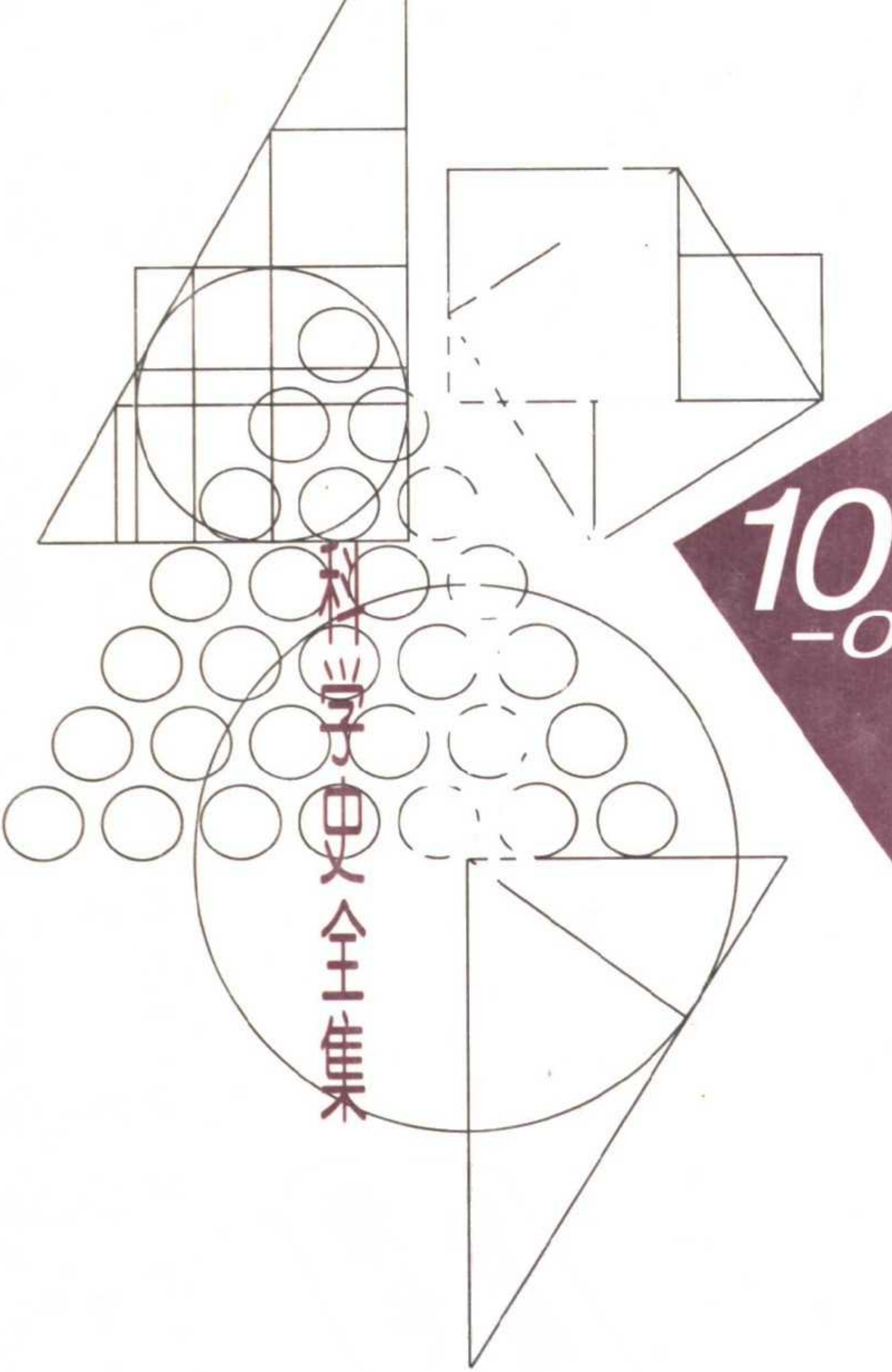
科学史全集

第十卷



辽宁教育出版社

李俨 钱宝琮

科学史全集

第一卷

辽宁教育出版社

第十卷说明

本卷收入李俨先生的33篇论文，包括他最早公开发表的《中国算学史余录》及去世前一年的短文，时间跨度近半个世纪。其中个别论文曾编入四十年代出版的《中算史论丛》(四)，但五十年代作者重编《中算史论丛》时未收入。而作者晚年的论文则未来得及收入《中算史论丛》。这些论文同作者的其他作品一样显示出他渊博知识与深厚功底，在国内外中国数学史和科学史界产生了巨大影响。作者早年关于敦煌算书的三篇论文《敦煌石室算书》、《敦煌石室算经一卷并序》、《敦煌石室立成算经》，因在五十年代整体纳入《中国古代数学史料》，这里只好割爱。由于同样的原因，我们也对《重差术源流及其新注》作了删节。李俨先生晚年重视和算及其与中算关系的研究，本卷的二篇论文反映了他的可贵努力。可惜天不假人，作者1963年去世，使这一研究中断，以至30余年间，几乎无人问津。

李俨其他科学史论文

目　　录

附录

中国算学史余录*

吾少好习算，而于中算亦时有研诵，深以阮元《畴人传》未具系统，而中国算籍浩瀚，未能尽诵为憾。以是知吾国数理学说之渐就沦亡者，亦基于上之二大原因。自是研读所得，时删繁就简，求其原委，窃窃有所涂抹。而童稚时代之所撮录，精语绝少，可存者直零星不足齿数。已而年渐长，读欧籍，见其于吾国算学，时有论著，深叹国学堕亡，反为外人所拾。于是竭力汇集前稿，附以新说，成中国数学史。自上古以迄于隋，凡三十三篇。二载蒇事，遂售预约。谋印刷，成数页，颇不称意，退而修正。欧战既起，事变迭更，吾书亦以稽延。深愿详加审订，再以问世。友辈中有以此为问者，愧无以答，爰作纪事以应。

吾国旧无算学史。阮元《畴人传》略具其雏形，可为史之一部，而不足以概全体。故将辟己意而修史，不得不略分区界而纪载之。盖如是而后古今学说之传禅，与夫学派之推演，乃可以言。虽然，历史之研究远未若科学之精确。简约言之，全部可分三级。自草昧时期，经批评时期，而至学说成立时期。吾国上古算学学说肇于黄帝，

* 本文原载《科学》第三卷第二期(1917 年 2 月)第 238～241 页，又转载于《东方杂志》第 14 卷第 11 号(1917 年 11 月)第 173～175 页。

初无学说流派之可言。斯时得称草昧时期。讫于汉唐，注释家辈出。是为批评时期。宋元以还，天元、四元称盛一时。于明虽有少挫，至清而复兴。故此时期为学说成立时期。斯则中国算学史分期之大概。而每时期之小循环自为消长，而生成数千年之历史。清之末叶，古算复入于草昧时期。此小循环中，今乃初渡批评时期。他日者中国算学学说蔚为世界研算之一科，而中外算学专科并列中国算学，与希腊诸说共同研习。则其入于学说成立时期。光华视宋元为大，而有功于吾国学术者亦巨。此中国算学史编辑之微意。厚望所寄，抑亦读者之所共同者也。

修史之艰在于搜求材料。且往往有出算学范围之外，而转可视为重要史料者。盖吾国算学轶事往往散见于笔记丛刻。而欲造一数字表，一几何形图，则必取材于多数之金石碑刻。次之而中外交通之源委。中国算学名词之出处，近代畴人之轶事，中算传钞之稿本，往往有穷力搜求而始获一线之光明者。编辑之中，吾友茅君唐臣力负搜集之责。国中一二故家藏籍之获接于吾目者，茅君之力居多。深愿当世博学之士，更进而有以匡救之也。

中国算学说之有声于世界也，约在十九世纪初叶。中叶以后，以研究中算称著者为伟烈亚力、拉克伯里二氏。伟烈氏与李壬叔(善兰)共译代数、几何诸书，久旅中国。故所著述论中国算学，深中肯綮。拉克伯里教授创中国人种西来之说，为时流所宗仰，聚集中国泉布彝鼎古籍甚富。故于英伦《货币》杂志，所著《中国筹算说》一篇，至今犹脍炙人口。

輓近则日有东京帝国学士院嘱托三上义夫君，美有纽约哥仑比亚大学算学史教授斯密司博士，比有里爱市教士范氏。之三君者，皆有心于中国算学史之著作。范久旅吾邦，获交知名之士，得以尽读故家之藏籍。其论著曾屡见于荷京《通报》。昔与斯密司博士

有共著英文算学史之约。欧战发生，音问阻绝。意者里爱市之陷，此君或在不免。良可伤也。斯密司博士研精东方算学，与三上氏共著英文日本算学史。既成，复与吾共编英文《中国算学史》。以新欧美人士之目，拟即简约汉文原本，移译成文。更复益以博士历年搜求之材料。主译事者为茅君唐臣、斐君季豪、曹君党民。最近目录初经脱稿，而全书出世尚需时日。三上氏为日本算学史家。关于中日算学之杂著，散见于世界各杂志者，其数汇百。而单行本之英文《中日算学发达史》，与《远东数学论著集录》，亦为世所传诵。朝夕孳孳，征求史料。尝言日本算学源于中国，必先明中算之源，而后可言日算。故于中国算学史之作，深具欢迎之诚。吾既获交于氏，于史料时有增益。日本关孝和传钞明刊本宋《杨辉算法》之发见，其有光于史者，为事尤著。

阮元《畴人传》创始于前，罗、诸二氏续述于后，类皆统括历算名人。而算学史则专纪纯粹算学，故所集列间有增损。顾吾国史学，往往于一人之生卒年月略而不详。有清一代诸畴人，多仅记其事迹而略其时代。图像亦不见收。今者畴人子弟，尚有世守其业者。深望各以见闻所及，公诸同好，则诚中国算学界之大幸也。

日本算学史家远藤利贞小传*

远藤利贞本姓堀尾，为桑名旧藩之裔。入嗣远藤，遂从其姓。幼名多喜之助，后改利贞。幼颖异，九岁受算术。又从细井(姓)若狭宁雄(名)请益算筹法、天元术、点窜术，学乃大进。庆应二年神田松坡町大火，桑名藩邸被焚，家中落。继以戊申党论之争，转为兵虏。而习算之志，初未少减。故于吉野丸学校中，卒能以二三算题惊其师长。维新以返，从事新学，历任教鞭。明治八年东京师范学校出版之《算颗术教授书》三册，其遗爱也。

《日本算学史》之编纂，始于明治十一年。当此时流风靡新学之际，独能从事旧算，翁之意志超越，已可嘉尚；况以翁家之贫窶，算藉之缺佚，卒能以十五载之精力，完其初愿；则其道德学术为世景仰者，非无因也。

远藤翁《日本算学史》，明治廿九年初版行世，于是世知古学之不可唾弃，故当时研算之士，多留心古算。国外人士亦从得以与闻其说。则谓古算之得以继长增辉而不堕者为翁之力，谁曰不宜？

翁于日本算史，虽已一度公诸当世，而精心搜讨之志终未少杀。益以川北朝邻、冈本则余、狩野亨吉，与夫帝国学士院菊池博士

---

* 本文原载《科学》第3卷第11期(1917年11月)第1233~1234页。

之助，近年搜集尤多。因而增补旧著，将复重刻。书未成，而以大正四年四月二十一日卒，享年七十三岁，或言六十九岁。卒之日，国皇追叙，时论悼惜。越三日，入葬染井齐场。名流执绋，极盛一时。继复共议集印《增补日本算学史》，期以本岁夏间出版。则远藤翁于此可无憾矣。

琉球之结绳与文字*

琉球之有结绳与文字，往昔学者鲜有记注。明陈侃《使琉球录》（嘉靖十三年），及清徐葆光《中山传信录》（康熙六十年），皆仅记彼土数字发音之异同而已。晚近日人田代安定于东京《人类学杂志》第六十一号至八十五号间，记录琉球之结绳与文字。笹森仪助于《琉球漫游记》载其通用字符。顾其说尚未详也。民国四年夏，琉球师范学校教授矢袋喜一氏公其《琉球古来之数学》一书行世，因是而结绳与文字之制度始大明于世。日本算学史氏三上义夫亦为文发挥其说。矢袋氏知吾有编订《中国算学史》之举，而吾国夙有结绳为政之传说，乃以所搜集材料分寄一部，以资研究。喜其与古谊可相印证也，谨以所知公诸同好。

结绳大致以草绳为之。或以一结为一，二结为二。逐次如是，至五则为一活结如 b 形。或以一绳为一，二绳为二，逐次如是，以迄于十。或如前例至五亦为一活结如 b 形。琉球本岛，大致如是。顾其制亦随地而异。如中头郡以一结为一，一绳为九，一绳覆折如 U 形者为八。反之，或如国头郡以一绳为一，一结为九，二结为八，三结为七，四结为六，五结或一结为五。其有名数，则如那霸泊以一结

* 本文原载《科学》第 4 卷第 5 期（1919 年 1 月）第 494～495 页。

为一合(即一斤之十分一),一绳为半斤,一绳覆折如U者为一斤,一绳覆折如U形者旋辫之,如累8数字形者为一斤或百斤,一绳覆折如U形者,旋辫之,其上留一活结者,为十斤或千斤。或如八重山岛有以二绳为一石,或四绳为一石者。至其数之次序,大致自左而右,自上而下,如常例焉。

琉球文字,亦因地而异。如八重山及宫古岛,以|为一才,△为一勺,口为一合,一为一升,+为一斗,○为一俵。又以|为一厘或五厘,一为一钱,+为十钱,○为一圆。那霸泊以、为五十,○为一贯,一为五贯,+为十贯,⌓或⌒为五十贯,○或△为百贯,⏄,⏀,⊙,或⟁为五百贯,⊕或⟁为千贯,⊕为万贯。国头地方以フ为五十,、为百,ㄱ为五百,|为一贯,T为五贯,+为十贯,◡为五十贯,○为百贯,⏀为二百贯,⊕为三百贯,ㄴ为五百贯,⊙为千贯,⊕为万贯。考其十百儇立,数位至五,颇有古筹算之风。他如印度(Southals of Bengal)[①] 及秘鲁间,亦有结绳之制。中美马耶(Maya of Ceutral Awevica)[②]亦有以一点为一,一画为五之法。则原人记数之谊,不难思索而得矣。

---

① 参观 *Raport on Census for* 1872。

② 参观 *An introduction to the Study of the Maya hicroglyghs*, by S. G. Morley. *Bulletin*. 57 *of the Burean of American Ethnology*, Smithsonian Institution, Washington, D. C.

中国数学源流考略*

中国数学，发端于黄帝①；前乎此者，则伏羲时代之洛书，为世界三行纵横图（Magic Square）②之鼻祖。史载黄帝使隶首作算数③，得下筹之法④，三数五量，或亦所成；其作数之则，虽未能详，而视结绳累瓦，盖已有进，为无疑矣。

隶首之后，千五百年，而生周公、商高。二人问答之辞，周人志之，是称《周髀》。勾三、股四、弦五，周三、径一，加、减、乘、除，之分，开方，及简单几何形之计算，《周髀算经》均已详记。次之有《九章算术》，宋人谓为周公遗书，以别于伪记之《黄帝九章》⑤。

旧文遗残各称删补。故在《周髀》七衡述吕氏之言，浑天记《灵宪》之文⑥；其在《九章》，大夫、不更、簪袅、上造、公士为战国爵级⑦；

---

* 本文原载《北京大学月刊》第 1 卷（1919 年）第 4 号第 1～19 页，第 5 号第 59～74 页，第 6 号第 65～94 页。

① 宋徽宗时置算学议所祖，徐处仁言黄帝迎日推策，数之始也。

② 参观 Andrews，W. S.，*Magic Square*，Chicago，1908，pp. 122～123。

③ 语见《后汉志》、《晋志》、《通鉴》，并参《世本》作篇。

④ 语见《古今纪始通考》。

⑤ 语见鲍澣之《九章算经后序》。

⑥ 《灵宪》乃张衡所作，在后汉安顺之世。

⑦ 语见李淳风《九章注释》。

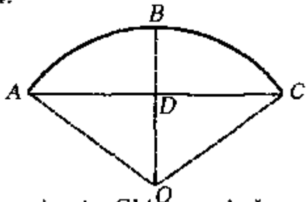
亩法二百四十步，为秦代田制；长安，上林为汉武苑名①；且有记载古印度算经题问如斯密斯及三上氏所云者矣②。校其篇目，言人人殊。今传《九章》共为九篇，一曰方田，以御田畴界域，详之分及简单几何形之计算，又以圆率为三($\pi=3$)，以弧矢形之面积：$A=\frac{1}{2}(c\times b+b^2)$③；二曰粟米，以御交质变易，详百分比例之谊；三曰衰分，以御贵贱禀税；四曰少广，以御积幂方圆，并及单分数(unit fraction)④之谊，复因圆率为三，故圆球之全径$=\left(\frac{16}{9}\times\text{圆球之体积}\right)^{\frac{1}{3}}$；五曰商功，以御功程积实，详方体、堑堵、阳马、鳖臑、角锥、刍童、刍甍、羡除、圆壔、圆锥、圆亭、曲池各体之积；六曰均输，以御远近劳费；七曰盈不足，以御隐杂互见，其所计算，并取资于筹策⑤；八曰方程，以御错糅正负，因正负之则，以计算联立方程，斯密斯博士疑为求一术及定列式之先河⑥；九曰勾股，以御高深广远，因毕氏定理(Theorem of Pythagoras)而致用于量地；且其问题解法，有适成为今之二次方程者⑦。当时数学之发达，概可见矣。降及战国，墨翟以哲理学说，诠释高等数学之谊。至《孙子算经》亦有称为此时代之

---

① 语见四库本《九章算术提要》。

② 参观 Smith, D. E., *Chinese Mathematics*, *The Popular Seience Monthly*, 1912, Vol. LXXX, P. 597～598。及 Smith, D. E., and Mikami, Y., *A History of Japancse Mathematics*, Chicago, 1913, pp. 13～14.

③ 如图 ABC 为弧矢形，OC=圆半径，$2OC=d$，AC=弦$=c$，BD=矢$=b$，ABC=弧$=a$，面积$=A$。后此引述弧矢形或弧形率因此记法。



④ 埃及 *Ahmes papyrus* 书中亦述单分数之谊。

⑤ 参观 Mikami, Y., *The development of Mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913, pp. 16～17。后此引用此书，简称三上论。

⑥ 参观 Smith, D. E., *Chinese Mathematics*, p. 598。

⑦ 三上论(＊见本注⑤)p. 24。

著作者。篇中物不知数一题，为丢氏解析法(Diophantine analysis)及大衍求一法之起原；纵横筹制可知古算用筹之详。自时厥后，继起无人，故自太古至秦称为上古时期。

炎汉初兴，张苍(?～前152)、耿寿昌删补《九章》许商，杜忠各著算术，盖皆从事《九章》者也。厥后刘歆以圆率 $\pi=\frac{3927}{1250}$(公元9年)[①] 号称歆率。张衡(78～139)以圆率 $\pi=\sqrt{10}$[②]，又 $\pi=\frac{92}{29}$[③]。汉魏之交，徐岳著《数术记遗》一卷[④]，汉人赵爽(一名婴《四库提要》谓即君卿)诠释《周髀》，其图解颇与印度菩斯克拉相类，而时代实先千载。阮元谓其精深简括，为算氏之最。

三国之盛，吴有陆绩，以圆率 $\pi=\frac{142}{45}=3.15$，王蕃(219～257)依陆绩立论，其率亦同。魏人刘徽以六觚之面，割之又割，求其周径相与之率，得 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$，号称徽率。其值虽视歆为弱，而其解法则诚可贵。徽又注《九章算术》(公元263年)，并自著《重差》(今名《海

① 参观《西清古鉴》卷三十四，汉嘉量。印度普黎沙(Pulisa，公元300年?)，阿耶婆陀(Aryabhata，476～?)，及菩斯克拉(Bhaskara Acarya，1114～?)并题此率，惟视歆为后。

② 印度波罗笈多(Brahma-gupta，598～?)于其著述 *Brahma-sphuta siddhanta* 中亦谓 $\pi=\sqrt{10}$。后二百年，亚拉伯算书亦用 $\pi=\sqrt{10}$。参观 Zeuthen，H. G.，*Histoire des mathematics dans l'antiquité et les moyen age*，Tr. Par J. Mascart，Paris，1902年，p. 256. 及 Kaye，G. R.，*Indian Mathematics*，Calcutta，1915年，p. 33.

③ 见《开元占经》卷一，天高浑宗篇。

④ 此外《隋书·经籍志》有《九章算术》二卷，徐岳、甄鸾重述；《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰；《九章算经》二卷，徐岳注。又有《算经要用百法》一卷，《大衍算术法》一卷，见于《旧唐书·经籍志》及《宋史·艺文志》。

岛算经》一卷)，与赵爽之注《周髀》，并称一代杰作。《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》今以便利之故，拟为晋代前后之著作。《五曹算经》以四不等边形面积$=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$，与埃及旧术相同。夏侯阳算说视古略有更革；定位之法以本位为身，他位为外；相乘之辨，谓单位曰因，多位曰乘；又以倍、折代乘、除；以添、减之谊，致用于身外、隔位，故有隔位加几；身外减几之说。若十乘加一等，百乘加二等($10=10^1$，$100=10^2$，…)，十除退一等，百除退二等$\left(\frac{1}{10}=10^{-1},\frac{1}{100}=10^{-2}\cdots\right)$，则具指数之精义。《张丘建算经》分数除法，不定方程一问三答，及平面形与高线为比例，多属前人未发之秘①。是为中古进步时期。

南北朝时北齐祖冲之(429～500)②，宋初为长水校尉，以圆率π在3.1415926及3.1415927之间，因得约率$\pi=\frac{22}{7}$，即亚奇默德(Archimedes，前287？～前212)率；及密率$\pi=\frac{355}{113}$，即米底斯(Peter Midius，1527年)率。冲之又注《九章》，造《缀术》数十篇。唐立于学官，限习四岁；其学在天圣(1023～1031)时代，尚有传人③，后乃无闻焉。冲之子暅之(一作暅，或作亘)，少传家学，亦以善算称。《隋书·经籍志》：《缀术》六卷，不著撰人姓氏；《旧唐书·经籍志》：《缀术》五卷，祖冲之撰，李淳风注；《梦溪笔谈》：祖亘有《缀术》二

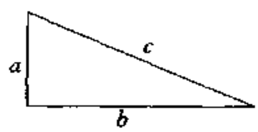
① 参观三上论(＊见本篇第9页注⑤。——编者)pp. 39～43。

② 张崧年按《南齐书》本传，永元二年，冲之卒，年七十二。或作428～499，或作430～501皆失。

③ 《宋史》：楚衍善算，于《九章》、《缀术》、《海岛》诸算经，尤得其妙。……天圣初擢为灵台郎。

卷，则暅或修其父遗著，而简约之欤？祖暅又以诸法授于信都芳。安丰王延明抄集《五经算学》，芳为之注，且尝自注《重差》、《勾股》，并著《四术周髀宗》。北周武帝时(561～578)司隶校尉甄鸾亦传冲之之学[①]。《唐书·艺文志》称：甄鸾注《周髀算经》一卷、《数术记遗》一卷、《张丘建算经》一卷、董泉《三等数》一卷、《夏侯阳算经》三卷、《九章算经》九卷，(《隋书·经籍志》：《九章算术》二卷，徐岳、甄鸾重述；又《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰)，《五曹算经》五卷(《旧唐书·经籍志》作三卷，《宋史·艺文志》作二卷)。《旧唐书·经籍志》称：甄鸾注《孙子算经》三卷。《宋史·艺文志》称：甄鸾注徐岳《大衍算术法》一卷。鸾又自撰《五经算术》二卷[②]。

此外算法书籍，见于《隋书·经籍志》者，有李遵义疏《九章算术》一卷，杨淑撰《九九算术》二卷，张峻撰《九章推圆经法》一卷，赵敺《算经》一卷，张缵撰《算经异义》一卷，张去斤《算疏》一卷。又有不著撰人姓氏《九章术义序》一卷，《九章别术》一卷，《九章六曹算经》一卷，《五经算术》一卷，《五经算术录遗》一卷，《算法》一卷，《黄鍾算法》三十八卷，《算律吕法》一卷，《众家算阴阳法》一卷，《婆罗门算法》三卷，《婆罗门阴阳算历》一卷，《婆罗门算经》三卷。



唐太宗时(627～649)通直郎太史王孝通因《九章》、《缀术》有所未尽，上所著《缉古算经》凡二十术[③]，知应用 $\pi=\frac{22}{7}$，又以三次方程求《九章》商功题谊；其言勾股术亦较《九章》为奥，例如勾股形，因已知 bc 及 $c-a$，则

① 阮元已有论及，参观《畴人传》卷十一。
② 四库本《五经算术提要》已主此说。
③ 《旧唐书·经籍志》、《唐书·艺文志》、郑樵《艺文略》、《宋史·艺文志》俱作四卷。王应麟《玉海》谓今亡其三，亦属失考。

$$x^3+\frac{5(c-a)}{2}x^2+2(c-a)^2x=\frac{b^2c^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2}$$

而 $x=a$。虽其解法未详，而天元学之胎息已于是乎是寄，其视天方之讲三次式，实先三百余年矣①。孝通自言，能排一字，谢以千金，则亦自信其造术之艰深矣。

贞观初叶，太史令李淳风与算博士梁述（《册府元龟》作梁永）、太学助教王真儒等，同正《五曹》、《孙子》等书，刊定注解，立于学官；《周髀算经》二卷，《九章算术》九卷，《九章算经要略》一卷，《张丘建算经》三卷，《海岛算经》一卷，《五曹》、《孙子》等算经二十卷，甄鸾《孙子算经》三卷，祖冲之《缀术》五卷，王孝通《缉古算术》四卷②。淳风又自创麟德术，其盈朒迟速二法，已暗寓平定二差之谊，郭太史特踵事知密耳③。显庆丙辰（公元 656 年）左仆射于志宁等奏以十部算经付国学行用④。盖是时明算之士，并获登庸，学官之制，凡算学《孙子》、《五曹》共限一岁；《九章》，《海岛》共三岁；《张丘建》、《夏侯阳》共一岁；《周髀》、《五经算》共一岁；《缀术》四岁，《辑古》三岁；《记遗》、《三等数》皆兼习之⑤。开元戊午（公元 718 年），太史监瞿昙悉达受诏译《九执术》，其术出自梵天，算法用九箇字乘除，其字皆一举札而成，凡数至十，进入前位，每空位处恒安一点⑥。是为梵天写算输入中国之始。十经以外，刘祐《九章杂算文》二卷，宋泉之《九章术疏》九卷，阴景愉《七经算术通义》七卷，《谢察

① 参观 Smith, D. E., *Chinese Mathematics*, p. 599。

② 语见《唐书·艺文志》。

③ 参观李善兰《则古昔齐算学》卷六麟德术解。

④ 语见《册府元龟》卷八百六十九总录部一百一十九，“明算”条。案《册府元龟》共一千卷，宋景德二年（1005 年）敕撰，其“明算”一条，实为言数学史之嚆矢。

⑤ 语见《唐书·选举志》。

⑥ 语见《开元占经》卷一百四，算法篇。

微算经》三卷①,江本《一位算法》二卷,陈从运《得一算法》七卷,鲁靖《新集五曹时要术》三卷,僧一行《心机算术括》一卷(黄栖岩注),龙受《算法》二卷(贞元 785～802 人)②。其间或有晚唐、五代著作,今既无传,亦无从考,当时且以历数学说远被东瀛③。故以南北朝五代间五百余年,为中古全盛时期。

宋元数学称盛,其最著者为沈括、秦九韶、李冶、朱世杰。

沈括字存中,钱塘人,晚居京口,自号梦溪。嘉祐癸卯(1063年)擢进士第,提举司天监。括学术浩博,文艺深长;兼通天文,方志,律历,算数,医卜之说;喜建事功,城永乐不克,坐谪均州,徙秀州,以光禄少卿分司居润,八年卒,年六十五。梦溪,其润州别业也。著《梦溪笔谈》二十六卷,《补笔谈》二卷,《续笔谈》一卷,《修城法式》二卷④。《梦溪笔谈》卷十八有隙积术。隙积即堆垛积,设其上下长为 a 及 a',上下广为 b 及 b',其高为 h,则堆垛积 $v=\frac{1}{6}[(2a+a')b+(2a'+a)b']h+\frac{1}{6}(b'-b)h$。又有会圆术,求弧形之径及弧,即,$c=2\cdot\left[\frac{d}{2}-\left(\frac{a}{2}-b\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$;$a=c+2\times\frac{b^2}{a}$,而 $\pi=\sqrt{10}$⑤。沈括自谓此二类皆造微之术,古书所不到者。阮元亦言隙积、会圆二术补

---

① 《唐书·经籍志》、郑樵《通志》所载《谢察微算经》三卷。《宋史·艺文志》作《谢察微发蒙算经》三卷,阮元《畴人传》卷六,谓张丘建鸡翁母雏一问而有三答……谢察微乃依数而为之术,《说郛》及《唐宋丛书》本,所存者不足一卷,非全书也。

② 见《旧唐书·经籍志》及《唐书·艺文志》。

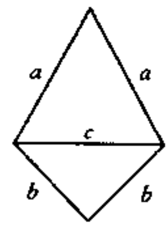
③ 参观远藤利贞遗著《日本数学史》,1918 年,日本东京,pp. 8～21。

④ 参观《宋史》本传,《梦溪笔谈》。

⑤ 参照第 9 页注注③。

《九章》所未及,《授时术草》以三乘方取矢度即写会圆术也。[①]。

秦九韶字道古,秦凤间人,寓居湖州,早岁侍亲中都,因得访习太史,又尝从隐君子受数学。淳祐甲辰(1244 年)八月以通直郎通判建康府,十一月丁母忧,解官。丁未(1247 年)九月成其杰作《数书九章》十八卷[②]。宝祐间(1253～1258)为沿江制置司参议官。或以术学荐于朝,得对。后知琼州,又知梅州,卒于梅。焦循(1763～1820)考其卒年与李冶相先后,盖在景定咸淳间矣[③]。九韶于学无所不通,《数书九章》搜罗宏富,分为九类:一大衍,二天时,三田域,四测望,五赋役,六钱谷,七营建,八军旅,九市易。各类之中,并分九题,田域类尖田求积中两尖田形之面积 x,由

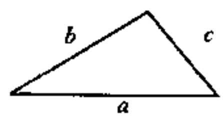


$$-(B-A)^2+2(A+B)x^2-x^4=0,$$

$$A=\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$B=\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2$$ 而得。

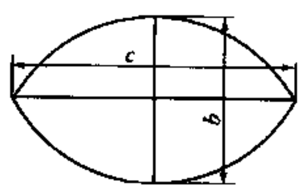
三斜求积之面积,



$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)。$$

蕉田求积中,蕉田之面积 y,由



$$-10(c+b)^3+\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\times 2y+4y^2=0$$

---

① 语见阮元《畴人传》卷二十。

② 《癸辛杂识》作《数学大略》。《直斋书录解题》作《数术大略》。明阁钞本作《数书》、《永乐大典》及阮元《畴人传》作《数学九章》九卷。兹从王应遴作《数书九章》十八卷。

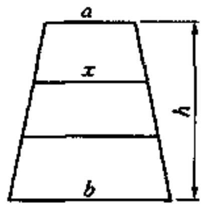
③ 参观《数书九章》、《癸辛杂识》、《景定建康志》、《李梅亭集》、《天元一释》。

而得。由是知弧矢形之面积 x,可由

$$-10(c+2b)^3+4[c^2-(2b)^2]x+16x^2=0$$

而得①。

均分梯田,作为三分,已知 a,b,h。则 x 之值由



$$-\frac{k}{2}h+ahx+\frac{b-a}{2}x^2=0,$$

$$k=\frac{1}{3}\frac{(a+b)}{2}h$$ 而得。

九韶于等差级数 $a,(a+d),(a+2d),\cdots\cdots,(1-2d),(1-d),1$ 中知其总和

$$s=\frac{(2m-1)2m}{2}, \quad 即 \quad s=\frac{n}{2}(a+1)。$$

又 $$s=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n, 即 \quad s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

而 $m=\frac{a+1}{2}$ 为中面数。

九韶于方程式用大衍求一术及开多乘方法。开多乘方法与霍氏之术(Horner Process,1819 年)相同,而时代则先五百七十余年,其言实常为负,亦与仲马华里屋(Thomas Harriot,1560～1621)同旨。②

李冶字仁卿号敬斋,真定栾城人,自幼喜算数,正大庚寅(1230年)成进士辟知钧州事。岁壬辰(1232 年)城溃,冶北渡,流落忻崞间,聚书环堵。晚年得洞渊九容之说,日夕玩绎。家元氏,买田封龙山下。岁甲辰(1244 年)受元世祖召对后即归元氏山下,学徒益众。客有求其说者,乃为衍之,遂累为一百七十问,都十二卷,目为《测

① 参照第 9 页注③。

② 参观三上论(＊见第 9 页注⑤)pp. 63～76。

圆海镜》，时在戊申（1248 年）秋九月。冶以时人有《益古集》之作，以为其蕴犹匿而未发，因为之移补条目，厘定图式，演为六十四题，都为三卷，踵其原名曰《益古演段》，自序在己未（1259 年）夏六月。李氏二书皆阐明天元一之术，而标形学上之异帜者。至元乙丑（1265 年）召为翰林学士，同修国史，卒于家，年八十八①。

杨辉字谦光，钱塘人。景定辛酉（1261 年）作《详解九章算法》，后附《纂类》，总十二卷。今所传者，非其全帙②。又尝著《详解算法》若干卷，以尽乘除、九归、飞归之蕴。景定壬戌（1262 年）作《日用算法》二卷，以明乘除为初学用，编诗括十有三首，立图草六十六问，永嘉陈几先为之题跋③。咸淳甲戌（1274 年）作《乘除通变本末》三卷；上中卷《乘除通变算宝》为辉自撰，下卷《法算取用本末》则与史仲荣合撰。德祐乙亥（1275 年）作《田亩比类乘除捷法》二卷。是年冬因刘碧涧、丘虚谷及旧刊遗忘之文，而作《续古摘奇算法》二卷。以上七卷称为《杨辉算法》，洪武戊午（1378 年），古杭勤德书堂新刊行世④。

辉于级数谓

---

① 参观《测圆海镜》、《益古演段》、《元史》本传、《中州集》、《天元一释》。
张鉴冬青馆甲集引《河朔访古记》称，元氏县，封龙山，龙首山下，有宋丞相李昉读书台，其吟台在东北隅，逮国朝至元三年（1266 年），李文正公冶，自翰林学士辞归山中，因其故基，以筑大成殿讲堂斋舍，招延学者云云。其说颇与《元史》本传有所出入，爰并录之，以备参考。

② 《宜稼堂丛书》本《详解九章算法》存商功第五，均输第六，盈不足第七，方程第八，勾股第九，凡五章。脱去方田第一，粟米第二，衰分第三，少广第四。凡五章，所存者不循旧次，宋景昌亦未为之排比。

③ 其序跋及最题，载入李俨所藏钞本《诸家算法》中。原书为莫友芝子绳孙旧藏本。

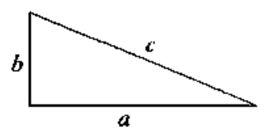
④ 《杨辉算法》，毛晋诸家所藏均非全帙，李俨藏有足本《杨辉算法》，乃据日本关孝和（1642～1708）传录高丽覆明洪武刊本钞校。原书今藏日本帝国学士院，三上义夫君首发现之，录副见示。

$$m^2+(m+1)^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2$$
$$=\frac{1}{3}(n-m+1)\left(m^2+n^2+mn+\frac{n-m}{2}\right)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$$

$$1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$[①]

辉于《田亩比类乘除捷法》言小数之用，于《乘除通变算宝》著有九归详说，而应用于筹策。后此珠算用诀，即以此为滥觞。至于二次方程解法，则《详解九章算法》勾股章今有户高题，因勾股形已知 c，及 $d=a-b$。



则 $c^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)$

两边各减 $2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$ 得

$$c^2-2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)+2\left(\frac{d}{2}\right)^2=2\left(a+\frac{d}{2}\right)^2$$

故 $a=\sqrt{\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}-\frac{d}{2}$，即为二次式之根。

《田亩比类乘除捷法》中设

$$x^2+12x=864,$$

令 $x=20+b$，则原方程式变为 $(20+b)^2+12(20+b)=864$

或 $b^2+(2\times20+12)b=864-(20\times20+12\times20)=224$。

设 $b=4$，而 $\frac{224}{4+2\times20+12}=4$ 时，$x=20+4=24$ 矣。按此法颇

① 以上三式，见于《详解九章算法》，商功第五。第一式为方垛，第二式为四隅垛，第三式为三角垛。三上论（＊见第9页注⑤。——编者）第85页，以三角垛出于《算法通变本末》卷上（1275年）。其时代视《详解九章算法》，迟十四年。

与法人维意他(Francisus Vieta,1540～1603)之旨相肖[①]。顾辉于此道,别未有发明,徒牌贩贾宪《黄帝九章算经细草》立成释锁及刘益《议古根源》演段锁积之术。至论弧矢形则谓 $-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0$, $c=\dfrac{2A}{b}-b$, $d=\dfrac{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}{b}+b$。[②] 前二式疑出自刘益,末式为辉所自发。《续古摘奇算法》上卷载有纵横图。洛书数:九子斜排,上下对易,左右相更,四维挺出,四语为奇行纵横图作法之根源。

四 九 二
三 五 七
八 一 六

(1)洛书

一
四 二
七 五 三
八 六
九

九
四 二
三 五 七
八 六
一

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

(2)花十六图

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(3)花十六阴图

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(4)五五图

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

(5)五五阴图

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	26	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(6) 六六图

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(7)六六阴图

---

① 参观 Cajori,E.,*A History of Mathematics*,*London*,1909,p.147。

② 参照第9页注③。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

(8)衍数图

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

(9) 衍数阴图

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(10) 易数图

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

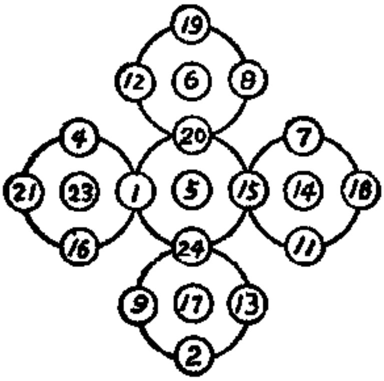
(11) 易数阴图

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

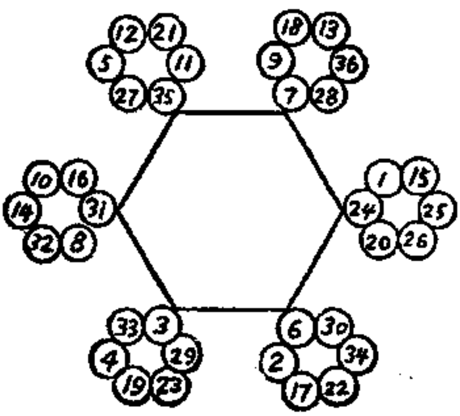
(12) 九九图

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

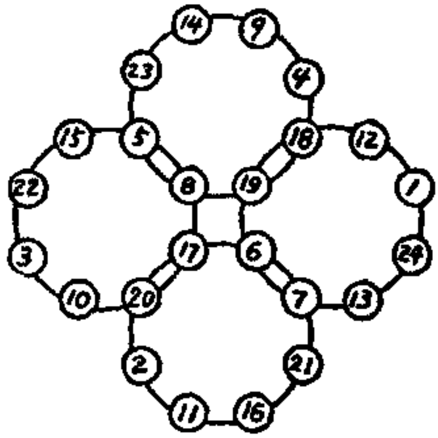
(13) 百子图


19
12
6
8
4
20
7
21
23
1
5
15
14
18
16
24
11
9
17
13
2

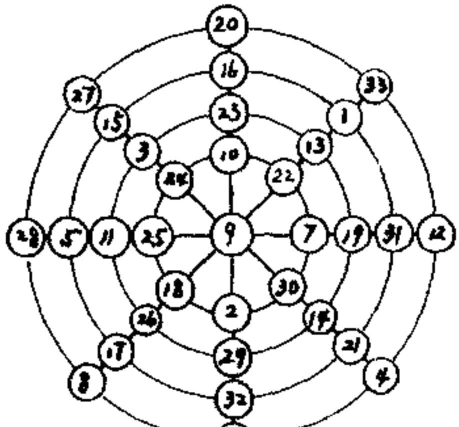
（14） 聚五图


12
21
18
13
5
11
9
36
27
35
7
28
10
16
1
15
14
31
24
25
32
8
20
26
33
3
6
30
4
29
2
34
19
23
17
22

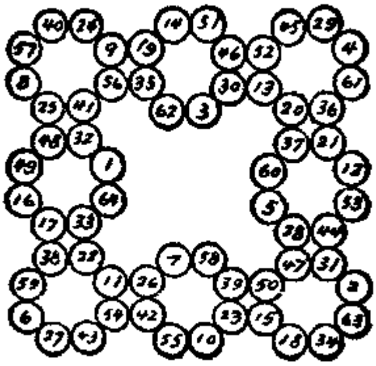
（15） 聚六图

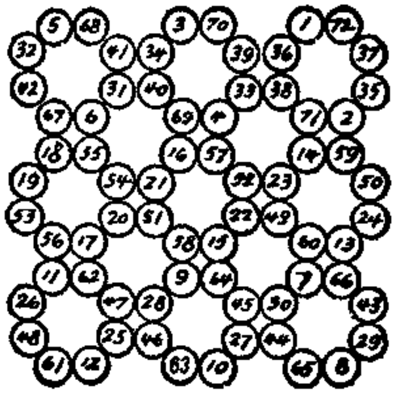

14
9
23
4
15
5
18
12
22
8
19
1
17
6
3
24
10
20
7
13
2
21
11
16

（16） 聚八图


20
16
27
33
23
15
1
3
13
10
24
22
28
5
11
25
9
7
19
31
12
18
30
2
26
14
17
21
29
8
4
32
6

（17） 攒九图





（18）　八阵图　　　　（19）　连环图

朱世杰，字汉卿，号松庭，寓居燕山，撰《算学启蒙》三卷，分二十门，立二百五十九问。首总括无卷数，大德己亥（1299 年）赵城序而梓传焉。宋元之间，平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕之撰《细草》，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元。霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》，末有人元二问。至世杰乃按天、地、人、物立成四元，以元气居中，立天勾，地股，人弦，物黄方。考图明之。上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式，必以寄之，剔之，余筹易位。书成名曰《四元玉鉴》，厘为三卷，分问二十有四，立问二百八十，大德癸卯（1303 年）临川莫若序而传焉①。

世杰于发明四元之外，更善于堆积、级数之谊，就前人既论各堆积外，别立落一、撒星、岚峰诸形以通其变。

落一形，　$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

---

① 参观《算学启蒙》、《四元玉鉴》。

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

即 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)。$$

撒星形，$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+[(1+3+6+\cdots$

$$+\frac{1}{2}n(n+1)]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

即 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

四角落一形，$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots\cdots+(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2),$$

即 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+\cdots+n(n+1)(2n+1)$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(n+1)(n+2)。$$

岚峰形，$1+(1+5)+(1+5+12)+\cdots+[1+5+12+\cdots$

$$+\frac{1}{2}n(3n-1)]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

即 $1\cdot2\cdot1+2\cdot3\cdot2+3\cdot4\cdot3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)n$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)。$$

就中落一形之 $1,2,3,\cdots,n$，撒星形之 $1,3,6,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)$，四角落一形之 $1,4,9,\cdots n^2$，岚峰形之 $1,5,12,\cdots,\frac{1}{2}n(3n-1)$ 在代数学中谓之直线级数，三角级数，四角级数，五角级数是也。又，三角岚峰形，（一称岚峰更落一形）

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots\cdots+n[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)]$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1),$$

四角岚峰形，

$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots\cdots+n(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left[n(4n+1\frac{1}{2})+(4n+\frac{1}{2})\right],$$

撒星更落一形，

$$1+6+15+35+70+126+\cdots\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

即 $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

三角撒星更落一形

$$1+6+21+56+126+252+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

即 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+\cdots\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

世杰于《四元玉鉴》首载古法七乘方图，以便解析高次方程式。此即巴斯楷(1623～1662)三角形(Pascal triangle)。斯密斯博士征考古籍，知陀悲庵(Petrus Apianus，1495～1552)于嘉靖丁亥(1527 年)之著

作，已先巴氏论及[①]，然已后于朱氏几二百年矣。世杰于弧矢形，在《算学启蒙》则用古法 $A=\frac{1}{2}(bc+b^2)$；在《四元玉鉴》则用新法 $-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0, c=\frac{2A}{b}-b$。后说疑与杨辉同出于刘益者也。

程大位《算法统宗》卷十二谓宋元丰七年（1084 年）刊十书入秘书省，又刻于汀州学校。十书者：《黄帝九章》、《周髀算经》、《五经算法》、《海岛算经》、《孙子算法》、《张丘建算法》、《五曹算法》、《缉古算法》、《夏侯阳算法》、《算术拾遗》是也。至元丰（1078～1085）、绍兴（1131～1162）、淳熙（1174～1189）以来刊刻者，有《议古根源》（刘益著）、《益古算法》、《证古算法》、《明古算法》、《辨古算法》、《明源算法》、《金科算法》、《指南算法》、《应用算法》、《曹唐算法》、《贾宪九章》[②]、《通微集》、《通机集》、《盘珠集》、《元盘集》、《三元化零歌》[③]、《钤经》（石信道著）、《钤释》诸书。《宋史·艺文志》所载，又有李绍谷《求一指蒙算术玄要》一卷、夏翰（一作翱）《新重演议海岛算经》一卷、徐仁美《增成玄一算经》三卷、《三问田算术》一卷、龙受益《算法》二卷，又《求一算术化零歌》一卷，又龙受益法王守忠《求一术歌》一卷、《新易一法算范九例要诀》一卷、《算范要诀》二卷、《明算指掌》三卷、任弘济《一法算法问答》一卷、杨楷《明微算经》一卷、《法算机要赋》一卷、《法算口诀》一卷、《算法秘诀》一卷、《算术玄要》一卷。厥后金人杨云翼著有《勾股机要》、《象数杂说》等藏于家。明连江陈第《世善堂书目》：《石塘算书》四卷，宁德陈尚德撰，《算经图释》九卷，彭丝撰。此外《丁巨算法》八卷（1355 年）[④]、贾亨

① 参观 Smith, D. E., *Rara Arithmetica*, Boston, 1909, pp. 155～156.

② 杨辉《详解九章算法·纂类》称右班直贾宪撰有《九章草》，《宋史·艺文志》有贾宪《黄帝九章算经细草》九卷，当即此书。

③ 《宋史·艺文志》有张祚注《法算三平化零歌》一卷。

④ 《知不足斋丛书》刊本不足一卷。

《算法全能集》二卷、安止斋何平子《详明算法》二卷[①]，皆属元人之作。而《算经十书》，与沈、秦、李、朱诸氏著作，所垂示于后代者，厥功尤伟。说者以宋元数学为中国数学之黄金时代，非过言也。

有元之时，不独天元、四元之学称盛，且同时受西域回部之影响。西方纳速剌丁、兀鲁伯，东方郭守敬之事实，亦有可称者。

纳速剌丁实名阿蒲者法摩诃末本诃生阿徒昔（Abû Dscha far Muhammed ibn Hasan al Tûsi）。纳速剌丁者，护教之义也。以宋宁宗嘉泰辛酉（1201 年）生于途思（一作徒思》，擅长百科之学，特精数理，早岁即闻名于乡党。所著有论代数，论几何者见称。稍后又成一极完备之平弧三角术。三角术之离天文而成纯粹数学者，实自此始[②]。旭烈兀以宋理宗宝祐丙辰（1256 年）西征，纳速剌丁说其酋木斯大生（Mostasem）降。翌年夏遂获居旭烈兀之左右。又翌年受命在梅拉喀（Maragha）建观象台[③]。白塔怖曰，旭烈兀左右集中国学人，天文家甚众，中有一名傅穆齐（译音），通称先生[④]，纳速剌丁实从知中国纪年，与其计算表之方[⑤]。曾献伊儿汗表（*Ilkanic*

① 其序文及最题，载入李俨所藏钞本《诸家算法》中。

② 参观 Biblioth. Math, 1893. p. 6。

③ 参观 Howorth, *History of Mongols*, Vol IY. pp. 102, 103, 108, 109, 115, 137, 138. 及 Maximilies, M., *Histoire des sciences Mathématiques et Physiques*, Tome II, Paris, 1883, pp. 155 ~ 158. 及 Zeuthen, H. G., *Histoire des Mathèmatique dans l'antiquité et la moyen age*, Tr. Par Mascart, J., Paris, 1902, pp. 267~270。

④ 白塔怖所谓 Sing-sing 当即《马可波罗游记》所题之 Sensim 或 Sensin。盖为当日西域高僧 N 称号。马可谓其剃发披缁，刻苦皈依，不拜偶像，别于番僧，参观 *The Travelsof Marco Polo*, Every-man's Lib. Ed., pp. 150~151, Foot note. 1, 2, 3。

⑤ "Tempore Hulagu-chan magna manus Philosophorum & Astronomorum Chataicorum cum illo huc profecti sunt. Ex his Fu-muen-gi erat, Vir Philosophus, Sing-sing cognomento dictus, h. e. polyhistor. Eodein tempore Dominus, Nasiro'd Din, Tuso, (urbe Chorasanœ) oriundus de mandatu Hulaguchan Tabulas Ilchanicas condidit. "in Abdallah Beidavi's *History of China*. Latin translation by A. Müller, Greiffenhag, 1689, pp. 5, 6)。

Table）于蒙古汗，尝疏欧几里得《几何》，多禄某《大辑》（*Almagest*），及柏拉图、亚理斯多得之伦理。历仕旭烈兀（1258～1265），阿八哈（1265～1282）两朝，以宋度宗咸淳甲戌（1274 年）六月二十五日卒于报达（Baghada），或曰梅拉喀，或又谓卒于其年之十二月十二日，生于辛酉（1201 年）二月十七日云[①]。有子二人，亦善天文。

兀鲁伯者，跛帖木儿孙（Mirza Ulugh Beg bin Shahruk'n bin Timûr Kurgān），生于突厥，时在洪武癸酉（1393 年），或云甲戌（1394 年）。至正统丁卯（1447 年）继父沙鲁哈为撒马儿罕（一作撒麻耳干，Samaricand）王。后二年见弑于长子，以欲废之也。兀鲁伯善天文历数[②]，当其未即位时（1420～1437）尝协助人观象，因成《兀鲁伯表》四卷。波斯师傅阿罗弥（Kāzi-Zādah Rumi）实为之助[③]。

郭守敬（1231～1316）字若思，顺德邢台人也。大父荣精于算数，使守敬从刘秉忠学。至元丙子（1276 年）守敬与王恂率南北日官分掌测验，守敬首言历之本在于测验，而测验之器莫先仪表。旧仪表未当，乃尽考其失，而移置之。《授时历》既成，复著书数十卷，并藏之官。甲午（1294 年）拜昭文殿大学士知太史院事。延祐丙辰（1316 年）卒，年八十六[④]。

《授时历》书，《元史》漫无采摭，于三应率及立成之数，与夫割圆弧矢之法，平立定三差之原尽削不载。《明史》据《大统历》通轨及历草诸书，稍为编次，以《大统》即郭守敬《授时历》也。割圆求矢术 d^2

---

① 参观 Howorth，*History of Mongols*，Vol. Ⅳ. p. 282。

② "Fuit Rex justus，doctus，perfectus，Praesertim in mathematicis，scientiam et ej usdem cultores dilexit."-Abu Muhammad Mustapham。

③ 参观 Cantor，M.，Vor. l. üb *Geschite der Math.*，I.，1907 年，pp. 780～781 及 Knobel，E. B.，*Ulug Beg's Gatalogue of Star*，Washington，1917 年，pp. 5～14。

④ 参观《元史》本传，天文志，齐履谦《郭太史行状》。

$\left(\frac{a}{2}\right)^2-d^3b+(d^2-ad)b^2+b^4=0$①与杨辉之术略异，而 $d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b$ 则复相类②。至四次方程式 $f(x)=ax^4+cx^2+dx+e=0$ 略近值之计算，则因假设 $f(x)-f(x_1)=f$，$x=x_1+x_2$ 故 $a[(x_1+x_2^2)+x_1{}^2](2x_1+x_2)x_2+c(2x_1+x_2)x_2+dx_2+f=0$ 之理而得③。

明承宋元余绪，故在国初，古算尚有流传。洪武戊午(1378 年)刊刻《杨辉算法》④，《永乐大典》(1407 年)兼收古今算籍⑤。顾《元史·李冶传》不言其天元一之学，且误"海镜"为"镜海"，《益古演段》为《益古演疑》。明刊本《周髀算经》至以鲍澣之《数术记遗序》为《周髀》后序⑥。一时著作家之大略可言者，则有严恭《通原算法》一卷(1372 年)⑦、刘仕隆《通明算法》(1424 年)、夏源泽《指明算法》(1439 年)、吴信民《九章比类算法》(1450 年)⑧、刘洪《算学通衍》(1472 年)、许

---

① 三上论(＊见第 9 页注⑤)，P. 103，误作 $d^2\left(\frac{a}{2}\right)^2-d^3x-(d^2-ad)x^2+x^4=0$。

② 参照第 9 页注③)。

③ 割圆弧矢及平立定三差之原，可参观《元史》卷五十四，《明史》卷三十二，卷三十三，梅文鼎《平立定三差详说》(梅氏丛书辑要》卷四十五)，顾观光《武陵山遗书·算剩初编》，傅九渊《有不为斋算学》四卷，三上论(＊见第 9 页注⑤)pp. 101～106，Cantor，M.，*Gaschichte*，pp. 684，Kao Kiun，(高均)，*Note surla "Méthode des trois différences"*，14e Année scolaire，1916～1917，Université L'Aurore，pp. 1～18。

④ 此刊本朝鲜据以覆刊，而为关孝和所传钞者。

⑤ 《永乐大典》事韵算部算法一至算法三十五。

⑥ 明《秘册汇函》本，李俨藏。

⑦ 其序文，及最题，载入李俨所藏钞本《诸家算法》中。

⑧ 吾所见清初藏书家书目，多载有明吴敬《比类算法》。疑敬即信民，未知是否。

荣《九章详注算法》(1478 年)、余进《九章许通算法》(1483 年)、郑高升《启蒙发明算法》(1526 年)、唐顺之(1507～1560)《勾股测望论》、《勾股容方圆论》、《弧矢论》、《分法论》、《六分论》,顾应祥《勾股算术》二卷(1535 年)、《测圆海镜释术》十二卷(1550 年)、《弧矢算术》(1552 年)、马杰《改正算法》(1530 年),崔坡《校正马杰算法》、张爵《正明算法》(1539 年)、陈必智《算理明解》(1540 年)、杜高《订正算法》(1540 年)、杨溥《算林拔萃》(1572 年),朱载堉(1536～1595?)《算学新说》、邢云路《古今律历考》七十二卷、陈荩谟《度测》三卷、余楷《一鸿算法》(1584 年)、朱元濬《庸章算法》(1588 年)、程大位《算法统宗》十三卷。

当日之言圆率者,朱载堉谓 $\pi=\frac{\sqrt{2}}{0.45}$,邢云路谓 $\pi=3.126$,又 $\pi=3.12132034$,陈荩谟谓 $\pi=3.15205$①,方以智谓 $\pi=\frac{52}{17}$②,此外又有桐陵法 $\pi=\frac{63}{20}$③,及智术 $\pi=\frac{25}{8}$④二种。

唐顺之论弧矢谓 $-A^2+Ab^2+db^3-1.25b^4=0$,

---

① 三上论(＊见第 9 页注⑤)p. 38,作 $\pi=3.15025$。

② 见方以智《通雅》中。吾友茅以升君首引之。见所著《中国圆周率略史》,《科学》第三卷,民国六年四月号,四二三页。

③ 日本关孝和遗著《括要算法》(1709 年刊)卷贞,求周径率,谓铜陵法,周率六十三,径率二十,周数三一五整。按梅文鼎《笔算》五,附方田通法中,载有量田原法歌诀,谓出桐陵,惜亦不传姓氏。疑与关氏所引同属一人,而为明季隐者也。

④ 智术见于《算法统宗》,《括要算法》,不著撰人姓氏。苏渤氏谓罗马奥古士都时代,有维都维(Vitruvius)者,以周率十二尺半,径率四尺,盖亦主张 $\pi=\frac{25}{8}$ 也。见 Schubert, H., *Mathematical Essa yand Recreations*, Tr. by McCormack, T. J., Chicago, 1903 年, p. 128. 马利氏谓维都维以汉始元丙辰(公元前 85 年)生,建始乙未(公元前 26 年)殁,尝著建筑学理论六卷,见 Marie, M., *Histoire des Seiences Mathematiques et Physiques*, Paris, 1883 年, Tome, I, p. 219.

顾应祥论弧矢谓$\frac{c}{2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-b\right)^2}$，

$$b=\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2},\qquad a=\frac{2b^2}{d}+c,$$

$$d=b+\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b},\qquad A=\frac{1}{2}(b+c)b,$$

$$b=\frac{d\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{(d^3-d^2b)+(ad-b^2)b}\text{①},$$

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0,$$

$$\frac{4c^2\left(\frac{1}{2}c\right)^3}{3}=-(c+a')\left(\frac{1}{2}c\right)^2x+\left(\frac{c}{2}\times c+c^2\right)x^2-(c+a')x^3+x^4=0,$$

而 $a'=\frac{\pi d}{2}-a$，　　$x=b$②。

顾氏于四次方程式$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$略近值之计算，亦确守郭氏之典型。因假设$x=x_1+x_2$，$f(x)-f(x_1)=f$，$a(4x_1^3+6x_1^2x_2+4x_1x_2^2+x_2^3)x_2+b(3x_1^2+3x_1x_2+x_2^2)x_2+c(2x_1+x_2)x_2+dx_2+f=0$之理而得。

程大位，字汝思，号宾渠，新安人。少游吴楚，老憩丘园。举平

① 此式出于郭守敬，三上论一〇九页误作$s=\frac{d^2\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{(d^3-d^2s')-(ad-s')s'}$。

② 此式为顾氏所自发。三上论（＊见第9页注⑤）P.109误作$x=s$，$\frac{4c^2\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{3}=-(c+a')x+\left(\frac{c}{2}\times c+c^2\right)x^2-\left(\frac{c^2}{2}+c^2+a'\right)x^3+x^4$。

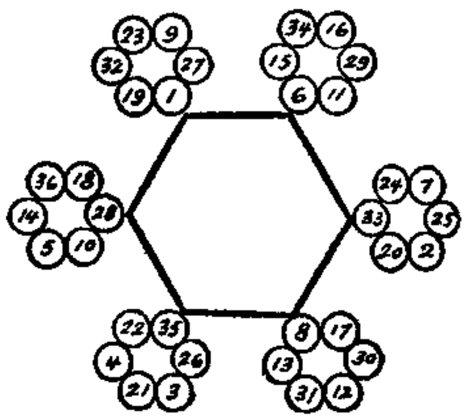
生师友之所讲求,咨询之所独得者,著《算法统宗》十三卷[①]。其中有先进言之未备,备矣,而或未精者。汝思悉为阐明之。其书以九章为目,后附难题。万历癸巳(1593年)浙江吴继绶为之序。卷十二所载纵横图十四种多与杨辉相同,其不同者仅有三图,如下:

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

五 五 图[②]

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

六 六 图



聚 六 图

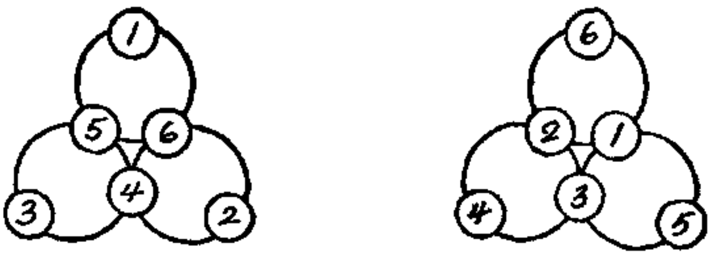
至算盘之说,虽程氏所言较详,实已盛于宋元之顷。宋人杨辉、元人朱世杰均著九归歌诀。宋《谢察微算经》、元贾亨《算法全能

① 阮元畴人传卷三十一作:十四卷,盖从吴继绶序文所述。

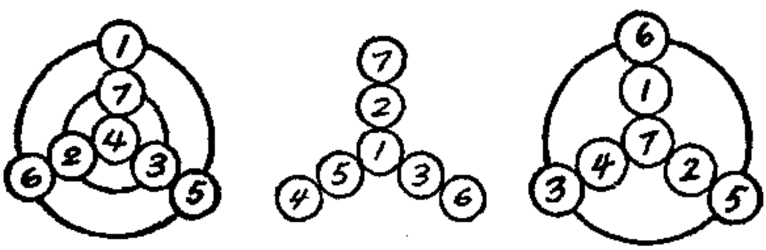
② 此图当将上下二横列中央三数:23,16,4;3,10,22对换。或将其同列左右二数:5,25;1,21对换,方成正则之纵横图。语见三上义夫,《和算之方阵问题》,日本,东京,大正三年,第7页附注一。

集》有脊梁之称。元儒安止斋、何平子《详明算法》有撞归起一之语。元丰、绍兴、淳熙以来刊刻算书有《盘珠集》、《元盘集》。明人吴信民、朱载堉所述算盘之用，亦在程氏之前。程氏采集诸家之说，详其未备，故所传独永。其书流传日本，尚为和算鼻祖[①]。

清初新安张潮《心斋杂俎》卷下“算法图补”谓：《算法统宗》所载十有四图，纵横斜正，无不妙合自然。有非人力所能为者，大抵皆从洛书悟而得之。内惟百子图，于隅径不能合，因重加改定，复以意增布杂图，亦皆有自然之妙。

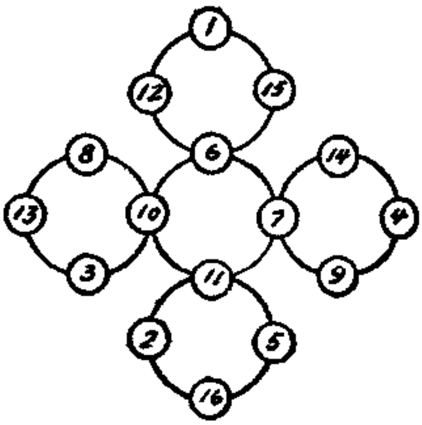


参　三　图

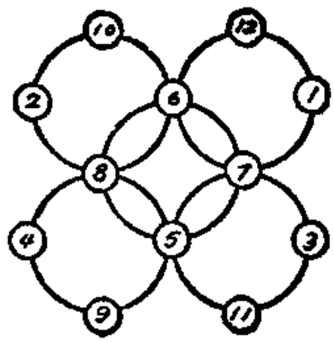


参　三　图

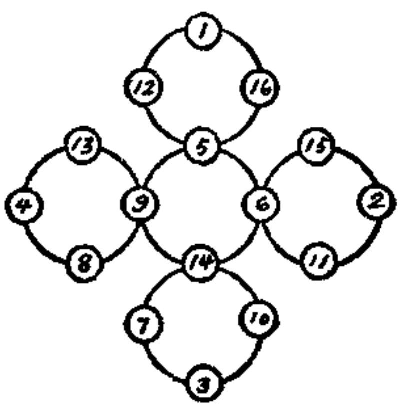
① 参观三上论（*见第9页注⑤）p. 157 及 Smith, D. E., and Mikani, Y., *A History of Japanese Mathematics*, Chicago, 1914, p. 34. 及远藤利贞遗著，《增修日本数学史》，pp. 43～59。



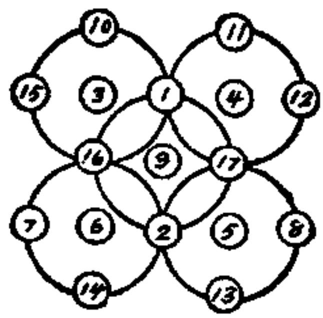
揲四图



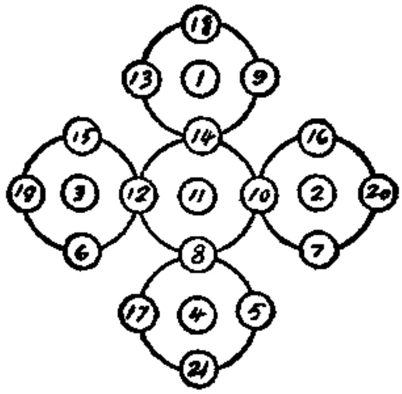
伍五图



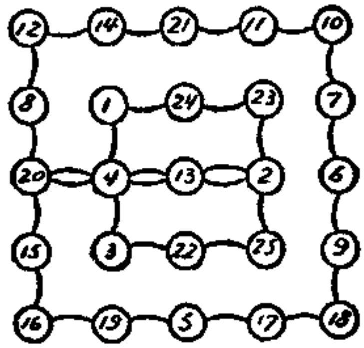
伍五图



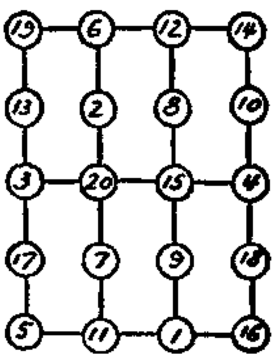
伍五图



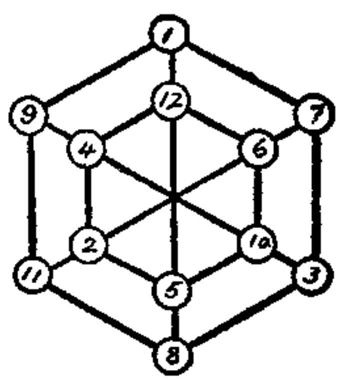
伍五图



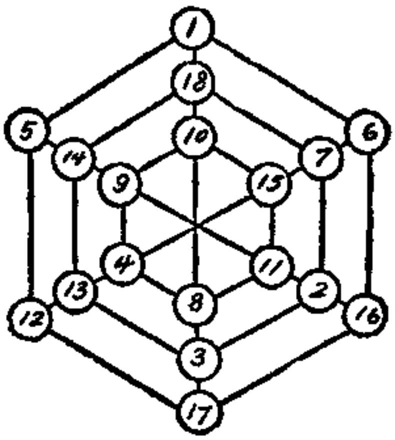
伍五图



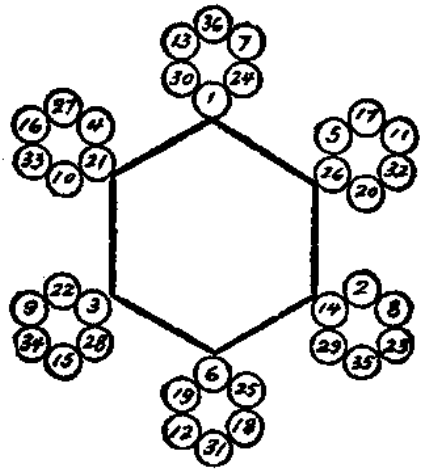
方六图



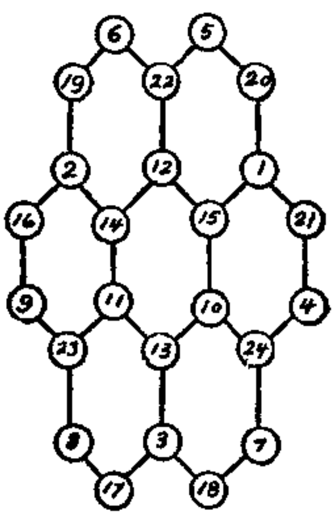
六合图



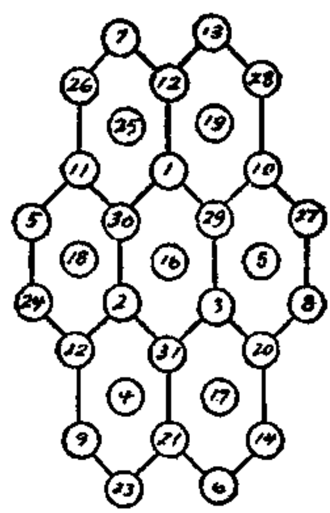
六合图



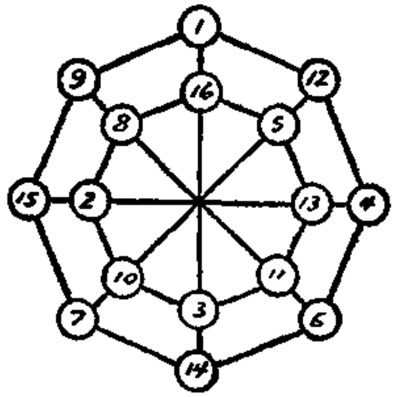
更定聚六图



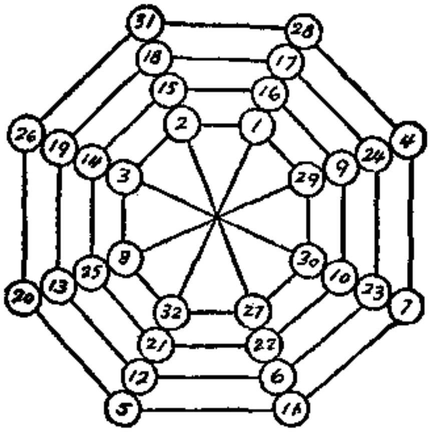
龟文聚六图



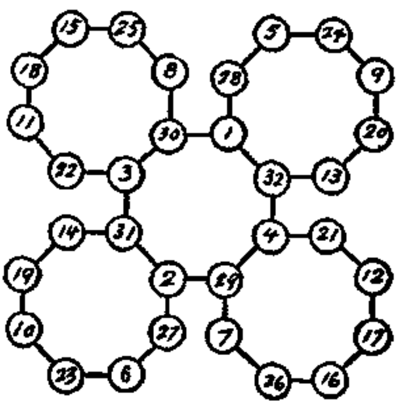
七襄图



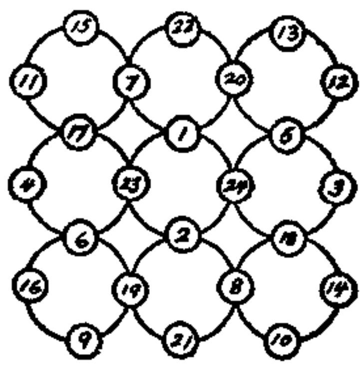
八阵图



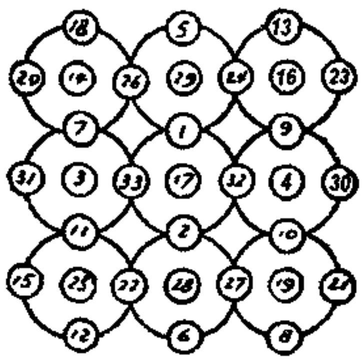
八阵图



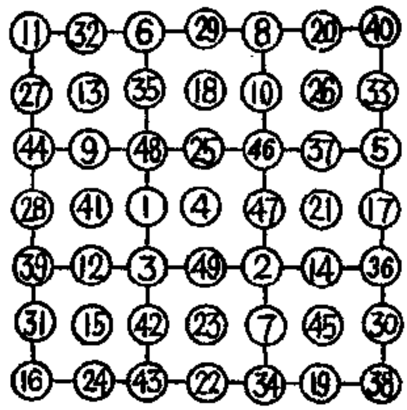
八阵图



九宫图



九宫图



九宫图

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

更 定 百 子 图

明季西士乘宋元学术彫敝，输入新说。万历辛巳（1580 年）耶稣社教士利玛窦（Matteo Ricci）从澳门登陆①，初名利西泰，以十六世纪之末年（1600 年），与其徒庞迪莪（Diego De Pantaja，西班牙人，万历戊午 1618 年 1 月 1 日卒于澳门）入北京，献方物。得赐第宅，并于宣武门内建天主堂，今北京之南堂其故址也②。后又与其徒徐光启（1562～1634）同译《几何原本》前六卷（1607 年）、《测量法义》、《测量异同》、《勾股义》。与李之藻（？～1631）共成《圜容较义》一卷（1609 年）、《同文算指前编》二卷（万历癸丑，1613 年，李之藻序，甲寅，1614 年，徐光启序）、《通编》八卷行世。是为近世欧西数学输入之初期。利玛窦生于嘉靖己丑（1529 年），卒于万历庚戌（1610 年）③。

同时龙华民（Nicolao Langobardi，意人，1597 年来华，1654 年卒）、熊三拔（Sabathinus de Ursis，意人，1606 年来华，1620 年卒）、阳玛诺（Emmanueljeune Diaz，葡人，1610 年来华，1659 年卒）、艾儒略（Giulio Aleni，意人，1613 年来华，1649 年卒）相率来华，明臣周子愚、徐光启、李之藻累荐于朝，终未见用。迄崇祯己巳（1629 年）五月，以《大统历》推日食，刻数复差。乃因徐光启之请，诏修历法。其年七月，创立历局。李之藻、龙华民、邓玉函（Jean Terenz，德人，1621 年来华，1630 年卒）等俱在。崇祯庚午（1630 年）罗雅谷（Jiacomo Rho，意人，

---

① 兹据利类思《不得已辨》，及 Henri Cordier，*Essai d'une bibliographie des ouvrages Publiés en Chine Par les Européens an XVII ème et XVIII ème siècle*，Paris，1885 年。或言壬午（1581 年），或言癸未（1582 年）来华，皆失之。

② 参观 Henri Cordier 同书。

③ 兹从"*The land of sinim*"in *The Chinese Repository*，vol. 13. p. 538 之说。三上论（＊见第 9 页注⑤。——编者）p. 113 作 1552～1610，疑有误。

1624 年来华，1638 年卒）来自开封，汤若望（Adam Schaal，德人，1622 年来华）来自西安，先后入局，与修历法。崇祯辛未（1631 年）成《历书》四十四卷，壬申（1632 年）成三十卷。甲戌（1634 年）以李天经继徐光启督修历法，其年成《历书》六十一卷。前后共成书一百三十七卷（内有一架，一摺并称卷），《明史·艺文志》作一百二十六卷，是为《崇祯历书》。鼎革之后，新法未行。顺治初元，汤若望重订前书为一百零四卷。《四库》著录作一百卷，更号《西洋新法历书》，至是八线表之用始显。《测量全义》摘译亚奇默德《圜书》(*The measurement of the circle*)圆周率之计算，及其《圆球圆柱书》(*The sphere and cylinder*)之最题。又称 $\pi=3.14159265358979323846\frac{6}{7}$ 为今士之法。迨后汤若望（？～1666）[①]、南怀仁（Ferdinand Verbiest，比人，1630～1688）[②]相继卒去，译业遂亦沉寂。先是居于南京之穆尼阁（Jacques Motel？）以对数之说授诸薛凤祚、方中通。其所传比例数表，以加减代乘除，折半代开方，则前此西人所未言者。

距利玛窦来华之期，恰及一稘。杜德美（Pierre Jartoux，1670～1720.11.30）亦浮海东来，时为十七世纪之末年（1700 年）。而其有造于中国数学界之功业，亦无让利氏。是时国中适有测地之举，遂于役其间[③]。杜氏精通天文，雅有述作。又尝与来本之（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）通讯。割圆之法素称繁剧。自杜氏

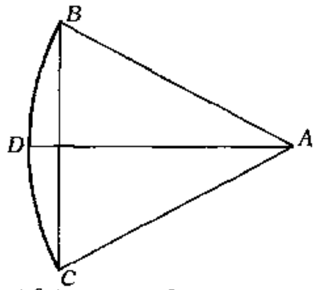
---

① 兹从 Henri Cordier 同书之说。阮元《畴人传》卷四十五称十七年（1678 年）若望卒。三上论（＊见第 9 页注⑤）P. 115 亦谓若望于 1678 年卒去，皆失之。

② Terquem，M.，*Bulletin de Bibliogphie，D'histoire et de Biographie Mathématiques*，Tome huitième，Paris，1862，p. 35，称南怀仁以 1630 年生于 Bruges.

③ 参观三上论（＊见第 9 页注⑤）p. 143 及 Smith，D. E.，and Mikami，Y.，*History of Japanese Mathematics*，Chicago，1914，pp. 154～155。

术出，而繁者简。今所传杜氏术凡九。



设以$BD=a$，为弧背，

$BC=c$，为通弦，

$AB=r$，为半径，

d 为全径，则

$$a=3d\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!}\cdots\cdots(1)^{①}$$

$$\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

$$\operatorname{vers}a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}\cdot(2n)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3)$$

$$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4)$$

$$\operatorname{vers}a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5)$$

$$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdots\cdots(2n-5)^2\cdot(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1}\quad\cdots\cdots(6)$$

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdots\cdots(2n-5)^2\cdot(2n-3)^2}{r^2(n-1)\cdot(2n-1)!}\sin^{2n-1}a\ \cdots(7)$$

$$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdots\cdots(n-2)^2\cdot(n-1)^2}{r^{n-1}(2n)!}(2\operatorname{vers}a)^2$$

$$\cdots\cdots(8)^{②}$$

---

① $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1^2}{3^1}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1^2\cdot3^2}{5^1}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{7^1}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，

② 令 $a=\frac{\pi}{3}$，则

$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots$。

$$(2a)^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2\cdot(n-1)^2}{4^{n-1}r^{n-1}(2n)!}(8\text{versa})^n \quad\cdots(9)$$

以上九式中；前之三式载于梅瑴成（1681～1763）①《赤水遗珍》，称为杜术。陈际新谓后之三式，为明安图之术。至朱鸿、张豸冠、董祐诚（1791～1823）、项名达（1789～1850）② 诸人，复通称杜氏九术云。

先是清圣祖留心律历算法，因有《律历渊源》之辑。《律历渊源》共分三部：一曰《历象考成》，为编二，二曰《律吕正义》，为编三，三曰《数理精蕴》，为编二，三部共百卷。雍正癸卯（1723年）杀青。主其事者为何国宗、梅瑴成，而明安图亦在考测之列。《数理精蕴》之借根方，梅瑴成知其与天元一相通。至对数表，及方程式之计算，与夫利用内容外切多边形证明 $\pi=3.14159265358979323 8$；《历象考成》，题疏三角法义，虽发前人未尽之秘，要亦稗贩西说而已。

清初精通历算学说，首推吴江王锡阐、宣城梅文鼎。其前则有余姚黄宗羲（1610～1695）。宗羲字太冲，著有《授时历注》一卷、《大统历推法》一卷、《授时历假如》一卷、《西历假如》、《回历假如》各一卷，外有气运算法，勾股图说，开方命算，测圜要义共若干卷。其后梅征君文鼎本《周髀》言历，世惊为绝学，实先生开之③。锡阐卒年五十五，无子，传其业者无人，遗书类皆写本，得之甚难，故知之者少。《四库全书》仅著录《晓庵新法》六卷。

---

① 《梅氏宗谱·瑴成公事略》称：公以康熙辛酉（1681年）四月初二日生，乾隆癸未（1763年）十月十六日歿，寿登八十三。葬江宁府，句容县，射乌庙，基隆山（宣城县教育会刘至纯君征访）。

② 三上论（＊见第9页注⑤。——编者）p. 151 页，误作（1795～1850）。

③ 语见《国朝先正事略》卷二十七。

梅文鼎(1633～1721)[①] 字定九，号勿庵，宣城人，儿时侍父士昌及塾师罗士宾仰观星象，知其大略。岁壬寅(1662年)师事竹冠道士倪观湖受数学。文鼎为学甚勤，自言废寝食者四十年。居京师时，尝午夜篝灯夜读，昧爽则兴。频年手抄杂帙不下数万卷。李光地(1642～1718)尝为荐于朝，与修《明史·历志》。弟文鼐、文鼏，子以燕，孙瑴成，曾孙鈖、鉽、鉁、钫、镠、铖并通数学；而以瑴成为尤著。文鼎著书七十余种。今所传者以承学堂所刻《梅氏丛书辑要》二十九种为最完备。其关于算数者有《筹算》二卷(1678年)、《平三角举要》五卷、《弧三角举要》五卷(1684年)、《方程论》六卷(1690年)、《勾股举隅》一卷、《几何通解》一卷、《几何补编》四卷、《少广拾遗》一卷(1692年)、《笔算》五卷(1693年)、《环中黍尺》五卷(1700年)、《堑堵测量》二卷、《方圆幂积》一卷(1710年)。

瑴成字玉汝，号循斋，又号柳下居士。康熙乙未(1715年)进士，官至左都御史。读书内廷，多见秘籍；益以家学所传，故其造诣甚深。尝与修《律历渊源》一百卷，《增删算法统宗》十一卷，重编《梅氏丛书》六十二卷，颜曰《梅氏丛书辑要》，以别于兼济堂纂刻《梅先生历算全书》云。《辑要》卷末附录瑴成自著《赤水遗珍》、《操缦卮言》各一卷。又著《柳下旧闻》十六卷。卒谥文穆[②]。

并时著作有：方中通《数度衍》二十四卷(1661年)，杜知耕《数学钥》六卷(1681年)，《几何论约》七卷[③]，李子金《算法通义》五卷

① 《梅氏宗谱》文鼎公本传称：公以崇祯癸酉(1633年)二月初七日生，康熙辛丑(1721年)殁。寿登八十九(宣城县教育会，刘至纯君征访)。

② 参观《梅氏全书》、《梅氏丛书辑要》、《勿庵书目》、《道古堂文集》、《增删算法统宗》、《宣城县志》、《梅氏宗谱》。

③ 康熙辛未(1691年)，史鉴《柘城县志》有传。

(1676年)、《几何易简集》(1679年)、《天弧象限表》(1683年)[①],年希尧《测算刀圭》三卷,陈厚耀(1648~1762)《续增新法比例》四十卷,陈世仁《少广补遗》一卷,庄亨阳(1685~1746)《庄氏算学》八卷[②],陈訏《勾股引蒙》五卷,又《勾股述》二卷[③],屠文漪《九章录要》十二卷[④],何梦瑶《算迪》十二卷,陈鹤龄《算法正宗》,王元启《勾股衍》、《角度衍》、《九章杂论》,明安图《割圜密率捷法》,江永(1681~1762)《数学》八卷,续一卷,谈泰《测量用径正误》、《周髀经算四极南北游法》、《操缦卮言正误》、《圆壶周径积实祖冲之觚法辨》、《觚内方非十尺辨》[⑤],又著《明算津梁》四卷,《天元释例》四卷,《平方立方表》六卷,《周径说》一卷,《畴人传》三卷[⑥]。

此期学说,多牵合西方陈义,鲜有发明。其致力宏厚者,则梅氏祖孙以外,当推陈世仁、王元启、明安图。

陈世仁字元之,海宁人。康熙乙未(1715年)入翰林。辞官养母。著有《少广补遗》[⑦],首列平立方员开三角及诸尖十二法,应用次之各级数总和,以资计算。

---

① 乾隆甲戌(1754年),《归德府志》卷二十五,李子金《隐山鄙事》十二种:《律吕心法》三卷,《书学慎余》二卷,《算法通义》五卷,《天弧象限表》二卷,《几何易简集》四卷,《历范》三卷,《闲居五操》一卷,《传声谱》一卷,《解环谱》一卷,《周易后天图说》一卷,《狂夫之言》三卷,《蛩吟录》一卷;行于世者仅六种,余未付梓。李俨藏有传抄本《算法通义》等书。

② 李俨所藏,光绪己丑刊《秋水堂算法》(即《庄氏算学》),无卷数,内分八种,四库著录为八卷,《国朝先正事略》卷五十一,谓,庄亨阳乾隆十一年(1746年)卒,年六十有一。

③ 李俨所藏,嘉庆二年守仁堂重刊本《勾股引蒙》,无卷数,《四库》著录为五卷。《浙江采集遗书总录》陈訏《勾股述》二卷,小山堂收藏刊本,黄宗羲为之序,又刊本《勾股引蒙》二册,不著卷数。

④ 《浙江采集遗书总录》,刊本《九章录要》二册,不著卷数。

⑤ 语见《国朝先正事略》卷三十三。

⑥ 语见陈作霖《金陵通传》。

⑦ 参观海宁金志《孝友传》。

$$\Sigma r = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma r^2 = \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1),$$

$$\Sigma r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2},$$

$$\Sigma(1+2+3+\cdots\cdots+r) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$$\Sigma 2^{r-1} = 2^n - 1,$$

$$\Sigma(2r-1) = n^2,$$

$$\Sigma(2r-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1),$$

$$\Sigma(2r-1)^3 = n^2(2n^2-1)。$$

此外又有开抽奇，抽偶立尖等之计算。

王元启字宋贤，嘉兴人，乾隆辛未(1752年)进士。知将乐县，旋罢归。尝设勾股形之三边 $a:b:c=2r:m-n:m+n$，而 $m:r=r:n$①。

圆率之说，袁士龙、顾长发、庄亨阳并从智术，即 $\pi=3.125$。钱塘创为 $\pi=3.16$ 之率，与诸家之说迥殊。谈泰曾作一丈径木板，以篾尺量其周，亦正得三丈一尺六寸奇。盖以实验证 $\pi=3.16$ 也。明安图早闻杜德美之法，以乾隆初年(约1736年)为始，积思三十年，深得其解。著《割圜密率捷法》四卷，未成而卒。其子新，其弟子陈际新，以乾隆甲午(1774年)完成其书行世。圆率解析法之有专书，实自此始。

康乾时代，西说输入之果，既已大致可睹。而古算之沉寂，乃日益甚。以梅氏祖孙之宏博，且未能多见古书。《图书集成》，关于中

① 参观阮元《畴人传》卷四十一，及嘉兴府志。

算，仅及程氏《统宗》，而讹字尚未校正。徒有一二嗜古之士，若常熟毛氏之流，抱残守阙，弥此坠绪，为难能矣。毛晋累世富于收藏。晋父虚吾，且精九九之学。晋子扆，从太仓王氏得《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》四种；从章丘李氏得《周髀》、《缉古》二种；从黄俞邰处得《九章》，皆元丰七年(1084 年)秘书省刊本。其后并入于官[①]。乾隆癸巳(1773 年)开设《四库全书》馆。休宁戴震(1724～1777)分校天文算法书。震少善象数，著有《策算》一卷(1744 年)。及在馆校书，于《永乐大典》中辑出《海岛算经》、《五经算术》二种。又以梅文鼎《三角法举要》、《堑堵测量》、《环中黍尺》三书之法，易以新名，饰以古谊，为《勾股割圜记》三篇(1758 年)。曲阜孔继涵(1739～1783)因元丰本六种，《永乐大典》本二种，及《数术记遗》，并戴震之《策算》、《勾股割圜记》合刊之，号为《算经十书》。

自《算经十书》出，研求古算之风亦盛。吴烺有《周髀算经注》(1766 年)；冯经(乾隆庚寅，1770 年举人)有《周髀算经注》，李潢(乾隆辛卯，1771 年进士)著《九章算术细草图说》九卷，附《海岛算经》一卷，共为十卷；又著《缉古算经考注》二卷。程瑶田(1796 年)著《周髀矩数图注》、《周髀用矩述言》。古算昌明，佚书大显。是为最近世复古之初期。

是时圆率解析之术，古算用筹之谊，则未深考。故钱塘(1780 年)谈泰(1786 年)之徒，尚以 $\pi=3.16$。戴震且奉西筹为古筹矣。惟孔广森(1752～1786)者，少曾师事戴震。及官翰林，与窥中秘，见王氏《缉古》，秦氏《数书》，李氏《演段》、《海镜》诸书。著有《少广正负术内外篇》凡六篇。其言弧矢术也，谓

① 《天禄琳琅书目》有御题算经十册，盖毛氏藏本也。

$1b=\sqrt[3]{(a^2)^2/1.5d}$, 而 $\pi d-a>a,(\pi d-a)^2>\frac{(\pi d)^2}{5}$,

$b=\sqrt[3]{(3a^2)^2/27\frac{d}{2}}$, 而 $(\pi d-a)>\frac{(\pi d)^2}{15}$

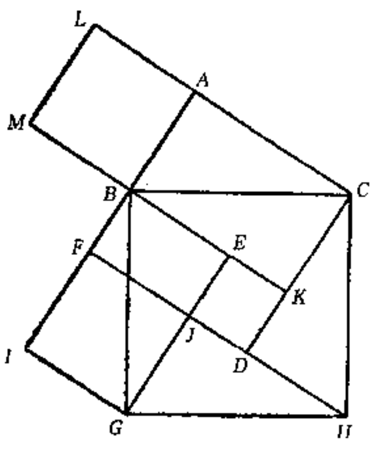
$b=\sqrt{(5a^2)^2/81\frac{d}{2}}$, 而 $(\pi d-a)>\frac{(\pi d)^2}{30}$

$b=\sqrt{(7a^2)^2/81d}$, 而 $\pi d-a<a,(\pi d-a)^2<\frac{(\pi d)^2}{30}$,

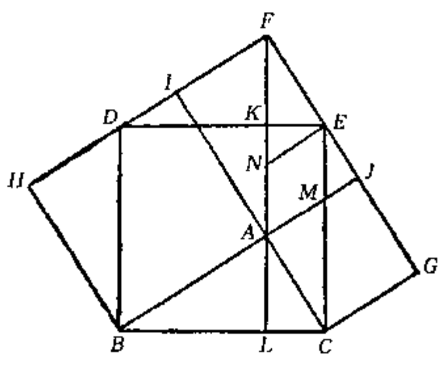
又谓 $b^{\frac{1}{2}}=x$,则

$$x^8+2d^{\frac{1}{2}}x^7+6x^6+(4d^2-2ad)x^4-2ad^{\frac{3}{2}}x^3-4d^3x^2+a^2d^2=0$$①

弦实,兼勾实、股实《九章》旧图已佚。《崇祯历书》、《测量全义》卷五,曾设图以证。梅文鼎《勾股举隅》载有二图如(1),(2)。梅文鼎(2)图,出于《测量全义》,证法尚微有错误。戴震仅以整数补成一图,详《九章算术》卷九订讹补图,如(3)。李潢《九章算术细草图说》亦补一图,如(4)。后此则安清翘《矩线原本·测量篇上》(1818年),及项名达《勾股六术》(1825年)亦均有补图。



(1)



(2)

① 参照第9页注③。

$AB^2+AC^2=BC^2$

因 $\triangle CDH=\triangle BIG$

又 $\triangle HJG=\triangle ABC$

$\therefore$ $AB^2+AC^2=BC^2$

$AB^2+AC^2=BC^2$

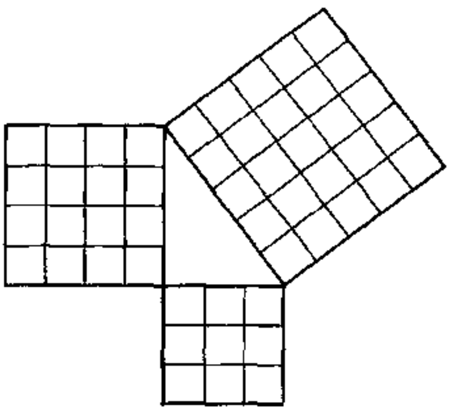
因 $\triangle ALB=\triangle FKD$

$\triangle FIA=\triangle DHB$

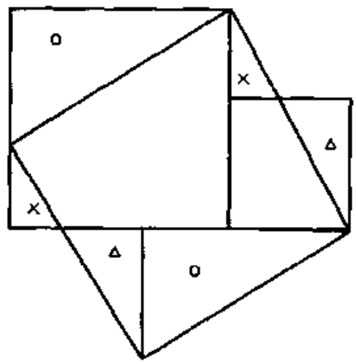
$\therefore$ $\square DKLB=AB^2$

又 $\square KECL=AC^2$

故 $AB^2+AC^2=BC^2$



(3)



(4)

乾隆乙卯(1795 年)阮元(1764～1849)与李锐(1773～1817)、周治平共著《畴人传》四十六卷,至嘉庆己未(1799 年)毕业[①]。钱大昕(1728～1804)、凌廷堪(1772～1826)、谈泰、焦循(1763～1820)并为印正。天元之学,亦于是时复兴。元和李锐校《测圆海镜》,推算立天元一细草。又校《益古演段》三卷(1797 年),自著《方程新术草》一卷,《勾股算术细草》一卷(1806 年)、《弧矢算术细草》一卷。校《杨辉算法》若干卷(1814 年)。锐复因秦九韶之法,作《开方说》

① 张崧年案诸可宝《畴人传》谓,至庚午(1810 年)乃写定,疑庚为戊之误,当作戊午(1798 年)。

三卷，甫及上中二卷而卒，其徒黎应南续成下卷。《四元玉鉴》晚出，李锐虽亦见及，时已疾作，雠校数段，仅及天元。

李锐于《开方说》论述方程。谓(1)凡一次，二次，三次，四次方程式，如 $ax^4+bx^3+cx^2-dx-e=0$，其上节之符号为正，下节之符号为负时，可得一正实根。(2)凡二次，三次，四次方程式，如 $-ax^4+bx^3+cx^2-dx-e=0$，其上节之符号为负，中节为正，下节为负时，可得二正实根。(3)凡三次，四次方程式，上节之符号为正，次节为负，再次节为正，下节为负时，可得三正实根；或一正实根，而他之二根谓之无数，(盖即虚根，Imaginary roots)，两无数必相连①。(4)凡四次方程式上节之符号为负，次为正，次为负，再次为负，末为负时，可得四正实根；或二正实根，而其他二根为无数。(5)方程式之根不限于正实根，且有负实根。(6)凡方程式中，有奇数空位(一位或三位)后，上下节之符号相异时，可得一正实根，及一负实根。又上下节之符号相同时，正负实根，俱不可得。(7)凡方程式中，有偶数空位(二位或四位)后，上下节之符号相异时，可得一正实根，而无负实根。又上下节之符号相同时，可得一负实根，而无正实根。(8)凡正负各数之因子累乘之，便成方程式。故方程式既得一二实根后，可以所得实根为因子，除原方程式，得低次方程式后，逐一求之。(9)凡有等根二次方程式之绝对项加一(或一以上之数)，则此方程式之根为无数。观此则李锐盖深知方程式理论之原则。其符号之说，亦与笛喀尔(René Descartes，1596～1650)暗合。

继于李氏者，有汪莱(1768～1813)。莱于《衡斋算学》第五册(1801 年)谓：(1)二次，三次方程式，上节之符号为正，下节为负时，每根之数为可知。(2)二次，三次方程式，上节之符号为正，次节

---

① Imaginary roots enter equations in pairs.

为负，下节为正时，每根之数为不可知。(3)三次方程式 $ax^3-bx^2+cx-d=0$，若 $\frac{bc}{a}<d$，则每根之数为可知；若 $\frac{bc}{a}>d$，则每根之数为不可知。

汪莱又于《衡斋算学》第四册，载有递兼数理以求三角堆(即形数，Figurate numbers)n 项之总和，即

平三角堆，$1+2+3+4+\cdots\cdots+$至 n 项 $=\frac{n(n+1)}{2!}$

立三角堆，$1+3+6+10+\cdots\cdots+$至 n 项 $=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$

三乘三角堆，$1+4+10+20+\cdots\cdots+$至 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

r 乘三角堆，$1+r+\cdots\cdots+$至 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{(r)!}$$

汪莱之后，言堆垛者，有董祐诚(1791～1823)之堆垛求积术(1821 年)，及罗士琳(1783? ～1853)之台锥演积术(1837 年)。董氏盖求级数之第 n 项，故

平方锥堆，$1+4+9+16+\cdots\cdots$，之第 n 项 $=\frac{n(2n+0)}{2!}$

立方锥堆，$1+5+14+30+\cdots\cdots$，之第 n 项 $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$

三乘锥堆，$1+6+20+50+\cdots\cdots$，之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

四乘锥堆，$1+7+27+77+\cdots\cdots$，之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)\cdots\cdots(2n+3)}{5!}$$

r 乘锥堆，$1+(r+3)+\cdots\cdots$，之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)\cdots\cdots[2n+(r-1)]}{(r+1)!}$$

又平方纵方堆 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\cdots\cdots$

即　$3+8+15+24+35+\cdots\cdots$,之第 n 项

$$=\frac{n(2n+2\times2+0)}{2!}$$

立方纵方堆 $3+11+26+50+85+\cdots\cdots$,之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)(2n+2\times3+1)}{3!}$$

三乘纵方堆 $3+14+40+90+175+\cdots\cdots$,之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2\times4+2)}{4!}$$

四乘纵方锥 $3+17+57+147+312+\cdots\cdots$,之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+2\times5+3)}{5!}$$

r 乘纵方锥 $ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots$,之第 n 项

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r-1)[2n+(r+1)(z-1)+(r-1)]}{(r+1)!}$$

罗士琳谓 $1+3+7+12+19+27+37+48+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+v_n$,

设　$n=$奇数,$d=6\left(\frac{n-1}{2}\right)$,$v_n=\frac{(d+3)^2+3}{12}$,

则　$S_{v_n}=\frac{d[(d+6)^2+(d+3)^2]+3^2[(d+6)(d+3)+6]}{216}$。

又　$1+3+7+12+19+27+37+48+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n$,

设　$n=$偶数,$d_1=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3$,$u_n=\frac{(d_1+3)^2}{12}$,

则　$S_{u_n}=\frac{d_1[(d_1+6)^2+(d_1+3)^2]+3^2[d_1+6)(d_1+3)+3]}{216}$。

李锐之后，元学复盛。焦循(1763～1820)著《加减乘除释》八卷(1794～1798)、《天元一释》二卷(1800年)、《释弧》三卷(1798年)、《释轮》二卷(1796年)、《释椭》一卷(1796年)、《补衡斋算学第三册》一卷、又《开方通释》一册。张敦仁(1754～1834)著《缉古算经细草》三卷(1803年)、《求一算术》三卷(1803年)、《开方补记》八卷附《通论》一卷(1805年)。沈钦裴(嘉庆丁卯，1807年，举人)校正李潢《九章算术细草图说》九卷，补演《海岛算经》一卷，又尝校《数学九章》[①]，并补《四元玉鉴细草》，至癸未(1823年)夏止及中卷，而钦裴已补荆溪教官，此事遂阁[②]。诸可宝谓沈氏细草，共成四册[③]。刘衡著《尺算日晷新义》二卷、《勾股尺测量新法》(1807年)，《筹表开诸乘方捷法》二卷(1807年)，《借根方浅说》、《四率浅说》共五种，号《六九轩算书》。安清翘(1759～1830)著《推步惟是》四卷(1811年)，《学算存略》三卷，《一线表用》六卷(1817年)，《矩线原本》四卷(1818年)，《乐律心得》二卷(1819年)，号《数学五书》[④]。许桂林(1779～1821)著《立天元一导窍》三卷[⑤]，《算牖》四卷(1811年)。骆腾凤(1770～1841)著《开方释例》四卷(1815年)，《艺游录》二卷(1843年刻)。张作楠著《翠微山房算学》十五种(1816～1822)。是皆致力于天元古算之说，为最近世复古之次期。

罗士琳号茗香，甘泉人，出阮元门下。尝游灵台七年，卒不得志。咸丰癸丑(1853年)客扬州，死于太平之难，年垂七十矣。士琳

---

① 参观《数学九章札记》。

② 语见王萱铃《演元九式序》。

③ 语见诸可宝《畴人传》三编，卷三，沈钦裴本传。

④ 安清翘家传，及李宗昉所撰墓碑铭，称清翘以道光庚寅(1830年)卒，年七十二。未刊算稿有《数学指南》、《周易比例》、《几何原本补正》数种。

⑤ 罗士琳《续畴人传》作四卷。许乔林《算牖跋》作三卷。未知孰是。

以嘉庆戊寅(1818年)刊所著《比例汇通》四卷。道光壬午(1822年)试京兆始获见《四元玉鉴》原书。癸未(1823年)春假得黎应南旧钞本,及何元锡覆刊大德本两种,于是壹志专研天元四元之学。著《勾股容三事拾遗》三卷,附例一卷(1826年),《演元九式》一卷(1827年),《四元玉鉴细草》二十四卷,释例二卷(1836年),《台锥演积》一卷(1837年)。校正朝鲜重刊本《算学启蒙》三卷(1839年)。自著《三角和较算例》一卷(1840年),《续畴人传》六卷(1840年),《弧矢算术补》一卷(1843年)。以上各书,刊入《观我生室汇稿》。又《勾股截积和较算例》,《连筠簃丛书》刊作二卷。

李善兰(1809～1882)[①] 字壬叔,号秋纫,海宁人。十龄通《九章》,十五通几何。应试武林,得《测圆海镜》、《勾股割圜记》以归,其学始进。道光乙巳(1845年),馆嘉兴陆费家数年,馆苏抚徐有壬幕,获交戴煦、汪曰桢、张福禧、张文虎、顾观光,暇辄著书[②]。咸丰壬子(1852年)五月至沪,居大境杰阁[③]。与西士伟烈亚力(Alexander Wylie)共译《几何原本》后九卷,以六月朔为始,凡四历寒暑,至咸丰丙辰(1856)而毕,丁巳(1857年)二月松江韩应陛为之刊

① 诸可宝三续《畴人传》,谓李善兰卒于光绪甲申(1884年),年垂七十,盖据传闻之误。李氏胞甥崔敬昌所作李壬叔征君传,谓卒于光绪八年(1882年)冬十月。李氏高徒席淦(1845～1917)遗稿,称善兰卒于十月二十九日。又云(庚辰,1880年正月同人公寿李师)疑是七旬。观此则善兰盖生于嘉庆己卯(1809年)正月,卒于光绪壬午(1882年)十月。

② 李俨藏有李善兰遗墨,《则古堂算学》目录一纸,计:《方圆阐幽》三卷,《弧矢别径》三卷,《对数探原》三卷,《垛积图谱》五卷,《海镜别解》五卷,《四元解》二卷,《数学一得》十卷,《十三经算术》十三卷,《开方图法》十卷,《四元启蒙》四卷,《授时术细草》七卷,《回回术细草》七卷,《时宪术细草》十四卷,《海镜广》十二卷,《日晷解》三卷,《椭员捷法》三卷。附注,谓今日为始、十年为期,必成此多种,以上报天地。

③ 语见王韬《瀛壖杂志》。

刻。善兰在沪十年,续译《几何原本》九卷之外,又与伟烈共译侯失勒《谈天》十八卷(Herschel's *Outline of Astronomy*),棣麽甘(Augustus De Morgan,1806～1871)《代数学》十三卷(1859年),罗密士(Elias Loomis,1811～1899)《代微积拾级》十八卷(1859年),[①]胡威立《重学》十八卷(Whewell's *Mechanics*)、《曲线说》一卷(1866年)、《奈端数理》若干卷(Newton's *Principia*)。其自著《方圜阐幽》一卷、《弧矢启秘》二卷、《对数探源》二卷、《垛积比类》四卷、《四元解》二卷、《麟德术解》三卷、《椭圜正术解》二卷、《椭圜新术》一卷、《椭圜拾遗》三卷、《火器真诀》一卷、《尖锥变法解》一卷,《级数回求》一卷、《天算或问》一卷,共二十四卷,凡十三种,号《则古昔斋算学》,同治乙卯(1867年)汇刊行世。岁戊辰(1868年)入北京同文馆为算学总教习。在馆时传刻李冶《测圆海镜》十二卷(1876年),又著《测圆海镜解》一卷[②]、《考数根法》三卷、《造整数勾股级数法》二卷。[③] 善兰卒无子。遗稿多散佚。墓在海盐县牵罾桥东北(据管茂才元耀言)[④]。

罗、李先后,朱骏声(1788～1858)有《天算琐记》四卷,《数度衍约》四卷;易之瀚有《四元释例》一卷,增例一卷;董祐诚(1791～1823)有《割圜连比例》三卷(1819年),《椭圜求周术》一卷,《斜弧

---

① 此书斯密斯博士疑出于 *Elements of Algebra*, N. Y., 1846 年及 *Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus*, N. Y. 1850。语见 Smith, D. E., and Mikami, Y., *A History of Japanese Mathematics*, p. 274。然考《代微积拾级》译本,实仅当罗密士 1850 年之书,并未及 1846 本之代数学,题中"代"字是"代数几何"(译 Analytical Geometry＝Algebraic Geometry)之省词。

② 李俨藏传抄本《测圆海镜解》凡一卷。

③ 语见席淦遗稿,及崔敬昌《李壬叔征君传》。

④ 据海宁县公立图书馆长朱尚(字荅)君转述。

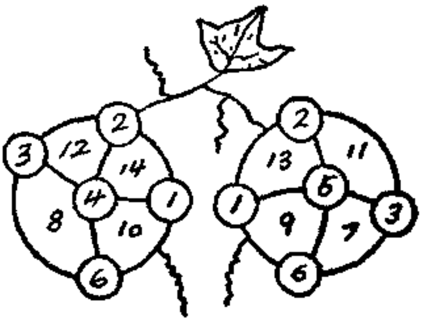
二边求角补术》一卷,《堆垛求积术》一卷(1821年),陈杰有《缉古算经细草》一卷,《图解》三卷,《音义》一卷(1820?年),《算法大成上编》十卷(1845年);徐有壬(?~1860)有《四元算式》一卷,《割圜密率》三卷,《椭圆正术》一卷,《弧三角拾遗》一卷,《造各表简法》一卷(钱国宝刊本作《造表简法》,续刊本作《垛积招差》),《截球解义》一卷,《椭圆求周术》一卷,《割圜八线缀术》四卷(原作三卷),《堆垛测圆》三卷,《圆率通考》一卷;项名达(1789~1850)有《勾股术》(1825年),《三角和较术》(1843年),《象数一原》七卷(即《象数原始》);谢家禾有《衍元要义》一卷,《弧田问率》一卷,《直积回求》一卷(1833年);戴煦(1805~1860)有《重差图说》一卷,《勾股和较集成》一卷,《四元玉鉴细草》若干卷(1826年),《对数简法》二卷(1845年),《续对数简法》一卷(1846年),《外切密率》四卷,《假数测圆》二卷;顾观光(1799~1862)有《九数存古》九卷,《九数外录》一卷,《周髀算经校勘记》一卷,《算剩初编》(1827~1850)、《续编》(1842~1854)《余稿》(1827~1860)若干卷;夏鸾翔(1823~1864)有《少广鎚凿》一卷,《洞方术图解》一卷(1857年),《致曲术》一卷,《致曲术图解》一卷,《万象一原》九卷(1862年);宋景昌有《开方之分还原术》一卷(1841年);《杨辉算法札记》一卷(1840年),《数学九章札记》四卷(1842年),《详解九章算法札记》一卷(1842年);冯桂芬(1809~1874)有《弧矢算术细草图解》一卷(1839年),《西算新法直解》八卷(1862年);邹伯奇(1819~1869)有《粟布演草》(1868年),《对数尺记》一卷,《乘方捷术》三卷,存稿一卷;保其寿有《游戏算术》一卷;汪曰桢有《如积引蒙》八卷。

同治初元,长沙荷花池馆集当日算士,共治象数学说。主之为老儒丁取忠。同治壬戌(1862年)刊《白芙堂算学》十七种,甲戌(1874年)刊《白芙堂算学丛书》二十三种。

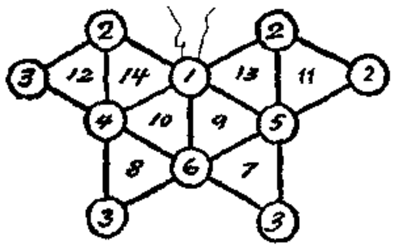
丁取忠所著《数学拾遗》一卷(1851年),《粟布演草》二卷(1876年),《对数详解》五卷(1874年),《四元玉鉴补草》一卷(1876年);时曰醇所著《百鸡术衍》三卷(1861年),《求一术指》一卷,《今有术申》一卷(1870年);左潜所著《割圜缀术补草》四卷,《缀术释明》、《缀术释戴》二卷;曾纪鸿(1848~1877)所著《对数详解》五卷(1874年),《圜率考真图解》一卷;并吴嘉善算学二十一种,已大半记入《白芙堂丛书》。黄宗宪与曾氏共著《求一术通解》二卷,又自著《容圆七术》三卷,《曲面容方》一卷,《惘笑不计》一卷,光绪丙申(1896年)自刊行世。刘彝程著《割圜阐率》一卷(1869年),丁取忠欲刊入《白芙堂丛书》,以资罄未果。迨光绪戊戌(1898年)善化刘铎为列入《古今算学丛书》中。

当此之时,不独古学复兴,新说输入。即浑圆图说、方程、级数、对数、曲线、及圆率之谊,均有发明。是为最近世数学发达时期。故其学说,可最述焉。

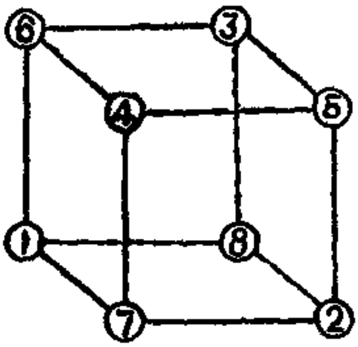
保其寿《增补算法浑圆》谓:张潮《心斋杂组》所演皆平图,不知立方与浑圆尤为可喜。其源虽权舆洛书,其巧实不可思议。(1)图,每面二十一数;(3)图,每面十八数;(4)图,每面二十六数;(5)图,每面七十六数;(6)图,每面一百八十二数;(7)图,每线十三数,每面三十九数;(8)图,每面十四数;(9)图,面各七十二数;(10)图,面各八十一数;(11)图,面各四十八数;(13)图,面各二百七十九数;(14)图,面各五百三十七数;(15)图面各七十九数;(16)图,面各二百三十数;(17)图每五角,十子,积三百八十数;三角,六子,积二百二十八数;凡六道浑天以纸六条作圈,相间为之甚妙。



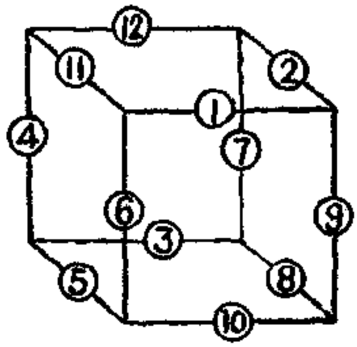
(1)瓜瓞图



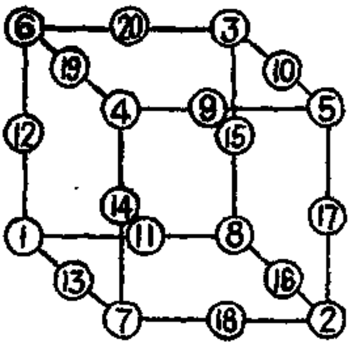
(2)三图本一图



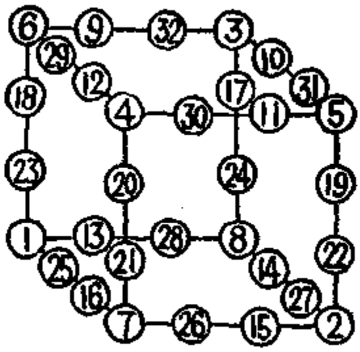
(3)六合立方



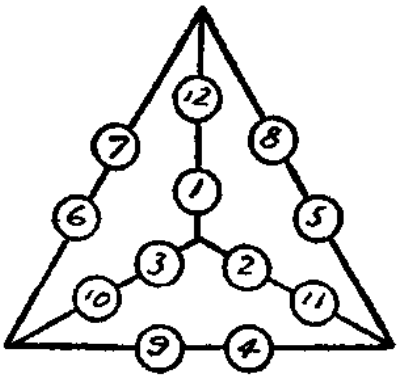
(4)立方



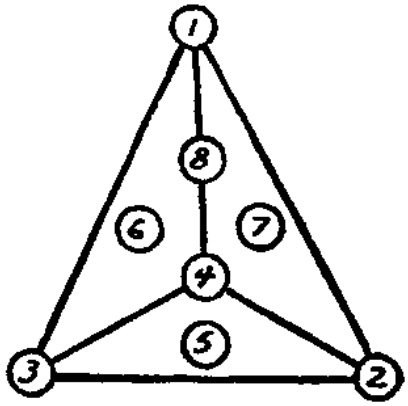
(5)立方



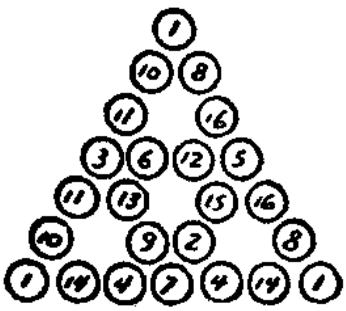
(6)立方



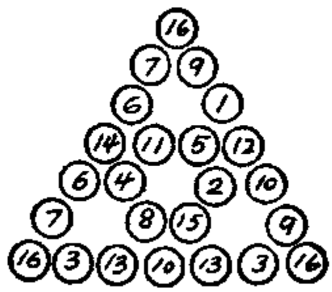
(7)浑三角



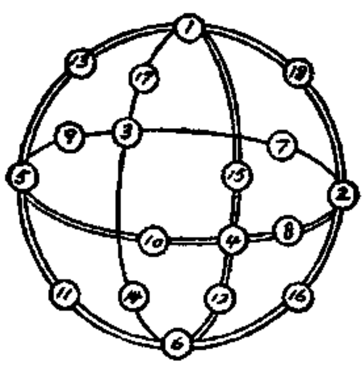
(8)浑三角



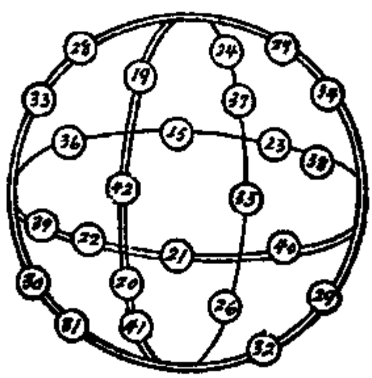
(9)



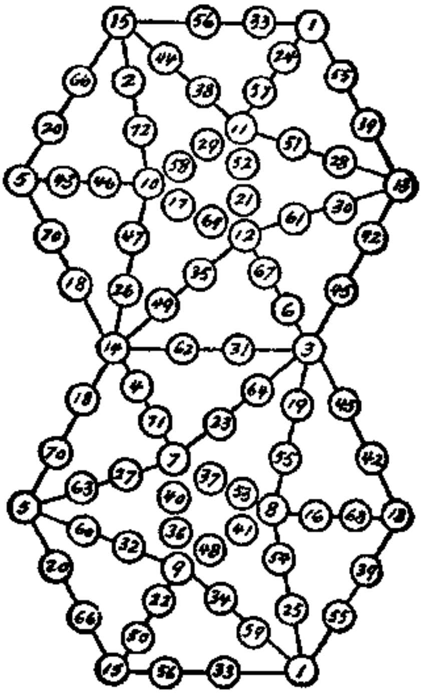
(10)



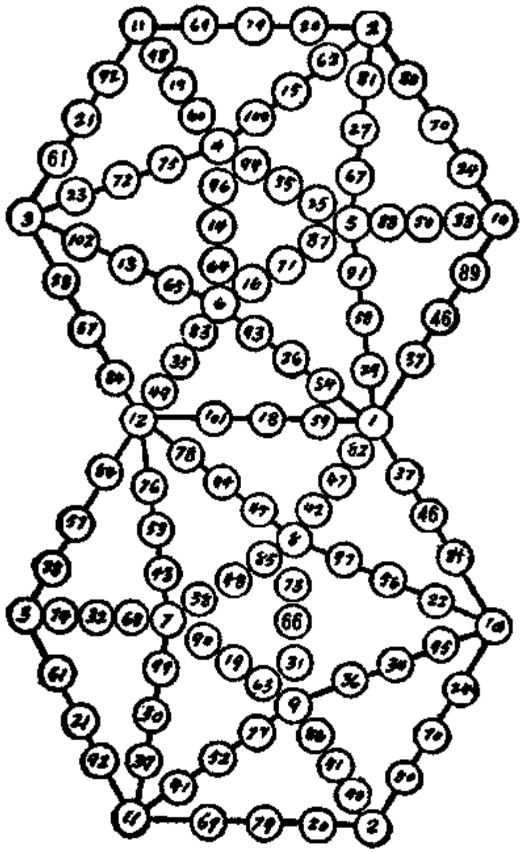
(11)



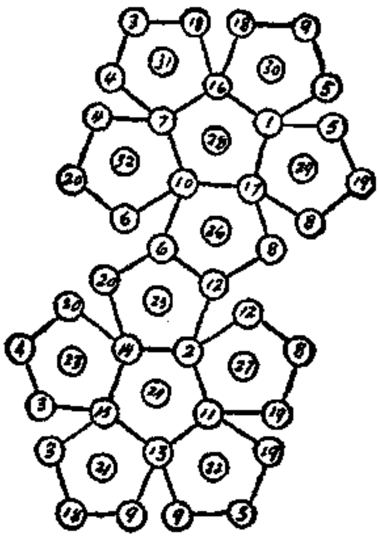
(12)



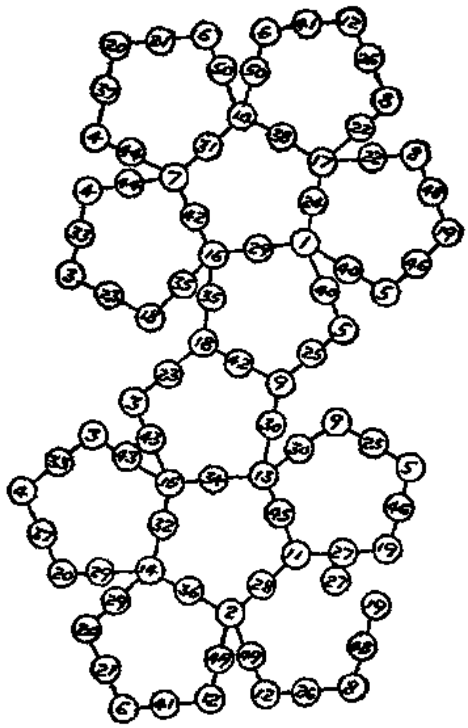
(13)



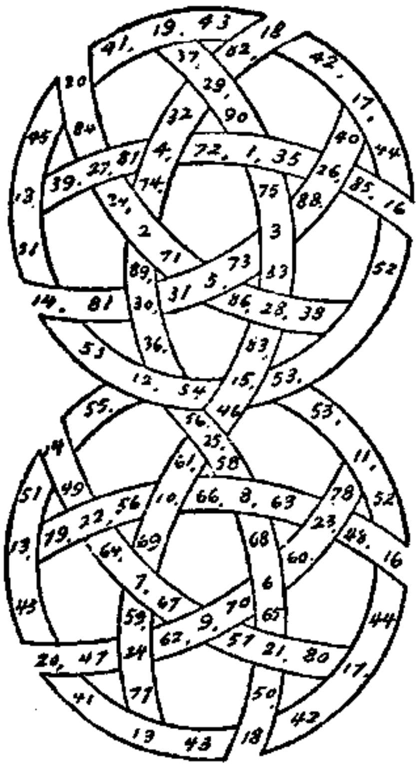
(14)



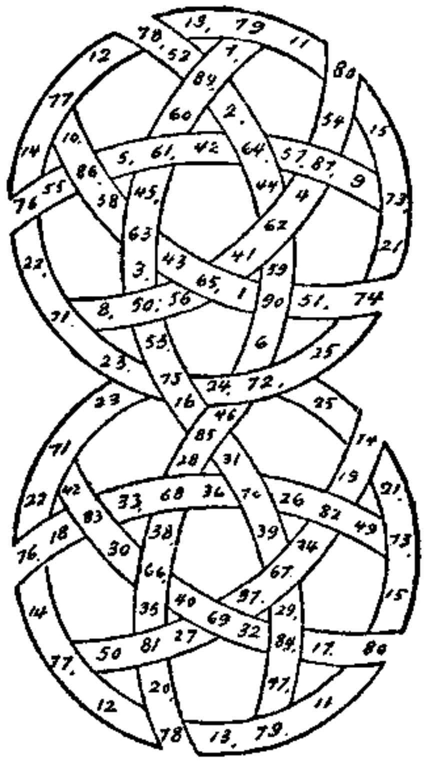
(15)六合浑图



(16)六合浑图



(17)六道浑天图



(18)

邹伯奇于《粟布演草》,增订屡乘方法,以求高次方程式根数之略近值。其法有二:(1)截算法,(2)续商法。

设方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

$$=(x-r)f'(x)+R=0$$

$$f'(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}。$$

而 $b_0=a_0$

$b_1=a_1+b_0r$

$b_2=a_2+b_1r$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}r,$

$R=b_n=a_n+b_{n-1}r,$

假令 $x=r$, 则 $R=0$; 又 $b_{n-1}r=s$,

则 $r=-\dfrac{a_n}{b_{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $s=-a_n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)式为截算法之条件,(2)式为续商法之条件。故在截算法,设 $f(x)=0$ 中 a_n 及 a_{n-1} 之符号为相异,则 x 之略近值 $r_1=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$,由是求得 $f'(x)$,再得 x 之略近值 $r_2=\dfrac{a_n}{b_{n-1}}$,逐次如是,便得略近值。其在续商法,设 $f(x)=0$ 中,x 之值在 r_1 及 r_2 之间,求得 s_1 及 s_2。则 x 之略近值 r_s,可由 $\dfrac{s_2-s_1}{s_2-a_n}=\dfrac{r_2-r_1}{r_2-r_3}$ 而得。逐次如是,便得略近值。

夏鸾翔《少广缒凿》中,方程式略近值之计算,视邹氏更为有进。

(1) $f(x)=x^2-A=0$,

设 a 为借根,即 $r_1=a$,$r_2=\dfrac{A}{a}$,$r_3=\dfrac{r_1+r_2}{2}$;

$$r_4=\frac{A}{r_3},r_5=\frac{r_3+r_4}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

逐次如是，至借根小者渐大，大者渐小，与方根密合而止。

(2) $f(x)=0$

令 $r_1 \gtrless x$， 设 $K=f[(r_1+b)+1]-f(r_1+b)-1$，

$\therefore$ $r_1=r_1$，

$r_2=r_1-f(r_1)/K$，

$r_3=r_2-f(r_2)/K$，

$r_4=r_3-f(r_3)/K$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

或设 $K=f[(r_1+b)+1]-f(r_1+b)+1$

$\therefore$ $r_1=r_1$，

$r_2=r_1-f(r_1)/K$，

$r_3=r_2+f(r_2)/K$，

$r_4=r_3-f(r_3)/K$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(3) 设 $f(x)=xf'(x)-A=0$

$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots-A=0$$

$\therefore$ $r_1=\dfrac{A}{f'(1)}$， $r_2=\dfrac{A}{f'(r_1)}$， $r_3=\dfrac{A}{f'(r_2)}$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(4) 设 $f(x)=f'(x)-ax+A=0$，

$\therefore$ $r_1=\dfrac{A}{a}$， $r_2=\dfrac{f'(r_1)+A}{2}$，

$r_3=\dfrac{f'(r_2)+A}{a}$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

(5) 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$,

令 $x=r+b$

则 $f(x)=f(r+b)=0$

$$=f(r)+f'(r)b+\frac{f''(r)}{2!}b^2+\cdots\cdots+a_0b^n=0$$

$$f'(r)=na_0r^{n-1}+(n-1)a_1r^{n-2}+(n-2)a_2r^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2a_{n-2}r+a_{n-1}$$

因 b^2 以上之值为极小,可以截去不用,故

$$b=-\frac{f(r)}{f'(r)},$$

$$x=r+b=r-\frac{f(r)}{f'(r)}。$$

此术与奈端(1669 年)所述者,大略相似[①]。

至于二项式,则项名达谓

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}$$
$$+\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

而 A 为第一数,B 为第二数,C 为第三数,以下同此。上式$\frac{1}{n}=m$亦可。戴煦则别定数式,令

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}\mp\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\pm\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots \quad (2)$$

$$N^m=(P+Q)^m$$

---

① 参观三上论(*见第 9 页注⑤)pp. 130~134。

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q+1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q+1}{P+1}$$
$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q+1}{P+1}+\ \cdots\quad(3)$$

$$N^m=(P+Q)^m$$
$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q+1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q+1}{N}$$
$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q+1}{N}+\ \cdots\quad(4)$$

又 $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}$$
$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots\quad(5)$$

设 $N=1+\frac{a}{10}+\frac{b}{10^2}+\cdots\cdots$，　则 $P^{\frac{1}{2}}=\left[1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{10}\right)\right]$

$N=1+\frac{a}{10^2}+\frac{b}{10^3}+\cdots\cdots$，　则 $P^{\frac{1}{2}}=\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^2}+\frac{b}{10^3}\right)\right]$

$N=1+\frac{a}{10^3}+\frac{b}{10^4}+\cdots\cdots$，

则 $P^{\frac{1}{2}}=\left\{1+\left[\frac{N-1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{N^2-1}{2}-\overline{N-1}\right)\right]\right\}$。

邹伯奇谓，

$$N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$$
$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N(\text{或}\ P)}+\frac{m\pm n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N(\text{或}\ P)}$$
$$\pm\frac{m\pm 2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N(\text{或}\ P)}+\ \cdots\quad(6)$$

邹氏又以借积开方图，及连比率解之。夏鸾翔《洞方术图解》(1857年)则以逐差之法(Method of difference)，求其公项及总和焉。

对数之说，戴煦、李善兰、徐有壬、邹伯奇、顾观光亦多说述。戴煦《对数简法》因　　$10^x=2$，故 $\log_{10}2=x$。

第一法用开方表求得　　$\log_{10}2=0.301029995663$，

第二法不用开方表，假设 $\log_e 1.0000001=0.00000010000000$，

准归纳法得　　$\log_e 2=0.69314721517968$，

$$\log_e 10=2.30258520799943。$$

续对数简法，因　　$10^{\frac{1}{32}}=1.074607828321317497$

$$=1+m。$$

$$\frac{1+m}{m}=14.4034192188686539。$$

$$\therefore\quad \log_e 10=\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=2.30258520799943。$$

$$\mu=\frac{\log_{10}10}{\log_e 10}=\frac{1}{\log_e 10}$$
$=0.43429448190$，为对数根，或模数。

至求任意数之对数，戴氏所述，亦有二法：

（1）　因　$\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)$，　　（$y$=小数）

$$=\mu\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right]$$

故欲求某数（如 N 者）之对数，当先以已知对数之若干数乘之，或除之，或屡乘之，或开之，再以 10^r 除之，令成 $1+y$ 之形，而 y 常为小数。

即　$\dfrac{nN}{10^r}=1+y$，　　或　　$N=10^r(1+y)\times\dfrac{1}{n}$，

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n;$$

又　　$\dfrac{N}{n(10^r)}=1+y$，　或　$N=10^r(1+y)\times n$，

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n;$$

又 $\dfrac{N^n}{10^r}=1+y$, 或 $N=[10^r(1+y)]^{\frac{1}{n}}$,

$$\log_{10}N=\frac{1}{n}\{r+\log_{10}(1+y)\};$$

又 $\dfrac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y$, 或 $N=[10^r(1+y)]^n$,

$$\log_{10}N=n\{r+\log_{10}(1+y)\}。$$

(2) 欲求已知对数 $\log_{10}N$ 之数。

设 $\log_{10}N=\log_{10}N_1+\log_{10}N_2+\log_{10}N_3+\cdots\cdots+t$。

而 $\log_{10}N_1,\log_{10}N_2,\log_{10}N_3,\cdots\cdots$各对数之数为已知。

又
$$\log_{10}(1+p)=\log_{10}(1+0.000001)$$
$$=0.0000004342942647562,$$

$$t=\frac{t}{\log_{10}(1+p)},$$

故

$$N=N_1\cdot N_2\cdot N_3\cdots\cdots\Big(1+pt-\frac{1}{2}p^2t(1-t)+\frac{1}{3}p^3t(1-t)(2-t)-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n-1}p^{n-1}t(1-t)(2-t)\cdots(\overline{n-2}-t)+\cdots\cdots\Big)$$

邹伯奇《乘方捷术》卷三，又有求对数二法；

(1) 求某数之对数，由次之各式而得。

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$
$$=\mu\left[\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right];$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$
$$=\mu\left[\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right];$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=2\mu\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\cdots\right]。$$

设$\frac{m+n}{2}=t$,则

$$\log_e\frac{m}{t}=\left(\frac{m-t}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\cdots\cdots;$$

$$\log_e\frac{t}{n}=\left(\frac{m-t}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\cdots\cdots;$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left[\left(\frac{m-t}{t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-t}{t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-t}{t}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right];$$

$$\log_e\frac{t^2}{m\cdot n}=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m-t}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-t}{t}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{m-t}{t}\right)^6+\cdots\cdots\cdots\right]。$$

(2) 求已知对数之某数,由次之各式而得。

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots。$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots。$$

割圆之法,始于杜氏九术。十九世纪初叶,董祐诚《割圜连比例》卷上(1819 年)更立四式,

$$\sin m\theta=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{m(m^2-1^2)\cdots\cdots\{m^2-(2n-3)^2\}}{r^2(n-1)(2n-1)!}\sin^{2n-1}\theta \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\text{vers}\,m\theta=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{m^2(m^2-1^2)\cdots\cdots\{m^2-(n-1)^2\}}{r^{n-1}(2n)!}(2\text{vers}\theta)^2 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\sin\frac{\theta}{m}=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{(1^2-m^2)[1^2-(3m)^2]\cdots[1^2-(2n-3)^2m^2]}{m^{2n-1}r^{2(n-1)}(2n-1)!}\sin^{2n-1}\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\operatorname{vers}\frac{\theta}{m}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1^2-m^2)[1^2-(2m)^2]\cdots\cdots[1^2-(n-1)^2m^2]}{m^{2n}r^{n-1}(2n)!}(2\operatorname{vers}\theta)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

项名达《象数一原》卷六有

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^2\cdot4^2}-\frac{3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}-\frac{3^2\cdot5^2\cdot7}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots(14)$$

$$\tan a=\sin a+T_1\frac{\sin^2 a}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2 a}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2 a}{6r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

而 T_1 为第一数，T_2 为第二数，以下同此。

$$\sec a=r+T_1\frac{\sin^2 a}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2 a}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2 a}{6r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\cos a=r-\left(\frac{\sin^2 a}{2r}+T_1\frac{\sin^2 a}{4r^2}+T_2\frac{3\sin^2 a}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2 a}{8r^2}+\cdots\cdots\right)\cdots(17)$$

$$\cot a=\frac{r^2}{\sin a}-\left(\frac{\sin a}{2}+T_1\frac{\sin^2 a}{4r^2}+T_2\frac{3\sin^2 a}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2 a}{8r^2}+\cdots\right)\cdots(18)$$

$$\cot a=\cos a+T_1\frac{\cos^2 a}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2 a}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2 a}{6r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\csc a=r+T_1\frac{\cos^2 a}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2 a}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2 a}{6r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$\sin a=r-\left(\frac{\cos^2 a}{2r}+T_1\frac{\cos^2 a}{4r^2}+T_2\frac{3\cos^2 a}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^2 a}{8r^2}+\cdots\cdots\right)\cdots(21)$$

$$\tan a=\frac{r^2}{\cos a}-\left(\frac{\cos a}{2}+T_1\frac{\cos^2 a}{4r^2}+T_2\frac{3\cos^2 a}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^2 a}{8r^2}+\cdots\right)\cdots(22)$$

戴煦《求表捷术》谓

$$\tan a=a+\frac{2a^3}{(3!)r^2}+\frac{16a^5}{(5!)r^4}+\frac{272a^7}{(7!)r^6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

$$\sec a=r+\frac{a^2}{(2!)r}+\frac{5a^4}{(4!)r^3}+\frac{61a^6}{(6!)r^5}+\frac{1385a^8}{(8!)r^7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\tan a=\frac{r^2}{90-a}-\frac{2(90-a)}{3(2!)}+\frac{8(90-a)^3}{3(5!)r^2}+\frac{32(90-a)^5}{3(7!)r^4}+\cdots\cdots(25)$$

$$\sec a=\frac{r^2}{90-a}+\frac{90-a}{3(2!)}+\frac{7(90-a)^3}{3(5!)r^2}+\frac{31(90-a)^5}{3(7!)r^4}+\quad\cdots\cdots\quad(26)$$

$$a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3r^2}+\frac{\tan^5 a}{5r^4}-\frac{\tan^7 a}{7r^6}+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(27)^{①}$$

$$a=\frac{r}{2}\Big[(\sec a-r)-\frac{5\cdot 2^2(\sec a-r)^2}{(4!)r}+\frac{64\cdot 2^3(\sec a-r)^3}{(6!)r^2}$$
$$-\frac{1560\cdot 2^4(\sec a-r)^4}{(8!)r^3}+\cdots\cdots\Big]\cdots\cdots(28)$$

$$90-a=\Big[r^2\div(\tan a+\frac{2r^2}{3(2!)\tan a}-\frac{32r^4}{3(5!)\tan^3 a}$$
$$+\frac{704r^6}{3(7!)\tan^5 a}-\cdots)\Big]\cdots\cdots(29)$$

$$90-a=\Big[r^2\div(\csc a\ \frac{r^2}{3(2!)\csc a}+\frac{17r^4}{3(5!)\csc^3 a}$$
$$-\frac{367r^6}{3(7!)\csc^5 a}+\cdots)\Big]\cdots\cdots(30)$$

$$\frac{a}{2}=r\Big[\frac{r(\sec a-r)}{(\sec a+r)}-\frac{8r^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4(\sec a+r)^2}+\frac{184r^3(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(\sec a+r)^3}$$
$$-\frac{8448r^4(\sec a-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8(\sec a+r)^4}+\cdots\cdots\Big]\cdots\cdots(31)$$

李善兰《弧矢启秘》卷一(同治丁卯,1867年自序《则古昔斋算学》)有

$$a=\frac{1}{r}\Big\{(r+\mathrm{vers}\,a)\sin a-\Big[\frac{2\sin^3 a}{(3!)r}+\frac{2\cdot 3\sin^5 a}{(5!)r^3}$$
$$+\frac{2\cdot 3^2\cdot 5\sin^7 a}{(7!)r^5}-\frac{2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\sin^9 a}{(9!)r^7}+\cdots\cdots\Big]\Big\}\cdots\cdots(32)$$

$$a^2=2r\Big[\frac{x}{2!}-\frac{8x^2}{(4!)r}+\frac{184x^3}{(6!)r^2}-\frac{8448x^4}{(8!)r^3}+\cdots\cdots\Big]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(33)$$

---

① 按此式即格氏级数(Gregory's Series,1671)。假令 $a=\frac{\pi}{4}$,则 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots$。

而 $x=2(\sec a-r)+\frac{(\sec a-r)^2}{r}$,

$$a=r\left[y-\frac{2y^2}{(4!)r}+\frac{23y^3}{(6!)r^2}-\frac{264y^4}{(8!)r^3}+\cdots\cdots\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

而 $y=\frac{2\cdot 2r(\sec a-r)}{2r+(\sec a-r)}$。

徐有壬因杜、董、项、戴、李之说,参以已见,著《造各表简法》及《测圜密率》。而《测圜密率捷法》卷二有

$$a-\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\operatorname{vers}^{2n}a}{(2n-1)(2n+1)\sin^{2n-1}a} \cdots\cdots (35)$$

夏鸾翔《致曲术》称辛酉岁暮(1861 年)以微积分术求得

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdots(2n-3)^2(\operatorname{vers}a)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2r)^{\frac{2n-3}{2}}(2n-1)!} \cdots (36)$$

$$a^2=\sum_{1}^{\infty}\frac{2\cdot 4^{n-1}[(n-1)!]^2\sin^{2n}a}{r^{2(n-1)}(2n)!} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

邹伯奇《乘方捷术》卷二更为简法,即

$$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a^{2s}}{(2s)!}+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

$$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a^{2s+1}}{(2s+1)}+ \cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

朱鸿(嘉庆壬戌,1802 年进士)计算圆周密率之小数至三十九位,其反商亦三十九位。前者二十四位为无误。

左潜应用恒等式$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$,且将 $\tan^{-1}\frac{1}{2}$,$\tan^{-1}\frac{1}{3}$以格氏级数(27)内之值代之,则得尤拉级数(Euler's Series):

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5-\cdots\cdots (40)$$

由是计算得

$\pi=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781040628620899862803482534211706797$。

$\frac{1}{\pi}=0.31830988618379067153776752674502872406891929148091289749533468811779359526845307018022760553250617191$

言割圆以分弧始者，古有二分弧之法；西人有三分弧之术。明安图以几何法证明其义。说详《割圜密率捷法》，及《测圜释明》(1875年)卷中。汪莱所求 $\sin\frac{\theta}{5}$ 略近值，详《衡斋算学》第三册(1798年)。安清翘证有 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，及 $\sin 5\theta=5\sin\theta+20\sin^3\theta+16\sin^4\theta$ 两恒等式。董祐诚未见明氏原书，故其解法亦异。项名达、戴煦亦以别法推广其谊。徐有壬《割圜八线缀术》卷二(同治壬戌，1862年吴嘉善序其书)则因长方形曲尽屡乘屡除之变。李善兰《方圜阐幽》及《弧矢启秘》，以方锥积叠，验方圆之较，亦称密合。

言曲线者始于朱鸿。朱仅言圜柱斜剖，则成椭圜。椭圜求周，可以勾股形求之。董祐诚即其说作椭圜求周术(1821年)谓 a，b 为椭圆长短径，s 为椭圆周；则 $s=\sqrt{b^2\pi^2+4(a^2-b^2)}$，此盖本《九章·勾股》葛生缠木术之意也。项名达《象数一原》卷六(约1848年)则谓 $s=a\pi\left(1-\frac{m}{2^2}-\frac{3m^2}{2^2\cdot4^2}-\frac{3^2\cdot5m^3}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}-\frac{3^2\cdot5^2\cdot7m^4}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\right)$，而 $m=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\div a=1-\frac{b^2}{a^2}$。此与同时日人和田宁(1787～1840)，圆理啓口(1818年)之术相同①。项氏遗稿未完，戴煦为补图一卷(1857年)；又另立一术，

① 参观远藤利贞遗著《日本数学史》，1918年，日本，东京，pp.531～532. 及 Smith, D. E., and Mikami, Y., *A History of Japanese Mathematics*, Chicago, 1913年, p.224。

附于《象数一原》卷七之末，即 $s=b\pi\left(1+\frac{m}{2^2}-\frac{3m^2}{2^2\cdot 4^2}+\frac{3^2\cdot 5m^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7m^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}+\cdots\right)$，而 $m=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\div b=1-\frac{a^2}{b^2}$。徐有壬亦有椭圆求周术二则，以杜氏九术(1)式所得

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{3!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\right)$$

代入项、戴二式。至求椭圆面积，徐有壬及夏鸾翔致曲术均以 $A=\frac{\pi ab}{4}$，而夏氏则以 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3!}-\frac{1^2\cdot 3}{5!}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{7!}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{9!}-\cdots\cdots$。[①]徐有壬《测圜密率》卷一，谓椭圜蛋体，椭圜桶体。椭圜尖锥，椭圜台体之积，各为$\frac{a^2b}{2}$，$\frac{3}{4}abh$，$\frac{1}{4}abh$，$\frac{1}{8}h\{(2a+a')b+(2a'+a)b'\}$，乘$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1^2}{3!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots$，[②] 而 a，b 为长短径；a'，b' 为又一面之长短径；h 为高。徐有壬于《截球解义》卷中，以几何术证亚奇默德《圆球圆柱书》，一卷三十二题中“径三之二乘大平圜之积，生球容之数”之理。故《测圜密率》卷一第六术谓$(\text{圜周})^3=54\times(\text{球积})\times\frac{\pi^2}{9}$。而$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3\cdot 4}+\frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$则从杜氏九术(8)式，以 $a=\frac{\pi}{3}$ 也。

李善兰之后，其于东南，以数学闻名者，首推华蘅芳兄弟。外此则黄泰生(1852～1893)、蒋维钟(1868～1899)、席淦(1845～

---

① 就李善兰《弧矢启秘》卷一(32)式，令 $a=\frac{\pi}{2}$ 即得此值。

② 三上论(＊见第 9 页注⑤)p. 152，误称各乘 $\pi=1+\frac{1^2}{3!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots$。

1917)、刘嶽云(1849～1917),张毓瑗、劳乃宣、陈棠、吴诚、王季同、崔朝庆、冯征,诸人亦均有撰述,以阐前人之秘。

华蘅芳(1830～1902)字若汀,江苏金匮人。年十四便通程大位《统宗》之说。继复探索《数理精蕴》及《九章算术》,学乃益进。又从无锡邹安鬯受秦九韶、李冶、朱世杰学说。蘅芳曾游曾国藩幕府,因与李善兰相善。上海江南制造局成立,蘅芳与西士傅兰雅共译英华里司《代数学》二十五卷,及《微积溯源》八卷,英海麻士《三角数理》十二卷,英伦德《代数难题》十六卷,《决疑数学》十卷[①]。又英白尔尼《合数术》十一卷(未刊)。自著有《开方别术》一卷,《数根术解》一卷,《开方古义》二卷,《积较演术》三卷,《学算笔谈》十二卷,《算草丛存》四卷,号《行素轩算稿》。光绪壬午(1882 年)自刊行世。刊入《艺经斋算学丛书》者有《算学须知》一卷,《西算初阶》一卷。外此之未完稿者,有《求乘数法》、《数根演古》、《循环小数考》、《算斋琐语》四种。弟世芳(1854～1904)字若溪,亦善数学。尝主讲湖北自强学堂、常州龙城书院、江阴南菁书院、靖江马洲书院、上海南洋公学。自著《恒河沙馆算草》二种。尚有《专术举隅》、《今有术》、《双套勾股》、《三角新理》等稿存于家[②]。

吾国女子昔亦有治数学者。《宋史》:楚衍女善算术。《归德府志》:明嘉靖间,汤希富妻蔡氏精《九章算法》。诸可实三续《畴人传》,记录海宁葛宜女史、常熟沈绮女史、江宁王贞仪女史事迹。沈、王两女史,且有撰述。晚近元和江湘芬女史亦通象数学说,遗稿有《算草》一卷。

---

① 此书与代数术等书,同时译出。当局以为算学中之旁门左道,不愿付印。至光绪丙申(1896 年)安徽周氏始为之刊刻。距脱稿之时,已二十余年矣。

② 参观锡金《四哲事实汇存》、《国史儒林传》华蘅芳列传稿。

重差术源流及其新注*

1.《重差术》之始兴。重差术始兴，远在战国以前，盖《周髀算经》至迟为战国前之著作。而《周髀算经》言："偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。"又曰："望远起高之术，而子不能得，则子之于数未能通类。"赵爽注曰："定高远者立两表，望悬邈者施累矩。"宋李籍《周髀算经音义》于周髀注称："《周髀算经》者以九数勾股重差算日月行度，远近之数皆得于股表，即推步盖天之法也。"于盖天注称："盖天之说，即周髀是也。……各依算术，用勾股重差。"观此则重差出于周髀之说，前人已具言之。盖古代一切测望之术，皆有借于用矩立表，而《周髀算经》又为言用矩立表之第一部书，故谓重差术原于《周髀》，亦非过言。

其次之言测望者，有《九章算术》。汉郑玄释《周礼》地官保氏九数云："九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，勾股也。"此言汉时有重差，夕桀，勾股各术也。张衡(78～139)所谓"重用勾股"是汉法也。刘徽《九章注序》亦谓："徽寻九数有重差之名。"则重差之名在魏前已具，可以无疑。《九章》末章本为旁要，两汉屡经删补，而以勾股代旁要，勾股亦汉法

---

* 本文原载《学艺杂志》第7卷第8号(1926年)第1～15页。

也。其勾股章有测高深望远七术，已知应用简单相似三角形为比例。重差本非离勾股别能为术，故刘徽曰："辄造重差，缀于勾股之下"。

2.《重差术》之完成。重差术至魏刘徽始告完成。《晋书》称：魏陈留王景元四年(公元 263 年)刘徽注《九章算术》。《隋书·经籍志》有刘徽《九章重差图》一卷，新旧《唐书》并记《九章重差》一卷刘向(?)撰，《九章重差图》一卷刘徽撰。徽于《九章算术注序》称：

> 周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云：南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远，及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术，犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣，乃所以施于此也。凡望极高，测绝深，而兼知其远者，必用重差勾股，则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺，南北各尽平地，同日度其正中之时，以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景，乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为勾、股，为之求弦，即日去人也。以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短，以为股率。以筒径为勾率。日去人之数为大股，大股之勾即日径也。虽夫圆穹之象，犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍，且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入，博物君子，详而览焉。

唐王孝通《上缉古算经表》称"徽思极毫芒，触类增长，乃造《重差》之法，列于终篇。虽即未为司南，然亦一时独步"修不诬也。

3.《海岛算经》新注。隋唐《志》之《重差图》，《宋史·艺文志》已

不复著录，则其亡已久。清李潢曾作《海岛算经细草图说》补入八图。尚不免有牵强之处，潢亦自言“图中以四边形五边形立说，似与勾股不类”。兹别作新注于次。*

4.《重差术》之绍述。刘徽以后，算经中之言测望者，《张邱建算经》卷上有“今有木不知远近”及“今有城不知大小”二题。亦应用相似三角形为计算。梁祖暅之造圭表，测景验气，求日高地中，于重差之术用力甚深。暅之曾以诸法授后魏信都芳(武定中，543～550卒)。都芳因亦注《重差》、《勾股》。至唐，而《重差》忽被《海岛》之名，唐代选择：《九章》、《海岛》共限一岁。李淳风亦注《海岛算经》一卷。《宋史》有“《海岛算经》一卷，夏翰一作翱《新重演议海岛算经》一卷”。其后宋绍圣二年(1095年)吏部令史韩公廉通《九章算术》及钩股、重差之义，作《九章钩股测验浑天书》一卷。宋杨辉《算法通变本末》卷上称：“《海岛》题法，隐奥莫得其秘，李淳风虽注只云下法，亦不曾说其源。(刘益)《议古根源》元无细草，但依术演算，亦不知其旨”云。

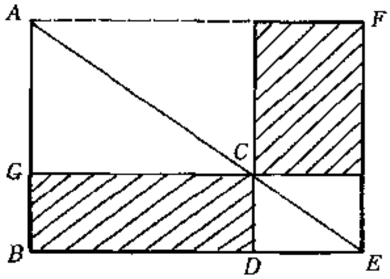
5.《重差术》之应用。宋元算士颇言重差术之应用，宋秦九韶《数书九章》(1247年)卷七测望类“望山高远”题，术曰“以勾股求之，重差入之……”与刘徽《海岛算经》第一题相似。又“陡岸测水”题，术曰“以勾股重差求之……”则应用相似三角形底边之广与高成比例，刘徽亦常用之。又卷八“表望方城”题，术曰“以勾股重差求之……”又“望敌远近”及“表望浮图”题，术曰“以勾股求之，重差入之……”并应用相似三角形。计秦氏《数书九章》应用重差术凡五题。

宋杨辉《乘除通变算宝》(1274年)卷上称“刘徽以旁要之术，

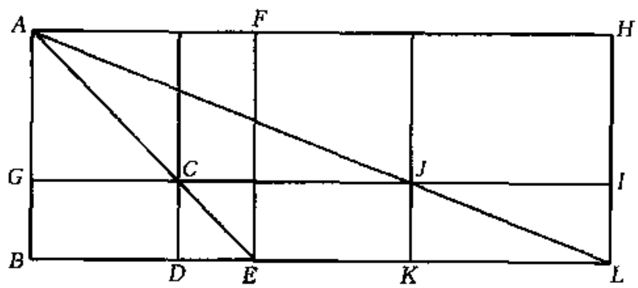
---

* 新注已全部采入《中国古代数学史料·海岛算经新注》，故略去，请见本书第二卷第162～171页。

变重差减积，为《海岛》九问”，《续古摘奇算法》(1275 年)卷下有《海岛题解》，引《海岛算经》第一题及《九章》以表望山术，次又以隔水望木二题为问，验重差之术，引用《海岛》第一题。杨辉自谓“尝置海岛小图于座右，乃见先贤作法之万一”。其法于 ABE 直角三角形，知 AB＝勾，BE＝股，AE＝弦；CD＝余勾，DE＝余股。而 AE 弦之内外，分二勾股：其一，勾中容横，如 CF 长方形，其一，股中容直，如 BC 长方形，



二积之数皆同。即$\square BC=\square CF$，故 $AG=\dfrac{BD\times CD}{DE}$。杨辉又曰：“凡勾中容横，股中容直，二积皆同，古人以题易名，若非释名，则无以知其源。”以《海岛》第一题，因$\square BC=\square CF$，而 DE＝小余股；又因$\square BJ=\square JH$，而 KL＝大余股。故$\square BJ-\square BC=\square JH-\square CF$，即$\square DJ=\square JH-\square CF$，即 $CD\times DK=(KL-DE)\times AG$，$\therefore c_1\times d=(a-b)\times AG$，即 $AG=\dfrac{c_1\times d}{a-b}$，而 $x=\dfrac{c_1\times d}{a-b}+c_1$ 矣。明利玛窦、徐光启译《几何原本》，其第一卷第四十三题称“凡方形对角线旁两余方形(Complements of a Parallelogram)自相等”，辉所取者，盖此义也。



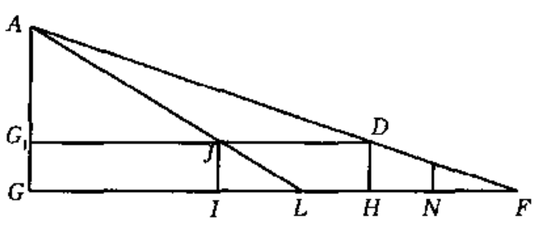
元朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)卷中有“勾股测望”八问，其后五问即《海岛算经》之第一问至第四及其第七问。而第四问之求表去城(y)，第六问之求表去城(y)均如重差术。其余则以立天元一

如积求之，亦得相同之结果。

元舒天民《六艺纲目》卷下引刘徽《九章算术序》文"立两表于洛阳之城……"以下，称为魏刘徽《勾股重差术》。

6.《重差术》之衰废。明代旧算事业，颇为衰废。《永乐大典》虽曾收录《海岛算经》而流传不广。唐顺之（1507～1560）《荆川文集》卷十二"勾股测望论"所言亦不详备。顾应祥（1483～1565）《勾股算术》（1533 年），及周述学《历宗算会》（1558 年）卷三所引《海岛》题问并脱去第五、第七二题。而《海岛》第三题，解为 $x=\frac{b(c-c_1)}{f-b}+c$，$y=\frac{b(e-f)}{f-d}$ 则颇明显。程大位《算法统宗》（1593 年）卷八之"海岛题解"仅因袭宋杨辉《续古摘奇算法》解法，别附歌诀二首而已。至"重差术"第二题以下图解，尚未顾应祥、周述学之详。明季西算输入中国，利、徐之《测量法义》第十题"以表测高"，徐光启之《测量异同》第四题"以重表兼测无远之高，无高之远"，第六题"以重矩兼测无广之深，无深之广"，则实用《几何原本》以解"重差术"也。

《测量法义》欲于下图之 $IJ=HJ=c_1$，$FH=a$，$IH=d$，



$LI=b$，

$NH=a-b$，

$FL=$距较

$GA=x$，

证明 $\frac{NH}{HD}=\frac{FL}{GA}$，　或　$x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1$。

因 $\frac{FH}{FG}=\frac{HD}{GA}$，　又　$\frac{LI}{LG}=\frac{IJ}{GA}$，　令　$FN=LI$，

则 $\frac{FH}{FG}=\frac{LI}{LG}=\frac{FN}{LG}$，

$\therefore\qquad \dfrac{FH}{FG}=\dfrac{NH}{FL}$(《几何原本》第五卷第十九题)。

因 $\qquad \dfrac{FH}{FG}=\dfrac{HD}{GA}$, 故 $\dfrac{NH}{HD}=\dfrac{FL}{GA}$,

即 $\qquad \dfrac{a-b}{c_1}=\dfrac{a+d-b}{x}$, $x=\dfrac{c_1d}{a-b}+c_1$ 也。

《测量异同》第四题,则证旧用表间 IH,今用距较 FL,其实理论相同。而 $\dfrac{HD}{HN}=\dfrac{G_1A}{IH}$ 为旧式,$\dfrac{HD}{HN}=\dfrac{GA}{FL}$ 为新式,就中 $\dfrac{G_1A}{G_1J}=\dfrac{GA}{GL}$,又 $\dfrac{G_1J}{IH}=\dfrac{GL}{FL}$,两式相乘得 $\dfrac{G_1A}{IH}=\dfrac{GA}{GL}$,$\therefore$ $x=\dfrac{c_1d}{a-b}+c_1$ 也。至求 y 之远,则因 $\triangle AG_1D,DHF$ 为相似三角形,则 HF,G_1D 为相似边,又因 $\triangle AG_1J,JIL$ 为相似三角形,则 IL,G_1J 为相似边。$\therefore$ $HF:G_1D::IL:G_1J$。

即 $\qquad \dfrac{HF}{IL}=\dfrac{G_1D}{G_1J}$, 或 $\dfrac{HF-IL}{IL}=\dfrac{G_1D-G_1J}{G_1J}$,

$$\frac{a-b}{b}=\frac{d}{y},\therefore\quad y=\frac{bd}{a-b}。$$

而明季由西洋输入者,又有“矩度”或“象限仪”(Quadran)测量之说。详熊三拔之《表度说》及徐光启之《测量法义》卷中,颇为一时所宗。入清而方中通之《数度衍》(1661 年)卷七“器测”篇,黄百家之《勾股矩测解原》(1679 年?),梅文鼎之《三角法举要》(1684 年?)卷五“测量”篇,陈讦之《勾股述》(1683 年)卷二“矩度说”等篇,年希尧之《测算刀圭》(1718 年)“三角测高”等篇,陈讦之《勾股引蒙》(1722 年)“西法矩度测量”篇,庄亨阳之《庄氏算学》“矩度测量”篇,屠文漪之《九章录要》卷十一之三“矩测高”等篇,并著其说。而“重差术”第一题,亦有解说,如:方中通之《数度衍》(1661 年)卷七“测量”篇,李子金之《算法通义》(1676 年)卷一“立表测高之法”篇,杜知耕之《数学钥》(1681 年)卷六“日晷测高”等篇,陈讦之《勾

股述》(1683 年)卷二“立表测高”等篇,毛宗旦之《九章蠡测》“测望法”篇,杨作枚之《勾股阐微》卷一“勾股重测高远”篇,梅文鼎之《勾股阐微》卷四“测量用影差义疏”篇,陈讦之《勾股引蒙》(1722 年)“立表测高”等篇,庄亨阳之《庄氏算学》“勾股测量”篇,屠文漪之《九章录要》卷十一之三,“表测高”等篇,所论多不出杨辉,程大位之范围。

7.《重差术》之再兴。《海岛算经》散见明《永乐大典》中,清乾隆间开四库馆,戴震(1724~1777)裒而辑之,仍为一卷,篇帙无多,而古法具在,戴震与《九章》同为表章。其见于《四库全书》者,有提要一首,题乾隆四十年(1775 年)四月校上。见于孔继涵(1739~1783)所刻《算经十书》者,末有乾隆乙未(1775 年)夏四月休宁戴震跋语一篇,文与提要相同。自此《重差术》全篇乃见传于世。顾《十书》虽再刻于常熟屈氏,而补注考证,尚未遑也。钟祥李潢(? ~1811)乃为之注,并应用同式形两两相比,加补图说。其自序称“图中以四边形五边形立说,似与勾股不类……”书甫写定,潢即一病不起,似其证注尚有遗憾也。其后嘉庆甲戌(1814 年)纪大奎(1746~1825)《笔算便览》卷四“勾股重差各诀”则以笔算演《海岛》题问。光绪五年(1879 年)李鏐于戴辑《海岛算经》九题之外,从《六艺纲目》所引补入第十题,又以天元一术校衍,都为一卷,题“海岛纬笔”为《衍元海鉴》第三种。光绪十八年(1892 年)江苏书局校刊顾观光(1799~1862)遗著《九数存古》,其卷九引刘徽《九章序》及其《重差术》,并录李潢所补图说焉。光绪壬寅(1902 年)张松溪《勾股题镜》卷二,以《形学代数》演《海岛》题问。

兹复不揣拙陋,设为新注,令各题作图形势相当,俾可叠相袭用,并避去四边形、五边形之说,其第一题则从李潢之旧,设为平行线,求其相似三角形各边之比例焉。

中国近古期之算学*

一、唐代之算学

唐代算学，上承汉魏，下接宋元，为中国算学史最重要之时期。前此《九章算术》诸书，传注至为庞杂，至李淳风与梁述、王真儒受诏注《算经十书》，显庆丙辰（公元 656 年）付国学行用后，流传始广。唐初并以算学取士，其制因隋。王孝通，武德时（619～626）人，著《缉古算经》，亦列入学科。其书因《九章》商功求积诸法而推广之，应用方程式，有：$x^2=A$，$x^2+px=A$，$x^3+px^2=A$，$x^3+px^2+qx=A$，$x^4+qx^2=A$。虽其解法未详，而宋元高次方程式之讨论，已始于此。同时婆罗门天竺数学输入中国，中国数学亦输入百济、日本，故唐代算学，为中算始盛时期。

二、唐代算学制度

唐废算学，显庆丙辰（公元 656 年）左仆射于思志宁等奏以十部算经付国学行用。显庆元年（公元 656 年）复置算学，其制因隋，

---

* 本文原载《学艺杂志》第 9 卷（1928 年）第 4、5 号第 1～28 页。

有算学博士二人，从九品下，学生三十人。博士掌教文武八品以下，及庶人子为生者，二分其经，以为之业。习《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》十五人。习《缀术》、《缉古》十五人。其《记遗》、《三等》亦兼习之。显庆二年（公元 657 年）废书、算、律学，龙朔二年（公元 662 年）复置律及书、算学，三年（公元 663 年）以书隶兰台，算隶秘阁局，律隶详刑寺。学制各为七岁；第一组《孙子》、《五曹》共限一岁，《九章》、《海岛》共三岁，《张丘建》、《夏侯阳》各一岁，《周髀》、《五经算》共一岁；第二组《缀术》四岁，《缉古》三岁，《记遗》、《三等数》皆兼习之。其考试之法：第一组凡算学录大义本条为问答。明数，造术，详明术理然后为通。试《九章》三条，《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》各一条，十通六；《记遗》、《三等数》，帖读十得九为第。第二组试《缀述》、《缉古》，录大义为问答者，明数，造术，详明术理，无注者合数，造术，不失义理，然后为通。《缀术》七条（《志》云七条，《六典》云六条），《缉古》三条（《志》云三条《六典》云四条），十通六；《记遗》、《三等数》，帖读十得九为第，落经者虽通六不第。自天宝（742～755）后学校益废，生徒流散。元和二年（公元 807 年）始定员额，西京书算馆各十人，东都算馆二人而已。

三、唐代算学书志

《新唐书·艺文志》称："李淳风注《周髀算经》二卷，又注《九章算术》九卷，注《九章算经要略》一卷，注《五经算术》二卷，注《张丘建算经》三卷，注《海岛算经》一卷，注《五曹》、《孙子》等算经二十卷（?），注甄鸾《孙子算经》三卷，释祖冲之《缀术》五卷。"又王孝通《缉古算术》四卷，亦题"太史丞李淳风注"。宋本《张丘建算经》三卷，题

唐算学博士刘孝孙细草。李、刘并皆注疏旧算籍者也。其自撰述者，有：陈从运《得一算经》七卷，贞元(785～804)人龙受《算法》三卷；其时代无考而见于《旧唐书》者有：宋泉之《九章术疏》九卷，阴景愉《七经算术通义》七卷；见于《新唐书》者有：鲁靖《新集五曹时要术》三卷，谢察微《算经》三卷。

四、婆罗门天竺数学输入中国

印度数学由佛教连带输入者，以近古为最显著。唐于阗国三藏沙门实叉难陀译《大方广佛华严经》卷四阿僧只品第三十言："一百洛叉(此云万)为一俱胝，俱胝俱胝为一阿瘐多，……为一不可说不可说转。"此即《数术记遗》所谓："上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。"唐人作《隋志》，所记者有：婆罗门舍仙人所说《婆罗门天文经》二十一卷，婆罗门竭伽仙人《天文说》三十卷，《婆罗门天文》一卷，《婆罗门算法》三卷，《婆罗门阴阳算历》一卷，《婆罗门算经》三卷。《唐书》称："天竺国即汉之身毒，或云婆罗门地也，……其中分五天竺，……有文字，善天文算历之术。"开元六年(公元718年)瞿昙悉达译《九执历》，即出于西域，《旧唐书·西戎传》称："罽宾国于开元七年(公元719年)遣使来朝，进《天文经》一夹。"《册府元龟》称："吐火罗国于开元七年(公元719年)表进解天文人大慕阇，谓智慧幽深，问无不知。"其后贞元中(785～804)都利术士李弥乾自西天竺得《聿斯经》，有璩公者译其文，成《都利聿斯经》二卷，《新唐书》以此经与陈辅《聿斯四门经》一卷并列历算类。《新五代史》(卷五八)司天考云：初，唐建中(780～783)时，术士曹士蔿作《七曜符天历》，谓之小历，止行于民间。焦竑《经籍志》云：有《曹公小宪》一卷，李思议重注，本天竺历法。以上所举，为婆罗门天

竺数学输入中国之可考者。现今国外学者，且有谓印度历算，《后汉》时已输入中国者，则未论定之问题也。

五、中国数学输入百济日本

有唐拓境，远及安西，四方来朝，史不绝书，百济岁时伏腊，同于中国，其书籍有五经，子，史。钦明十五年(公元554年)百济易博士王道良，历博士王保孙始以中国历法输入日本。于是改良度量衡制，置漏刻器，立天文台，行《元嘉历》及《仪凤历》，一惟中土之法是遵。大宝二年(公元702年)立学校，授算术，所采算经，为《周髀》、《孙子》、《六章》、《三开》、《重差》、《五曹》、《海岛》、《九司》、《九章》、《缀术》，并置历士、算生等名称①。

六、宋，金，元之算学

宋元丰七年(1084年)刻《算经十书》入秘书省，同年试算学，上等为博士。崇宁大观宣和之间(1104～1120)，算学置废无常，而在野之研此者，日益隆盛。宋金之际，天元之用，大见发达，其学始于河北河东。祖颐《四元玉鉴后序》称："平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》

① 参观李俨《中算输入日本之经过》，《东方杂志》第二十二卷，第十八号，十四年九月(＊1954年李俨将此文收入《中算史论丛》第五集，见本书第八卷。——编者)。

末有人元二问。”今其书尽不传，而平阳、博陆、平水、绛、霍山并在大河东北，一代算学之盛，已可见一斑。其间成就最大者有：秦九韶、李治、杨辉、郭守敬、朱世杰。

七、刘益带从开方术

刘益中山人，以勾股之术，治演段锁方，作《议古根源》，撰成直田演段百问，其书引用带从开方，正方损益之法，带益隅开方，为前古所未闻。程大位《算法统宗》列其书于元丰(1078～1085)、绍兴(1131～1162)、淳熙(1174～1189)以来刊刻算书之首。《议古根源》(约 1080 年)所举带从开方，虽仅及二次式，已与和涅法(Horner's Method，1819 年)相似。后此贾宪《黄帝九章细草》(约 1200 年)，秦九韶《数书九章》(1247 年)，李治《测圆海镜》(1248 年)，《益古演段》(1259 年)，郭守敬《授时历》(1280 年)，朱世杰《算学启蒙》(1299 年)，《四元玉鉴》(1303 年)所引正负开方术并本于此。

杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下引有：刘益《议古根源》带从开方中益隅法。如$-x^2+60x=864$ 列式为：

(偶)，(从方)，(方法)，(实)，(上商)

$$\begin{array}{rrrrl}
-100 & +600 & & -864 & \underline{|20} \qquad x_1=20 \\
 & & -200 & -\ 400 & \text{(益隅)} \\ \hline
-100 & +600 & -200 & -1264 & \\
 & & \times\ \ 2 & +1200 & \\ \hline
-100 & +600 & -400 & -\ \ 64 &
\end{array}$$

“二因方法，一退名廉”，得变式：

$$-x_2^2+60x_2-40x_2=64, \quad x_2=4。\therefore x=24$$

八、贾宪开平立方法

贾宪为楚衍(1022～1053 时人)弟子,有《算法斅古集》二卷。宋杨辉称:"《黄帝九章》……圣宋右班(殿)值贾宪撰草。"《宋史》称:《黄帝九章细草》九卷是也。鲍澣之称:"近世民间之本,题曰《黄帝九章》……虽有细草,类皆简捷残阙,懵于本原。"亦指此也。杨辉《详解九章算法》(1261 年)引有:贾宪立成释锁平方法,及立方法。《永乐大典》本杨辉《详解九章算法》引有:"开方作法本源",言增乘方求廉草,自注称:"出《释锁》算书,贾宪用此术。"盖即巴斯噶三角形(Pascal 1623～1662,Triangle)也。其图如下。

左积　　右隅

本积							1						
商除						1		1					
平方					1		2		1				
立方				1		3		3		1			
三乘			1		4		6		4		1		
四乘		1		5		10		10		5		1	
五乘	1		6		15		20		15		6		1

左袤乃积数,
右袤乃隅算,
中藏者皆廉,
以廉乘商方,
命实而除之。

九、秦九韶学说

1. 秦九韶传

秦九韶字道古，自题鲁郡人，或称蜀人，或称秦、凤间人。而清焦循《天元一释》谓秦凤间乃指阶、成、岷、凤四州。年十八，在乡里为义兵首，既出东南，多交豪富，性极机巧，星象音律算术，以至营造等事，无不精究。早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。父季槱，宝庆中(1225～1228)官潼州，九韶随侍。又尝从李刘学骈俪诗词。《李梅亭集》有《回秦县尉九韶谢差校正》启云："善继人志，当为黄素之校雠；肯从吾游，小试丹铅之点勘。"李刘尝为成都漕，九韶差校正，当在其时。或以历学荐于朝，得对。淳祐四年(1244 年)八月以通直郎通判建康府，十一月丁母忧，解官。宝祐间 (1253～1258)九韶为沿江制置司参议官。七年(1247 年)九月成《数学九章》十八卷。尝知琼州数月，与吴潜交尤稔，景定元年(1260 年)四月吴潜罢相，十月窜吴潜于潮州，三年(1262 年)诏吴潜党人，永不录用。九韶窜之梅州，亦当在此时。九韶在梅治政不辍，竟殂于梅。

2. 秦九韶正负开方术

清罗士琳谓："秦氏著《数学九章》，而古正负开方术显。"其言筹位，分别纵横，无异于古，而其应用○号，及简号×，ㄅ或丅，又或㐅，则为后世暗码之起源。其论方程式也，如：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

令 $100y=x$，则变式

$$-(100y)^4+763200(100y)^2-40642560000=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

可约商 8,亦即(1)式可约商 800 也。秦氏正负三乘方图,并可以和湼相类之法记之,如:

$-1\times(100)^4$	$+$	$+\ 763200\times(100)^2$		-40642560000	8
	$-\ 800\times(100)^3$	$-\ 640000\times(100)^2$	$+\ 98560000\times(100)$	$+78848000000$	
$-1\times(100)^4$	$-\ 800\times(100)^3$	$+\ 123200\times(100)^2$	$+\ 98560000\times(100)$	$+38205440000$	一变
	$-\ 800\times(100)^3$	$-1280000\times(100)^2$	$-925440000\times(100)$		
$-1\times(100)^4$	$-1600\times(100)^3$	$-1156800\times(100)^2$	$-826880000\times(100)$	$+38205440000$	二变
	$-\ 800\times(100)^3$	$-1920000\times(100)^2$			
$-1\times(100)^4$	$-2400\times(100)^3$	$-3076800\times(100)^2$	$-826880000\times(100)$	$+38205440000$	三变
	$-\ 800\times(100)^3$				
$-1\times(100)^4$	$-3200\times(100)^3$	$-3076800\times(100)^2$	$-826880000\times(100)$	$+38205440000$	四变

故(2)式约商 8 后,即原式(1)约商 800 后,四变为

$$-1\times(100y)^4-3200\times(100y)^3-3076800\times(100y)^2-826880000\times(100y)+38205440000=0 \cdots\cdots (3)$$

令 $10y=z$,或 $10z=x$,则变式可书为

$$-1\times(10z)^4-3200\times(10z)^3-3076800\times(10z)^2-826880000\times(10z)+38205440000=0 \cdots\cdots (4)$$

可约商 4，

$$\begin{array}{rrrrrr}
-1\times(10)^4 & -3200\times(10)^3 & -3076800\times(10)^2 & -826880000\times(10) & +38205440000 & \underline{4|} \\
 & -\ \ 40\times(10)^3 & -\ \ 129600\times(10)^2 & -128256000\times(10) & -38205440000 & \\
\hline
-1\times(10)^4 & -3240\times(10)^3 & -3206400\times(10)^2 & -955136000\times(10) & +\qquad 0 & 一变
\end{array}$$

即原式(1)约商 40 后，一变为

$$-1\times(10z)^4-3240\times(10z)^3-3206400\times(10z)^2-955136000\times(10z)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

或 $$-x^4-3240x^3-3206400x^2-955136000x=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

而 $x=840$ 为一根。(6)式即方程论所称之降乘式(depressed equation)。

其开方不尽者，或(一)进一位如：$\sqrt{8000}=89+=90$。或(二)退商进求小数，如：$16x^2+192x-1863.2=0$，$x=6.35$。又 $36x^2+360x-13068.8=0$，$x=14.7$。或(三)加借算，如 $\sqrt{640}=25\frac{15}{2\times15+1}=25\frac{5}{17}$。此加借算之法，自古已有，只及于开平立方，秦氏则扩充而应用于多乘方，如方程式 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$，初商 $x=20$ 后，变原式为 $-x^4-80x^3+14045x^2+577800x-324506.25=0$，假定此变式根数为 1，即“以方廉隅各数正负相并为分母，余实为分子”，故 $x=20\frac{324506.25}{590564}$ 或 $x=20\frac{1289025}{2362256}$。如所得分数为负数时，则当弃此分数不用。如 $16x^2+19x-1863.2=0$，$x=6.35-\frac{1.06}{3.9456}=6.35=6.4$。又 $36x^2+360x-13068.8=0$，$x=14.7\frac{2.44}{139.68}=14.7$ 是也。

3. 秦九韶数理杂说

秦九韶《数学九章》(1247 年)于古《九章》外有大衍[①],率变,堆积,招法。《数学九章》卷十三"计造石坝"题谓:"以招法入之",即:

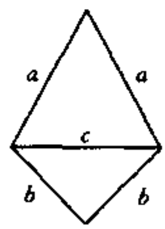
$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+(a+3\cdot b)+\cdots\cdots+[a+(n-1)b]$$
$$=na+\frac{n(n-1)}{2}b$$

而 a=上积,或初积, b=次积。

此与朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)"如像招数"首问同术,而"如像招数"之招,与此"招法"之招,有同源之势。

此外尖田求积中两尖田形之面积 x,由

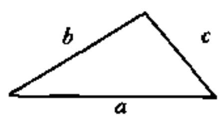
$$-(B-A)^2+2(A+B)x^2-x^4=0$$
$$A=\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$B=\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2$$



而得。

三斜求积之面积 x,由

$$x^2-\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]=0$$



即 $x=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

及 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$

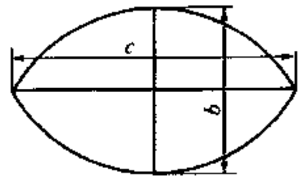
而得。

蕉田求积中,蕉田之面积 y,由

---

① 参观李俨:《大衍求一术之过去与未来》,《学艺杂志》第七卷第二号,十四年九月(*1928 年李俨将此文编入《中算史论丛》(一),1954 年编入《中算史论丛》第一集。见本书第六卷。——编者)

$$-10(c+b)^3+\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\times 2y^2+4y^4=0$$

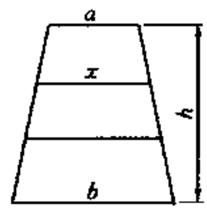


而得。由是知弧矢形之面积 x，由

$$-10(c+2b)^3+4[c^2-(2b)^2]x+16x^2=0$$

而得。

均分梯田，作为三分，已知 a,b,h，则 x 之值，由



$$-\frac{k}{2}\cdot h+ahx+\frac{b-a}{2}x^2=0$$

而得。

在《数学九章》卷十四"积木计余"题谓：尖垛，"堆积入之"，即 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{(2m-1)2m}{2}$，而 $m=\frac{n+1}{2}$ 为中面数；又称 3，2，1 为反锥差；1，3，6 为蒺藜差；1，4，9 为方锥差。其论小数之类，一之下有：分，厘，毫，丝，忽，微，尘，沙，渺，莽，轻，清，烟；分数之类有：中半(1/2)，少半(1/3)，太半(2/3)，弱半(1/4)，强半(3/4)之别。

十、李 治 学 说

1. 李治传

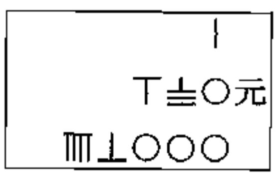
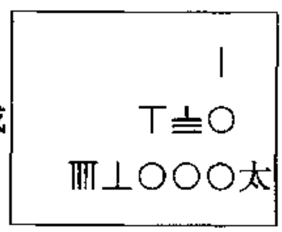
李治字仁卿，号敬斋，李遹次子。金真定府栾城县人。自幼善算数。正大七年(1230 年)登词赋进士第。调高陵簿，未上，辟权知(河南)钧州事。壬辰(1232 年)正月城溃，微服北渡。又二年(1234 年)金亡。遂流落忻崞间。先隐于崞山(在代州崞县)之桐川。聚书环堵。戊申(1248 年)成《测圆海镜》二十卷，谓得洞渊九容之说，日

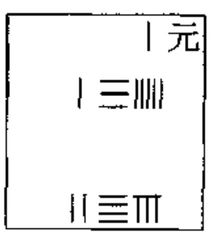
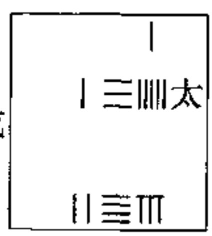
夕玩绎，遂成此书。后由崞而之太原，居太原藩府；之平定，居聂珪帅府。晚家真定府元氏县之封龙山，学徒益众。元世祖居潜邸闻其贤，岁丁巳（1257 年）遣使召之，问对称旨。己未（1259 年）成《益古演段》三卷。谓近世有某者，以方圆移补成编，号《益古集》，再为移补条段，细繙图式，遂成此书。至元元年（1264 年）元世祖始立翰林院，王鹗荐李治为学士。至元二年（1265 年）召拜翰林学士，同修国史。明年以疾辞，归封龙山。十六年（1279 年）卒，年八十八（1192～1279）。子克修。

2. 李治立天元一术

李治《测圆海镜》、《益古演段》于“天元一”法，言之独详。法以常数（Constant）为“太极”，旁记“太”字，未知数一次者（x）为“天元”，旁记“元”字。《测圆海镜》中太在元下，即“元下必太，太上必元；故有元字，不记太字，有太字，不记元字。元上一层则元自乘数，又上一层则元再乘数，凡上一层，则增一乘。太下一层则元除太数，又下一层则元再除太数，凡下一层则增一除”。

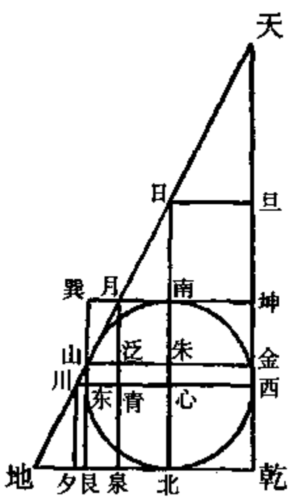
如　244800＝……

$x^2+680x+96000=\cdots$  或 

$x+135+248x^{-2}=\cdots$  或 

3. 李治圆城图式，名义

《测圆海镜》十二卷，“以勾股容圆为题，自圆心圆外纵横取之，得大小十五形，皆无奇零。”如通△天地乾，天地为通弦，天乾为通股，乾地为通勾，而所取之勾股弦，并为 $8^2+15^2=17^2$ 之倍数。如通弦$=40\times17$，通股$=40\times15$，通勾$=40\times8$ 是也。所得十五形正数，为



	弦 c，	勾 a，	股 b，
天或通△天地乾，	680，	320，	600，
边△天川西，	544，	256，	480，
底△日地北，	425，	200，	375，
黄广△天山金，	510，	240，	450，
黄长△月地泉，	272，	128，	240，
上高△天日旦，	255，	120，	225，
下高△日山朱，	255，	120，	225，
上平△月川青，	136，	64，	120，
下平△川地夕，	136，	64，	120，
大差△天月坤，	408，	192，	360，
小差△山地艮，	170，	80，	150，
(皇)极△日川心，	289，	136，	255，
(太)虚△月山泛，	102，	48，	90，
明△日月南，	153，	72，	135，
叀△山川东，	34，	16，	30。

释名：勾$=c$，　股$=b$，　弦$=c$。

黄＝黄方＝内容圆径＝圆$=2r$，

勾股和＝和＝$a+b$＝弦黄和＝$(a+b-c)+c$，

勾股较＝较＝差＝中差＝$b-a$＝双差较

＝$(c-a)-(c-b)$，

勾弦和＝$a+c$，

勾弦较＝大差＝$c-a$＝股黄较＝股黄差

＝$b-(a+b-c)$，

股弦和＝$b+c$，

股弦较＝小差＝$c-b$＝勾黄较＝勾黄差＝$a-(a+b-c)$，

双差＝大差＋小差，

弦较和＝$c+(b-a)$＝股较和＝$b+(c-a)$＝勾和较＝$(b+c)-a$，

弦较较＝$c-(b-a)$＝股和较＝$(c-a)-b$＝勾较和＝$(c-b)+a$，

弦和和＝总和＝三事和＝$a+b+c$＝幻和和＝$(b+c)+a$＝股和和＝$(a+c)+b$，

弦和较＝黄＝黄方＝圆径＝$a+b-c$＝勾较较＝$a-(c-b)$＝股较较＝$b-(c-a)$，

十一、杨辉学说

1. 杨辉传

杨辉字谦光，钱塘人。宋景定辛酉(1261 年)作《详解九章算法》，后附《纂类》，总十二卷，今所传者，非其全帙；《详解算法》若干卷，尽乘除，九归，飞归之蕴。景定壬戌(1262 年)作《日用算法》二

卷，以明乘除，为初学用，编诗括十有三首，立图草六十六问，永嘉陈几先为之题跋。咸淳甲戌(1274年)作《乘除通变本末》三卷；上中卷《乘除通变算宝》为辉自撰，下卷《法算取用本末》则与史仲荣合撰。德祐乙亥(1275年)作《田亩比类乘除捷法》二卷。是年冬因刘碧涧、丘虚谷及旧刊遗忘之文，而作《续古摘奇算法》二卷。以上七卷称为杨辉算法，洪武戊午(1378年)古杭勤德书堂新刊行世。

2. 杨辉数理杂说

杨辉于级数，谓：

三角垛，$1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$

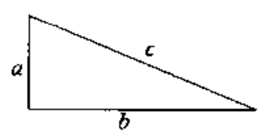
四隅垛，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$。

方垛，$a^2+(a+1)^2+\cdots\cdots+(c-1)^2+c^2$

$$=\frac{1}{3}(c-a+1)(c^2+a^2+ca+\frac{c-a}{2})。$$

《详解九章算法·勾股章》今有户高题，因勾股形已知

c 及 $d=a-b$，则 $c^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)$。



两边各减 $2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$，得：

$$c^2-2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)+2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$=2\times\left(a+\frac{d}{2}\right)^2$$

故 $a=\sqrt{\frac{1}{2}\left[c^2-2\times\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}-\frac{d}{2}$，即为二次式之根。

论弧矢形，则谓 $-(2A)^2+4Ab^2+4ab^3-5b^4=0$，$c=\frac{2A}{b}-b$，$d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b$，前二式疑出自刘益，末式为辉所自发。《续古摘奇算法》上卷载有纵横图。其洛书数："九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出"四语，为奇行纵横图作法之根源。又有百子图如下：

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	23	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

（百　子　图）

十二、郭守敬学说

1. 郭守敬传

郭守敬字若思，顺德邢台人，大父荣，通五经，精于算数水利。

时刘秉忠(1216～1274)、张文谦(1216～1283)、张易、王恂(1235～1281)同学(磁)州西紫金山。荣使守敬从秉忠学。元中统三年(1263年)文谦荐守敬习水利,巧思绝人。……十三年平宋,遂诏前中书左丞许衡、太子赞善王恂、都水少监郭守敬改治新历。衡等率南北日官陈鼎臣、邓元麟、毛鹏翼、刘巨渊、王素、岳铉、高敬等分掌测验,推步于下,而命张文谦与枢密张易为之主领。至元十七年(1280年)历成,赐名《授时历》。所创法凡五事,《元史·历志》仅录李谦《历议》。清梅文鼎因《授时历草》,及《大统历通轨》为成《大统历法》,载于《明史》,说较详尽。守敬卒于延祐三年(1316年),年八十六(1231～1316)。

2. 郭守敬弧矢割圆术

郭守敬割圆不仅割平圆,且割浑圆为分图。清梅文鼎以其黄道面,赤道面在分图中仅成直线,乃于《堑堵测量》中补作合形(如图1),较见明晰。郭守敬因周天,$\pi d=365\frac{1}{4}$,$\pi=3$,故全径 $d=121.75$,一象限$=91.31$。法先由沈括(1030～1094)公式 $a=\frac{2b^2}{d}+c$,及杨辉公式 $d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b$,消去 c,合成弧矢形求矢之四乘方式:

$$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0$$

先由此公式算得矢度 b。

先求到矢度,以为黄赤相求,及其内外度之根。

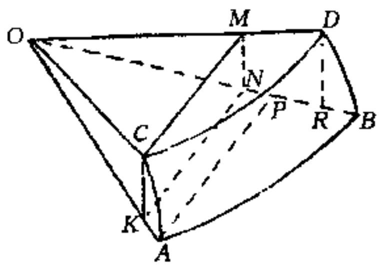
“黄赤道差。

“求黄道各度下赤道积度术:

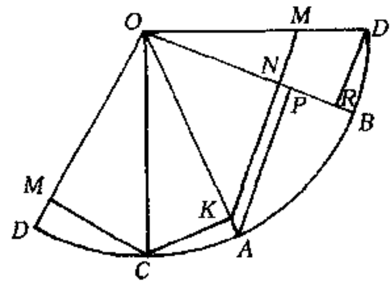
“置周天半径,内减去黄道矢度,余为黄赤道小弦。”

如图(1)， $OM=OD-MD$。

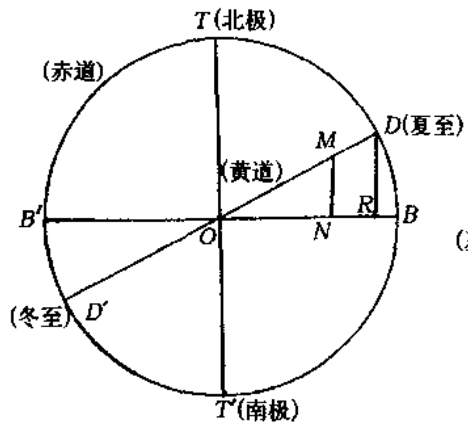
“置黄赤道小弦，以黄赤道大股乘之。大股见割圆，为实，黄赤道大弦，半径为法，实如法而一，为黄赤道小股。又为赤道小勾。”



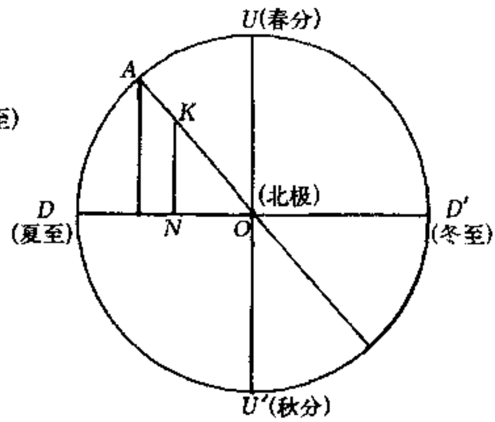
(1)



(2)



(3)侧立之图



(4)平视之图

$$ON=\frac{OM \cdot OR}{OD}$$

“置黄道矢自乘为实,以周天全径为法。实如法而一,为黄道半背弦差。”

$$\frac{1}{2}(2CD-2CM)=\frac{Aéc-Céc}{2}=\frac{MD^2}{D}$$

“以差去减黄道积度,即黄道半弧背。余为黄道半弧弦。”

$$CM=CD-\frac{1}{2}(2CD-2CM)$$

“置黄道半弧弦自之为股幂，黄赤道小股自之为勾幂。并之，以开平方法除之，为赤道小弦。”

$$CM=KN \qquad OK=\sqrt{KN^2+ON^2}。$$

“置黄赤道半弧弦，以周天半径亦为赤道大弦。乘之，为实，以赤道小弦为法而一，为赤道半弧弦。”

$$AP=\frac{CM(=KN)\cdot OB}{OK}。$$

“置黄赤道小股，亦为赤道横小勾。以赤道大弦即半径乘之，为实，以赤道小弦为法，而一，为赤道横大勾，以减半径，余为赤道横弧矢。”

$$OP=\frac{ON\cdot OA}{OK},$$

$$PB=OB-OP。$$

“横弧矢自之为实，以全径为法，而一，为赤道半背弦差。”

$$\frac{1}{2}(2AB-2AP)=\frac{a'_{eq}-c'_{eq}}{2}=\frac{PB^2}{D}$$

“以差加赤道半弧弦为赤道积度。”

$$AB=AP+\frac{1}{2}(2AB-2AP)。$$

郭守敬割浑圆即算弧三角法，其术在国中，此为首创。又有“黄赤道相求弧矢诸率立成”等之计算，所谓立成即数表也。

3. 授时平立定三差法

郭守敬言“太阳盈缩平立定三差之源”。

命积(日)为： n， $2n$， $3n$， $4n$， $5n$， $6n$；

积差为： S_n， S_{2n}， S_{3n}， S_{4n}， S_{5n}， S_{6n}；

(日)平差为： $(\mu_0=\mu_1+v_1-w_1)$， $\mu_1=\frac{S_n}{n}$， $\mu_2=\frac{S_{2n}}{2n}$，

$$\mu_3=\frac{S_{3n}}{3n},\quad \mu_4=\frac{S_{4n}}{4n},\quad \mu_5=\frac{S_{5n}}{5n},\quad \mu_6=\frac{S_{6n}}{6n}。$$

以遂差之法(Finite differences)求得一差,二差,列表如下:

	μ_0		μ_1		μ_2		μ_3		μ_4		μ_5		μ_6
一差,或泛平差,		v_0		v_1		v_2		v_3		v_4		v_5	
二差,或泛立差,			w_0		w_1		w_2		w_3		w_4		

此时 w_0,w_1,w_2,w_3,w_4,已全相等。

令　泛平积$=\mu_1$,　泛平积差$=v_1-w_1=\mu_0-\mu_1$,

泛立积差$=\dfrac{w_2}{2}$。

又令　泛平积差$=v_1-w_1=\mu_0-\mu_1=nq+n^2c$

就中　定差,$d=\mu_0$,　平差,$q=\dfrac{v_1-w_1-\dfrac{w_1}{2}}{n}$,　立差,$c=\dfrac{\dfrac{w_1}{2}}{n^2}$

则代入得　$\mu_1=d-nq-n^2\cdot c$,

$\mu_2=d-2nq-(2n)^2\cdot c$,

$\mu_3=d-3nq-(3n)^2\cdot c$,

…………………………

或　$S_n=nd-n^2q-n^3c$,　………………………………… (1)

$S_{2n}=(2n)d-(2n)^2q-(2n)^3c$,

$S_{3n}=(3n)d-(3n)^2q-(3n)^3c$,

…………………………………

为 n 日末,$2n$ 日末,$3n$ 日末,……盈缩积,或限积。

又可知　$S_1=d-q-c$,

$S_2=2d-2^2\cdot q-2^3\cdot c$,

$S_3=3d-3^2\cdot q-3^3\cdot c$,

…………………………,

$$S_n=nd-n^2\cdot q-n^3\cdot c,$$

为 1 日末,2 日末,3 日末,……盈缩积,或限积。

再以逐差之法,求得加分 a,平合立差 b,加分立差 K,如:

（加分），　　（平合立差），　　（加分立差）

$$
\begin{array}{lll}
S_1-S_0=d-q-c=a & & \\
 & -2q-6c=b & \\
S_2-S_1=d-3q-7c & & -6c=K \\
 & (-2q-6c)-6c & \\
S_3-S_2=d-5q-19c & & -6c \\
 & (-2q-6c)-2\times 6c & \\
S_4-S_3=d-7q-37c & & -6c \\
 & (-2q-6c)-3\times 6c & \\
 & \cdots\cdots & \\
 & (-2q-6c)-(n-3)6c & \\
S_{n-1}-S_{n-2}=d-(2n-3)q-(3n^2+9n+7)c & & -6c \\
\cdots\cdots & -2q-6c-(n-2)6c & \\
S_n-S_{n-1}=d-(2n-1)q-(3n^2+3n-1)c & &
\end{array}
$$

而　初日加分　$=d-q-c=a$,

次日加分　$=(d-q-c)+(-2q-6c)$,

初日平立合差 $=-2q-6c=b$,

次日平立合差 $=(-2q-6c)-6c$,

n 日平立合差 $=(-2q-6c)-(n-2)6c$,

加分立差 $=-6c=K$,

初日末盈缩积 $=(d-q-c)$,

次日末盈缩积 $=2(d-q-c)+(-2q-6c)$,

三日末盈缩积 $=3(d-q-c)+3(-2q-6c)+(-6c)$,

四日末盈缩积 $=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c)$,

五日末盈缩积$=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c)$,

………………

n日末盈缩积,$S_n=n(d-q-c)+\frac{(n-1)n}{2}(-2q-6c)$

$$+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}(-6c)$$

$$=na+\frac{(n-1)n}{2}b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K$$

$$=nd-n^2q-n^3c。$$

换言之,即n日末盈缩积:

$$S_n=a+(a+b)+(a+2b+K)+(a+3b+3K)+(a+4b+6K)+\cdots\cdots+\left[a+(n-1)b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}K\right]$$

$$S_n=na+\frac{(n-1)n}{2}b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2)$$

$$=nd-n^2q-n^3c$$

故既知a,b,K,则冬至后按日盈缩,及每日盈行度,可依次加减,而造立成。按朱世杰招差之术,其义未详,似即本于《授时》平立定三差法,因《授时历》之加分、平立合差、加分立差,即朱氏之上差、二差、下差也。

十三、朱世杰学说

1. 朱世杰传

朱世杰,字汉卿,号松庭,寓居燕山,周游四方二十余年,复游广陵,踵门而学者云集。撰《算学启蒙》三卷,分二十门,立二百五十

九问。首总括无卷数。大德己亥(1299 年)赵城序而梓传焉。又因宋元之间，蒋周、李文一、石信道、刘汝谐、元裕仅言天元，李德载仅言地元，刘大鉴仅言人元，乃按天、地、人、物立成四元，以元气居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上，上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式，必以寄之，剔之，余筹易位，横冲直撞，精而不杂，自然而然，消而和会，以成开方之式也。书成名曰《四元玉鉴》，厘为三卷，分门二十四，立问二百八十八，大德癸卯(1303 年)临川莫若序传焉。

2. 朱世杰四元术

四元者天地人物元也。天元术前已具言，至四元列式则天元，$\boxed{\begin{array}{c}\text{太}\\ |\end{array}}=x$，地元，$\boxed{\begin{array}{cc}| & \text{太}\end{array}}=y$，人元，$\boxed{\begin{array}{cc}\text{太} & |\end{array}}=z$，物元，$\boxed{\begin{array}{c}|\\ \text{太}\end{array}}=w$；并之，得$\boxed{\begin{array}{ccc} & | & \\ | & \text{太} & | \\ & | & \end{array}}=x+y+z+w$。自乘为幂得：

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & | & & & \\ & \| & & \bigcirc & \| & \| & \\ | & \bigcirc & \| & \text{太} & & \bigcirc & | \\ & \| & & \bigcirc & & \| & \\ & & & | & & & \end{array}}=x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw$$
$$+2yz+2yw+2zw$$

如令 $x=$勾，$y=$股，$z=$弦，$w=$黄方，则$(x+y+z+w)^2$自相乘，得“四元自乘演段之图”，“考图认之，其理显然”。

3. 朱世杰级数论

朱世杰于发明四元之外，更善言级数。所举有：

(1)落一形(三角形)：

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$

(2)撒星形,(三角落一形):

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+[1+3+6+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2}n(n+1)]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

(3)四角落一形:

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots\cdots+(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)。$$

(4)岚峰形:

$$1+(1+5)+(1+5+12)+\cdots\cdots+(1+5+12+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2}n(3n-1))=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)。$$

$$1.1+2(1+2)+3(1+2+3)+\cdots\cdots$$
$$+n(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)。$$

(5)三角岚峰形(一称岚峰更落一形):

$$1.1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots\cdots$$
$$+n[1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)]$$
$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)。$$

(6)四角岚峰形:

$$1.1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots\cdots$$
$$+n(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left[n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right]。$$

(7)撒星更落一形：

$$1+[1+(1+3)]+[1+(1+3)+(1+3+6)]+\cdots\cdots$$

$$+[1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)]$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)。$$

(8)三角撒星更落一形：

$$1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)+(1+4+10)]+\cdots\cdots$$

$$+[1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)]$$

$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)。$$

(9)圆锥垛积：

如 r_1 为奇数，r_2 为偶数，则

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$$

中奇项 $\mu_{r_1}=\dfrac{(d_1+3)^2+3}{12}$，　而 $d_1=6\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$。

偶项 $\mu_{r_2}=\dfrac{(d_2+3)^2}{12}$，　而 $d_2=6\left(\dfrac{n}{2}-1\right)+3$。

如 n 为奇，则 $S\mu_{r_1}$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots+\mu_n$$

$$=\frac{d_1[(d_1+6)^2+(d_1+3)^2]+3^2[(d_1+6)(d_1+3)+6]}{216}。$$

如 n 为偶，则 $S\mu_{r_2}$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots+\mu_n$$

$$=\frac{d_2[(d_2+6)^2+(d_2+3)^2]+3^2[(d_2+6)(d_2+3)+3]}{216}。$$

《四元玉鉴》“如像招数”门最后一问自注曾说明招差之义；故

(1)筑堤差夫：上差 $d_1=a$，下差 $d_2=b$。

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+[a+(n-1)b]$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot d_2。$$

差夫给米：

$$na+(n-1)(a+1\cdot b)+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots\cdots$$
$$+1\cdot[a+(n-1)b]$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2。$$

(2)圆箭束招兵：$d_1=\mu_1, d_2=\mu_2-\mu_1, d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$

$$[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)]$$
$$+\{1+K[1+2+3+\cdots\cdots+(b+1)]\}$$
$$+\{1+K[1+2+3+\cdots\cdots+(b+n-1)]\}$$
$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3;$$

招兵给米：

$$n[1+K(1+2+3+\cdots\cdots b)]$$
$$+(n-1)\{1+K[1+2+3+\cdots\cdots(b+1)]\}+\cdots\cdots$$
$$+1\{1+K[1+2+3+\cdots\cdots+(b+n-1)]\}$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$
$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3。$$

(3)平方招兵：$d_1=\mu_1, d_2=\mu_2-\mu_1, d_3=\mu_3-(2d_2-d_1)$

$$a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+[a+(n-1)b]^2$$
$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3;$$

招兵支银：

$$na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2$$
$$+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+1\cdot[a+(n-1)b]^2$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3;$$

招兵给米：

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2$$
$$+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots\cdots$$
$$+\{a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots$$
$$+[a+(n-1)b]^2\}n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1$$
$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$
$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3。$$

(4)立方招兵：$d_1=\mu_1, d_2=\mu_2-\mu_1,\ d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$

$$d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$$
$$a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots\cdots+[a+(n-1)b]^3$$
$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$
$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4;$$

招兵支钱：

$$na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots\cdots$$
$$+1[a+(n-1)b]^3=\frac{1}{2}n(n+1)d_1$$
$$+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$
$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$
$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4。$$

十四、宋金元算学书志

宋世司天算者，以楚衍为首，衍于《九章》、《缉古》、《缀术》、《海岛》诸算经，尤得其妙。有弟子二人贾宪、朱吉最著名，有女亦善算学。一时算学著述之见于载籍者：

《宋史·艺文志》有：李绍谷《求一指蒙玄要》一卷，夏翰（一作翶）《新重演议海岛算经》一卷，徐仁美《增成玄一算经》一卷（《宋史·律历志》作《增成玄一法》），任弘济《一位算法问答》一卷，杨锴《明微算经》一卷，《法算机要赋》一卷，《法算口诀》一卷，《算法秘诀》一卷，《算术玄要》一卷。

宋绍兴中（1131～1162）官撰《秘书省续编到四库书目》于《求一指蒙玄要》一卷外，复有《应时算法》一卷，《算法序说》一卷，《算法》一卷，《乘除算例》一卷，《里田要例算法》一卷。

明程大位《算法统宗》谓：元丰（1078～1085）、绍兴（1131～1162）、淳熙（1174～1189）以来刊刻者有：《议古根源》（刘益撰），《益古算法》（蒋周撰），《证古算法》，《明古算法》，《辨古算法》，《明源算法》，《金科算法》，《指南算法》，《应用算法》（一卷，1080年，蒋舜元撰），《曹唐算法》，《贾宪九章》（宋史作贾宪《黄帝九章细草》九卷），《通微集》，《通机集》，《盘珠集》，《走盘集》，《三元化零歌》（《宋史·艺文志》有张祚注《法算三平化零歌》一卷），《钤经》（石信道撰），《钤释》诸书。

宋郑樵《通志》又载青阳人中山子著《算学通元九章》一卷。

祖颐《四元玉鉴后序》称："平阳蒋周撰《益古》，博陆（即平阳）李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。"

秦九韶得力于宋初诸家,因有《数学九章》(1247 年)之作。李治得力于洞渊、彭泽及金代诸家,因有《测圆海镜》(1248 年)、《益古演段》(1259 年)之作。南渡以后,杨辉作《详解九章算法》十二卷(1261 年),《日用算法》二卷(1262 年),《乘除通变本末》三卷(1274 年),《田亩比类乘除捷法》二卷(1275 年),《续古摘奇算法》二卷(1275 年)。入元则朱世杰撰《四元玉鉴》三卷(1303 年),论天、地、人、物四元。其前则平阳人李德载撰《两仪群英集臻》兼有地元,李治于东平得一《算经》亦有地元,刘大鉴撰《乾坤括囊》末有人元二问。元之末期,丁巨撰《丁巨算法》八卷(1355 年),赵友钦撰《革象新书》五卷,贾亨撰《算法全能集》,陈尚德撰《石塘算书》四卷,彭丝撰《算经图释》九卷,安止斋、何平子撰《详明算法》二卷。其不著撰人姓名时代者,有《透帘细草》及《锦囊启源》二书。

十五、赵友钦割圆术

赵友钦一名曰敬,一名曰友某,字子恭,一曰字子公,一曰敬夫,鄱阳人;一曰饶之,德兴人,弗能详也。著《革象新书》五卷,明王炜删定者凡二卷。其"乾象周髀"篇言割圆术,以内容四边形起算。计算次序与刘徽相似。逐次由四边求八边,由八边求十六边,求至16384 边,知 $\pi=3.1415926^{+}$,以证 $\pi=\frac{355}{113}$之密。而入算则用 $\pi=3.1416$,故赤道周天与其中径之比为 $\pi=\frac{365.2575}{116.2561}$。

十六、撞归法

除法古有商除,宋时有归除,杨辉又另立歌括,其后乃有撞归

之法，即：

二归为九十二　三归为九十三　四归为九十四

五归为九十五　六归为九十六　七归为九十七

八归为九十八　九归为九十九

在《丁巨算法》(1355 年)“今有子粒折收轻赍”题。其归除次序，与珠算次序完全一致。如 4898.85165÷35＝139.96719。可列式如下：

```
  4898.85165              |35
 118
  189
  349
   348
   968
    338
    968
     235
     655
      251
      671
      741
        66
       136
        315
        945
        900
```

清钱大昕且据陶宗仪《辍耕录》有走盘珠、算盘珠之喻，谓元代已有算盘。

印度历算与中国历算之关系*

1. 后汉佛法输入

佛法输入中国之时期，传闻异辞。而比较可信者，则为后汉明帝梦见金人。其事始见于《后汉书》卷一一八《西域传》“天竺国”条；及《后汉书》卷七二《楚王英传》。

《后汉书·西域传》“天竺国”条载：“世传，明帝梦见金人，长大，项有光明，召问群臣，或曰西方有神，名曰佛，其形长丈六尺，而黄金色。帝于是遣使天竺问佛道法。遂于中国图形象焉。楚王英始信其术。中国因此颇奉其道者。”

《后汉书》卷七二，《楚王英传》明帝与彼之诏云：“楚王诵黄老之微言，尚浮屠之仁祠，洁斋三月，与神为誓。何嫌何疑，当有悔吝，以助‘伊蒲塞’、‘桑门’之盛馔。”其后袁英《汉纪》，《魏书》卷一一四，《隋书》卷三五，梁僧祐《出三藏记集》，梁慧皎《梁高僧传》及《东宫切韵》[①]，所记者并未题年月。至法琳《破邪论》谓在永平三年（公元 60 年），《佛祖统记》谓在永平七年（公元 67 年），费长房《历代三

---

* 本文原载《学艺杂志》，第 13 卷（1934 年）第 9 号第 57～74 页，第 10 号第 51～64 页。1947 年删去第 9 节“摩尼教天文人”收入《中算史论丛》（四下）第 371～418 页。

① 见羽溪了谛著，贺昌群译《西域之佛教》，第 103～104 页。民国二十三年（1934 年），上海商务印书馆印本。

宝记》谓在永平七年(公元 64 年)。《古今译经图记》则兼三年,七年,十年诸说,所述尤详。

大唐翻经沙门释靖迈《古今译经图记》卷一称:

后汉刘氏都洛阳

惟孝明皇帝以永平三年(公元 60 年)岁次庚申,帝梦金人,项有日月光,飞来殿庭,上问群臣。太史傅毅对曰:臣闻西域有神,号之为佛,陛下所梦,固其是乎。至七年(公元 64 年),岁次甲子,帝敕郎中蔡愔,中郎将秦愔,博士王遵等一十八人,西寻佛法。愔等至印度国,请迦叶摩腾(中天竺人,Kāśyapa-Mātanga),竺法兰(中天竺人,Dharmarasksa)共还,用白马驮经,并将画释迦佛像,以永平十年(公元 67 年)岁次丁卯,至于洛阳,帝悦,造白马寺。

是后代有译述,至唐为盛。唐代历法且为西域僧人所执持。此外七曜,九执名义,与乎三等数法,大分数法等,并影响中国算法,于后节胪陈之。

2. 七曜名义

汉代天文专书仅存者,有汉高帝孙淮南王刘安之《淮南子·天文训》及《史记·天官书》二种。《淮南子》列举二十八宿,并以岁星、荧惑、镇星、太白、辰星为五星。其后前后《汉书·律历志》并记及之,《史记·天官书》尚记及五星周天者之数。所谓周天之数者,谓环行一周之数也。吴竺律炎与大月氏优婆塞支谦同译《摩登伽经》[1](公元 230 年),及后出之《五星行藏历》、《五星傍通秘诀》[2],并言及五星周

① 本篇所举藏经,除特别说明外,并据"频伽精舍校刊本《大藏经》"。

② 据《续一切经音义》卷五,卷六引。

天之数，今与近世观察较论，如下：

五星周天之数

星名	《淮南子》	《史记》	《摩登伽经》	《五星行藏历》	《五星傍通秘诀》	近世观察
岁星(木)	12年	12年	12年	12年	—	11.86年
荧惑(火)	—	—	2年	2年	2年	1.88年
镇星(土)	28年	28年	28年	29.5年	29年	29.50年
太白(金)	—	1年	1.5年	1年	1年	225日
辰星(水)	—	—	1年	1年	—	88日

《摩登伽经》不仅言五星周天之数，且举及七曜名义。

《摩登伽经》 据梁法经《众经目录》(公元594年)卷三，唐翻经沙门及学士等《众经目录》卷二，《大唐内典录》(公元664年)卷一、卷二、卷七，《大周刊定众经目录》卷八，《古今译经图记》卷一、卷二，《开元释教录》(公元730年)卷一、卷二、卷十五者，同本异出计有五种，即：

(一)《摩邓女经》一卷，后汉安息沙门安世高译。

(二)《舍头谏经》一卷，前人译。

(三)《摩登伽经》二卷或三卷，吴沙门竺律炎，共大月氏优婆塞支谦译。

(四)《舍头谏经》一卷，晋月氏沙门竺法护(昙摩罗察，Dharmaraksa)译。

(五)《摩邓女解形中六事经》一卷，失译人名。今附东晋《录》。

是《摩登伽经》后汉时已入中国。但安世高所译二种。其《舍头谏经》已经亡失，无由考证。梁慧皎《高僧传》称："安世高七曜五行……无不综达。"梁释僧祐《出三藏记集传》上卷第十三称："安清字世高……七曜五行之象，……悉穷其变。"则安世高固亦通达七曜也。上述其他四种同本异出者，以竺律炎共支谦译本为较详，唐智升《开元释教录》(公元730年)卷二称：竺律炎以吴孙权黄龙二年

庚戌(公元230年)于杨都(武昌)译《摩登伽》等经四部是也。

吴译《摩登伽经》卷上末称:

今当为汝复说七曜:日,月,荧惑,岁星,镇星,太白,辰星,是名为七。罗联、彗星,通则为九。

其卷下末称:

日,月,荧惑,辰星,岁星,太白,镇星,是为七曜。

其岁星者,于十二岁始一周天。

其镇星者,于二十八岁乃一周天。

太白岁半始一周天。

荧惑二岁始一周天。

辰星一岁乃一周天。

凡岁三百六十五日,曰一周天。

月三十日乃一周天。

此是七曜周天数法。

是七曜名义至迟于黄龙二年(公元230年)输入中国。

复次则高齐天竺三藏那连提那舍译《大方等大集经》,其卷五十六月藏分第十二星宿摄受品第十八,于七曜次序称:

所言曜者,有于七种:一者日,二者月,三者荧惑,四者岁星,五者镇星,六者辰星,七者太白星。

《自摩登伽经》(公元230年译)七曜名义输入之后,七曜术普行于中国。晋袁山松至称:"刘洪……作七曜术。"[①]《晋书·天文

① 见《后汉书》律历志引

日本饭岛忠夫以为刘洪之乾象历,有月行迟疾之说,实本于西域人梵统。因《后汉书》律历志有:"永平中(58~74)梵统以史官候注考校,月行当有迟疾"之语。而宋徐铉《说文新附》称梵字出自西域,则梵统当为西域人。语见饭岛忠夫《支那古代史论》,第355~356页,大正十四年,日本东洋文库印本。

志》有"七曜"一目,陈自天嘉(公元560年)迄祯明(公元587年)并用《七曜历》,隋唐因之。《隋书·经籍志》天文类有《摩登伽经说星图》一卷,当时于《摩登伽经》之外,尚有《星图》行世。而僧侣亦有通历法者。

《魏书》卷八十四,卷一百十一,称:

> 以世行赵匪(即赵畋,撰《七曜历数算经》一卷)历,节气后辰下算,延昌中(512~515)李业兴乃为戊子元历。时张洪、张龙祥、李业兴、卢道虔、卫洪显、胡荣、樊仲遵、张僧豫,并雍州沙门统道融并上新历,乃以龙祥、业兴为主,成《正光历》。

沙门治历实始于此。隋唐前后中国历算专家如何承天、甄鸾、李淳风、僧一行辈与佛教徒尚多往来。

《新五代史》卷五十八《司天考》云:初,唐建中(780~783)时,术士曹士芳作《七曜符天历》谓之小历,只行于民间。郑樵《通志》载《曹公小历》一卷,唐曹(士)芳撰,李思议重注,本天竺历。明焦竑《国史经籍志》云:《曹公小宪》一卷,李思议重注,本《天竺》旧法。此为天竺历算流传中国之又一史料。日本留学僧宗叡于天平十八年(公元746年)赍回图书中有:《七曜禳灾决》一卷,《七曜二十八宿历》一卷。《七曜历日》一卷。而《七曜历日》一书记及七曜胡名[①],亦传自西域也。

时中原正盛行七曜历。故唐代作家时以"七曜"二字代表天文历算。如:

唐姚思廉《梁书》卷五称:"庾曼倩……梁世祖在荆州辟为主薄,……疏注算经,及七曜算术。"

《北史》卷八二、《隋书》卷七五并称:"刘焯隋开皇中与修国史,

---

① 今巴黎图书馆敦煌写本书第2693号有:《七曜历日》一卷。

兼参议律历,《九章算术》、《周髀》、七曜,历书十余部。"

《北史》卷八九、《魏书》卷九一并称:"殷绍达《九章》,七曜,太武(421～451)时为算生博士。"
即其例也。

《宿曜经》 唐北天竺国三藏不空(阿目佉跋折罗,Amoghavajra)译《宿曜经》曾言及七曜之胡名、波斯名、天竺名。胡即康居。按《大唐贞元续开元释教录》卷上称:不空译《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》二卷,"上卷前译,下卷后译,有序共四十纸"是也。

宋碛砂版《大藏经》内《宿曜经》卷上称:

内供奉三藏和尚不空奉诏译。

弟子上都草泽杨景风修注。

(不空)和尚以乾元二年(公元759年)翻出此本。端州司马史
瑶执受纂集,不能品序,使(文)义群猥,恐学者
难用,于是草泽弟子杨景风亲承
和尚指挥,使为修注,笔削已了,缮写奉行
凡是门人各持一本,于时岁次玄枵大唐
广德之二年(公元764年)也。①

---

① 以上六行据碛砂版《大藏经》本校。陕西公立第一图书馆藏《宿曜经》上卷其卷后有:

杭州路,普福寺僧师瑀谨抽衣资命工刊雕,
文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经上下二卷,
经板凭斯,
功德上报,
四恩下资三有,保持此世福基寿命各愿昌隆,他生智种善;
弟总令增长三宝光中吉祥如意者,
大德十一年(1307年)岁次丁未良月　日僧师瑀谨题。

七行。

频伽精舍校刊《大藏经》内《宿曜经》卷下称：

宿曜历经七曜直日历品第八，

夫七曜者，所谓日月五星，下直人间，一日一易，七日周而复始。其所用各各于事有宜有不宜者，请细详用之。忽不记得但当问胡及波斯并五天竺人总知。尼乾子、末摩尼常以密日持斋，亦事此日为大日。此等事持不忘，故今列诸国人呼七曜如后①：

日曜，太阳：胡名密（Mīr），波斯名曜森勿（Yeh Sumbad），天竺名阿弥泥以反底耶二合（Āditya）。

月曜，太阴：胡名莫（Māq），波斯名娄祸森勿（Douh Sumbad），天竺名苏上摩（Sōma）。

火曜，荧惑：胡名云汉（Wugān，或 Vahrām），波斯名势森勿（Sch Sumbad），天竺名粪盎声哦罗迦盎（Amgāraka）。

水曜，辰星：胡名咥丁逸反（Tīr），波斯名掣森勿（Chehar Sumbad），天竺名部引陀（Budha）。

木曜，岁星：胡名鹘勿（Wrmzt 或 Hyr mnzd），波斯名本森勿（Penj Sumbad），天竺名勿哩诃婆跛底丁以户（Vrhaspati）。

金曜，太白：胡名那歇（Nāgit），波斯名数森勿（Shesh Sumbad），天竺名戍羯罗（Sukra）。

土曜，镇星：胡名枳院（Kēwât 或 Kevān）；波斯翕森勿（Haft Sumbad），天竺名赊乃以室析啰（Sanaiścara）。

就中七曜胡名、天竺名时有异译。如伯希和、羽田亨《敦煌遗书》中《七曜历日》一卷内七曜胡名作：密、莫空、云汉、嘀日、温没斯、那溢、鸡缓。至以密日持斋，事此日为大日，则隋唐以后尚复盛行。巴

① 《宿曜经》卷下据频伽精舍校刊《大藏经》本。因陕西藏缺下卷。

黎图书馆敦煌写本书第 2704 号有:《华文历书》一卷,当为十世纪时物。惟存十月后半月,及十一、十二两全月。谓星期日曰密,用朱色书①。唐义净译《佛说大孔雀呪王经》卷下,七曜天竺名作:阿婭底、苏摩、鸯伽迦、部陀、苾栗诃飒钵底、东羯罗、珊尼折攞②。

其见于记载者,则《通志》卷六十八《艺文略》称《七曜历》三十部六十七卷:

《七曜本起》三卷,后魏甄叔遵撰。

《七曜小甲子元历》一卷,

《七曜历术》一卷,

《七曜历法》一卷,

《七曜历算》二卷,

《七曜要术》一卷,

陈天嘉(560~565)《七曜历》七卷,

陈永定(557~559)《七曜历》四卷,

《推七曜历》一卷,

陈天康二年(公元 566 年)《七曜历》一卷,

陈光大元年(567~568)《七曜历》一卷,

陈太建年(569~582)《七曜历》十三卷,

陈至德年(583~586)《七曜历》二卷,

陈祯明年(587~589)《七曜历》二卷,

(隋)开皇(581~600)《七曜年历》一卷,

仁寿二年(公元 602 年)《七曜历》一卷,

---

① 见法国伯希和编,吴江陆翔译《巴黎图书馆敦煌写本书目》,《国立北平图书馆馆刊》,第七卷,第六号。民国二十二年(1933 年)十一,二月。北平。

② 唐三藏法师义净于神龙元年(公元 705 年)在东都内道场译《佛说大孔雀呪王经》三卷。

《七曜历经》四卷，张宾撰，

《七曜历数算经》一卷，赵敺撰，

《七曜历疏》一卷，（魏）李业兴撰，

《七曜义疏》一卷，李业兴撰，

《七曜术算》一卷，甄鸾撰，

《七曜杂术》二卷，刘孝孙撰，

《七曜历疏》五卷，太史令张胄元撰，

《七曜符天人元历》一卷，曹士蒍撰

《人天定分经》一卷，

《地轮七曜》一卷，吕佐周撰，

《七曜气神歌诀》一卷，庄守德撰，

《七曜气神歌诀》一卷，

《七政长历》三卷。

唐僧一行亦治七曜术，著有：《大日经疏》二十卷，《七曜星辰别行法》一卷，《梵天火罗九曜》一卷（此书曾见《日本宝物集》引）。

3. 三等数法

中国古代大数记数法，在万以上有亿，兆，经（京），垓（姟，晐），秭，选，载，极诸字。孔注《周礼》：数者十，百，千，万，亿，兆也。《太平御览》卷七百五十及《一切经音义》卷二十七引《风俗通》云："十十谓之百，十百谓之千，十千谓之万，十万谓之亿，十亿谓之兆，十兆谓之经（京），十经（京）谓之垓（姟），十垓谓之秭，十秭谓之选，十选谓之载，十载谓之极"是也。是《风俗通》以十进位矣。《逸周书·世俘篇》："凡武王俘商旧玉亿有百万。"王念孙《读书杂志》卷一之二据抄本《北堂书钞》衣冠部二、《艺文类聚》宝部上、《太平御览》珍宝部三、《初学记》器物部佩下并作"亿有八万"，以证古代："十万为

亿。”颜师古于注《前汉书》亦称十万曰亿，此古说也。至《礼记·内则》“降德于兆民”疏引：“《算法》：亿之数有大小二法，小数以十为等，十万为亿；大数以万为等，万万为亿也。”故当时注经，二法并用。如后汉郑玄注《诗经》楚茨、假乐，及孔传《尚书》五子之歌，皆云：“十万曰亿，十亿曰兆。”而郑玄注《礼记·内则》又作：“万亿曰兆。”即其例也。亦有专用万进者，如晋杜预注《左传》：“万万曰亿，万亿曰兆。”三国吴韦昭注《国语》：“万万兆曰垓。”因万兆曰京，万京曰垓，故云万万兆曰垓也。《前汉书·律历志》第一下称：“一亿三千四百八万二千二百九十七”，“一亿二千二百二万九千六百五分”，及《孙子算经》卷上称：“五亿一千六百五十六万六百五十二”，“四十六亿四千九百四万五千八百六十八”，以万万为亿，亦为万进。是在汉代以后万以上有十进与万进二法矣。

其在《算经十书》中《数术记遗》及甄鸾《五经算术》卷上并称：

黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。十等者，谓亿，兆，京，垓，秭，壤，沟，涧，正，载也。

三等者谓上中下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。

《算经十书》中《孙子算经》卷上又称：

凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京，万万京曰陔，万万陔曰秭，万万秭曰壤，万万壤曰沟，万万沟曰涧，万万涧曰正，万万正曰载。

《一切经音义》卷一亦称历算中数万万变名。是在南北朝时万以上有十进，万万进，倍进三法矣。

三等数法之说在甄鸾撰注算经之前。因甄鸾曾注董泉《三等

数》,《日本国见在书目》(《古逸丛书》之十九)尚有《三等数》一卷。唐费长房《历代三宝记》(公元 597 年)卷第十二、《大唐内典录》卷五引隋刘凭[①]《外内傍通·比较数法》序亦称:"……华(一作东)夏数法,自有三等之差,……"是也。

至佛典输入之后,又有百进之说。唐慧琳《一切经音义》卷八引:"《佛本行经》,一百千是名俱胝(Koti),百俱胝名阿由多(Ayuta),此当千亿,百阿由多名那由他(Kayuta),此当万亿"是也。唐慧琳《一切经音义》卷二十二注《华严经》卷四十五"阿僧只品"称:"……又案此方《黄帝算法》总有二十三数,谓:一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,百,千,万,亿,兆,京,垓,秭,壤,沟,涧,正,载。从万已去,有三等数法:其下者十十变之,中者百百变之,上者倍变之。今案此经十,百,千,万,十十变之,从万至亿,百倍变之,从亿已去,皆以能数量为一数,复数至与能量等。"又同书卷二十五引:"……依经说,亿有三种数法,若依下数,十万为亿,……若依上数,万万为亿。"又同书卷二十七引:"《笇经》:黄帝为数,法有十等,谓亿,兆,京,垓,壤,秭,沟、涧,正,载。及其用也有三,谓上中下。下数十万曰亿,中数百万曰亿,上数万万曰亿。"《续一切经音义》承《一切经音义》旧说,于卷二注称:"或十万为一洛叉,百万为一洛叉,或万万为一洛叉。依此方《孙子算经》云十十为百,十百为千,十千为万。自万至亿有三等,上中下数变之也。依《黄帝算经》总有二十三数,谓一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,百,千,万,亿,兆,京,姟,秭,壤,沟、涧,正,载也。亦从万已去,有三等数,谓其下十十变之,中者百百变之,上者亿亿变之。"其卷三注又称:"案《黄帝算经》有二十三数,自万已去,皆有上中下三等数也。谓万,亿,兆,京,

① 刘凭《法范珠林》卷一百,作刘凭,同;《续高僧传》作刘冯。

姟，秭，壤，沟，涧，正，载也。下数十十变之，中数百百变之，上数亿亿变之。”是唐代又有十进、百进、倍进之说矣。

案十进、万进为吾国旧法，至南北朝之十进、万万进、倍进，及唐代之十进、百进、倍进，则多少受佛典之影响。因《华严经》始译于晋(398～412)，再译于唐(公元699年)，所举数法为“倍倍变之”；《俱舍论》始译于陈(公元567年)，再译于唐(公元651年)，所举数法为“十十变之，百百变之”。而甄鸾《五经算术》，及《数术记遗》、《孙子算经》并在《华严经》、《俱舍论》二书始译之后也。

《大方广佛华严经》六十卷，东晋北天竺三藏佛驮跋陀罗(Buddhabhadra，357～429)于义熙十四年于道场寺出，至宋永初二年方讫(398～421)。又《大方广佛华严经》八十卷，唐于阗国三藏实义难陀(Siksānanda)奉诏译，于圣历二年(公元699年)译成。前者称为晋译本，后者称为唐译本。唐译本卷四十五、卷六十五并称：“一百洛叉(Laksa)为一俱胝(Koti)，俱胝俱胝为一阿庾多(Ayuta)，阿庾多阿庾多为一那由他。”盖倍倍变也。其晋译、唐译名义异同之处如下：

晋译《华严经》卷二十九	唐译《华严经》卷四十五	唐译《华严经》卷六十五
拘梨	俱胝(Koti)	俱胝
不变	阿庾多(Ayuta)	阿庾多
那由他	那由他(Kayuta)	那由他
鞞波逻	频波罗(Bimbara)	—
作	矜羯罗(Kainkara)	—
来	阿伽罗	—
胜	最胜	—
复次	摩婆罗	—
阿婆罗	阿婆罗	—
得胜	多婆罗	—

分界	界分	—
充满	普摩	—
量	祢摩	—
解	阿婆钤	—
此解	弥伽婆	—
离欲	毗攞伽	
捨	毗伽婆	—
聚	僧罗摩	—
通	毗萨罗	—
频申	毗矮婆	—
纲	毗盛伽	—
众流	毗素陀	—
出	毗婆诃	—
分	毗薄底	—
分别	毗佉担	—
称	称量	—
持	持	—
不颠倒	异路	—
不皤	颠倒	—
正	三末耶	—
慧	毗靓罗	—
第一	奚婆罗	—
觉	伺察	—
毗遮妒	周广	—
极高	高出	—
妙	最妙	—
逻婆	泥罗婆	—
诃梨婆	诃理婆	—
解脱	一动	—
黄	诃理蒲	—
诃梨那	诃理三	—
因	奚鲁伽	—

贤觉	达攞步陀	一
明相	河鲁那	一
摩楼陀	摩鲁陀	一
忍	忏纂陀	一
枝	医攞陀	一
摩楼摩	摩鲁摩	一
等	调伏	一
离疑	离憍慢	一
种	不动	一
不放逸	极量	一
摩多罗	阿麼怛罗	一
动	勃麼怛罗	一
到	伽麼怛罗	一
说	那麼怛罗	一
白	奚麼怛罗	一
了别	鞞麼怛罗	一
究竟	钵麼怛罗	一
清凉	尸婆麼怛罗	一
阿罗	翳罗	一
潮	薜罗	一
油	谛罗	一
祇逻	偈罗	一
味	窣步罗	一
泥逻	泥罗	一
戏	计罗	一
斯罗	细罗	一
聚沫	睥罗	一
弥罗	谜罗	一
坚固	娑攞荼	一
风	谜鲁陀	一
满	契鲁陀	一
不可称量	摩睹罗	一

根	娑母罗	—
微细	阿野娑	—
莲华	迦麽罗	—
摩伽婆	摩伽婆	—
不可度	阿怛罗	—
醯楼	醯鲁耶	—
语	薜鲁婆	—
刧	羯罗波	—
婆婆	诃婆婆	—
间	毗婆〔上声〕罗	—
无间	那婆罗	—
离垢	摩攞罗	—
实胜	婆婆罗	—
弥罗覆	迷攞普	—
遮摩罗	者麽罗	—
法	驮麽罗	—
波罗摩驮	钵攞麽陀	—
决定	毗伽摩	—
流转	乌波跋多	—
广说	演说	—
无尽	无尽	—
等真实	出生	—
无我	无我	—
阿槃陀	阿畔多	—
青莲华	青莲华	优钵罗
	钵头摩	波头摩
数	僧祗	僧祗
趣	趣	趣
受	至	谕
阿僧祗	阿僧祗	无数
阿僧祗转	阿僧祗转	无数转
无量	无量	无量

无量转	无量转	无量转
无分齐	无边	无边
无分齐转	无边转	无边转
无周编	无等	无等
无周编转	无等转	无等转
无数	不可数	不可数
无数转	不可数转	不可数转
不可称	不可称	不可称
不可称转	不可称转	不可称转
不可思议	不可思	不可思
不可思议转	不可思转	不可思转
不可量	不可量	不可量
不可量转	不可量转	不可量转
不可说	不可说	不可说
不可说转	不可说转	不可说转
不可说转转	不可说不可说	不可说不可说
	不可说不可说转	不可说不可说转

《阿毗达磨俱舍释论》二十二卷，婆薮盘豆(Vasubandhu)造，陈天竺三藏真谛(Paramartha)于广州译，陈光大元年(公元 567 年)十二月二十五日译成，又《阿毗达磨俱舍论》三十卷，尊者世亲(Vasubandhu)造，唐三藏法师玄奘永徽二年(公元 651 年)年五月十日于大慈恩寺翻经院译，至五年(公元 654 年)七月二十七日毕，沙门元瑜笔受。[①] 前者称为陈译本。后者称为唐译本。并兼十进及百进，例如十洛沙为阿底洛沙，百洛沙为俱胝，余仿此。其陈译、唐译名义异同之处如下：

陈译《俱舍论》卷九	唐译《俱舍论》卷十二
一	一
十	十

① 见《大唐内典录》卷七，及《开元释教录》卷八。

百	百
千	千
万	万
洛沙(Laksa)	洛叉
阿底洛沙	度洛叉
俱胝(Koti)	俱胝
末持诃(Madhya)	末陀
阿由多(Ayuta)	阿庾多
摩阿由多	大阿庾多
那由多(Kayuta)	那庾多
摩阿那由多	大那庾多
婆由多(Parāyuta)	钵罗庾多
摩阿婆由多	大钵罗庾多
郁僧伽(Kainkara)	矜羯罗
摩剡僧伽	大矜羯罗
波诃那(Bimbara)	频跋罗
摩阿婆诃那	大频跋罗
知知婆(Aksobhya)	阿刍婆
摩阿知知婆	大阿刍婆
醯兜(Vimvara)	毗婆诃
摩阿醯兜	大毗婆诃
柯罗婆	嗢蹭伽
摩阿柯罗婆	大嗢蹭伽
因陀	婆喝那
摩头陀	大婆喝那
婆末多	地致婆
摩阿婆末多	大地致婆
伽知	醯都
摩阿伽知	大醯都
纴婆	羯腊婆
摩阿纴婆	大羯腊婆
物陀	印达罗

摩阿物陀	大印达罗
婆罗	三摩钵躭
摩阿婆罗	大三摩钵躭
社那	揭底
摩阿社那	大揭底
毗休多	拈筏罗阇
摩阿毗休多	大拈筏罗阇
婆洛沙	姥达罗
摩阿婆洛沙	大姥达罗
阿僧祇	跋蓝
—	大跋蓝
—	珊若
—	大珊若
—	毗步多
—	大毗步多
—	跋逻搀
—	大跋逻搀
—	阿僧企耶

下至元代，朱世杰于《算学启蒙》(1299 年)大数记法，于载以上，有“极”、“恒河沙”、“阿僧祇”、“那由他”、“不可思议”、“无量数”六名，虽于原义无当，盖亦取自佛典也。

4. 天竺小数记法

天竺小数记法，亦于元魏以后输入中国。其说数见于：《大般若波罗密多经》，《大波罗密多经》，《大方广佛华严经》，及《大宝积经》，而以《大宝积经》所记为尤详。从亿以上，亦“倍倍变之。”《大宝积经》据《开元释教录》卷七，八，九，则东魏中天竺优弹尼国王子月婆首那(Upasunya，陈云高空)于兴和三年(公元 541 年)于骠骑大将军左仆射内侍中司徒公孙腾第译《摩诃迦叶经》二卷，今编入《大

宝积经》中。又北周阇那崛多(Jinagupta)天和六年(公元 571 年)译三卷。至唐南天竺人菩提流支(Bodhiruci,唐言法希)于神龙二年(公元 706 年)创首,先天二年(公元 713 年)功毕,译《大宝积经》一百二十卷。唐于阗国沙门实叉难陀(Siksānanda,唐云学喜)于久视元年(公元 700 年)于西京清祥寺,东都授记寺译《大宝积经》等十九部,唐玄奘亦译出数卷。

今将各译本次序胪列后方,以见《大宝积经》中小数记法,虽各译本所记,互有详略,其次序或未能确定,盖亦采"倍倍变之"之记法也。

《大宝积经》:

卷八八,八九, 元魏月婆首那译。	卷八一, 北周阇那崛多译。	卷二,一七,二〇,九五, 唐菩提流支译; 卷六〇, 唐实义难陀译; 卷三七,四六 唐玄奘译。
百分	百分	百分
千分	千分	千分
百千分	百千分	百千分
亿分	俱致分	拘胝分
百亿分	百俱致分	百拘胝分
千亿分	千俱致分	千拘胝分
百千亿分	百千俱致分	百千拘胝分
那由他分	那由他分	那由他分
百那由他分	—	—
千那由他分	—	—
百千那由他分	—	—
亿那由他分	—	—
百亿那由他分	—	—

千亿那由他分	—	—
百千亿那由他分	—	—
阿僧祇分	—	—
—	—	僧佉分
—	哥罗分	迦罗分，歌罗分
—	—	伽拿那分
—	—	沤波摩分，乌波摩分
—	邬波尼沙陀分	邬波尼杀昙分
算分	算分	
数分	数分	
譬喻分	譬喻分	
不可数分		

及至元代，朱世杰于《算学启蒙》(1299 年)卷首，录小数之类有"一，分，毫，丝，忽，微，纤，沙；万万尘曰沙，万万埃曰尘，……"之语，其一至沙为十进；沙，尘，埃，渺，模糊，逡巡，须臾，瞬息，弹指，刹那，六德，虚，空，清，净，等十五名，皆从万万进，则又采甄鸾中数之法也。

5. 甄鸾撰注算经

甄鸾字叔遵[①]，《夏侯阳算经》言斛法不同，谓梁大同元年(公元 535 年)甄鸾校之。《隋书·律历志上》引《甄鸾算术》云：玉升一升，得官斗一升三合四勺。按玉升于周保定五年(公元 565 年)颁行，是甄鸾尚入仕于周也。《隋书·律历志中》称周武帝将(661～577)造《天和历》。《隋书·经籍志》有《周天和年历》一卷，为甄鸾天和元年(公元 566 年)所定历书。甄鸾又通释典，受佛教影响甚深，其注《数术记遗》引《楞伽经》及《华严经》，《隋书》有后魏甄叔遵《七

① "《隋书·经籍志》：(后魏)甄叔遵撰《七曜本起》三卷，《新唐书·艺文志》：《七曜本起历》五卷，甄鸾撰，叔遵或即鸾之字也。"见黄鍾骏《畴人传四编》卷三，第 13 页，光绪戊戌(1898 年)家刻本。

曜本起》三卷,《旧唐书》有《七曜本起历》二卷,未著撰人,疑与《新唐书》《七曜本起历》同为甄鸾所撰,其"本起"一名,亦为佛教名词。周武帝世既崇道法,欲齐三教,时俗纷然,甄鸾乃撰《笑道论》为佛教张目,事见《法苑珠林》卷一百,及《历代三宝纪》卷十一,时在天和四、五年(569～570)。建德三年(公元573年)武帝复集群臣及沙门、道士等,帝升高座,辨释三教先后。以儒教为先,道教为次,佛教为后①。甄鸾他崇奉佛教,不为时流所重,其后乃不闻名。其官职则《法苑珠林》称《笑道论》三卷,周朝武帝敕前司隶毋极伯甄鸾撰,《历代三宝记》作司隶大夫甄鸾,现行本《笑道论》作前司隶毋极县开国伯甄鸾,现行本《数术记遗》作汉中郡守司隶校尉甄鸾注。

甄鸾撰注《算经》,各书所载,互有详略,兹引列如下,以备考证。

《九章》

《九章算经》九卷,甄鸾撰, (《旧唐书》)

《九章算术》二卷,徐岳撰,甄鸾重述, (《通志略》)

《九章算经》二十九卷,徐岳,甄鸾等撰, (《通志略》)

《孙子》

《孙子算经》口卷,甄鸾注, (《一切经音义》)

《孙子算经》三卷,甄鸾撰注, (《旧唐书》)

《孙子算经》三卷,甄鸾撰,李淳风注, (《新唐书》)

《孙子算经》三卷,甄鸾撰,李淳风注, (《通志略》)

《五曹》

《五曹算经》五卷,甄鸾撰, (《旧唐书》)

《五曹算经》三卷,甄鸾撰, (《旧唐书》)

《五曹算经》五卷,甄鸾撰, (《日本国见在书目》)

---

① 见《周书》卷五。

甄鸾《五曹算经》五卷，（《新唐书》）

《五曹算经》五卷，甄鸾撰（《通志略》）

甄鸾《五曹算术》二卷，（《宋史》）

李淳风注，甄鸾《五曹算经》一卷，（《宋史》）

《张丘建》

《张丘建算经》一卷，甄鸾撰，（《旧唐书》）

《张丘建算经》三卷，甄鸾注，（《直斋书录解题》）

《张丘建算术》三卷，甄鸾注，李淳风注释，刘孝孙细草。（《通考》）

《夏侯阳》

《夏侯阳算经》三卷，甄鸾注，（《旧唐书》）

《周髀》

《周髀》一卷，甄鸾重述，（《隋书》，《通志略》）

《周髀》一卷，甄鸾注，（《旧唐书》）

《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释，（《崇文总目及《中兴馆目》）

《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释，（《玉海》及《通考》）

《五经》

《五经算术》一卷，甄鸾撰，（《通志略》）

《五经算术》二卷，甄鸾注，李淳风注释，（《玉海》引《书目》）

甄氏《五经算术》，（元程瑞礼《读书分年日程》）

《纪遗》

《数术记遗》一卷，徐岳撰，甄鸾注，（《旧唐书》）

甄鸾注，徐岳《大衍算术注》一卷（《宋史》）

《三等数》

《三等数》一卷，董泉撰，甄鸾注，

(《日本国见在书目》，《旧唐书》)

《海岛算经》

《海岛算经》一卷，甄鸾撰，李淳风等注释。

(《玉海》)

《甄鸾算术》

《甄鸾算术》云：周朝市尺，得玉尺九分二厘，

(《隋书》)

《甄鸾算术》云：玉升一升，得官斗一升三合四勺，

(《隋书》)

其不关算数者，有：

《周天和年历》一卷，甄鸾撰， (《隋书·经籍志》)

《七曜术算》一卷，甄鸾撰， (《隋书·经籍志》)

《七曜术算》一卷，甄鸾撰， (《通志》)

《七曜历算》二卷，甄鸾撰，

(《旧唐书·经籍志》，《新唐书·艺文志》)

《历术》一卷，甄鸾撰，

(《旧唐书·经籍志》，《新唐书·艺文志》)

《七曜本起》三卷，后魏甄叔遵撰

(《隋书·经籍志》，《通志》)

《七曜本起历》二卷，未著撰人，

(《旧唐书·经籍志》)

《七曜本起历》五卷，甄鸾撰，(《新唐书·艺文志》)

《笑道论》三卷，甄鸾撰，

(《法苑珠林》，《历代三宝纪》，《通志》)

《帝王世录》一卷，甄鸾撰

（《隋书·经籍志》，《通志》，《开元释教录》[①]）

《年纪》，甄鸾及王道珪撰。　　（《开元释教录》[②]）

6. 婆罗门天文

《隋书》卷三十四《经籍志》记：

《婆罗门天文经》二十一卷，"婆罗门舍仙人所说"，

《婆罗门竭伽仙人[③]天文说》三十卷，

《婆罗门天文》一卷，

《婆门罗算法》三卷，

《婆罗门阴阳算历》一卷，

《婆罗门算经》三卷。

其后《通志》、《清通志》并引及之。而《日本国见在书目》（《古逸丛书》之十九）尚记有《婆罗门阴阳算历》一卷。

据《旧唐书》卷一九八称："天竺国即汉之身毒，或云婆罗门地也，……其中分五天竺，……有文字，善天文历算之术。"又《隋书·经籍志》称："自后汉佛法行于中国，又得西域胡书，能以十四字贯一切音，文省而义广，谓之婆罗门书。"同书有《婆罗门书》一卷，注称：梁有《扶南胡书》一卷是也。是时婆罗门文字已输入中国，故其

---

① 《开元释教录》卷四称："前凉张氏，都姑藏（新上余录无年，依《甄鸾录》，多从晋年号）。"所谓《甄鸾录》，当即甄鸾《帝王世录》也。

② 《开元释教录》卷十二引甄鸾及王道珪《年纪》："（梁）至绍泰二年（公元 556 年）丙子改为太平元年（公元 556 年），太平二年（公元 557 年）丁丑改为永定元年（公元 557 年），陈霸先立号为陈国。"《年纪》一书，未见他处著录，甄鸾生于是时，宜其所记较详也。

③ 据佛典：竭伽又作竭伽仙，竭罗伽，揭伽，揭瞿，为古仙人名。《大日经疏》十六称："竭伽仙者，山名　约处得名。"

天文历算亦可同时输入。

《隋书·经籍志》所记婆罗门天文算书六种,除《日本国见在书目》记有《婆罗门阴阳算历》一卷外,今考唐费长房《历代三宝记》(公元597年)卷三称:"周天和四年己丑(公元569年)《婆罗门天文》二十卷,达摩流支(Dharmaruci,周曰法希)出。"同书卷十一又称:"《婆罗门天文》二十卷,天和年出,右二十卷,(北周)武帝世摩勒国(Malasa?)沙门达摩流支,周言法希为大冢宰晋荡公宇文护[①]译。"《大唐内典录》(公元664年)卷五所记亦同。是则《历代三宝记》所记《婆罗门天文》二十卷,及《隋书·经籍志》所记《婆罗门天文》二十一卷,当为一书。且可因此知其译成时代。至其亡失之故,可于《开元释教录》(公元730年)卷七知之。《开元释教录》卷七注称:"《婆罗门天文》二十卷,今以非三藏教,故不存之。"此书既不入《藏经》,故不久即行亡失。

7. 九执名义

九曜名义,曾于吴黄龙二年(公元230年)竺律炎及支谦共译之《摩登伽经》一度述及,盖日,月,荧感,岁星,镇星,太白,辰星七曜之外,益以罗睺,彗星,则成九曜。案九执实与九曜同义,执者执持之义,随逐诸曜日时,而不相离也[②]。僧一行《大日经疏》[③]四称:"执有九种,即有日,月,水,火,木,金,土,七曜,及与罗睺,计都,合

---

① 《周书》卷十一,有晋荡公护传。

② 《见佛学大辞典》第164页,民国十年(1921年)上海医学书局。

③ 《大日经》本名大毘卢遮那《成佛神加持经》。

《大日经疏》,唐善与畏三藏为玄宗皇帝讲说本经,一行阿阇梨记之,日本现存二种:(一)日本弘法携回者,二十卷,称《大日经疏》,(二)日本慈觉携回者,十四卷,称《大日经义释》。

为九执。罗睺是交会蚀神，计都正翻为旗旗星即彗星也。除此二执之外，其余七曜，相次直日，其性类有善恶，如《梵历》中说。”① 《续一切经音义》卷六于《最胜无比大威德金轮佛顶炽盛光陀罗尼经》内“罗睺”(Rāhu)注称：“今云罗睺即梵语也，或云摆护，此云暗障，能障日月之光，即暗曜也。”又“计都”(Ketu)注称：“亦梵语，或云鸡兜，或云计覩，此云蚀神，亦暗曜也。案罗睺，计都，常隐不见，遇日月行次即蚀，亦名达坠二曜也。”

佛典记及九曜者，有：

《大孔雀明王经》，

《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》，

《佛说炽感光大威德消灾吉祥陀罗尼经》，

而以前二种所记为尤详。

《大孔雀明王经》(*Mahā-māyūri vidyā-rājñī*)，据梁僧祐《出三藏记集》卷二，隋法经《众经目录》(公元 594 年)卷一，翻经沙门及学士等《众经目录》卷一、二，《大唐内典录》(公元 664 年)卷三、四、六、九，《大周刊定众经目录》卷五，唐释靖迈《古今译经图记》卷二，《开元释教录》(公元 730 年)卷三、四、六、九、十四、十八、十九，《开元释教录略出》卷二，《大唐贞元续开元释教录》卷上、卷下，知《大孔雀明王经》古今共有九种译本，如下：

(一)《大孔雀王神呪经》一卷或二卷。

东晋元皇帝时(317～336)，一作成康年(335～340)西域龟兹沙门帛・尸利密多(Po Srimitra 译曰吉友)译。

(二)孔雀王杂祥呪一卷，

同上，帛・尸利密多译。

① 见《佛学大佛典》第 164 页，民国十年(1921 年)上海医学书局。

(三)《孔雀王呪经》一卷,

东晋孝武帝时(373～396)西域沙门昙无兰(Dharmaranya,译曰法正)译。

(四)《孔雀王呪经》一卷,

姚秦龟兹三藏鸠摩罗什(Kumarajira,译曰童寿),以弘治四年壬寅(公元342年),至十四年壬子(公元352年)译大品小品金刚等经七十四部,三百八十余卷,《孔雀王呪经》亦在其中。

(五)《大金色孔雀王呪经》一卷,

失译人名,今附秦录。

(六)《佛说大金色王呪经》一卷,

失译人名,今附秦录。

(七)《孔雀王呪经》二卷,

梁扶南三藏僧伽婆罗(Sainghāpala,译曰众养),于梁天监十五年(公元516年),在杨都占云馆及正观寺译。

(八)《佛说大孔雀呪王经》三卷,

唐三藏法师义净于神龙元年(公元705年)在东都内道场译。

(九)《佛母大孔雀明王经》三卷,

唐大兴善寺三藏沙门不空译。据《大唐贞元续开元释教录》卷下记:大历七年(公元772年)不空奏《大孔雀明王经》三卷,为玄宗、肃宗至代宗大历七年(713～772)翻译经论之一。

就中义净、不空译本曾记及九执。义净采音译,不空采意译,今将两译对照附列如下:

义净译《佛说大孔雀呪王经》	不空译《佛母大孔雀明王经》

卷下	卷下
“阿难陀汝当忆识有九种执持天神名号，此诸天神于二十八宿巡行之时，能令昼夜时有增减，亦令世间丰俭苦乐，预表其相，其名曰：	“阿难陀汝当念有九种执曜名号，此执曜天巡行二十八宿之时，能令昼夜时分增减，世间所有丰俭苦乐，皆先表其相，其名曰：
阿侄底(日)，苏摩(月)，蕊栗诃一	日，月，及荧惑，辰星，并太白，
飒沫底(木)，束羯摆(金)， 珊尼折摆(土)，鸯伽迦(火)， 部陀(水)，曷逻虎，(罗睺)鸡覩(慧)。	镇，及罗睺彗，此皆名执曜
此九执持天神有大威力，彼亦以此大孔雀呪王常拥护我某甲并诸眷属寿命百年	此等九曜有大威力，能示吉凶，彼亦以此佛母大孔雀明王常拥护我“某甲”，并诸眷属，寿命百年，复以伽陀赞诸星宿。
星有二十八　七各居四方 执星复有七　加日月成九 总有三十七　勇猛大威神 出没照世间　示其善恶相 与世为增减　有势大光明 各以清净心　于此呪随喜”	宿有二十八　四方各居七 执曜复有七　加日月为九 总成三十七　勇猛大威神 出没照世间　示其善恶相 令昼夜增减　有势大光明 皆以清净心　于此明随喜”

其次唐代失译《佛说大威德金轮佛顶炽盛光如来消除一切灾难陀罗尼经》，及不空译《佛说炽盛光大威德消灾吉祥陀罗尼经》，亦言及九曜，今亦将两译对照附列如下：

唐代失译《陀罗尼经》	不空译《陀罗尼经》。
“尔时释迦牟尼佛，住净居宫告	“尔时释迦牟尼佛，在净居天

文殊师利菩萨摩诃萨，及诸四众，八都游空大天九执，七曜，十二宫神，二十八宿，日月诸宿，……”

宫，告诸众曜游空天众，九执大天，及二十八宿，十二宫神，一切圣众，……”

唐代失译本《陀罗尼经》且于九曜真言，附有九曜汉梵译名。

杨景风于广德二年（公元 764 年）注《宿曜经》卷上第三称“景风曰：案太史有旧翻九执宿命占……”，瞿昙悉达《开元占经》卷一百〇四有“天竺九执历经”，即写《九执历》也。《新唐书》、《玉海》并称开元六年（公元 718 年）诏瞿昙悉达译《九执历》，时《麟德历》尚未废也。

与《九执历》同时输入者，为西域笔算，《开元占经》卷一百〇四举“算字法样”称：

“一字 二字 三字 四字 五字 六字 七字 八字 九字

□ □ □ □ □ □ □ □ □

右天竺算法，用上件九个字，乘除，其字皆一举札而成，九数至十，进入前位，每空位处，恒安一点，有间咸记，无由辄错，连算便眼，……”

此与《新唐书》卷二十八下《历志》所称：“《九执历》者，出于西域，……其算皆以字书，不用筹策。”同为一事，足证笔算由《九执历》连带输入。

8. 瞿昙氏历

唐广德二年（公元 764 年）杨景风注《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》卷上第三称：

“景风曰：凡欲知五星所在者，

天竺历术，推知同宿，具知也，

今有迦叶氏(迦叶波,Kacyapa,译言饮光)①,瞿昙氏(瞿昙罗,Gautama,译言地最胜)②,拘摩罗(亦作鸠摩罗,Kumara,译言童子)③,等三家天竺历

(并)掌在太史阁,然今之用,多瞿昙氏历,与本

(术)相参

(供)奉耳"④

按《新唐书》卷二十九《历志》略称:德宗时诏司天徐承嗣与夏官正杨景风等杂《麟德》、《大衍》之旨,治新历,称《建中正元历》,以兴元元年(公元784年)颁行,迄元和元年(公元806年)。杨氏时亦在司天台,其言当时三家天竺历掌在太史阁与本术相参供奉,似尚可信,因瞿昙氏历当时多用,故在《新唐书》、《旧唐书》等书尚可得关于瞿昙氏之记事。是时服务司天台者,前后计有(一)瞿昙谦,(二)瞿昙罗,(三)瞿昙悉达,(四)瞿昙撰诸人。

(一)瞿昙谦

《旧唐书·艺文志》有《大唐甲子元辰历》一卷,瞿昙撰,《新唐书·艺文志》有瞿昙谦《大唐甲子元辰历》一卷,《通志》有《唐甲子元辰历》一卷,瞿昙谦撰,列唐《麟德历》一卷之后。按《麟德历》亦称《麟德甲子元历》,为李淳风造,以麟德二年(公元665年)颁行,《旧唐书·历志》称:"高宗时太史奏旧历加时寖差,宜有改定,乃诏李淳风造《麟德历》,初隋末刘焯造《皇极历》,其道不行,淳风约之为

① 《一切经音义》:迦叶具云迦叶波,此云饮光也,天竺国之大姓也。

② 《姓纂》称瞿昙为西国姓名。《一切经音义》卷二十一,:瞿昙氏具云瞿答摩、言瞿者此云地也,答摩最胜也。谓除天以外,在地人类,此族最胜,故云地最胜也,……。

③ 见《西域记》十。

④ 此六行据碛砂版《大藏经》本校。

法，时称精密。”瞿昙谦之《甲子元辰历》与李淳风之《甲子元历》是否一事，今尚待考。

（二）瞿昙罗

瞿昙罗官司天台太史令凡三十余年，曾于麟德二年（公元665年）上《经纬历》，神功二年（公元698年）上《光宅历》。

按《新唐书》卷二十六《历志》称：“高宗时（650～683）《戊寅历》益疏，淳风作《甲子元历》以献，诏太史起麟德二年（公元665年）颁用，谓之《麟德历》，……当时以为密，与太史令瞿昙罗所上《经纬历》参行。……神功二年（公元698年）……命瞿昙罗作《光宅历》，将用之，三年（公元699年）罢作《光宅历》，复行夏时，终开元十六年（公元728年）。”而《旧唐书》卷三十二《历志》亦称：“天后时瞿昙罗造《光宅历》”。《旧唐书》卷四十七《经籍志》有“《大唐光宅历草》十卷”，《新唐书》卷五十九《艺文志》作南宫说《光宅历草》十卷。

《新唐书》卷四十七《百官志》称：“司天台，监一人，正三品，少监二人，正四品；……开元二年（公元714年）复曰太史监，改令为监，……”，故麟德二年（公元665年）尚称太史令瞿昙罗，又按《百官志》，司天台仅有太史令一人，则瞿昙罗实为之长，自麟德二年（公元665年）至神功二年（公元698年）服官凡三十余年矣。

（三）瞿昙悉达

《开元占经》卷一称：“唐景云三年（公元712年）诏银青光录大夫行太史令瞿昙悉达、正议大夫行太史令李仙宗、试太史令殷知易等修浑仪，先天二年（公元713年）仪成。”按开元二年方改令为监，故先天二年（公元713年）尚称太史令瞿昙悉达。

《玉海》称：开元六年（公元718年）诏瞿昙悉达译《九执历》。《新唐书》卷二十八下《历志》亦称：“《九执历》者出于西域，开元六年（公元718年）诏太史监瞿昙悉达译之，……其算皆以字书，不用

筹策，其术繁碎，或幸而中，不可以为法，名数诡异，初莫之辩也。陈玄景等持以惑当时，谓一行写其术，未尽，妄矣。”按开元二年（公元714年）已改令为监，故称太史监，将瞿昙氏尚任司天台长官也。

《大唐开元占经》卷一百四于“天竺九执历经”称：“臣等谨按《九执历法》，梵天所造，五通仙人承习传授。”亦明言其出自西域也。《九执历》所传九曜，乃合日月五行星及假定之龙首（Rāhu），龙尾（Ketu）二星而成，后之二星即《摩登迦经》（公元230年译）之罗睺、慧星。《大日经疏》四：“九执者梵音钝栗何（Graha），是执持义。”天竺以此九星为“九种执持天神名号”，“此九执持天神有大威力”[①]，是也。

《开元占经》，据《新唐书·艺文志》作：“大唐《开元占经》一百一十卷。瞿昙悉达集。”《宋史·艺文志》作瞿昙悉达《开元占经》四卷。《玉海》引《唐志》亦作一百一十卷，又注称“《国史志》四卷，《崇文目》三卷，一本一百二十卷”。现行本印作一百二十卷。

（四）瞿昙谍

《新唐书》卷二十七《历志》称：“开元九年（公元721年）《麟德历》署日蚀比不效，诏僧一行作新历，推大衍数以应之，较经史所书气朔日名宿度，可考者皆合，十五年（公元727年）草成，而一行卒（683～727）。诏特进张说与历官陈玄景等，次为历术七篇，略例一篇，历议十篇。玄宗顾访者则称制旨。明年（公元728年）说表上之。十七年（公元729年）颁于有司。时善算瞿昙谍者，怨不得预改历事。二十一年（公元733年）与玄景奏《大衍》写《九执历》，其术未尽，太子右司御率南宫说亦非之。诏待御史李麟，太史令桓执圭，较

① 见义净译（公元705年）《佛说大孔雀王呪经》卷下，及不空译《佛母大孔雀明王经》卷下。

灵台《候薄》,《大衍》十得七八,《麟德》才三四,《九执》一二焉,乃罪(南宫)说等。"《唐会要》卷四十四称"至宝应元年(公元 762 年)六月九日司天少监瞿昙(课)奏……"云云,则瞿昙谍在此时尚服官司天台也。

唐肃宗(756～762)以后虽历法屡改,但据杨景风广德二年(公元 746 年)所记则当时尚以瞿昙氏历及本术相参供奉,而瞿昙谍于宝应元年(公元 762 年)且服官司天台,亦足见其势力矣。

9. 摩尼敬天文人

摩尼教会于唐代流传中国①。《册府元龟》卷九一七云,开元七年(公元 719 年)"六月大食国(Arabes)吐火罗国(Tokharestan),康国,南天竺国遣使朝贡。其吐火罗国支汗那(Jaghāniyān)王帝赊(Tês)② 上表献解天文人大慕阇③。其人智慧幽深,问无不知。"《太平寰宇记》(公元 976 年至 983 年刊)卷一八六亦称:"开元七年(公元 719 年)其叶护④ 支汗那帝赊,上表献天文人大慕阇,请加试

---

① 关于摩尼教流传中国情形,参看:
王国维,摩尼教流行中国考,《亚洲学术杂志》,第二期,
陈垣,摩尼教入中国考,国立北京大学,《国学季刊》,第一卷第二号,第 203～240 页,民国十二年(1932 年)四月,
沙畹著,冯承钧译,《摩尼教流行中国考》,民国二十年六月,商务印书馆本。

② 沙畹(E. Chavannes)著,冯承钧译《摩尼教流行中国考》第 7 页,按:马尔迦特(Marquart)曾定其人为吐火罗之副王(Tês)。

③ 《摩尼教流行中国考》第 6 页,据戈提鄂(Ganthiot)之说,慕阇非人名,实为古波斯语 Moze 之译音,华言"师"也。又按喀喇巴耳加逊(Karabalgasonn)之九姓迴鹘可汗碑(《灵鹣阁丛书》中李文田之《和林金石录》第六页)有"慕阇徒众,东西循环,往来教化"之语。又从燉煌之《摩尼教经》(即前京师图书馆所藏之波斯教残经)可决慕阇为摩尼教教师之一种名号。

④ 《摩尼教流行中国考》按:《新唐书》吐火罗王有突厥之叶护官号。

验。"今尚有王延德《行纪》一书。其书今可于王明清之《挥尘前录》卷四中见之(《津逮》本),其《行纪》有用"开元七年历"之语。王延德之使高昌,在太平兴国六年(公元 981 年),上距开元七年(公元 719 年)已二百余年,意西域尚用开元七年历为大纛阁入唐之记念欤?[1]

10. 聿斯经

《新唐书》卷五十九《艺文志》有:"《都利聿斯经》二卷,贞元中(785~804)都利术士李弥乾传自西天竺,有璩公者译其文。陈辅《聿斯四门经》一卷。"考日本僧宗睿曾于天平十八年(公元 746 年)六月由中国赍一批图书回日本,事见日本《续纪》天平十八年已亥条。其中有《都利聿斯经》一部五卷,见宗睿之《书写请来法法门等目录》,观此则天竺之《聿斯经》在贞元前已传世矣。

据宋元记载,则宋绍兴《秘书省续编四库阙书目》卷二历算类有"《都利聿斯经歌》一卷",宋陈振孙《直斋书录解题》卷十二有:"《聿斯歌》一卷,青罗山人,布衣王希明撰,不知何人[2];又《四门经》一卷,唐待诏陈周(?)辅撰。"此外《宋史·艺文志》、《通志·艺文略》尚有记及。

《宋史·艺文志》天文类有:

《都利聿斯经》一卷,

《聿斯四门经》一卷,

《聿斯经》一卷。

《宋史·艺文志》五行类有:

---

① 见《摩尼教流行中国考》第 59,60 页。

② 按《通志》卷六十八,有《青萝历》一卷,青萝山王公佐撰,疑与王希明为一人。

《聿斯四门经》一卷，

《聿斯经诀》一卷，

《聿斯都利经》一卷，

《聿斯隐经》三卷。

《通志》卷六十八《艺文略》有：

《都利聿斯经》二卷，本梵书五卷，唐贞元初有都利术士李弥乾将至京师，推十一星行历、知人命贵贱。

《新修聿斯四门经》一卷，唐待诏陈辅重修，

徐氏《续聿斯歌》一卷，

《都利聿斯歌诀》一卷，安修睦撰，关子明注。

《聿斯钞略旨》一卷，

《聿斯隐经》一卷，

罗滨斯《聿斯大衍》书一卷。

《通志》称："本梵书五卷"，与日僧宗睿所赍去者，卷帙相同。惜各书今都无存，但其为天竺天文书或占星书则无疑矣。

嵩阳之《梵天火罗》曰："按《聿斯经》云：凡人只知七曜，不知暗虚星，号曰罗睺，计都。此星在隐位不见，逢日月即蚀，号曰蚀神；计都者蚀神之尾，号豹尾。"① 今日可知之《聿斯经》内容，如斯已矣。

① 见《佛学大辞典》第176页，九曜条。

中算书目汇刊序例*

(一)叙文

近岁国内外修治中算史事者日多，而工具之书，若书目、索引之类，尚付缺如。此种图书又时将散置各处，未加整理。其重要史料名著之为前人所已收者，或残余断简为近年所发现者，学者一时无由周知，甚属遗憾。去岁孙文青先生有志及此，所编《中算书目汇刊》初稿，俨会与校订，爰先介绍其凡例如次，想亦读者所乐闻也。

(二)凡例　孙文青拟

㈠清季刘铎所编《古今算学书录》乃分类编辑，而近人裘冲曼之《中国算学书目汇编》则按画排列，又李俨之《明代算学书志》，则断代为编，至李俨之《近代中算著述记》，则以人为经，且多限于现存算书，搜罗所及，尚难免珠遗。兹编略仿《医籍书目汇刊》之例，尽力搜罗，用备研治中算及中算史参考之需。

㈡本编所收，凡分(一)史志目，(二)方志目，(三)知见目，(四)历代公藏目，(五)历代私藏目，(六)图书给藏书目，(七)考订目，(八)刊行目，(九)海外目，(十)算学丛书目，(十一)自著丛书目，(十二)合刻丛书目，等十二类。

---

* 本文原载《西京日报》1935 年 8 月 11 日第 9 版《图半月刊》第 3 期。

㊂各目排次，皆依时代为序，其同时代之目，则以初作者列前，补作及注释考订者列后。

㊃序跋校语等，关于书之内容，板本，收藏源流者至巨，最为近代治目录学者所重视，故此编亦尽量采入，以备参考。

㊄本编所收仅限于算学书籍，各目录中每有天文算法，或历算并举者，亦仅摘录其算学书类，或于算学有关之《周髀算经》、《授时历》、《古今律历考》等数部而已，至于天文历法等书，则当另辑专目。

（附）本编为治中算及中算史工具之书，取材不厌周详，海内外藏书处时与指示为幸。

二十三年十二月十日

（三）总目

卷首　叙文　凡例

卷一　史志目

卷二　方志目

卷三　知见目：一、常用书目，二、征存，征刻及禁毁书目，三、知见书目，四、展览书目

卷四　历代公藏目

卷五　历代私藏目：一、宋明私藏书目，二、清代私藏书目，三、现代私藏书目。

卷六　图书馆藏书目：一、行政机关图书馆藏书目，二、省县图书馆藏书目，三、学校图书馆藏书目，四、其他公私图书馆藏书目。

卷七　考订目：一、题跋，二、读书记，三、著述考

卷八　刊行目：一、古今刊行目，二、海外刊行目，三、公私机关刊行目，四、书商刊行目

卷九　海外目：一、征存考订目，二、藏书目

西陲中算史料之发现*

汉唐声教，远被极西，近世研究史事者，穷力搜求每多收获。即以中算史料而论，其在西陲发现者，计有："敦煌之九九术残木简"一种，敦煌石室"算书"一种，敦煌石室"算经"一卷(并序)一种。并为世界最古之算书写本。今就所知，论列如次，不独中算史料，多一创获，且足以补中上古图书之缺。今于原文校补之处，旁加点为志；原文残缺，无法校补之处，作方格为志；原文空格之处，作斜十字形为志。

(一)敦煌之九九术残木简

流沙坠简卷中"小学术数方技书"类，第五页有："九九术残木简"出敦煌北。长二百六十米里迈当，广二十四米里迈当。现存十六句，残缺其半，如将残缺部分补全，原文应如下：

九九八十一	八九七十二	七九六十三	六九五十四
五九卌五	四九卌六	三九廿七	二九一十八
八八六十四	七八五十六	六八卌八	五八卌
四八卅二	三八廿四	二八十六	七七卌九
六七卌二	五七卅五	四七廿八	三七廿一
二七十四	六六卅六	五六卅	四六廿四
三六十八	二六十二	五五廿五	四五廿

* 本文原载《西京日报》1935年9月8日《圖半月刊》第5期。

三五十五	二五十	四四十六	三四十二
二四而八	三三而九	二三而六	二二而四

大凡千一百一十”

王国维考释以为:“……以存句考之,盖无‘一一如一,至一九如九’九句也,此简末言‘大凡千一百一十’——若并‘一一如一’九句合计,总数当得一千一百五十五,除此九句,总数乃得千一百一十,此简中无‘一一如一’九句之确证也。余皆与今同,惟今法始一一至九九,此则始九九讫一一。考《孙子算经》乘法,全载此四十五句,亦起九九而讫一一,末言‘从九九至一一,总成一千一百五十五’,是古法始于九九之证。……此简二二而四,今法作二二如四,考《大戴记》、《淮南子》并引‘三三而九’。《周礼》疏亦引‘二二而四’,‘三三而九’,正与此同。知唐人尚作而。《容斋随笔》云:‘三三如九,三四十二,皆俗语算术。’知改而作如,始于宋代也。《孙子算经》亦作‘二二如四’,‘三三如九’,殆唐以后刊本所追改,非原书之旧矣。”

王氏之说,大体精当,可备参考。共言九九古法始九九迄一一,则实例尚多,至谓三三而九,唐以后刊本追改为三三如九,则尚乏确证也。

(二)敦煌石室“算书”

敦煌石室“算书”,现藏法国巴黎国立图书馆,为伯希和氏《敦煌将来目录》之第二六六七号,伯希和君影摄是赠。此卷除首尾残外,有十二题可读,为吾国现存写本算书之最古者。前此校雠完毕,曾刻入民国十五年六月《中大季刊》,第一卷第二号,第一至四页中,及《中算史论丛》(一),第一二三至一二八页*。二十四年复托

* 李俨将《敦煌石室算书》一文增补此题后,纳入《中国古代数学史料》一书,作为第9节“敦煌千佛洞算书和算表”之第(一)段“敦煌千佛洞算书”。见本书第二卷。

王君重民，影摄黑白字者各一份，重加考证，补其中一题。此题残缺特甚，前曾弃置，今以意补全，虽多缺疑，尚可见其运算次序，及其度量制度。原文大致如下：

今有男十万八百一十五人：三万六千七百八十三人大男*，日食米八升；二万五千五百卅八人二男，日食米七升；一万八千二百一十四人三男日食米六升；一万四千一百五十四人小男，日食米五升；六千一百卌六人黄男日食米四升，问前件五等一日，十日，一月，一年之食米各几何。　曰：日**合食米六千七百七十五硏五升八升十日合食米六万七千七百五十五硏八升一月食米廿万三千二百六十七硏四升一年食米二百卌三万九千二百八硏八升。

术曰置大男三万六千七百八十三人以八升乘之退二等得大男一日食米*** 二千九百卌二硏六升四升，置于上方次置二男二万五千五百二十八人以七升乘之，退二等得二**** 二男一日食米一千七百八十六硏九升六升置于上方次置三男一万八千二百一十四人以六升乘之退二等得三男一日食米一千九十二硏八升四升置于上方，次置小男一万四千一百五十四人以五升乘之，退二等得小男一日食米*** 七百七硏七升，亦置于上方，次置黄男六千一百卌六人，以四升乘之，退位二等，得黄男一日所食米***** 二百卌五

* “大男”，李俨在《中国古代数学史料》（下称《史料》）中作“丁男”。下“二男”、“三男”，《史料》中分别作“老男”、“中男”，下同。

** “日”，《史料》作“一日”。

*** 此二处，《史料》无“米”字。

**** 《史料》无前一“二”字。

***** 《史料》无“所”、“米”二字。

斛四升四升。 总并五位得各男一日食米* 六千七百七十五斛五升八升，上十之，得十日之食，六万七千七百五十五斛八升又以三因之，得一月之食，廾万三千二百六十七斛四升，又以十二乘之，得一年之食，二百卅三万九千二百八斛八升。

其演算次序如下：

大男…………36783×0.08＝	2942.64	
二男…………25528×0.07＝	1786.96	
三男…………18214×0.06＝	1092.84	
小男…………14154×0.05＝	707.70	
黄男……＋） 6136×0.04＝	＋）245.44	
100815	6775.58	一日食
	×） 10	
	67755.80	十日食
	×） 3	
	203267.40	一月食
	×） 12	
	406534.80	
	2032674	
	2439208.80	一年食

(三)敦煌石室“算经”一卷并序。

敦煌石室“算经”一卷并序现藏法国巴黎国立图书馆，为伯希和氏《将来目录》之第三三四九号，王重民君影摄见寄。此卷上半截完好，下半截残缺。除序文外，尚可补全，共九十一行，每行约三十字，今校补序文如下：

算经一卷并序

---

* 《史料》无“米”字。

夫算者天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建统，三光之表里，五行之平均，皇极之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪。稽群伦之聚散，考元气于好宄，推四时之运移，记精微之肇□，□□□□□□□□□□□□推方员，合规矩，均尺丈，制法度，立权衡，平斛升，剖毫厘析黍絫，历亿载而不朽。但行之者富贵有余，背之者贫且贱，□□□□□□□□□□□□□□盖意明情乐者，安有不成哉，昔鲁请算□□□□□□□□□□□□□□，言人不解算者，如天无日月，地无泉源，人无眼□，□□□□□□□□□□□识。

按此序文多为《孙子算经》语。其九九亦始九九迄一一。大数之法亦如孙子以万万进，万以上为亿，兆，京，该，梓，让，沟，间，政，载，极。又称"右孙子数，钱满载，天不容，地不载"。今本《孙子算经》则仅作：亿，兆，京，陔，秭，壤，沟，涧，正，载。至宋张行《成易变通》一书，乃以万万载为极。查《太平御览》卷七百五十工艺部七引《孙子算经》称："古者积钱，上至于天，天不能容。下至于地，地不能载。天不能盖，地不能载，故名曰载。"清孙诒让《札迻》卷十一以为："检今本《孙子算经》无此语，疑传录失之。"，此本算经一卷，又以合升斗斛代合升㪷斛，并以十进，与敦煌石室"算经"引例相同，则为当日地方成法也。

中 算 书 录*

（甲）绪言

民国二十三年八月十三至十九日，陕西省立第一图书馆举行第一届展览会。曾以所藏中算图书提出一部分，交由该会展览，颇引起阅览兴趣。展览之时，每种并附说明，徒以篇幅所限，记述尚未尽详。一年来复续有收集，益以见闻所及，爰就所知，重加记录，题为《中算书录》，用备研治此学者参考之需，至见闻寡陋，误记缺略之处，自在所不免，尚望明达教正是幸。

（乙）书录

（一）《孙子算经》三卷

《张丘建算经》三卷

残本《九章算经》五卷

以上宋刻宋印本

前阅民国二十二年十二月七日《大公报》图书副刊第六期，赵万里《芸盦群书题记》，知宋刻宋印本《孙子算经》三卷、《张丘建算

---

* 本文原载《西京日报》1935 年 12 月 1 日、29 日，1936 年 2 月 9 日，3 月 8 日，5 月 17 日、31 日，6 月 14 日、28 日，7 月 12 日，10 月 25 日、11 月 8 日、22 日，《圕半月刊》第 11、13、16、18、23～27、35～37 期。这次发表将 1936 年 7 月 12 日之“《南先生行述》原文”插入 6 月 14 日之“(24)南先生行述”之后。

经》三卷、残本《九章算经》五卷、《五曹算经》五卷、《数术记遗》一卷，尚在人间。二十四年五月商务印书馆张元济先生前来西安，与谈及此事，据称：《孙子算经》三卷、《张丘建算经》三卷、残本《九章算经》五卷，今由潘氏交商务馆影印，张君回沪后，以影印样本见寄，计：

《孙子算经》

序一叶，

卷上十四叶，

卷中十四叶，

卷下十六叶，

共四十五叶。以上一册。

《张丘建算经》

序一页，

卷上二十七叶，

卷中二十一叶(第二十二叶以下原缺)。以上一册。

卷下三十九叶(第一第二两叶原缺)，

顾广圻跋一叶。以上一册。共存八十七叶。

《九章算经》

卷一计十九叶，

卷二计十七叶，

卷三计十五叶。以上一册。

卷四计十八叶，

卷五计二十叶。以上一册。

共八十七叶。

以上共五册。

经与清华张崧年先生共加考订，知现存宋刻宋印本三算经，由

明王室流出后(?),经明陈道复(1482～1539,或1483～1544)钱谦益(1582～1664)、王世贞(1526～1590);清钱曾(1629～1700)、黄虞稷(1629～1691)、张敦仁(1754～1834)、顾广圻(1766～1835)、秦恩复(1760～1843),而入潘祖荫(1830～1890),因该三书有上列诸人印记也。其中又有"嗣雅"、"颂鲁眼福"、"厚载崇教之宝"、"云安轩(?)记"、"张䓹信记"、"乾爽阁藏书记"各印记,则尚未详为何氏所有。而四百年来流传之迹,已大致可见矣。

(二)《周髀算经》二卷

《数术记遗》一卷

以上明刻明印本。

宋刻本《周髀算经》二卷,清代藏书家虽有著录,但至今尚未发现,今所流传者仅有明刻明印本一种,商务印书馆《四部丛刊》中亦仅据南陵徐氏积学斋藏明刻本影印收入,其题跋称:

此《秘册汇函》翻常熟赵(开美)氏本,上卷首题明赵开美校,犹在《津逮秘书》本之前。

李俨藏有(一)明赵开美校刊本一种,无批校图记,又(二)《秘册汇函》本一种,有四明卢氏抱经楼藏书图记,又(三)《津逮秘书》翻《秘册汇函》本一种有唐元素批,此人著有《三国学按》一书。此三种前并有绣水沈士龙及武原胡震亨题辞,《周髀算经》后附《算学源流》及《算法歌诀》为他刻所未有,今移录于下:

附《算学源流》

《晋书·律历志》:黄帝纪三纲而阐书契,乃使羲龢、常仪占月,车区占星气,伶伦造律吕,大挠造甲子,隶首作算数,容成总斯六术,考定气象,建行察发饮,起消息,正闰余,述而著焉,谓之调历。

《汉书·律历志》:一曰律数,二曰和声,三曰审度,四曰嘉

量，五曰权衡。

数者，一、十、百、千、万也，所以算数事物顺性命之理也。其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握。度长短者不失毫厘，量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫。纪于一协于十，长于百，大于千，衍于万，其法在算术乎。

附算法歌诀

开平方法少人通，起手先呼九数重。百与万同并百万，二三隔位一相从。千同十万和千万，三四连身九九终。除尽虚加一倍，回还折半复原宗。

(三)《敦煌石室算书》(无卷数)

未著撰人　影摄唐(?)卷子写本

《敦煌石室算书》现藏者仅有二种，此书藏法国巴黎国立图书馆，为伯希和氏《敦煌将来目录》第二六六七号。此书除首尾残缺外，有十二题可读，为吾国现存写本算书之最古者，李俨曾收全文入“中算史论丛(一)”中，二十四年复托王君重民(有三)自巴黎影摄黑白者各一份重加考证，补其中一题，此题残缺特甚，前经弃置，后以意补全尚多残缺，曾于《圖书半月刊》五期《西陲中算史料之发现》内补其全文，但其中五等男除小黄二等原书未缺少外其余初拟为“大”、“二”、“三”三等，今参考敦煌户籍残简知其为“丁”、“老”、“中”、“小”、“黄”五等，此项五等男且为开元、天宝遗制，似此则此算书亦为唐代作品矣。

(四)《敦煌石室算经》一卷并序(残本)

未著撰人　影摄唐(?)卷子写本。

此为敦煌石室现藏算书之又一种，现藏法国巴黎国立图书馆，为伯希和氏《敦煌将来目录》之第三三四九号，王重民君影摄见寄。此卷上半截完好，下半截残缺，除序文外，尚可补全，共九十一行，

每行三十字。刘复曾收入《敦煌缀琐》中，惜未经校补，李俨曾校补序文，载入《圖书半月刊》五《西陲中算史料之发现》中，又以校补全文交《国立北平图书馆馆刊》发表。北平算经一卷亦以“合”，“升”，“升”，“㪷”代“合”，“升”，“㪷”，“斛”，与前书引例相同，则为当日地方成法，其著书时代亦在开元、天宝间矣。

（五）宋《杨辉算法》七卷三册

宋杨辉撰　传抄日本关孝和抄本

宋杨辉，字谦光，钱塘人，咸淳甲戌（1274 年）作《乘除通变本末》三卷：上中卷《乘除通变算宝》为辉自撰，下卷《法算取用本末》则与史仲荣合撰。德祐乙亥（1275 年）作《田亩比类乘除捷法》二卷。是年冬因刘碧涧、丘虚谷携诸家算法奇题，及旧刊遗忘之文，而作《续古摘奇算法》二卷。以上七卷总称为《杨辉算法》，明洪武戊午（1378 年）古杭勤德书堂新刊行世。

查此书日本藏有抄本及传抄本，现在国中北平国立北平图书馆有杨守敬旧藏朝鲜刻本《杨辉算法》一种，此《杨辉算法》在日本东京共有三部：一在宫内省，一在内阁文库，一在大塚高等师范学校。李俨传录日本帝国学士院所藏关孝和抄录古杭勤德书堂刻本，并据朝鲜刻本校过。

此书中《续古摘奇算法》分上、下二卷，视《宜稼堂丛书》本为全，其上卷载有纵横图（即幻方），较程大位所记实先三百余年。国外数学史家以纵横图为中国数学家一大贡献，但《续古摘奇算法》序文明记因旧刊遗忘之文而作《续古摘奇算法》，则纵横图当非杨辉所发明。《四库全书》本宋丁易东撰《人衍索隐》三卷，其上卷“洛书九数乘为八十一图”，即杨辉之九九图，其中卷“洛书四十九得大衍五十数图”，与杨辉之“攒九图”相似，其下卷“九宫八卦总成七十二数合洛书图”，则与杨辉之“连环图”相似，盖纵横图学说当时社

会固甚盛行也。

（六）宋《杨辉算法》六卷二册

宋杨辉撰　校稿本

此为《宜稼堂丛书》底本，其《续古摘奇算法》非复全书，宋景昌道光庚子(1840年)硃笔识语，此书虽非全帙，而《宜稼堂丛书》实首先介绍杨辉著述于学界，其稿本亦甚足珍贵也。

（七）《算法全能集》二卷二册

元(?)贾亨撰　传钞蝶装刻本

《算法全能集》题长沙贾亨季通撰，《永乐大典》作贾通。是书明《文渊书目》曾经著录，《也是园书目》作六卷，疑误。《清学部图书馆善本书目》以书中说锭说钞定为元时书，《国立北平图书馆善本书目》以为明初刻本，其详待考。今岁英伦举行伦敦中国艺术展览会，北平图书馆曾提出此书送会展览。

此书总目如下：

总说五项：(一)钱，(二)粮，(三)端匹，(四)斤秤，(五)田亩。

常用法二十项

(一)因法，(二)加法，(三)乘法，(四)减法即定身除，(五)归法，(六)归除，(七)求一，(八)商除，(九)异乘同除千、斤、百里附，(十)就物抽分，(十一)差分，(十二)和合差分，(十三)端匹，(十四)斤秤，(十五)堆垛，(十六)盘量仓窖，(十七)丈量田亩，(十八)修筑，(十九)约分，(二十)开平方。

书中归除一项所述，即为珠算归除法，可作元代已有珠算之证。

（八）(新刊)《详明算法》二卷

元安止斋撰　传钞日本藏明刻本

明程大位《算法统宗》称:"《详明算法》元儒安止斋、何平子作,有乘除而无九章。"明叶盛(正统乙丑即1445年进士)《菉竹堂书目》有《详明算法》一册,今日本东京帝国学士院藏有此书,乃洪武癸丑(1373年)春庐陵李氏明经堂刊本,序文尚有残缺,今依《诸家算法序记》补其缺文,缺文之旁并作圆点为志。

详明序:

隶首作算法,张苍定章程,人习知之而未考其原,皆本于黄钟也。黄钟之长七寸,空围九分,声中黄钟之律。阳声之始阳气之动也,九者阳之成也,加一寸成十曰尺,是尺寸之始也,其空容黍米千二百粒为勺,是斗斛之始也,其重十二铢,是斤秤之始也,大略若此。数之理显,小学易明,故居六艺之末。然非专心致志,亦莫极其妙。请试言之,夫学者初习因归,则口授心会,至于撞归起一,时有差谬。既贯通诸法,或设问一数,于乘除莫知所措,辨而析之,是明布算之方矣。而数之错综者又须明立法之道,以布算,是乃用算之术也。深究其理可会于心,乃师说所不能尽。但目熟之其理悉见,非若经学之难明,理学之难穷也。旧本极为详明,访求之久,不复可得。今市肆所售,皆隐其诀,存一亡十,徒以诇人苟利,殊失人之初心。敢以所闻,如旧法分上下二卷,尽其说,寿诸梓,以广其传,庶初学之一助云尔。安止斋谨述

其总目如下:

卷上

(一)九章名数,(二)小大名数,(三)九九合数,(四)斗斛丈尺,(五)斤秤田亩,(六)口诀,(七)乘除见捴,(八)因法,(九)加法,(十)乘法,(十一)归法,(十二)减法即定身除,(十三)归除,(十四)求一,(十五)商除,(十六)约分。

卷下

(一)异乘同除,(二)就物抽分,(三)差分,(四)和合差分,(五)端匹,(六)斤秤,(七)堆垛,(八)盘量仓窖,(九)丈量田亩,(十)田亩纽粮,(十一)修筑。目录终

此书项目大致与《算法全能集》相同,其卷下又于圆田内称:“又刘徽有新术,祖冲之有密率,刘德全有精率。”刘徽徽率,祖冲之密率则世所晓,其“刘德全精率”则史书未详,得此一言,中国圆率史又多一史料矣。

(九)《永乐大典残本算书》二卷

未著撰人 影摄本

《永乐大典》以明永乐二年(1405 年)成书。隆、万(1567～1619年)以后,便有残缺。但算法一门,至清乾隆《四库全书》开馆时(1772 年)尚无残缺。今国立北平图书馆藏有《大典目录》一册,为当日馆臣核查底册。内算字卷一六三二九至卷一六三六七前后二十册,尚完全存在。故戴震等尚可于此中辑出《算经十书》,《益古演段》,及《数学九章》诸书。光绪庚子(1900 年)之役全部散失。此书今藏英国剑桥大学,为《永乐大典》卷一六三四三至卷一六三四四之“异乘同除”,及“少广”。就中所引《透帘细草》、《丁巨算法》(1355年)《杨辉算法》(1261 年)、《锦囊启源》、《详明算法》、严恭《通原算法》(1372 年),有为《知不足斋丛书》、《宜稼堂丛书》、钞本《诸家算法及序记》所未记者。

其最重要者则为引述杨辉《详解九章算法》(1261 年)内“开方作法本源”一条。此条述及增乘方求廉草。杨氏自注称:“出释锁算书,贾宪用此术。”盖即西洋数学史家所盛称之巴斯噶三角形也。此巴斯噶三角形与程大位《算法统宗》(1592～1593)卷六所载,字句相同。程氏谓出于吴信民(敬)《九章比类》(1450 年),实亦本之杨

辉。旧多以朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)卷首所列为此图之最先记载,而《四元玉鉴》亦明著为"古法七乘方图",则非朱氏所发明,明甚。且至迟亦在杨辉前,杨辉《详解九章算法》一书成于景定辛酉(1261 年)。在欧洲则此图发明于巴斯噶,称为巴氏三角形。而亚比亚纳氏虽列其图于 1527 年著作之封面,亦后于杨辉二百余年也。

(十)《诸家算法及序记》

无卷数

未著撰人　钞本

此书系章山莫友芝(1811～1871)子绳孙旧藏本。李俨于民国初元在沪收及此书,疑传钞《永乐大典》残本,所收《诸家算法及序记》,颇有他书未著录者,堪称秘笈。友人裘冲曼、孙文青两先生曾录副而去,裘君所收中算书今归浙江图书馆。

《诸家算法》中胪列杨辉《日用算法》、杨辉《详解算法》、杨辉《摘奇算法》、《透帘细草》、《丁巨算法》、《锦囊启源》、贾通(亨)《全能集》、《详明算法》、严恭《通原算法》诸书。《诸家算法序记》中有:《九章算经序》、杨辉《详解九章序》、《孙子算经序》、《周髀算经序》、《海岛算经序》、杨辉《日用算法序》、杨辉《通变算法序》、杨辉《田亩比类算法序》、《丁巨算法序》、严恭《通原算法序》诸篇。就序文所引,知杨辉曾于景定壬戌(1262 年)作《日用算法》二卷,以明乘除,为初学用,编新括十有三首,立图草六十六问,永嘉陈几先为之题跋。又从此书所集序文补及现传明刻本《详明算法序》中缺文,数百年来中算史实,获得此书,留补一二事,亦堪告慰矣。

(十一)《九章算法比类大全》十卷八册

明吴敬撰　影摄本

此书为明景泰元年(1450 年)钱唐吴敬信民撰,凡十卷八册。明嘉靖《仁和县志》称吴敬《九章算法》是也,明代藏书家多藏有此

书。入清流传渐少，上海“东方图书馆”收有一部，李俨曾影摄一份。前疑“一二八”之变已付劫灰，二十四年五月商务印书馆张元济先生前来西安，知此书尚获保存，亦幸事也。

此书前有明景泰元年(1450)七月杭州府仁和县儒学教谕临川聂大年序、同年(1450)孟秋钱唐吴敬信民自序、弘治元年(1488)项麒序、吴兴张宁及同郡孙暲像赞。据其自序知其因写本《九章》，并采辑旧闻成书，总千四百余问，数十万言，厘为十卷，积功十年而成。时已年老目昏，乃请何均自警书录成帙，而金台王均士杰见而重之，为刻而传世。项序则称吴敬杭州府仁和县人，号主一翁，因善算，一时藩臬重臣皆礼遇而信托之。初版刻复，板毁于火，十存其六。翁之长嗣怡庵处士命其季子名讷字仲敏而号循善者，重加编校，而印行之云。此书首卷目录起例，一卷方田，二卷粟米，三卷衰分，四卷少广，五卷商功，六卷均输，七卷盈朒，八卷方程，九卷勾股，十卷开方。

(十二)《历宗算会》十五卷八册

明周述学撰　传钞本

明周述学所撰《历宗算会》，清梅文鼎曾于所著《勿庵历算书目》一度征引称述，阮元《畴人传》(1799年)已未知其详。此书据南京“国学图书馆藏旧钞本传钞。前有嘉靖戊午(1558年))周文烛序。计分十五卷：(一)入算，(二)子母分法，(三)勾股，(四)开方，(五)立方，(六)平圆，(七)弧矢经补上，(八)弧矢经补下，(九)分法互分，(十)总分，(十一)各分，(十二)积法，(十三)立积，(十四)隙积，算会圣贤姓氏，(十五)歌诀。今北平“中法图书馆”又藏有八卷本一种，总目如下：(一)、(二)弧矢经补，(三)平方，(四)平圆，(五)立方，(六)各分，(七)总分，(八)分法，未著撰人，疑为残本。

(十三)《数学通轨》一卷一册

明柯尚迁撰　传钞日本藏本

原书今藏日本三重县“伊势神宫”之“林崎文库”，书后题“天明四年(1784年)甲辰八月吉旦奉纳皇太神宫林崎文库，以期不朽，京都勤思堂村井古岩敬义拜”三行。按柯尚迁福建长乐人，《长乐县志》有传。此《数学通轨》成于万历六年(1578年)，所述算盘事在程大位《算法统宗》(1592～1593)前。

是书前有柯尚迁万历六年(1578年)自序，称：

> 近有青阳卢氏《算法解》，发明诸法，近而易知，愚以数原、九九、归除法语图式著之于前，名曰“学算须知”，为教数首务。乃以归除、乘因、分合法例，举其要略，令习者易知，名曰“归除诠要”。然后分九章之目，列古今注释，略表法例数条，以及九章总义。至于顾(应祥)、唐(顺之)二先生之勾股全书，不列于此。学者考焉，总名《数学通轨》。

序中称及青阳卢氏，青阳在今安徽境，卢氏尚未知为何人。嘉靖本《皇明文衡》卷三十八，载有胡翰(1307～1375)王氏《数学举要序》，此王氏亦未知为何人，明代畴人，湮没不传，数正不少也。

(十四)《算法统宗》十七卷　四册

明程大位撰　康熙丙申年重刻本

李俨所藏《算法统宗》有：明万历壬辰刻十七卷本一种，影摄日本早稻田大学藏明刻残本一种计存：

一卷十五页

二卷缺

三卷三十三页

四卷二十四页

五卷三十一页

六卷六十页

七卷二十六页

八卷四十三页

九卷十二页

十卷三十五页

余卷缺

余缺。

又一种为康熙丙申(1716 年)年重刻本,由曾孙程光绅、程钫校刻,此书流传甚少,书前有程大位造像,甚可珍贵。查程氏《算法统宗》一书,虽风行数百年,而其本人历史及其身世,知者甚少。康熙丙申重刻本有序文多篇,可备参考。因移录如下,以见一斑。此书面横书

“康熙丙申年重镌”一行

次有:

“新安程宾渠先生编集

直指算法统宗

海阳率滨维新堂藏板”三行

(甲)卷前有程世绥重刻《直指算法统宗序》,称:

《算法统宗》,余族祖汝思大位公之所作也。公幼而颖异,酷嗜算数,不惜重赀,以购求遗书。比长遨游吴楚间,博访闻人达士,相与剖析毫芒。既乃心解神悟,于凡乘除积分离合进退之数,无不一一穷极杳渺而会通指归。一时名震远迩,无智愚咸以神算目之。公乃惧夫久而或失其传也,于是综集古今来成书,略焉而未备,备焉而未精者,删其繁杂,正其谬妄,抒以独见,参之训解,作为是编,风行宇内,近今盖已百有数十余年。海内握算持筹之士,莫不家藏一编,若业制举者之于四子书,五经义,翕然奉以为宗。余久心焉识之,徒以从事制举,未之习

也。比来京师，属天子留心律历，开置馆局，修明算法。四方经纬通达之彦，云集辐辏。予尝以暇过从诸公游，亟为余称道，以谓此书实集算学大成，极为今上所许可，而名公巨卿辈亦各争相购致，以为重。余因退而纵观，见其爬罗剔抉，穷幽极渺。《九章》之经，乘除之法，无不昭昭焉条分而缕析，注详而辩明。极参伍错综之变，尽神化宜民之用，信有以发前贤之橐钥，垂后学之津梁，自非赋质之敏，用力之专且久，固不能研精其术，以至于此也。盖公殚思竭虑者历二十余年，始克通其奥以成是编。呜呼！公诚可谓神于算者矣。然尝恨夫坊刻既多，舛误不少，矧于数学，差之毫厘，谬以千里，每思欲一厘正之，而苦于术之未习，不敢妄有所更易。今年夏公之曾孙佩章（程光绅）、洪声（程钫）两君子出其家藏善本，将以公诸海内，问序于余，余深喜其善承先志，而尤乐其实获我心也。刻既成，遂书以为序。康熙丙申仲秋既望族孙世绥再拜谨序。

（乙）复次为万历壬辰夏四月新都程涓巨源《算法统宗序》。

（丙）复次有万历玄默执徐岁三月既望程时用际明父《刻直指算法统宗序》，称：

昔齐威公时，有以九九见者，威公不逆，当时大之，岂非以九九末技，非世主之所屑越者乎。不知数虽出于算师掌故之手，而其理则原自鸿濛，纪于《易》、《范》，肇创于轩后之世，其为用，起沙尘秒忽，以迄秭亿无量。凡日月运行，朓朒迟速之变，天地山川之高深广纵，律历戎赋，度量权衡之轻重多寡，莫不取裁焉。先儒谓数尽天下之物则，又谓天地万物，具于指掌，数距不重哉。自隶首定数以率其羡，要其会，而后之布算者莫之有易。汉魏以来，代设专官以掌其事，一时艺能之列，心计之臣，类能讲试。今观其书起张苍，以迄今日，无类十数百家详

矣。顾质有明暗，见有偏全，或有九章而无乘除，或有乘除而无定位，各照隅隙，鲜窥衢道，矜察秋毫，卒忘眉睫，若是者盖大氐然矣。国朝虽不设算学，而超奇绝伦之彦，无论山林逍逸，即一代宗公，若尚书箬溪顾公，中丞荆川唐公，后先阐绎勾股弧矢二术，精诣神解，有巧历不能得而二公得之一察者，可不谓算学之金针哉。第其法精微幻眇，可与通识道，难与中庸言。余族子宾渠程大位氏幼负颖敏，综涉坟籍，皝科斗籀颉古文，而尤长于算学。凡客游湖海，遇古奇字文及算数诸书，辄购而玩之。斋心一志，至忘寝食，旷岁积力，一旦恍然神识，试之握算，得心应手，若庖丁之于牛，手之所解，肩之所倚，足之所履，膝之所踦，无不中理解也者。岁壬辰，年跻六秩，喟然兴叹曰：昔痀偻丈人之承蜩，处身若厥株，拘执臂若枯木，虽天地之大，万物之多，而唯蜩翼之知，不以异物他好易虑。位之穷年矻矻于数，癖无类是乎。顾不以时序次成书，藏之名山传之其人，通都大邑宁独无以尽管蠡之见，即天地之秘藏，万汇之变态，将何由洩而亦何以著成法于天下后世。于是参会诸家，摅以独见，画以形象，缀以训释，别为九章，厘为一十七卷，题曰《直指算法统宗》。既成问序于余。余阅之卒业，见其标伦揭目，开关启钥，钩玄抉隐，删繁举要，苴罅补隙，正讹黜谬。其启暝振聩也若发蔀；其别同较异也若悬鉴；其苞会统举，总百端之略而集之成也若派别区分而统宗于一。以是规天准地，揆序万物，岂惟围径方斜，纵横曲直，盈朒凹突，开阖折变，物得其度，即隔海望山，揆影测表，六合之外，八螾之远，皆可数计而得。非夫推本隶首之宗旨，以遡洄《易》、《范》余绪，祖顾唐二公略意，而成一代算学之宗者乎。异日者天子坐明堂，考正律历，经理方舆，博延天下经纬通明之士，大位氏持是编以往，当必首应诏

令，若汉唐都、洛下闳诸人，以布衣起家，以阐明数法于天下，距但为成学习九九者要领已哉。万历玄黓执徐岁三月既望新都学海程时用际明父著。

（丁）次为万历壬辰初夏七日浙江上吴继绶著《算学统宗序》。本书内题：

新安宾渠程大位汝思甫编集，

曾孙 素亭光绅佩章甫较正
蕴斋钫洪声甫参阅

三行。

（戊）卷十七末有康熙五十年岁次丙申曾孙光绅《重刻算法统宗序》称：

高祖宾渠府君手辑是编，当时风行海内，坊间刻本无虑数十，然传刻既多，舛谬日甚。余家旧有藏版，颇足辨证讹伪，缘经兵燹，十亡其七。比者国家向用文学，研究律历，于是缙绅之士持筹握算，考论源流，益知崇信府君之书，而故家所藏善本，乃稍稍间出矣。光绅幼从友人借录一帙，谋刻未果。去年道过虞山，购得家藏元本，因与从弟钫重加厘订，付诸剞氏，用广嘉惠后学之志。呜呼！是书之作也盖非偶然矣。先府君颖悟过人，时文篆法，备极工妙，然皆无意出之。独研穷算学，自少至老，不少倦怠，以谓痀偻承蜩，尚不以万物易其所好，矧专精一业，思信今而传后，顾可卤莽为之，凡吾之孳孳不释，良以是也。光绅不敏，不足以远绍薪传。窃愿有志斯道者，由府君之言，上读府君之书，而志府君之志，庶几如痀偻丈人之不反不侧，其进乎技也不难矣。时康熙五十五年岁次丙申曾孙光绅谨识。

（巳）最后为万历壬辰夏五甲子新安后学程大位《书直指算法

统宗后》。

按:《算法统宗》一书向称程大位万历癸巳年(1593年)著,据上述材料,知其为万历壬辰年(1592年)著,又大位生卒年未详,今程时用序称:“岁壬辰(1592年)年跻六秩”,则其生年又可考知矣。程时用序内又称:“凡客游湖海,遇古奇字文,及算数诸书,辄购而玩之,斋心一志,至忘寝食。”故原书卷末“算经源流”所记得保存宋明间若干中算文献,非偶然矣。

(十五)《算学新说》二卷一册　明朱载堉撰　明刻本

此书明朱载堉(1563～?)撰,书末有:“万历三十一年(1603年)八月初三日刻完”一行。

据《河南通志》卷五十八“人物”二:“朱载堉……所著有《天文乐律全书》、《算学新说》、《律吕正论》、《嘉量算经》、《韵学新说》、《切韵指南》、《先天图正误》等书。”

朱彝尊《曝书亭集》卷四十三《郑世子乐律全书跋》称:“《律吕精义》内外编各十卷,《正论》四卷,《乐律》、《算学新说》各一卷,此外《图谱》十三部,又审定诸家乐书八部,合名之曰《乐律全书》,郑恭王厚烷世子载堉所撰也。”

按朱载堉,字伯勤,号句曲山人,郑恭王厚烷世子。明神宗十九年(1589年)恭王薨,让爵于孟津王之子见滺。载堉明晓天算,神宗二十三年(1595年)进《乐律全书》,及《圣寿万年历》。万历庚戌(1610年)成《嘉量算经》三卷。见《明史诸王传》及《乐律全书》、《人海记》、阮元《四库未收书目提要》等书。

(十六)《算法指南》二卷　高源里人黄龙吟撰

《新镌田地山塘麦米活法》　无卷数黄龙吟撰

《新选治生要览》　共中、和二集。中集为:“江湖切要物价规略”,和集无算不录,黄龙吟撰

以上共订三册，明万历三十二年(1604 年)刻本三册

上列三书共订三册，末有，“万历甲辰(1604 年)季夏月吉梓行”一行，前有万历年汪一栋序文称：“輓近书肆绣梓，虽更仆叠出，九九乘除之数非不明，第挂一漏二，略而未悉，未谙算数者多病之，吾深慨焉。有友人黄嘘(龙吟)爰辑旧闻，并续增绣兹编，凡关于日用者，靡不悉备，……”

按此三书亦言算盘，事在程大位《算法统宗》(1592 年)后

(十七)《度测》三卷　附《开方说》一卷　《度算解》一卷　明陈荩谟撰　钞本四册

陈荩谟字献可，号绣庵，嘉兴人，所著书大抵以西人之说，傅合古义，语见阮元之《畴人传》卷三十二。

此钞本四册，前有崇祯庚辰(1640 年)自序称：“国初制科，尚试算数，后寝厌薄焉。……泰西来宾，斯学始备，大方家多传之。徐玄扈先生有《测量法义》、《勾股义》。……谟爰撰兹编，首诠算经，次胪诸法，合古今而浅言之，出以己意，发凡绘图，庶几周体大彰，法义弥著，以便有志经济之习之者。”

原书《度测》目卷上：诠经、诠理、诠器、诠法、诠算、诠原，卷中：平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，弦矩以见庞，卷下：卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方，附卷开方说，度算解无目。

(十八)《天学会通》　残本　清薛凤祚撰 康熙年刻本一册

按《天学会通》全目如下：

(甲正集)正弦法原，中法四线，太阳太阴部，五星经纬部，交食法原，交食表，中历，日月，五星，交食表，经星部，日食诸法异同，比例对数表。

(乙考验部)求黄赤道度及率总数，木星盈缩平定差，步气朔步月离步五星历法立成，域表新法密率，太阳太阴日食部，今法今表

历法部,太阳太阴部,五星经纬部,日月食原理,天步真原,附表,恒星性情部,纬星性情部,世界部,人命,西域历。

(丙致用部)三角算法,法律吕,运气精微炁,化迁流,中法占验部,水法,重学,火法,师学。

此册存天步真原,及五星经纬部二目,其天步真原原题穆尼阁撰,按穆尼阁(Jeen-Nicolai Smogbonski 一作 Smogubcki,1611～1656)字如德,于1646年来华,先到江南,于1647年至1651年间到福建,1656年卒于肇庆,氏在江宁以历算学授方中通及薛凤祚,穆尼阁为介绍对数法及球面三角法之第一人。

(十九)《天学会通》一卷　清薛凤祚撰　传钞四库本一册

《四库全书提要》称:"《天学会通》一卷,浙江汪启淑家藏本。国朝薛凤祚撰,是书本穆尼阁《天步真原》而作,所言皆推算交食之法。按推算交食凡有两例,一用积月、积日、以取应用诸行度数,由平三角、弧三角等法逐次比例而得食分时刻方位者,一用立成表按年、月、日、时度数,逐次检取角度加减而得食分时刻方位者。凤祚此书盖用表算之例,殊为简捷精密。梅文鼎订注是书,亦称其以西法六十分通为百分,从《授时》之法,实为便用,惟仍以对数立算,不如直用乘除为正法,惜所订注之处未获与之相质云。"

是时对数初入中国,故《四库全书提要》有"惟仍以对数立算,不如直用乘除为正法"之语。

(二十)《天步真原》三卷　穆尼阁撰　守山阁丛书本一册

《天步真原》,《四库全书》据浙江汪启淑家藏本作一卷,《四库全书提要》称:"《天步真原》一卷,国朝薛凤祚所译西洋穆尼阁法也。凤祚有《圣学心传》已著录,顺治中穆尼阁寄寓江宁,喜与人谈算术而不招人入耶稣会,在彼教中号为笃实君子。凤祚初从魏文魁游,主持旧法后见穆尼阁,始改从西学,尽传其术。……凤祚译是书

时新法初行，又中西文字，辗转相通，故词旨未能尽畅。梅文鼎尝订证其书，称其法与《崇祯新法历书》有同有异，其似异而同者，布算之图，对数之表，与《历书》迥别，然得数无二，惟黄道春分二差，则根数大异，非测候无以断其是非。然其书在未修《数理精蕴》之前，录而存之，犹可以见步天之术，由疏入密之渐也。”

(二十一)《不得已》二卷

清初杨光先撰

民国十八年中社印本二册

清初西洋历算输入时，中国学术界起剧烈之反动，曾因此兴起大狱。此书清初杨光先(1597～?)撰，专以反对耶稣教士学说，其所引各图，至为珍贵，且为新旧之争之上乘史料，向来只有钞本，此书末有黄丕烈、钱琦等人跋语，于民国十八年由南京中社印本。

(二十二)《不得已辩》

利类思撰

一八四七年重刻本　一册

此书针对杨光先《不得已辩》，为康熙四年乙巳(1665 年)利类思(P. Louis Buglio. 1637 年来华，1682 年卒)撰，安文思(P. G b. de Magalh ens. 1640 年来华，1677 年卒)及南怀仁(P. F erdin. Verbiest. 1659 年来华，1688 年卒)订，前有康熙四年乙巳利类思序，其文如下：

自叙

甲辰(1664 年)冬杨光先著《不得已》等书，余时方羁绁待罪，静听朝廷处分。又以孤旅远人，何能撄其锋刃，而敢措一词乎。阅明年三月“星变再者，地震者五”，上大赦，得离西曹法署，至是可稍稍吐矣。然当言之而不可言，与夫言及之而不敢言，非复余九万里航海东来之初志也。夫光先借历数以恣排击

厥事，别有颠末“辩详他卷”惟是毁圣讪道，悖谬拂经，以非为是，一凭其寸舌尺管。据拾天学之余绪影响，而又援引舛诞，以斯当世，莫如《不得已》一书。故不得因其讹谬而弗正告之。顾道本乎率性，而丧乎失德，理明于至当，而忽于苟然，岂得以一人之疑，疑众人之信。东海西海，此心此理，有同然者，余岂忍以刍言不急醒之乎，请以质之穷理格物之君子。

乙巳(1665年)夏五月利类思题于长安旅舍

此书目录如下：

天非二气结成辩

形天由天主所造

辩无始者之义

耶稣称天主又称人之故

天主降生之义

天地之初主不降生之宜

辩开辟至今几万年之妄

主降生于童贞之母

天堂地狱实论

主教乃治世之大道

耶稣受难之养

耶稣受难之日食不见于中国之故

中国名儒褒奖主教不一

理不能生物辩

形天非上帝辩

耶稣之功绩迈越诸圣之功绩

辩谋不轨之妄

附借历法行教辩

附中国初人辩

此书题“天主降生一千八百四十七年重刊”,“司教马热罗准”字样,盖道光二十八年主刊本也。

(二十三)《不得已辩》

极西耶稣会士南怀仁述

影摄巴黎国立图书馆藏汉文第4990号本。

此书为南怀仁撰,前有南怀仁自序,巴黎国立图书馆所藏者为刻本,其序文如下:

自序

怀仁远西鄙儒,静修学道,不言人短长。若事关国家万年之大典,则不禁娓娓焉,诤而白之,盖言乎其不得不言也。仁自顺治十六年(1659年)荷世祖章皇帝钦君进京,豢养继历。康熙三年(1664年)杨光先以一纸诳词,搆弥天大狱。方是时,(汤)若望(P. T. Ad. Schall Von Bell. 1622年来华,1666年卒)瘖矣。怀仁入中土未久,语言不通,一词莫措,幸蒙皇上洞鉴,待以不归。仁等得仍栖赐宅,掩关静息之余,细绎光先所布十谬等书。其所剿袭者,皆前朝已敝之旧法;其所诋毁者,皆世祖特用之新法,仁不胜忿激,因著此不得已辞,以待公评。夫天文者,朝廷之实政,儒者之实学,非比一人一事,可以掉三寸之舌,立地雌黄,洒笔端之墨,依稀形似者也。此其道在于测验,《书》曰:“日中星鸟,宵中星虚。”又曰:“在璇玑玉衡,以齐七政。”皆言测验也。测验之法不一,举其肤浅而易见者言之。如日月之交蚀,太阳之出入,晦朔之盈亏,五星之躔度,举世之人,有目共见。测之而验者,法也,测之而不验者,非法也。尽人以合天者,怀仁之言也,强天以合人者,光先之言也。光先胸无确据,强辩饰非,不过借历法以行恩怨,无怪乎屡测而屡验

也。大抵天文之学，世代愈久，其讲求愈精。古来创制历法者，其聪明百倍于今人，其艰难亦百倍于今日，然一时之窥测，未能尽备也。阅数百年，数千年代有其人，周详考究，而其法愈精，其学愈验。怀仁一腐儒尔，幸而生千百世之后，历法详备之时，守而勿失，以上测天行，所以屡测而屡合者，非仁之能也，实法之善也。且新法之行二十余年矣，以先皇帝之神圣，几经详慎，部测，监测，屡遣内外大臣公同测验，密令无差，奉有尽美尽善，永远遵行之旨，特得勅书云，天生贤人，以助朕造历。又云补千年之缺略，成一代之鸿书，煌煌天语，至今犹存，乃光先以旧法为善，以新法为谬，窃无稽之唾余，逞明季上书之故态，鸱张簧鼓，不祟朝而监员八人，无辜骈道，伤心惨目，宁不独愧于心乎。且光先之言，谓但知历理，不知历法，夫法出于理，理以法征，此千古不易之定论。今光先止认通理，而不敢认通法者，其心盖惧历法有测验可据，立时了辨真伪。历理人多未谙，或可以强辩支吾，奸计若此，其自欺欺人以欺天欺上，岂不贻笑于天下哉。至康熙九年(1670 年)上命内大臣，内院部院大臣，一测于灵台，再测于午门者两阅月。疏称怀仁所言，件件皆合，光先所言，件件不合。又命亲王，及廷臣会议，疏称光先茫然无知，妄生事端，诬害多人，奏请大辟。吁今而后国家之大典已正，千古之是非得白，怀仁可以无言矣。而恐天下后世，见光先之书，犹有惑于纸上空言者，谨将其所布，十谬等书，条分缕析，言必有凭，法必有验，孰得孰失，世必有能辩之者。

极西耶稣会士南怀仁识

此书目录如下：

总略

辩依西洋新法五字，并中国奉西正朔

测验为诸辩之据

新法历遗圣旨为无庸辩之原

辩光先第一摘以为新法不用诸科较正之谬

辩光先第二摘以为新法一月有三节气之谬

辩光先第三摘以为新法二至长短之谬

辩光先第四摘以为新法夏至日行迟之谬

辩光先第五摘以为新法移寅宫箕三度入丑宫之谬

辩光先第六摘以为新法更调觜参二宿之谬汤若望辨吴明烜原刻附后

辩光先第七摘以为新法删除紫气之谬汤若望辩吴明烜原刻附后

辩光先第八摘以为新法颠倒罗计之谬汤若望辩吴明烜原刻附后

辩光先第九摘以为新法黄道箕节气之谬。

辩光先闰月之虚妄

合朔初亏先后之所以然

交食测验七政并凌犯历疏密

光先欺世饰罪

光先计图修历以掩奸欺

地为圆形实证

辩依赤测验

新旧二历疏密

历日自相矛盾数端

原书每半页九行，每行二十字，共六十三页，序文目录在外。其所议论多附图，视利类思之仅据宗教立论者，更进一筹。此书国内甚少流传。

（二十四）《南先生行述》 远西同会徐日升、安多同述

影摄巴黎国立图书馆藏汉文第3033号

原书系写本，共四页，为徐日升（Thomas Pereira，1645年来华，1708年卒）、安多（P. Antoine Thomas，1683年来华，1709年卒）所作南怀仁（P. Ferdin Verbiest，1659年来华，1688年卒）行述。

附录：

《南先生行述》原文

皇清诰授资政大夫治理历法工

部右侍郎又加二级敦伯公行略

公讳怀仁字敦伯，远西热尔玛尼亚国人。系出世胄，」* 自幼龄入会修道，矢志童贞，读书穷博学深潜，精」通象纬。虽考中文理学之科进士，惟欲引人昭事。」帝专顾已灵。以此航悔三年，经赤道四季相反之苦变，风」涛寇盗之险危，历九万里而来中国，已阅三十余年。」其初由粤至秦，传教西安府，顺治十七年蒙世祖章皇帝钦取来京佐历。」皇恩豢养，康熙七年蒙皇上将用，」命治理历法天文，授钦天监副。具疏恳辞，荷」旨准其所请，是时蒙」上命创制观象台新式仪器六座，著有《灵台仪象志》十六」卷，图法备全。蒙」加太常寺卿，复奉」旨著《康熙永年历》三十余卷，预推二千余年日月五星交」食等项。蒙」加通政司通政使。俱经疏恳辞未荷」俞允，又集述翻译《穷理学书》六十余卷，图说详悉进呈」御览。兼值吴逆叛乱，」上命制轻巧红衣木炮连放一百次，坚固中鹄。复奉」旨制红衣铜炮一百三十位，应

---

* 」原为右双引号，似表分行，今改为 」，下同。

戡乱急需，迨至将及隆平。又命制神威战炮三百二十位。告成之日，命往芦沟桥教习八旗炮手，蒙俞旨着庄头供应。经三阅月学习既成，恭遇皇上幸临试放，每炮俱一连三次中鹄。复令诸炮齐放共打一鹄，亦俱齐中。天颜喜悦，赐御服貂裘袍。见天语奖慰：尔向年制炮陕西、湖广、江西等省，已有功效，今所制新炮从未有如此之准者。是时怀仁叩头谢恩。回奏此准炮之法出自皇上创立指示，臣何敢冒为有功。康熙二十一年蒙加工部右侍郎后，又奉命制红衣大炮五十三位亦已完成。惟二十六年传旨制造一千斤铜炮八十位，尚未告竣。前年皇上见其颜色举动大异往昔深董容虑，赐丸药两罐，谕令调养。讵料客夏遇疾缠绵，延至去冬，日见沉剧，屡蒙皇上遣御医诊视，至于岁暮，竟尔长逝。其生也每惭无尺寸微劳，过荷殊宠，锡文高秋，矧又赐赍弘多，不可胜纪，毫无仰报。故其殁也，思念隆渥，未能仰报，只具遗疏，恭谢天恩。然其性禀质直，无私宅心，慈爱自奉，尤甘澹薄，至于遵趋皇事，如万泉庄开河，海子开河，测量水闸等项，更敏勉竭力，不辞劳瘁，兢兢戒谨，惟恐有负圣恩。若其勤学克励苦修，每夜篝灯，迟眠早起，至死不辍。易箦之顷，惟俯首感谢皇恩而已。今于正月二十七日蒙皇上遣大臣发"员暨"，

侍卫赵和二员捧上谕一道，奖嘉优恤，并起银二百两，大缎十端。以举酒诣柩前奠哭，远臣荷兹异数，隆恩既叨荣于生前，又复蒙哀于身后，自古优恤远臣之典，从未有若斯之钜盛也。升等涕泣感激叩谢天恩，曷其有极。公生于前壬戌九月初十日辰时，终于康熙丁卯十二月二十六日申时，享年六十六

岁。兹约略其生平梗概,伏冀大人先生哀衿而赐之铭。诔升等感且不朽

远西同会 徐日升 安　多 仝述

(二十五)《辩学遗牍》一卷　题利玛窦撰

附《大西利先生行迹》　艾儒略述。

《李之藻传》　陈垣撰

1919年北平英歛之覆刻本　一册

关于利玛窦事迹之史料,在中文方面,最重要者当推此书。艾儒略(P. Jules Aleni,1613年来华,1649年卒)于崇祯三、五年之间(1630～1632)撰民国五年马相伯(良)用上海徐家汇藏书楼所藏钞本,与英歛之(华)共同校读,八年由陈援庵(垣)校后,付排印,减为此印本。日人中村久次郎有校本,考证甚详,称:制台陈公文峰(讳瑞,闽福州人)、太守王公(讳潘,浙绍兴人)、瞿太素(讳汝夔)、王公玉沙(讳应麟,闽漳人)、吴公左海(讳中明,歙县人)、沈公蛟门(讳一贯)、冯公琢庵(讳琦)、慕罔冯公(讳应京)、都谏曹公(讳子忭)、我存李公(讳之藻)、相国吴公(讳道南),正卿林公(讳茂槐,福清人)、员外郎洪公(讳甘侯)、主政韩公(讳万象)、京兆黄公(讳吉士)张诚(闽晋浙人)、张夏居(名赓)足备考证。

(二十六)《艾先生行述》

绥安奉教门人李嗣玄德望撰

影摄巴黎国立图书馆藏汉文钞本第3084号

此书为写本,为安文思(P. Gad De Magalhaens,1640年来华,1677年卒)行述。

(二十七)《西海艾先生行述》

绥安门人李嗣玄入玄撰三山后学翁震,但起书影摄巴黎国立

图书馆藏汉文钞本第 2753 号

此书与“艾先生行述”同，但书前多图像一幅，题“思及艾先生正容”

(二十八)《妄占辩》

康熙八年南怀仁撰

影摄巴黎国立图书馆藏汉文本第 4998 号

此书书前题“粤东大原堂重梓’，卷后题：

“康熙八年己口(1669 年)仲夏上浣治理历法远西南怀仁识”，目录二页，本文十七页。

(二十九)《崇正必辩》，前集四卷，后集三卷。

康熙壬子(1672 年)何世贞撰。

影摄巴黎国立图书馆藏汉文写本第 5002 号

此书前有利类思(P. Louis Buglio，1637 年来华，1682 年卒)康熙十一年序。何世贞康熙壬子自序，辩例及目录，今存后集三卷。上卷题虞山何世贞公介著，顾玛略，介石，方宾，于王阅，中卷题虞山何世贞公介著，汪之泰子来，刘聿昭骏肇阅；下卷题虞山何世贞公介著，邹劭、迈庵、方宾，于王阅。全书体例略利类思之《不得已辩》。

(三十)《熙朝定案》三卷

南怀仁撰

影摄巴黎国立图书馆藏汉文第 1329. 1330. 1331. 三号。

此书记康熙朝南怀仁在北京修历经过，为西算输华之重要史料。其版本及卷页时有不同。此据巴黎藏本影摄，计 1329 号，一百二十八页，第 1330 号八十八页，第 1331 号三十八页。

(三十一)《三角算法》　南海穆尼阁著　北海薛凤祚纂 传钞本

此书题南海穆尼阁(Tohn Nicolas Smogolenski,1611～1656)著,北海薛凤祚纂。

书前有序,如下:

《三角算法》叙

算学有勾股三率,于数无所不统。天文家又有三边三角诸法。盖度数之法皆取之割圜,而或分或合,其有定者也。至于县空立义,本无定法,而皆裹于大圆,则无定法者,皆有定理。明哲之士,因其□□□□□□□□□无定者,以穷其变,神哉技至此,无以加点,又何事纷颐杂沓者之足虑哉,诚历学致用之第一义矣。癸巳(1658年)秋月,与穆先生作此于日下,而为之记。

北海薛凤祚书

(三十二)《比例对数表》十六卷　薛凤祚撰

传钞本

此书前有"北海后学薛凤祚撰"叙,如下:

日月星辰,有生之类莫不仰之,而人莫克详其数,其故何也。良以理数繁微,作法太难,令人多望洋之叹。即时有远想者,不过取昔人立成诸法,循数步推,甚至灵台世系,亦止因仍旧简,不知本原。夫不知其原则不能通变诸法,此其要在勾股。奈三角勾股,病检取不易,穆先生出而改为对数。今有对数表,则省乘除,而况开方、立方、三、四、五方等法,皆比原法工力,十省六七,且无舛错之患,此实为穆先生改历立法第一功。予执笔以受,时而重译,于戊辰历之后二十五稔,岁在寿星,历春暨夏,而秋,方感暑,则烈汤薰灼,挥汗浃背,劳诚劳矣,功于何有。

目录如次

比例表用法

原数一万之外取此例法

比例数取原数法

解四线比例表用法

比例数表。

(三十三)《妄排吉凶辩》 无卷数

康熙八年(1669 年)南怀仁撰

影摄巴黎国立图书馆藏汉文第 4997 刻本。

此书目录后题:

"康熙八年已酉仲夏上浣治理历法远西南怀仁识粤东大原堂重梓"

字样,计目录三页内容二十一页专为攻击杨光先一派而作。

(三十四)《妄择辩》 无卷数

康熙八年(1669 年)南怀仁撰

影摄巴黎国立图书馆藏汉文第 4994 号本。

此书无目录。书内第一页起"辨杨光先选择之虚妄",书末题:"康熙八年已酉仲夏上浣治理历法天文远西南怀仁撰。"内容共十一页

(三十五)满文《几何原本》七卷 未著撰人 三册

蓝印本。

清初西教士张诚(T.Fr. Gerbillon,1654~1707)白晋(Toachirn Bouvet,1656~1730) 逐日入宫,将《几何原本》等书,译为满文,教授清圣祖,此其讲义也。

是时有一种七卷本《几何原本》。满汉文之七卷本《几何原本》与《数理精蕴》之《几何原本》十二卷本校,亦有互异之处。如满汉文本之第六卷,即《数理精蕴》之第六卷至第七卷,然《数理精蕴》第六

卷至第十卷为六十四条，而满汉文本之第六卷，则为九十条，又满文本第一卷卷首序论，亦不载《数理精蕴》本中。

（三十六）《几何原本》七卷附《算法（原本）》一卷　未著撰人　四册　传钞本

原书藏清崇阳宫，后移入故宫博物院图书馆

书前有序称："《几何原本》，数源之谓，利马窦所著，因文法不明，后先难解，故另译。"盖为清初七卷本《几何》之另一译本。

《文贞公（李光地）年谱》："癸未（1703 年）二月，公蒙赐《几何原本》《算法原本》二书。"则此二书之成，在康熙癸未（1703 年）前矣。

（三十七）《几何原本》七卷　未著撰人　二册

传钞本。

原书藏国立北平图书馆，书前有"孔继涵（1739～1783）印"、"茳谷"、"安乐堂藏书"诸印，缺卷六，计：

卷一共十二页

卷二共九页

卷三共十页

卷四共二十一页

卷五共二十二页

以上合一册

卷七共七十一页

以上合一册

（三十八）《勾股相求之法》　未著撰人　一册

传抄本

此为国立北平图书馆所藏"算书五种"之一，题清乾隆年开化纸精写本，清孔继涵旧藏本，有孔氏收藏印，子目如下：

《勾股相求之法》一卷

《借根方算法节要》二卷

《测量高远仪器用法》一卷

《比例规解》一卷

《求正弦法》一卷

此《勾股相求之法》书，前有“安乐堂藏书记”，书后有“孔继涵印”诸印，共四十四页。

(三十九)《借根方算法节要》二卷　未著撰人　二册

传钞本

书前有“孔继涵印”、“安乐堂藏书记”诸印，

原书藏国立北平图书馆，计

卷上四十页，卷下五十三页

据孔继涵藏本《算法纂要总纲》，曾引《借根方算法》中卷，则原书为三卷本，此为节要，因缩为二卷也。

(四十)《远量高测仪器用法》

《比例规解》

《八线表根》　未著撰人　合一册

书前有“安乐堂藏书记”，后有“孔继涵记”诸印。

原书藏国立北平图书馆，计

《测量高远仪器用法》二十三页

《比例规解》　二十六页

《八线表根》　六页

(四十一)《算法纂要总纲》十五卷　未著撰人　六册

书前有“扬州　汪喜孙孟慈之印”印记，按汪喜孙(1786～1849)一名喜荀，字孟慈，江都人，嘉庆年举人。

此书为清初旧钞本，凡十五卷，由喜孙收藏者，子目如下：

第一、定位之法

第二、加法

第三、减法

第四、乘法

第五、除法

第六、三率求四率之法

第七、和较三率法

第八、合数差分法

第九、借衰互征法

第十、叠借互征法

第十一、开平方法

第十二、三角形总法

第十三、算各面积总法

第十四、开立方法

第十五、算体总法

附八线表报

(四十二)《算法纂要总纲》十五卷　未著撰人　三册

清初旧钞本　(孔藏定本)

孔藏本较汪藏本先出，有可补汪藏本之处，如孔藏本第一册第五页，后一行；至第六页三行止共为十六行，可补汪藏本第一册第八页前九行间空位，其他类此之处甚多。

孔藏本又引《几何原本》二卷第五节，第四卷第十四节，第五卷第二十九节，第六卷第七至六十六节；《算法原本》第八至第七十三节；《借根方算法》中卷第十节。

(四十三)《同文算指别编》　无卷数　利玛窦授　李之藻演

《四库全书》收《同文算指前编》二卷、《通编》八卷，为两江总督

采进本，题明李之藻（?～1631）演西人利玛窦（1552～1610）所译之书也。据《郘亭书目》则姚若有钞本，后多一卷，世称《同文算指别编》，后此藏书家未有题录，亦未有刻本，今巴黎国立图书馆汉文本第 4863 号有《同文算指别编》钞本无卷数，二十二页卷首四行如下：

“同文算指别编卷□

西海　利玛窦　授

浙西　李之藻　演

截圜弦算第□”

全书无序，盖论三角术并附三角函数表，举及正弦余弦函数表小数七位。按《前编》有万历癸丑（1613 年）李之藻序及万历甲寅（1614 年）徐光启（1562～1633）序，而利玛窦卒于万历三十八年（1610 年），则前书为卒去前所授。今《同文算指别编》未题年月，当亦为利玛窦卒去年（1610 年）前所授矣。查三角术及三角函数表之输入，正史记载以明崇祯四年（1631 年）正月二十八日呈进之《割圜八线表》六卷，同年八月呈进之《测量全义》十卷为始。今据此书则利玛窦卒去前已以此术授李之藻，流传民间二十年，至编修历法将始重新采用也。且《割圜八线表》所举小数仅及五位，此书则及七位，亦视后来薛凤祚、穆尼阁，《比例四线新表》（约 1650 年）为早，亦珍闻也。

（四十四）《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷

明　王文素撰　蓝格钞本六册

明王文素撰《新集通证古今算学宝鉴》亦简称《算学宝鉴》，最近由国立北平图书馆于旧书肆中发现。此书四百年来各收藏家及公私书目未经著录。自序成于明嘉靖三年（1524 年），视吴敬《九章详注比类大全》（1450 年）为迟。据其自序、卷首之“集算诗”及宝朝

珍序文知：此书之成，时经三十年，王文素年已六旬，无力付刻。吉武杜瑾虽愿出资刊刻，而实现与否，尚无明证，是以流传甚少。此书采集宋杨辉、明金陵杜文高、江宁夏源泽(1434年)、金台金来朋诸家算法，加以编订。其花十六等图即出于杨辉，而所称杜、夏、金三家著书，除夏源泽一人可考外，其余二人，所著书名，尚未获知。据其目录，全书共分子至亥等十二本，(今订成六册)共四十一卷(自序作四十二卷)，其集算录深叹不遇知音，今时隔四百余年全书再现于世，亦异数也。

今录此书序文、目录于后，为研治中算史者参考之用。

算学宝鉴序

自结绳之政远而后代之书契立自书契立而后总之以数算是数学为用于世大矣盖肇自黄帝命隶首分为九章始传于世上自天文下及地理中于人事大而国家之兴废小而人事之之得失于凡万物之幽深玄远出入潜没罔不有数存焉但穷其本测其原而知其要者世之不多见也饶川王君讳文素字尚彬其先山西汾州人成化间从父林商于真定之饶阳遂定居焉自幼颖悟涉猎书史诸子百家无不知者尤长于算法留心通证盖有年矣吾邑杜君讳瑾字良玉者亦长于是因公出会于清河旅邸之间各伸所长独尚彬公超出人表良玉喜曰诚吾辈之弗如也所谓数算中之纯粹而精者乎先生又出乎平日所改正数书十帙分为三十余卷名曰通证古今算学宝鉴良玉检之深加赏叹乃曰窃觏宋杨辉及我朝金陵杜文高江宁夏源泽金台金来朋等诸公算法固谓善矣但藏头露尾露尾藏头俱以逢巧之法而算之不通活变以致后学之难悟今公以通玄活变之术断成诗歌讲义诚可变而通之使民宜之者乎良玉愿损资绣梓以广其传谒余以序事余谓世人之有寸长者惟独善而恐人知既知而恐人得若王公善用心而不吝其有杜

公善于知人而不没其善二公长于数算而媲美者鲜其人乎余故不揣鄙陋遂简诸首以纪岁月云尔正德八年岁次癸酉仲春之吉

武邑庠生宝朝珍序

窃闻曩古黄帝命隶首作算数其目有九曰方田粟米衰分少广商功均输盈朒方程勾股又立度量权衡之名九九乘除之法是乃普天之下公私之间不可一日而阙者也故内则载之而训释周礼用之而教民宜矣夫上古圣贤犹且重之况今之常人岂可以为六艺之末而忽之乎愚是以留心算学手不释卷三十余年颇谙乘除之路尝取诸家算书读之其间辞失旨者有之问答不合者有之歌诀包束不尽定数不明舍本逐末弃源攻流乘机就巧法理不通学者莫可适从正犹迷人而指迷人也又兼版简模糊誊书舛误呼愚者不能分别智者弗与办理理者不肯尽心以致算学废弛所以无人罕得精通良可叹也我朝景泰间金台金来朋有志改正才论数题即有二病不足称也愚故不揣鄙陋敢以醯鸡井蛙之见历将诸籍所载题术逐一□深探远细论研推其所当者迷之误者改之繁者删之阙者补之乱者理之断者绪之复增乘除图草定位式样开方演段捷径成术编为拙歌注以俗解凡二百条三百十七诀千二百六十七问分为四十二卷号通证古今算学宝鉴于嘉靖改元训蒙西城暇中又韵诗词三百余问分十二卷以续于后固得僭罪如丘山庶补算学有毫末既成憾其闻见之不广采辑之不多而又愧词句之不工音韵之不叶浅见薄识不无欠当待明算者改正幸甚欲刻于版奈乏工赀不获遂愿倘有贤公仗义捐财刻木广传而与尚算君子共之愚泯九泉之下亦不忘也不尔徒为腐尘而已矣噫

嘉靖三年岁次甲申秋八月癸巳朔

汾阳王文素述于饶川西城之馆

集算诗

其一

六艺科中算数尊三才万物总经纶乘除升降千般用量度权衡五品分天下钱粮凭是掌世间交易赖斯均若无先圣传流此自古模糊直到今

其二

市霧诸家俗算篇数差法拙字讹刊鲁鱼豕亥三为二焉马平乎十作千滞处疏通繁处剪乱时整理阙时添而今历历皆更正莫与寻常一样看

其三

身似飘蓬近六旬留心算学已年深苦思善致精神败久视能令眼目昏铁砚磨穿三两个毛锥乏尽几千根如风扫退天边露显出中秋月一轮

其四

诸家算籍甚差讹暮玩朝参已证磨有意刊传财力寡无人成就恨嗟多鲁麟直得逢尼父楚璧须还遇卞和良马若非遭伯乐盐车困死告谁何

其五

莫言算学理难明旦夕磋磨可致通广聚细流成巨海久封杯土积高陵肯加百倍功夫满自晓千般法术精忆昔曾参传圣道亦由勉进得其宗

其六

暖衣饱食际雍熙算数林中论是非半间陋室寻妙理灵台一点悟玄机犹如月到天心处活似风来水面时料此一般清意味世间能有几人知

其七

其中奥理实难参仰益高□钻益坚百法源流当细审四家周径莫

轻谈悬空定位无踪影带踪开方有正翻人道算如隔张纸我言如隔万重山

其八

总为诸家算未周故忘鄙陋又重修吹开毛孔寻庇病使碎心机觅本流下海探珠非易得登山采玉实难求璧将昏镜磨明也寄语英贤韫匮枚

算学宝鉴图录

河图

洛书图

六觚图

方圆图

度图

量图

衡图

五辰图

五音相生图

律吕相生图

洛书均数图

花十六图

求等图

辐辏图

方胜图

王字图

古珞钱图

连环图

璎珞图

三同六异图

新集通证古今算学宝鉴目录

因法　二十三　一诀十问

乘法　二十四　一诀六问

加法　二十五　一诀十五问

归法　二十六　二诀九问

归除　二十七　二诀六问

商除　二十八　一诀一问

减法　二十九　一诀

斤拜　三十　三诀十四问

端疋　三十一　六问一诀

丑本

第四卷

求一代乘　三十二　一诀二问

求一代除　三十三　一诀三问

身前加　三十四　一诀二问

身前来　三十五　一诀三问

因代繁乘　三十六　一诀一问

损乘　三十七　一诀一问

连身加　三十八　一诀二问

重因重归　三十九　一缺二问

重加重减　四十　一诀一问

相乘　四十一　一诀二问

实位相同　四十二　一诀二问

截法乘　四十三　一诀一问

犯亩法　四十四　一诀四问

犯斤秤　四十五　一诀六问

犯合数　四十六　一诀四问

因总损零　四十七　一诀二问

归总还零　四十八　一诀一问

第五卷

互乘活法　四十九　一诀十六问

单因代乘　五十　一诀十九问

商因代除　五十一　一诀二问

众九相乘　五十二　一诀四问

众九为乘　五十三　一诀二问

众九为除　五十四　一诀二问

二位归法　五十五　七诀一问

第六卷

乘法通变　五十六　二十六问

除法通变　五十七　二十问

寅本

第七卷

方田　五十八

诸田求积　五十九　十七诀三十八问

第八卷

平圆求积　六十　五问

弧田论积　六十一　十五问

第九卷

里里相乘　六十二　一诀十问

积田求里　六十三　二诀十一问

诸田分子　六十四　三诀十问

忘长失门　六十五　一诀四问

田求长阔　六十六　五诀十问

第十卷

求田捷径　六十七　三诀三十九问

卯本

第十一卷

粟米　六十八　一诀二十六问

双头六草　六十九　一诀六问

重据损　七十　一诀十一问

第十二卷

通分　七十一　一诀七问

同分　七十二　一诀五问

约分　七十三　一诀二问

合分　七十四　一诀四问

课分　七十五　一诀七问

平分　七十六　一诀四问

乘法分子　七十七　二诀六问

论除尽否　七十八　二诀六问

第十三卷

衰分　七十九　二诀十六问

多出差分　八十　一诀二问

合分入据换　八十一　一诀八问

第十四卷

贵贱分身　八十二　六诀七问

合和差分　八十三　一诀九问

异乘同除　八十四　一诀十七问

同乘异除　八十五　一诀四问

辰本

第十五卷

少广 八十六 一诀三十一问

第十六卷

平方 八十七 五诀五问

平方分子 八十八 一诀二问

截长益广 八十九 一诀二问

分停开方 九十 一诀二问

带踪平方 九十一 二诀二问

差步求和 九十二 四诀五问

和步求阔 九十三 二诀四问

众和求长阔 九十四 一诀二问

第十七卷

圭田求长阔 九十五 二诀四问

梯田求长阔 九十六 六诀八问

环田求周径 九十七 一诀四问

长阔求众广 九十八 一诀六问

井田求方 九十九 五诀五问

牛角田求长阔 一百 二诀一问

弧田求矢 一百一 一诀二问

三角田求面 一百二 一诀一问平方还原

六角求面 一百三 一诀一问

第十八卷

梭田截积 一百四 一诀二问

圭由截积 一百五 二诀三问

勾股田截积 一百六 一诀四问

梯田截积 一百七 三诀四问

繁广田截积　一百八　一诀三问

方田截积　一百九　一诀一问

六角田截积　一百十　一诀一问

巳本

第十九卷

商功　一百一十一　二诀十四问

方圆台　一百十二　一诀八问

长亭台　百十三　一诀九问

高广不同堤　一百十四　二诀五问

众广不同堤　一百十五　二诀七问

第二十卷

盘粮仓窖　一百十六　一诀十五问

盘草垛　一百十七　一诀三问

立圆求积　一百十八　五诀二问

金石评重　一百十九　三诀十七问

第二十一卷

堆垛　一百二十　六诀十一问

算箭　一百二十一　三诀十二问

分子求立积　一百二十二　十二问

午本

第二十二卷

均输　一百二十二　一诀四问

输流均数　一百二十四　一诀三问

迟疾行程　一百二十五　一诀十七问

剪管　一百二十六　三诀十一问

第二十三卷

鼠尾差分　一百二十七　六诀二十三问
双鼠尾差分　一百二十八　二诀四问
第二十四卷
就物抽分　一百二十九　二十三问
误和差分　一百三十　一诀六问
匿积分身　一百三十一　一诀十一问
攒纳差分　一百三十二　一诀四问
收纳课税　一百三十三　一诀七问
短长同会　一百三十四　一诀五问
未本
第二十五卷
盈不足　一百三十五　二诀九问
互换盈不足　一百三十六　一诀三问
盈朒求原　一百三十七　一诀二问
递支盈不足　一百三十八　二诀八问
匿积盈不足　一百三十九　一诀六问
互益求原　一百四十　一诀五问
折绳求木　一百四十一　一诀四问
第二十六卷
方程　一百四十二　一诀四问
正负方程　一百四十三　一诀四问
互借求原　一百四十四　一诀五问
金破求原　三诀五问附
第二十七卷
众率分身　一百四十五　一诀十问
犯同　一诀二问附

中本

第二十八卷

第二十九卷

第三十卷

酉本

第三十一卷

平圆开积　一百六十七　一诀一问

环田求周径　一百六十八　三诀三问

环田截积　一百六十九　四诀三问

钱田内方　一百七十　一诀五问

大塘田求内圆　一百七十一　一诀四问

第三十二卷

直内容圆　一百七十二

积物求周径　一百七十三　四诀八问

平方积物求周　一百七十四　五诀七问

三角积物求周　一百七十五　四诀八问

方圆箭求周　一百七十六　一诀四问

第三十三卷

共积开平方　一百七十七　一诀二十三问

第三十四卷

和乘长阔　一百七十八　一诀十一问

平积添加　一百七十九　一诀八问

课平子开平方　一百八十　一诀三问

戌本

第三十五卷

开立方积　一百八十一　三诀四问

开分子粒方　一百八十二　一诀二问

立方带从　一百八十三　二诀三问

开立圆积　一百八十四　四诀一问

立套方　一百八十五　一诀二问

圆套圆　一百八十六　一诀一问
方套圆　一百八十七　一诀一问
圆套方　一百八十八　一诀一问
第三十六卷
开修筑积　一百八十九　一诀十五问
共积开立方　一百九十　一诀六问
田积乘长阔　一百九十一　一诀五问
第三十七卷
立方截积　一百九十五　一诀十七问
牙税求原　一百九十六　一诀九问
亥本
第三十八卷
三乘以上方　一百九十七
三乘以上圆　一百九十八　二问
第三十九卷
三乘以上带踪　一百九十九　一诀
锁积开立方　二百　三诀四问
圆田截弧矢　二百一　一诀三问
第四十卷
乘积开方　二百二　一诀十一问
第四十一卷
约面开方　二百三　一诀十二问。

林鹤一传略*

日人林鹤一于1935年10月4日逝世。氏为日本数学家，数学教育家，数学史家，著作等身。国内翻译氏所著数学教科书数达数十种。前年氏年六十，举行“还历祝贺”，蒙以所著《代数几何语源研究》一文见示，方期克臻高龄，本年10月讣音传来，深为悼惜，爰为文介绍其生平如次：

林鹤一以明治六年(1873年)6月13日生于德岛市，明治二十六年7月入东京帝国大学理科大学肄业，三十年7月数学科卒业。自明治三十年7月至三十一年7月任东京高等师范学校讲师。三十一年8月至三十二年4月任京都帝国大学助教授，三十四年11月任东京高等师范学校讲师，四十年6月至四十四年3月任同校教授，明治四十四年2月至昭和四年5月，任东北帝国大学教授。此时期工作甚为重要，在明治四十四年创刊《东北数学杂志》，并任大正八年创设之日本中等教育数学会永久会长，昭和四年5月辞去东北帝国大学教授职务，此数年间尚任理学部法文学部讲师，昭和四年7月任东北帝国大学名誉教授，昭和十年(1935年)10月4日逝去。

---

* 本文原载《科学》第20卷第3期(1936年3月)第222～223页。

林鹤一氏遗像

氏所著单行本之中学校、女学校、实业学校用数学教科书为数甚多，其所监修之《初等数学丛书》亦有数十册，国内商务印书馆所译多属此类，又监修《数学丛书》二十九种，由大仓书店发行，计为：

(一)林理学博士，国枝理学博士：《方程式第一》。

(二)林理学博士：《初等几何学》，《作图不能问题》。

(三)林理学博士，刈屋理学士：《不等式》。

(四)林理学博士：《初等几何学》。《轨迹问题》。

(五)林理学博士，国枝理学博士：《方程式第二》。

(六)林理学博士，刈屋理学士：《公算论》。

(七)林理学博士：《行列式》。

(八)C. Jordan 著，林理学博士译：《微积分学之基础》。

(九)林理学博士：《初等几何学》。《极大极小问题》。

(十)林理学博士，国枝理学博士：《方程式应用问题》。

(十一)林理学博士：《算术四则问题》(第一)。

(十二)林理学博士,柴山理学士:《数之概念》。

(十三)林理学博士:《顺列论》。

(十四)林、小仓(金之助)共著,竹中博士增订:《级数概论》(已有译本)。

(十五)Hilbert 著,林、小野(藤太)共译:《几何学原理》。

(十六)林理学博士:《算术四则问题》(第二之一)。

(十七)林理学博士:《算术四则问题》(第二之二)。

(十八)林博士、小野藤太共译:《Euler 代数学》。《不定解析论》。

(十九)Boyer 著,林理学博士译:《数学史》。

(二十)Enriques 著,林理学博士译:《初等几何学作图法》。

(二十一)林理学博士,莲池良太郎增补:《三角方程式》。

(二十二)林理学博士:《初等方程式论》。(已有译本)

(二十三)林理学博士,西村秀雄:《射影几何学》。

(二十四)林理学博士:《省略算及简便算》。

(二十五)林理学博士、莲池良太郎:《初等微分方程式》。

(二十六)林、中岛共著,柳原吉次增订:《初等几何学定量问题》。

(二十七)林理学博士、藤卷卯三郎:《级数总和法》。

(二十八)林理学博士、竹中理学博士:《初等积分方程式》。

(二十九)林理学博士、小野、细川:《非欧氏几何学》。

氏所著论文散见于《东京数学物理学会记事》,《东京物理学校杂志》,《东北数学杂志》,《东北帝国大学理科报告》,《中等教育数学会杂志》,《文化》,及欧美杂志者数及二三百篇,今就手中所有者,略举如下,以见一斑。

(1)《*The "Fukudai" and determinants in Japanese Mathematics*》

《见东京数学物理学会记事》(1909~1910)

(2)《和算中之零约术及连分数论之发达》。

见《东北数学杂志》卷六,七(1915 年)

(3)《和算中之对数论》(同上,卷二十一,1922 年)

(4)《和算中之三角函数表》(同上,卷二十六,1926 年)

(5)《和算中二元一次不定方程式解法及剩一术朒一术》(同上卷三十,1928 年)

(6)《和算中之错列解析》(同上,卷三十三)

(7)《和算中之方程式论》(同上,卷三十四)

(8)《和算中之极大极小问题》(同上,卷三十四)

(9)《垛术,索术与招差法》(同上卷三十五)

(10)《开方缀术与开方算颗术》(同上卷三十五)

(11)《角术》(同上卷三十六)

(12)《圆理缀术》(同上卷三十六)

(13)《和算中之曲线与曲面》(同上卷三十九)

(14)《关孝和之圆理》

见《东京物理学校杂志》第四六九号(昭和五年纪念号,昭和五年)

上述《和算中之零约术》、《和算中之对数论》、《和算中之三角函数表》诸文,李俨曾于《中算史论丛》中引述其说。

氏之生徒,国内有陈建功、苏步青,日本有冈田良知、柴田宽、成实清松、岩村寅之助、柳原吉次,河口商次诸人,并卒业于东北大学,而小仓金之助君,则于明治 44 年迄大正 6 年为林鹤一氏助手,并师事之,其与林氏共著之《级数概论》,则国内已有译本,林氏生平亦由小仓君处获知一二,其详则俟诸异日。

中国算学故事*

（一）

现在说述中国算学故事，先胪举关于中国算学史大事，及重要人物，如下开各条：

公元前 2700 年伏羲画卦

公元 263 年刘徽注《九章》

400～600 两晋南北朝算书

祖冲之（429～500）

502～519 祖暅之

公元 626 年王孝通

公元 656 年唐立算学

公元 729 年笔算入中国

1247 年秦九韶 Horner 法（1804 年）

1261 年杨辉 Pascal 三角形（1527 年）

1303 年朱世杰级数

---

* 本文为著者在金陵大学理学院之讲演稿，发表于《金陵学报》第 6 卷第 1 期（1936 年）第 65～74 页。

1450 年算盘

1581 年利玛窦来华

1606 年几何原本

1643 年新法算书

1723 年数理精蕴

梅文鼎(1633～1721)

1750～1850 年清复古期

李善兰(1810～1882)

华蘅芳(1833～1902)

中国历史，由黄帝伏羲计算下来，到现在已有四千六七百年的时间，所以关于原来的史迹，因年代久远，不易流传。约在公元一百三四十年中间，山东武梁祠汉朝壁画上，画着伏羲是人头蛇身的人物。因当时距伏羲时代，已经有三千年，所以一切故事，只是一种传说。可是在武梁祠造象的人头蛇身人物的手中，持着规矩。规，即圆规，矩，即三角板。这是表明算学的知识，中国早已发达，现在我们还有“规矩”的成语。大体以前即以此两字代表科学化的意思。一到有文字的时候，同时即有数目字，这在河南殷墟甲骨上，到处可以见到。到了周朝，小学校内同时教授书算，书即写字读书，算即算法。前汉后汉时代，对于算学有十分的趣味。汉代砖瓦有许多几何图案，东至朝鲜，西至新疆，都有此项汉砖。而以汉旧都长安为最多，以前有人在敦煌，尚发现着写在竹简上的九九乘法表。查后汉蔡伦方发明纸，纸未发明以前，文字并写在简上。现在在边境，还发现到这种写在竹简上的九九乘法表，可见这时候汉人算学文化，已经到了边境，其次则前后汉及三国时，还有多数学者，如：许商、杜忠、赵君卿、刘洪、马续、郑玄、徐岳、阚泽、陈炽、王粲诸人，研究《九章算术》，所以现在的《九章算术》，还留许多汉代的名辞。到魏景元

四年(公元 263 年)刘徽将《九章算术》加以注解。刘徽所注《九章算术》问世之后,其余各人所研究的本子,就不传了。刘徽曾说明计算各种几何形体的方法,并说明求圆周及其全径相比之圆率,即 π 之计算法,并详《九章算术》内(其详见后)。到了两晋南北朝(400～600)的时候,有许多算学家写着多数算书。我们现在所流传的《算经十书》内:《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》、《五经算术》都是这时代的作品。同时尚有祖冲之父子对于求 π 值,及求球之体积的方法,是值得介绍的。祖冲之生卒年为(429～500),其子暅之则于 502～519 时在梁朝说及历法。祖冲之曾求得 $\pi=3.14159265$,$\pi=\frac{355}{113}$,$\pi=\frac{22}{7}$诸数,并著有《缀术》一书,其书今已无传。可是他曾注《九章算术》,现在在《九章算术》内,有一段说祖冲之如何求得 $\pi=3.1416$。其子暅之求球之体积方法,亦在《九章算术》中(其详见后)。到了唐朝,有个王孝通著有一部《缉古算经》,今在《算经十书》中。王为公元 626 年时人,王书中多言立体几何之计算方法,并列有三次方程式。唐初公元 656 年时尚立有算学专科学校,以七年为期,分为二系。其中一系以四年教祖冲之的《缀术》,以三年教王孝通的《缉古算经》。又有一系教《算经十书》中《九章算术》等算经。唐代声教远及边境,现在敦煌尚发现有数种唐人写的算学书。唐时社会十分进化,对于以前通用数目字,已嫌简单,官商乃通用如今大写的“壹,贰,叁,肆,伍,陆,柒,捌,玖,拾”的数目字。同时日本僧人时到唐都长安留学。我们有一部分古算书,即在此时输入日本,日本亦设立学校授算术。同时中国尚输入他国文化,佛教由印度及西域传入时联带传入天文算法,在唐时有一部《开元占经》(公元 729 年)。有一故事说:当时印度算法,乃用笔算,这是笔算第一次输入中国,可是当时国内还是用着筹算,同时又有印

度僧人供职天文台中，协同修治历法。到了宋元时代，中国算学是极度发达，算学家辈出，研究着天元四元。天元四元即是高等代数学，是时特别注意到高次数字方程式的解法。因为研究此项方程式，故秦九韶于 1247 年著书中说到 Horner 方法，这在欧洲是 1804 年方有人说及。秦氏又说到不定方程的求法。杨辉于 1261 年书中说到 Pascal 三角形，即：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

这在欧洲是 1527 年方有人说及。朱世杰则于 1303 年书中，有一篇专门论级数求法。关于游戏算学，则有纵横图等等，同时亦有人论及，他的做法甚为简单，如下图：

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

4	9	2
3	5	7
8	1	6

三行的，先将 1 至 9 各数字，分三行斜写后，上下对换即得。

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

四行的，先将 1 至 16 各数字分四行直写后，内外四角对换即得。

到了明朝，最大的贡献，算是算盘的发明，其法始见于 1450 年吴敬所著《算法大全》一书中。至明末利玛窦于 1581 年到中国，1606 年与徐光启共译成《几何原本》，又有《同文算指》说着笔算。后此西士来

者日多，在明朝所编《崇祯历书》，到明亡尚未完全告成，入清由南怀仁继续完成，时在1643年，称为《新法算书》。西洋算法，乃于此时尽量输入。清朝康熙帝亦好算学，曾招致西洋教士，入宫讲学，随后将此项讲义，加以整理，编成《数理精蕴》，于1723年出版。《数理精蕴》中记述代数学，应用几何学，及平面三角等，清初又有西教士穆尼阁，输入对数表、球面三角各公式，及用级数求π，求$\sin a$，求$\operatorname{vers} a$各公式。可是所述者有时失之太繁，如《数理精蕴》内求π，及求对数法，往往连篇累牍；或失之太简，如杜德美只举公式，不加证明。因此有志之士，感着沉闷。中算家梅文鼎(1633～1721)诸人首先整理西算。梅氏以三十岁开始研究算学，直到八十九岁卒去，终身研求此道。在北京客居的时候，年将六十，往往读书达旦，其所著书力求简易，惟恐人不晓。是时西洋所传入平面球面三角法，有大部分由梅氏用几何法证明。后来尚有些学者，毕生研究一事，如明安图以三十年的力量，用几何及代数方法，证明杜德美所传入以级数法求π的公式，便是其例。自1750年至1850年此一百年间，国中产生多数算学家，如项名达(1789～1850)、董祐诚 (1791～1823)、戴煦(1805～1860)，都以数十年的精力，致力此道。同时宋元算书，陆续发现，罗士琳(？～1853)亦以十年研究《四元玉鉴》。是为清代中算复古时期。至1850年之后，西算再输入中国，由李善兰(1810～1882)、华蘅芳(1833～1902)相继译述欧美算书，李与伟烈亚力，华与傅兰雅共译。李善兰精通中西算法，曾费时四载，思得对数学理。是时未有学校，以上所述各算家，大抵无师自通。到庚子1900年以后，废科举，兴学校，学校中设有算法一科，从此学算机会更多，欧美近代算学陆续输入中国。现在吾人求学机会，已与欧美平等矣。

利玛窦(Metteo Ricci，1552～1610)

南怀仁(Ferdinard Verbiest，1623～1688)

穆尼阁(John Nicolas Smogolenski,1611～1656)

亚力伟烈(Alexander Wylie 1808～1885)

傅兰雅(John Fryer)

(二)

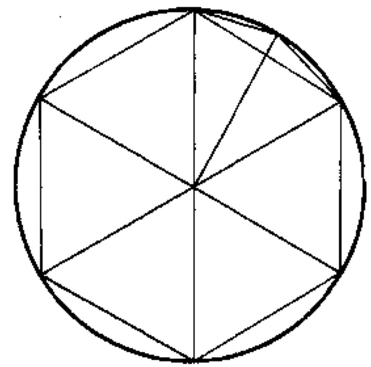
魏刘徽首先说明圆周可以内容多边形。第一步先内容 6 边形,次 12 边形,次 24 边形,次 48 边形,次 96 边形,逐次如是,使多边形之边,增至无数即与圆周相合。如已知全径,及其无数多边形内一边之值,则乘以边数,便可得各周边之值。其各周边与全径之比例,即是 π 之值,亦可求得。如全径,$D=100$,先内容 6 边形,则周边为 300,即 $C_6=300$;次作内容 12 边形,按勾股形算法求得内容 12 边形之一边,因而求得 $C_{12}=310.5828$,逐次如是,如后附表第二行。古代不惯小数计算,故第二行各数尾数化为分数如第三行,次求两周边间之差如第四行(差$_1$)。在此四行可以知道,如两周边间之各差并已求得,又已知各周边之某一数,则可以加减方法,求得其他各周边之值,如:

$$\pi_{96}=300+\frac{1}{625}\left(6614\,\frac{1}{4}+1674\,\frac{3}{4}+\frac{420}{625}+\frac{105}{625}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$=314\,\frac{64}{625}$$

刘徽算到此处,不复往下再算,即于内容 96 边形周边 $C_{96}=314\,\frac{64}{625}$弃去尾数,与全径 D 相比,得 $\pi=3.14$。

到祖冲之继续以每个差数,与前次差数相除,求得一种线索,第一次求得第五行(差$_2$),复次假定此各差数并为$\frac{105}{625}$乘‘4’之幂数,如第六行(差$_3$),即:



$$C_{96}-C_{48}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^0)$$

$$C_{48}-C_{24}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^1)$$

$$C_{24}-C_{12}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^2)$$

$$C_{12}-C_{6}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^3)$$

同理，以后‘4’之幂数递降，得：

	差$_1$	差$_2$	差$_3$
$D=100$			
$C_6=300$	$=300$		
		$\dfrac{6614\frac{1}{4}}{625}=\dfrac{105}{625}(4\times3.9875\times3.9494)$	$=\dfrac{105}{625}(4^3)$
$C_{12}=310.5828=310\dfrac{364\frac{1}{4}}{625}$			
		$\dfrac{1674\frac{3}{4}}{625}=\dfrac{105}{625}(4\times3.9875)$	$=\dfrac{105}{625}(4^2)$
$C_{24}=313.2624=313\dfrac{164}{625}$			
		$\dfrac{420}{625}=\dfrac{105}{625}(4^1)$	$=\dfrac{105}{625}(4^1)$

$$C_{48}=313.9344=313\frac{584}{625}$$

$$\frac{105}{625} \qquad =\frac{105}{625}(4^{0}) \qquad =\frac{105}{625}(4^{0})$$

$$C_{96}=314.1024=314\frac{64}{625} \qquad =\frac{105}{625}(4^{-1})=a_1$$

$$C_{192}= \qquad =\frac{105}{625}(4^{-2})=a_2$$

$$C_{384}= \qquad =\frac{105}{625}(4^{-3})=a_3$$

………………

$$C_n=C_{96}+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots \qquad =314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)$$

$$=314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}+\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) \qquad =314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\times\frac{1}{3}$$

$$=314\frac{64}{625}+\frac{35}{625} \qquad =314\frac{99}{625}$$

$$C_n=314\frac{100}{625} \qquad =314.16 \qquad \left(+\frac{1}{624}=0.0016\right)$$

$$\therefore \quad \pi=3.1416$$

$$C_{192}-C_{96}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^{-1})$$

$$C_{384}-C_{192}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^{-2})$$

$$C_{768}-C_{384}=\left(\frac{105}{625}\right)(4^{-3})$$

……………………………

在前(1)式内示已知 $C_6=300$ 及各差，可求得 C_{96}。现在已知

$C_{96}=314\frac{64}{625}$ 及各差，亦可求得 C_n，如下式

$$C_n=314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$=314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=314\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\times\frac{1}{3}$$

$$=314\frac{64}{625}+\frac{35}{625}$$

$$=314\frac{99}{625}。$$

为凑整数起见，加入 $\frac{1}{625}$，得 $C_n=314\frac{100}{625}=314.16$，与全径 D 相比，得：

$$\pi=3.1416。$$

（三）

祖冲之子暅之求圆球之体积，第一步先设一立方形，每边之长为 $D=2r$，如图(1)。此立方形可以内容一圆球，其半径之长为 r。次假设此立方形，纵横两面，各以圆柱相贯通后，再平分为上下两半，如图(2)、(3)。再将此上半个，分为四小块，如图(2)，则各边之长为 r，体积为 r^3，每块自成一小立方形。且经两圆柱纵横相贯通后，此小立方应分四立体形，如图(4)及(6)、(7)、(8)、(9)。若于距底边 a 处，以一平面平截此小立方，则其截面有四形，即大平方形一个，长方形二个，小平方形一个，如图(6)、(7)、(8)、(9)。又因图(5)内于勾股形内已知弦为 r，勾为 a，假令其股为 b，即所切大平方形之一边为 b，其面积为 $b^2=r^2-a^2$，如图(11)。现因小立方内之四立体形本合成一立方，其截面之总面积为 r^2，如图(10)，减去其中之大平方形 $b^2=r^2-a^2$，则其余三立体形在此处之总截面积为 $r^2-(r^2-a^2)=a^2$，如图(12)。同理在1处之总截面积为 1^2，在2处之总截面积为 2^2，逐次如是，在 r 处之总截面积为 r^2。现在以 r^2 为底，r 为高之倒方锥形，如图(13)，正适合上开条件。故此三立体形可相合为一方锥形，其体积为 $\frac{1}{3}r^3$。因小立方体积为 r^3，则其余一较大之立体形体积应为 $\frac{2}{3}r^3$。合此同样者四个，为一“合盖形”，以其形似盒子盖也。而此“合盖形”，a 处截面之面积为 $4b^2$，底之面积为 $4r^2$，其体积为 $4\times\frac{2}{3}r^3=\frac{8}{3}r^3$。

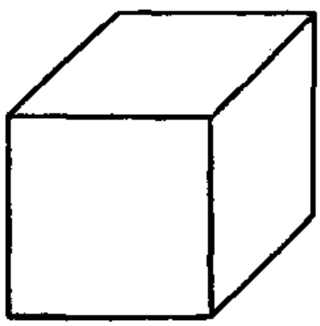
次假设此立方形，可以内容一圆球，则其半立方形，必内容半圆球。假令球顶向上，如图(14)，于距底面 a 处，以一平面平切此半球，如上例。因勾股形内已知弦为 r，勾为 a，假令其股为 b，则所切

圆形之半径为 b，其面积为 $\pi b^2=\pi(r^2-a^2)$，如图(15)。

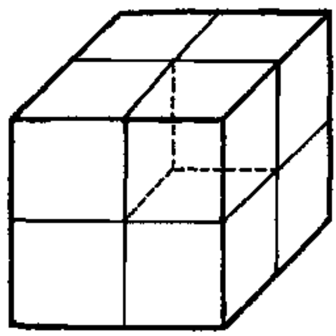
如于半立方形内同时内容一“合盖形”，及一半球形，于距底边 a 处以一平面平切此两形，则其截面积各为 $4b^2=4(r^2-a^2)$，及 $\pi b^2=\pi(r^2-a^2)$ 即此两形截面积或体积之比，并为 $4:\pi$，假令圆形之体积为 V，则

$$合盖形:半圆球体积=4:\pi,$$

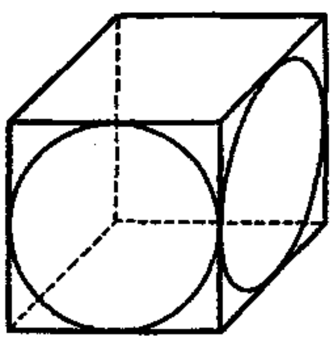
或 $$\frac{8}{3}r^3:\frac{1}{2}V=4:\pi,\therefore V=\frac{4}{3}\pi r^3。$$



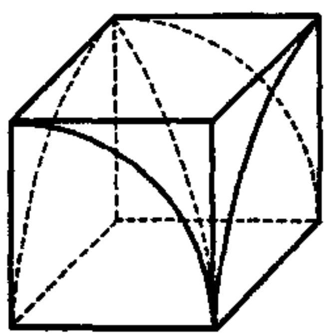
(1)



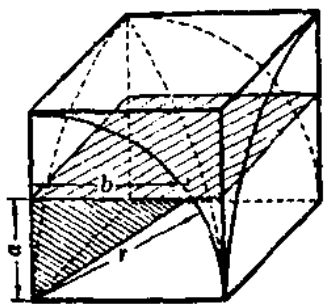
(2)



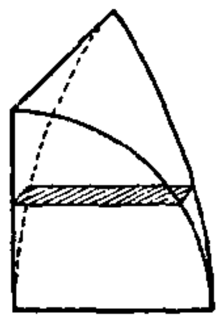
(3)



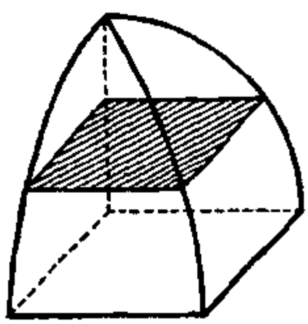
(4)



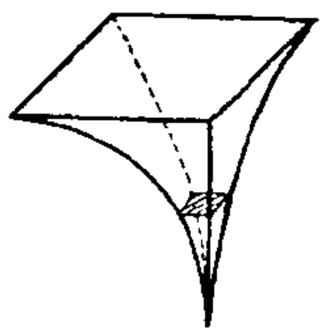
(5)



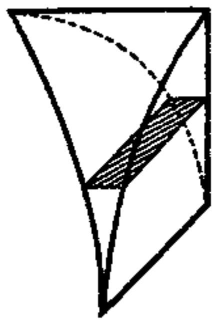
(6)



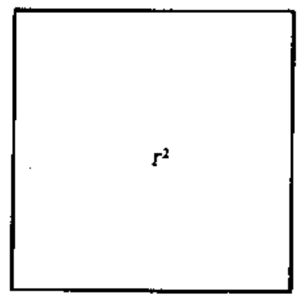
(7)



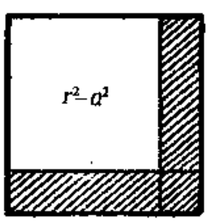
(8)



(9)

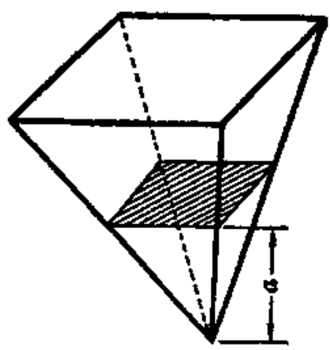


(10)

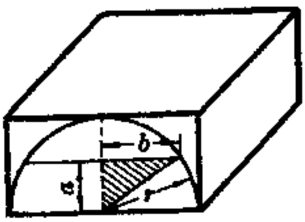


(11)

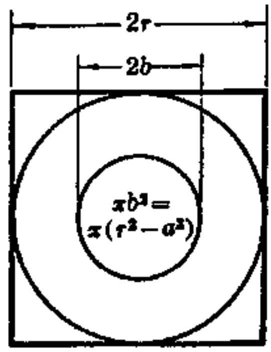
(12)



(13)



(14)



(15)

(四)

现在说到"怎样研究中算",这在商务印书馆最近出版的"出版周刊"上,已有一文论及,兹不复赘。同时研究中算者,每苦于无法购入旧中算书,现在商务印书馆,及其他书店,影印或翻刻旧书时,亦联带印此类书籍,它的"现售书目",亦曾附在"怎样研究中算"一文内。至近年来俨个人,就研究中算史所得,曾发表数种单行本,如:《中国数学大纲》(上册),《中国算学小史》,《中国算史论丛》(一)(二)(三),并在商务印书馆出版,其中误记之处在所不免,则希望同志与以指正是幸,完了。

怎样研究中国算学史？*

中国算学在世界有千余年之历史，中国国民对于中国算学之历史自要深切详知。此种研究结果，足以证明中华民族对于算数，实具有素养，自可进而研究近代科学，不复自外，更进而期望以中华民族文化，贡献于全世界。十九世纪以来，国外算学史，作者如林，学校亦研习算学史，盖欲学者深开先启后之源，日求所以精进之道。吾国维新以前，学者困于科举，维新以后，彷徨歧路，无所适从。今则欲求自强，应研治科学，已为国中论定问题，而自然科学及应用科学，实均以算学为首要，我国国民宜深知研究中算，实为刻不容缓之事。日本维新之时，众弃一切旧学，但时至现在，则中小学教员及多数学者仍有深治“和算”之愿，该国“历算书复刻刊行会”及“古典数书书院”，已翻印日文旧算书多种，以供应用。即在国中现时亦已经有数十种中算书，及数部中算史书，可备观览。而中算史中尚待研讨之问题，尚不在少数，则略述研究中算及中算史之方法，亦当为学者所乐闻也。研治中算史之方法，不外下列几种步骤：

第一　勤治西算　现在研治西算比较数十年前容易。高中初中学生，如于算学功课勤加治理，便是一种良好基础。即未在校者，

---

* 本文原载商务印书馆《出版周刊》第220号（1937年2月13日）第1～3页。

从事此道,自修亦非难事,所谓天下无难事,只怕心不专。有了此项志愿,欲于算学有所贡献,必要再阅读算学史,以便知道古今算学进化之历程,其中何种已经发现,何种尚待研讨。

第二　阅读书籍　阅读为精进之源,所治一事,必博读群书,则理势宜然。但世界典籍汗牛充栋,必也分别轻重,布置先后。认定某种应精读,某种应细读;某种应检阅,某种应在某种范围内批阅,则其事自易,既经读过再分别记录保存,用备研讨。今以中算史为例,其已出版之中算史,及译本算学史,自宜细读;其次则于读书之时,并留心中算史事,有闻必录,遇事叠记,积年累月,自多进益。

第三　选定题目　阅读既富,修养充足,欲进而有所研讨,则宜选定与自己学力相近之题目。题目既经选定,则将以前读书札记所得,及访问所及,加以分类。其视为不足者,再加以补充,并察看此项题目,前人已否论过,其所论之程度如何,作为自己作文之参考。如题目简单,则加以并合,使成有系统之论述。

第四　整理旧文　题目既经选定,或未经选定,研读之余,应以科学方法,随时整理,分门别类:或用册页,或用卡片,不厌求详,不求急就,一年不足,期以十年,十年不足,期以终身,为学方法,尽于是矣。

中算之起原及其发达*

一　中国算学略说

中国算学源流长远，太古事实，今可获知者，则为：结绳之应用，数字之创作，九九之传说。结绳之制，不独史书记载详明，即今初开化民族，尚有应用之者。数字创作，证以钟鼎甲骨之记载，则远在殷周以前。其九九相乘之说，则周秦之际，诸子论说，时有附记，尚可征信。此外古代建筑几何图案之应用，及历法计算，并有藉于算数。至黄帝造历，周公教艺，虽出后世史家传说，其非全无征信则无疑矣。

其古算书之流传至今者，首推《算经十书》。其第一部之《周髀算经》有周公商高问答之语，其说述天算学说为不朽名作。第二部之《九章算术》，为世界有名之纯粹算术书，虽叠经删改注释，而其本来面目，尚可窥见。学者尽可于此中考求古代社会经济状况，与乎算数方法。

《算经十书》在唐则为《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘

* 本文原载《东方杂志》第三十四卷，第七号(1937年)第81～91页。其第一节《中国算学略说》原载1934年8月13、14、15等日《南京日报》、《陕西省立图书馆第一届展览会特刊》及《科学》第18卷第9号(1934年9月)。

建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》、《缉古》。就中《缀术》一书，在宋已经亡失，而以《记遗》为代。《缀术》盖为论述求圆周率之名著；其书虽亡，而其中所述求圆周率学说，在世界上固具有光荣历史也。

《隋书》称宋祖冲之更开密法，密率，圆径一百十三，圆周三百五十五。所著之书，名为《缀术》。其所谓密率，视德人鄂图之发现，实先千一百余年。其算书流传，则《算经十书》以外，汉唐以来，作者如林，记入《隋书・经籍志》者，仅及其半，而市井流传，私家记载，不入官书，年久失考者，尚居多数。敦煌石室发现之古算书残卷，即其一证。

有唐建都长安，贞观之际，国学之内，八千余人。国学之盛，近古未有。其书、算各置博士，凡三千二百六十员。算学之中，并以《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缉古》、《缀术》为专业，兼习《记遗》、《三等数》。流风所被，日本亦师法中国，举行算学考试。所用算经则为《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《六章》、《缀术》、《三开》、《重差》、《周髀》、《九司》。

隋唐以来，西域交通频繁，西域历法随佛法输入，执掌中朝历法，一如明末清初西洋人执掌历法故事。唐德宗时夏官正杨景风注《宿曜经》，称：今有迦叶氏、瞿昙氏、拘摩罗氏等三家天竺历，并掌在太史阁。然今之用，多瞿昙氏历，与本术相参供奉耳云云。而瞿昙悉达所译之《九执历》，并将西域写算方法传入中国，同时西域之大小数记法，在国中亦获相当影响。

降及宋元，算士辈出，其所论述，超迈前古，为中算之黄金时代。最著者为秦九韶、李治、杨辉、郭守敬、朱世杰诸人。其所著书，今尚十九留存，吾人得于此中窥见当时天元、四元学说之发达。而方程式理论等说，尚可与近代算家相比拟。即球面三角算法，与乎级数总和算法，并于此时得其确切应用。

同时宋秘书省亦传刻《算经十书》，由朝臣慎重校印行世。宋元

丰七年秘书省及汀州学校所刻《九章》、《周髀》、《五经》、《海岛》、《孙子》、《张丘建》、《五曹》、《缉古》、《夏侯阳》、《拾遗》，其刻本尚有流传至今者。至大观年兴复算学，注释考正见行《算经》，多至一百八十九卷，其盛况尚可想见也。

入明，以朝野专重八股，算学中衰。但以时代较近，其历朝算学著作之可考者，尚得二百种。而算盘之应用，至少亦于此时普及民间，向者以为程大位于万历壬辰、癸巳所著《算法统宗》为论述算盘之始，近年获得柯尚迁于万历戊寅所著《数学通轨》，知其记述实先十五年。

明季西士利玛窦一行来华传教，并以西洋算法教授国人。首受其洗礼者为徐光启、李之藻诸人。西洋名著《几何原本》即于此时译成中文。其历法、测量、市政、国防诸设施，亦有西洋人插足其间。入清而杨光先之徒，肆力反对西法，演成流血惨剧。清圣祖乃锐意学习历算，由西教士入宫教授，其满文汉文之算法讲义今尚流传。至《数理精蕴》等书，即由此讲义删改修正而成。至此而西洋笔算、代数、对数、正弧三角诸法，乃正式输入。

顾是时所输入者，尚多残缺。如对数表、杜氏九术，皆仅叙其法，未传其术。因此引起清人研究算术之风。三百年间名家辈出，如王锡阐、梅文鼎、陈世仁、孔广森、焦循、汪莱、李锐、罗士琳、项名达、董祐诚、徐有壬、戴煦辈，并有不朽杰作，留传当世。

清季西洋学说，再度输入，李善兰、华蘅芳为介绍此学之中坚份子。其所创译代数、三角、微积诸书，译文之善，世无其比。日本维新以前，尚采用此项译本，教授学塾。

清末深感国步艰难，朝野提倡兴学。而当时一切算学教科图书，多由西教士编译行世。西士伟烈亚力、狄考文、潘慎文、求德生、傅兰雅所译算书，曾经流传一时。至最新教科书之编辑，直辛亥革命成功前数年耳。

二 上古算学

吾国上古算学，在未有文字之前，仅有结绳与规矩之传说。《易系辞》云："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契。"结绳记事，盖已具数之概念。其应用之法，据吴虞翻《易九家义》则"事大大其绳，事小小其绳，结之多少，随物众寡。"今世各地土人，如美、西藏、琉球、苗民，尚有用之者。结绳之后，继之以书契。《释名》云："契，刻也。刻识其数也。"盖是时已知契刻识数，用备遗忘。此项书契，或如房龙《古代的人》书中所说"苏马连的钉刻文字"，或与伊林《书的故事》内"探险队迷途的故事"所说印第安人之石上雕刻记事，有同等之意义。至殷墟发见之甲骨文字，则已有极显著之进步。甲骨文中数字次序齐全，六书意义具备。自五以上，不复用积画。与《孙子算经》所称"六不积，五不只"之义相发明。此项书契，据汉人传说，以为始于伏羲。伏羲于书契之外，又作规矩，以写几何图形。汉武梁祠画像有伏羲执规，女娲执矩之像。其人物则人头蛇身，盖为一种传说，此项传说，虽无时日可凭，而流传甚广①。因规矩之发现，一切建筑图案，乃多采几何形象。国内发掘仰韶各时代陶器，下及秦汉砖瓦，并用几何形象为装饰，整齐划一，足证其为规矩所成就。而居室之建造则多用准、绳。故"规、矩、准、绳"相系而成专名。数字以积聚而成，自一而十，而百，而千，而万，是为五数。人事日繁，数之积聚与应用，亦与日俱进。万以上在上古则有亿，有兆。《尚书》称"亿兆"，"兆民"，《毛诗》称"千亿"，《六韬》称"亿有八万"，其数并

① 太谷光瑞《西域考古图谱》上册图版第五十四'高昌坟墓内神像图'三幅，所绘伏羲执规，女娲执矩之像，一如汉武梁祠画像。

以十进。累进积聚之外,则有因乘之法,而九九之法以立。相传齐桓公以不弃九九而霸天下。考《管子·轻重篇》称:"宓戏作九九之数。"刘徽《九章注》称"庖羲始画八卦","作九九之术"。《太平御览》皇王部"太皇庖牺氏"条引《河图》作伏牺,《易坤灵图》作宓牺,《皇王世纪》作庖牺。盖伏牺、宓牺、庖牺同属一人,而同书列《帝王世纪》及《帝系谱》并以伏牺为人头蛇身。此为后汉武梁祠造像所自本。综合上述传说,则书契、规矩、九九并为伏羲所创作矣。

伏羲之后相传作数者,则有黄帝隶首。《汉书·律历志》称:"伏羲画八卦,由数起,至黄帝尧舜而大备。"《世本》称:"黄帝使隶首作数。"而徐岳《数术记遗》且言:"黄帝为法,数有十等。及其用也,乃有三焉。"则事属傅会,未足凭信。黄帝当为伏羲后之善知数者,去今已四千六百年矣。自此之后,而周,而秦,建国典章,灿然大备。《周髀算经》记为周公商高问答之言。而《周官》保氏则教民六艺,数居其一。此时不独治人论世,兼及算数;而小学教育,且注重算数。《内则》云:"六年教之数与方名,十年出就外傅,居宿于外,学书计。"上古中算,有所成就,非偶然也。

三 汉魏算学

公元前206年沛人刘邦定秦灭项登帝位,是为汉高祖。时阳武人张苍,秦时为柱下吏,明习天下图书计籍,又善用算律历,高祖六年(公元前202年),封北平侯,迁为计相。刘徽于《九章算术注序》称:"往昔暴秦焚书,经术散坏。自时厥后,汉北平侯张苍,大司农中丞耿寿昌,皆以善算命世。苍等因旧文之遗残,各称删补。"耿寿昌于汉宣帝时为大司农中丞,习于商功分铢之事。元帝初元元年(公元前48年)以造杜陵赐爵关内侯。《九章算术》经二氏整理之后,传习者甚

众。汉魏之间,汉许商、杜忠、刘歆、张衡、赵君卿、刘洪、马援、马续、郑玄、徐岳,吴阚泽、陈炽,魏王粲诸人,并通《九章》。至魏陈留王景元四年(公元 263 年)仪同刘徽注《九章算术》,自此《九章》一书,乃有定本。至《九章》篇目,传者不一。今本刘徽注《九章算术》称"方田第一,以御田畴界域;粟米第二,以御交质变易;衰分第三,以御贵贱禀税;少广第四,以御积幂方圆;商功第五,以御功程积实;均输第六,以御远近劳费;盈不足第七,以御隐杂互见;方程第八,以御错糅正负;勾股第九,以御高深广远"是也。

周末以前一切载记,并以竹笔蘸漆,书于木简或竹简之上。汉初代之以缣帛。至东汉和帝元兴元年(公元 105 年),蔡伦造纸成就,简书逐渐减少。敦煌所遗九九术残简:

九九八十一　八八六十四　五七卅五　二六十二　二三而六
　大凡千一百一十
八九七十二　七八五十六　四七廿八　五五廿五　二二而四
七九六十三　六八卌八　三七廿一　四五廿
五八卌　三五十五

（以下残缺）

当为公元一世纪遗物,至今幸获保存。造纸术发明之后,文卷多由传写。今在敦煌发现之残卷算书中,曾应用九九术列表以计田亩。并有说明筹算方法,引述及于《孙子算经》。亦有算书分章论述题"均田法第一","营造部第七","某某部第九"者。盖汉魏之际,中算发达,算经中,如《九章》、《孙子》、《张丘建》、《夏侯阳》、《纪遗》、《三等数》并成于此时,流风所被,传及边陲耳。

此时尚有一事应述者,即筹算之应用。徐锴《说文系传》称:"筹其制似箸,人以之算数也。"算筹最初以竹为之。虽有竿、筹、筹算、筹策诸异名,部首并从竹。其后乃有用玉、用铁、用牙之例。其长度

则《说文》及《前汉书》并称长六寸,《数术记遗》作四寸,《隋书》作三寸。每个径一分,故二百七十一枚,只盈一握。其应用方法,则据敦煌石室《算经》序称:“凡筭者正身端坐,一从右膝而起,先识其位,一纵十横,百立千僵,万百相似,千十相望,六不积聚,五不单张。”与《孙子》、《夏侯阳》所述者相印证。

圆周率方法亦于此时成立。最初《周髀算经》载周公商高问答之辞,先言:“圆周率三,圆径率一。”其后刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒各设新圆周率。刘歆作三·一四一六,张衡作十之平方根,蔡邕作三·一二五,王蕃作三·一五五五,刘徽作三·一四,就中皮延宗圆周率不可考。刘徽则以内容六边形起算,谓“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至不可割,则与圆周合体,而无所失矣。”理论真确不移。但当时实用计算,尚未入微。直至祖冲之(429~500)始以缀术算圆周率。据《隋书》称:“祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈。圆周:盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽,朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽,正数在盈朒二限之间。密率,圆径一百一十三,圆周三百五十五;约率,圆径七,周二十二。又设开差幂,开差立,兼以正圆参之。指要精密,算氏之最也。所著之书,名为《缀术》。学官莫能究其深奥,是故废而不理。”三率之中以密率最便于用,故《隋书》卷十六“嘉量”条,《晋书》卷十六“嘉量”条称:“祖冲之以算术考之。”《隋书》卷十六载后周武帝保定元年玉斗称:“今若以数计之。”并以“圆径一百一十三,圆周三百五十五”入算①。此外尚有一圆周率作三·一四一六,亦称为祖氏所作。以上四率,如何产生,现在尚无从确知。其中圆径一百一十三,圆周三百

① 参观严敦杰《中国算学家祖冲之,及其圆周率之研究》内“3.祖冲之之圆率”条,《学艺杂志》第十五卷第五号,民国二十五年六月,上海。

五十五一率，较之西人之发现，实先一千一百余年。

祖冲之子暅之亦善算，曾求圆球之体积。法先假定一圆球内容于一立方形内，则半立方形内可内容一半圆球形。次以圆柱各一个，纵横充满贯通此立方形，则半立方形内又可容一“合盖形”。以勾股形，即毕达哥拉定理证得此“合盖形”为立方形体之三分二。又“合盖形”与半圆球之比，如四与圆周率之比。故圆球体积为圆周率乘立方形之六分一矣，即 $V=\frac{\pi l^3}{6}$，其结果与古代希腊人所算者全相一致。

四 唐代算学

唐于公元 618 年立国，是时印刷术已经开始应用，文化流传，视前为广。《算经十书》在后周间经甄鸾（535～573）校订。甄鸾又自撰《五经算术》，至唐初王孝通复撰《缉古算经》。迄贞观（627～649）初李淳风与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒受诏注《五曹》、《孙子》十部算经，书成，高祖令付国学行用。前此经私人撰述，私家校订，至此乃由公家诏令颁行。吾国向重儒术，《书》、《诗》、《易》、《礼》、《春秋》诸经，汉熹平四年（公元 175 年）曾以入石，其后魏之太始，唐之开成，蜀之广政，北宋嘉祐，南宋绍兴均有石经之刻。李淳风所校《算经十书》，既定名为经，且以诏令行用，其郑重不减儒家诸经，固为便于国子监算学之用耳。贞观二年（公元 628 年）大收天下儒士，其书、算各置博士学生，以备众艺。关于算学制度则学校设博士二人，助教一人，算学生三十人，典学一人。其束修之礼，督课试举，一如三馆博士之法。其学制以七年分组教授，学生三十人中，第一组十五人习《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》；又十五人习《缀术》、《缉古》。其《记遗》、《三等数》亦兼习之。计

第一组《孙子》、《五曹》限一岁，《九章》、《海岛》共三年，《张丘建》、《夏侯阳》各一年，《周髀》、《五经算》共一年。第二组《缀术》四年，《缉古》三年。每年举行岁试，得八十分者为上，六十分者为中，五十分以上为下。七年学成举行毕业考试，则第一组：《九章》三帖、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经》等七部各一帖；第二组初试《缀术》六帖，《缉古》四帖；后改试《缀术》七帖，《缉古》三帖。以上各经十通六，《记遗》、《三等数》帖读十得九为第。其学生不率教，或继续三年下第，九年在学无成者退学。此项算学制度显庆二、三年(657～658)以后，叠有更改，而终唐之世，实未尝废除。

唐代声教远及国外。日本时时遣僧人入学，赍回历算书可考知者有吉备真备，宗叡诸留学僧。文物制度惟中土是遵。日本于大宝二年(公元 702 年)立学校授算术。所采《算经十书》为《周髀》、《孙子》、《六章》、《三开》、《重差》、《五曹》、《海岛》、《九司》、《九章》、《缀术》。日本天禄元年(公元 970 年)源为宪序《口游》一书，录及九九，始九九，终一一，如：

九九八十一　八九七十二　七九六十三　六九五十四　五九卌五

四九三十六　三九廿七　二九十八　一九九

八八六十四　七八五十六　六八卌八　五八卌　四八卅二

三八廿四　二八十六　一八八

七七卌九　六七四十二　五七卅五　四七廿八　三七廿一　二七十四

一七七　六六卅六　五六卅　四六廿四　三六十八　二六十二

一六六　五五廿五　四五廿　三五十五　二五
十　一五五
四四十六　三四十二　二四八　一四四　三三
九　二三六
一三三　二二四　一二二　一一一　谓之
九九

一如《孙子算经》及敦煌残木简、敦煌写本《算经》旧例。和算初期深受唐人影响，盖无疑问。

中国于唐时亦吸收印度文化。先是吴孙权景龙二年（公元 230 年）竺律炎译《摩登伽经》，以日、月、荧、惑、岁星、镇星、太白、辰星为七曜。一时善算如庾曼倩、刘焯、殷绍，并以兼通章、曜知名。章为《九章》，为吾国古算；曜为七曜，为西来新算。唐律一切历算禁人私习，故《唐律疏义》（公元 653 年）及《旧唐书・代宗记》大历二年（公元 767 年）叠称《七曜历》私家不得有。次更由《七曜历》演变为《九执历》。盖七曜之外加入罗睺、计都，合为九曜，亦作九执持，省称为九执，此一事也。而大小数法及笔算方法亦于此时输入。唐朝历法并于此时由印度僧人参加。杨景风于广德二年（公元 764 年）称："今有迦叶氏、瞿昙氏、拘摩罗氏等三家天竺历，并掌太史阁。然今之用，多瞿昙氏历，与本术相参供奉耳。"见于史者，迦叶氏有迦叶孝威，瞿昙氏有瞿昙谦、瞿昙罗、瞿昙悉达、瞿昙譔诸人，并通历算，可与杨景风所言相印证。杨于唐德宗时任夏官正，宜其所知较详。

是时社会动态日见复杂。故一切官书于数之作一、二、三、四、五至十者并改作壹、贰、叁、肆、伍至拾。观于敦煌所遗田亩簿记可见一般。

五　宋元算学

宋元算学为吾国算学史之黄金时代。元丰七年(1084年)尚由官家刻《算经十书》入秘书省,而《缀术》一书,时已亡失。此时并如隋唐旧例,于国学设置算学取士。有"元丰算学条例",惜今不详。崇宁三年(1104年)将元丰算学条例,修成敕令,学生以二百一十人习《九章》、《周髀》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《缉古》、《夏侯阳》诸经。靖康元年(1126年)金陷汴京,秘阁三馆书籍版片,捆载北去。南渡以后稍事收集。庆元二年(1200年)迄嘉定六年(1213年)处州人鲍澣之传刻下列各算经行世:

《黄帝九章》　《周髀算经》　《五经算法》《海岛算经》
《孙子算经》　《张丘建算经》《五曹算法》《缉古算法》
《夏侯阳算法》《算术拾遗》

鲍澣之于嘉定六年以朝奉郎知汀州,八年(1214年)除刑部郎官离任。故程大位以为上列各经又刊于汀州学校也。《算经十书》经此传刻,数百年来古算方有定本行世。

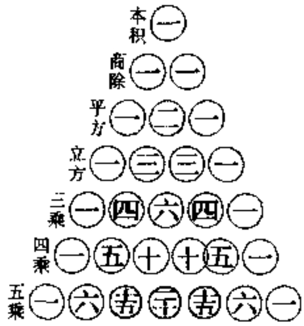
是时有新兴之算法,流行于北方,说明"演段","锁方"诸术,并以天元立论。祖颐《四元玉鉴后序》称:

> 平阳蒋周撰《益古》,博陆李文一撰《照胆》,鹿泉石信道撰《钤经》,平水刘汝谐撰《如积释锁》,绛人元裕细草之,后人始知有天元也。

此后平阳人李德载撰《两仪群英集臻》,兼有地元。李治于东平得一算经,亦有地元。刘大鉴撰《乾坤括囊》,末有人元二问。至元朱世杰集其大成,作《四元玉鉴》三卷(1303年)。以前一元高次方程式可以筹算计算者,至此扩至四元矣。至其计算高次方程式之法

则，先设为“开方作法本源”，如下列图式：

左　右
积　隅



左袤乃积数。
右袤乃隅算。
中藏者皆廉。
以廉乘商方。
命实而除之。

相传出于楚衍（1022～1053 时人）弟子贾宪，盖即巴斯噶三角形。至秦九韶《数学九章》（1247 年）所举正负三乘元图则次序整齐，一如和涅方法。此期算学家，传世算书较著者，计有：秦九韶《数学九章》十八卷（1247 年）李治（1192～1279）《测圆海镜》二十卷（1248 年），《益古演段》三卷（1259 年），杨辉《杨辉算法》七卷（1274～1276），朱世杰《算学启蒙》三卷（1299 年），《四元玉鉴》三卷（1303 年）。

六　明清算学

明代算学复进入一新领域，盖此时算数方法，已由筹算代之以珠算。珠算为何时何人所发明，虽未获详知。但以前以为程大位（1592 年）所记述者，现在考知在前柯尚迁于《数学通轨》（1578 年）

已经述及。至珠算中撞归歌诀,则元《丁巨算法》(1355年),元贾亨《算法全能集》,元安止斋、何平子《详明算法》前已述及。中算方法经此改革,珠算方法,普及民间,并流行歌诀,与游戏算题,用便传述。而于向来筹算方法,反多遗忘。此期著述亦称隆盛,吴敬、王文素、程大位并有专著行世。此三人并终身从事此道,且于高龄著书传世,吴敬有《九章算法比类大全》十卷(1450年),王文素有《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷(1524年)①,程大位有《算法统宗》十七卷(1592年)。

明初因《授时历》而作《大统历》,并参用《回回历》,及其末叶,诸多违失。意大利人利玛窦适于万历十年(1582年)抵广东之香山墺。其后留肇庆、韶州二府十五年,居南京五年,以万历二十八年北上,住北京十年,于万历三十八年(1610年)卒去。在野则与徐光启(1562～1633)共译《几何原本》前六卷(1606年),是为西算输入中国之初步。又译《同文算指·前编》二卷,《通编》八卷,并著《同文算指别编》一卷,言及三角八线之旨。又译授徐光启、李之藻以《圜容较义》(1608年),《勾股义》、《测量法义》、《乾坤体义》(1605年)诸书,至此国人获见西算之一角。利氏卒后,同时来华西人多所译述。

明廷自万历四十年(1612年)李之藻、周子愚辈,时议改历,西人入历局办事者,先有龙华民、邓玉函,继有汤若望、罗雅谷。徐光启卒后,修治历法以李天经继其事。先后三次进历,迄明亡(1644年)而止。是时汤若望任钦天监正,与龙华民同在大城内本庙居住②。清顺治二年(1645年)《新法历书》告成,诰封若望三代③。不

① 国立北平图书馆藏有蓝格钞本《算学宝鉴》六册。

② 见《明清史料》甲编第二本第256页《钦天监监正汤若望揭帖》。

③ 关于汤若望诰封三代史料,王重民有三君在罗马辑有《汤若望恩宠褒荣录》。

久而有新旧之争。杨光先反对最力。汤若望卒(1666年)后,以南怀仁治理历法,而新旧之争益烈[①],直至杨光先革职(1669年),朝野始勤研西算。清圣祖由南怀仁、张诚、白晋诸人入宫教授,因而编成《数理精蕴》等书。在野之王锡阐、梅文鼎亦最致力。其后百年《四库全书》开馆(1773年),收及《算经十书》及宋元算书,因开乾嘉以来文人研算之风。直至清末再由李善兰、华蘅芳再译西算,继而废科举开学校,发展新教育,中算乃进入新段级。就清代而论,以时期较近,据调查所及,则一代文士,对于中算之有著作可考者凡五百人,亦云盛矣[②]。

七 结 论

吾国算学历史之往事,既略如上述,而其发达之经过尚可得而言者。盖中算源流久远,往往以一事启其端,历时既久,蔚为大国,其例甚多。如《孙子算经》卷下"今有物不知其数'一题,称:

> 今有物不知其数:三三数剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何。答曰:二十三。

此问虽有术法,而右于一题。自后经民间流传,至称为"鬼谷算",为"韩信点兵",为"秦王暗点兵"者。相传宋何承天之调日法,唐穆宗之《宣明历》,亦用其法。至宋末则分为二派,其杨辉(1275年)一派,则称之为"翦管术",入明而严恭(1372年)、王文素(1524年)之流,并用其名。程大位(1593年)至演为"孙子歌",如:

---

① 见《南先生行述》及《熙朝定案》第1～7新页。

② 此五百人姓字里名及著作,并详《近代中算著述记》,《中算史论丛》(四)中(*1954年李俨将此文重编,收入《中算史论丛》第二集,又见本书第八卷。——编者)。

三人同行七十稀　五树梅花廿一枝

七子团圆正半月　除百零五便得知

亦仅言及术意。独宋秦九韶则于《数学九章》(1247 年)卷一、卷二畅言其旨，称为“大衍求一术”，与近世数论多相符合。清代算家且用以考见古人推演积年日法之源。

复次则明清之际，西人所介绍西算，如对数，如圆率者，多未暇深言其故。其对数一率，由西士穆尼阁以授薛凤祚，知者甚少。康熙时西士用以教授清圣祖。乃于《数理精蕴》中，加以说明，以理法繁重，直至清季戴煦(1805～1860 年)、李善兰(1811～1882)[1]邹伯奇(1819～1869)、顾观光(1799～1862)始畅论其义。圆率解析法则于十七世纪末年由杜德美输入中国，惜亦仅传其式，未详其故。清初由明安图演为《割圜密率捷法》行世。至孔广森(1752～1786)、项名达(1789～1850 年)、戴煦并设为别法，而异途同归。

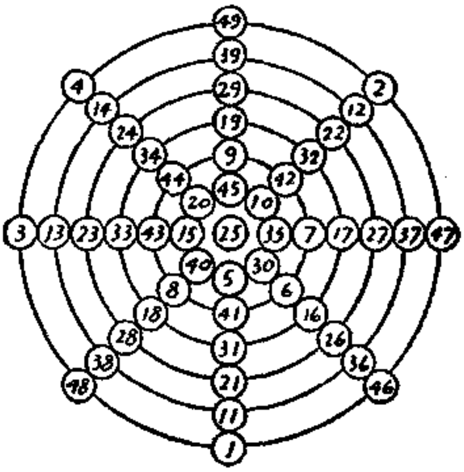
关于游戏算学中纵横图一事，宋元明清算士并有说述，其始则导源于“洛书”。《大戴礼明堂篇》记“二九四七五三六一八”，卢辩注《大戴礼》有法龟文之说。甄鸾注《数术记遗》云：‘九宫者，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。’其图如后：

④	⑨	②
③	⑤	⑦
⑧	①	⑥

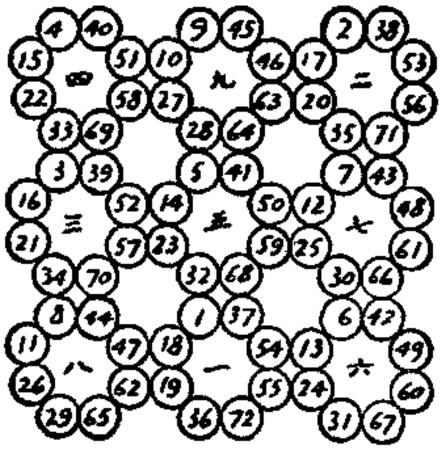
至此经数百年至宋丁易东、杨辉(1275 年)，明王文素(1524 年)、程大位(1592 年)并传其术。入清而宫禁亦有流传。今故宫博物院尚

① 据李慈铭《越缦堂日记》第三十九册第二十至二十一页：李善兰，光绪八年十月二十九日(1882 年 12 月 9 日)卒，生于嘉庆十五年十二月八日(1811 年 1 月 2 日)，年七十三。

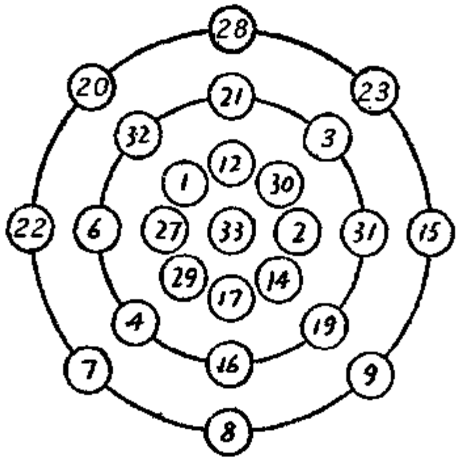
藏有《三三等数图》一书，在野则方中通、张潮、保其寿亦演其说，就中宋丁易东二图（如附图甲、乙）及明王文素五图（如附图1.2.3.4.5.）知者较鲜，今附录焉。



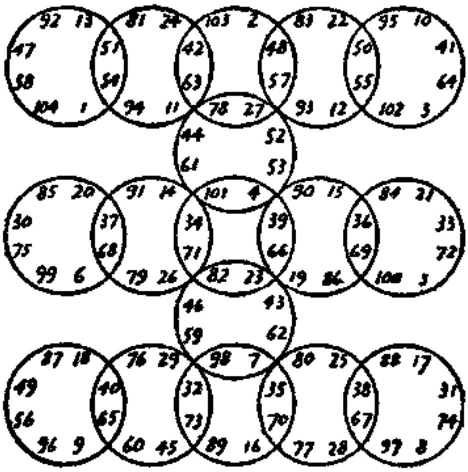
甲“洛书四十九得大衍五十数图”
见宋，丁易东，《大衍索隐》。



乙“九宫八卦综成七十二数合洛书图”
见宋，丁易东，《大衍索隐》。

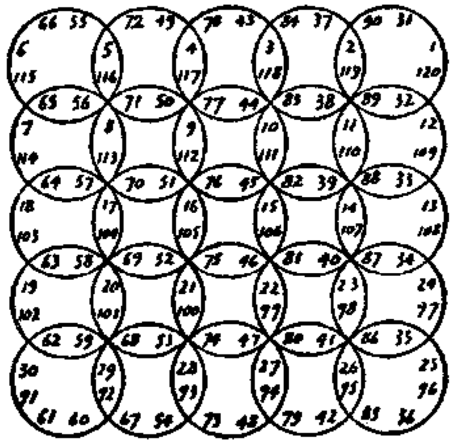


1.“辐辏图” 见明，王文素，《算学宝鉴》。



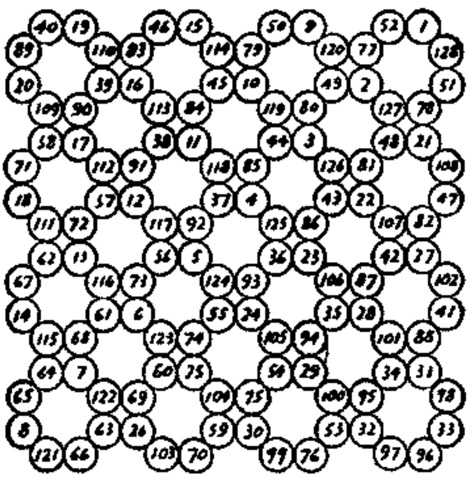
2.“花王字图”

见明，王文素，《算学宝鉴》。



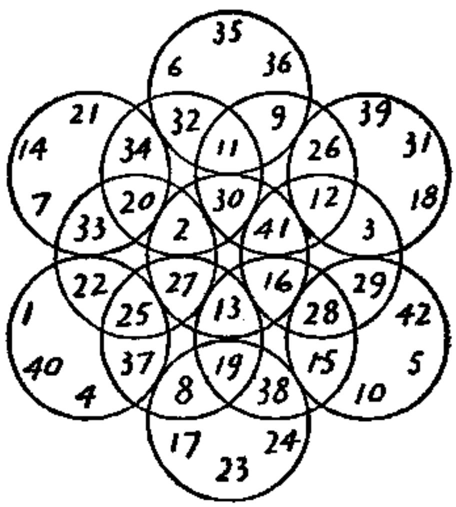
3.“古珞钱图”

见明，王文素，《算学宝鉴》。



4.“连环之图”

见明，王文素，《算学宝鉴》。



5.“缨络图”

见明，王文素，《算学宝鉴》。

章用君修治中国算学史遗事*

一　中国算学史事研讨

章用(1911～1939)君字俊之，湖南长沙人。父士钊，母吴弱男。宣统三年生于苏格兰泥北汀。俊之曾在德国格廷根大学治算学及哲学。民国二十五年回国，先任国立山东大学专任数学讲师，继任浙江大学数学教授，不幸于民国二十八年十二月十六日，卒于九龙寓所。章君童年读拙作《中国数学大纲》各书，因有志修治中国算学史。在格廷根大学时，见 Neugebauer 教授，攻治巴比仑、埃及数学史之深入，献身修治中算史之志益坚。在德国时，因王有三先生介绍，于二十五年四月开始与俨通讯，前后四年，始终无间，来稿积百余页，约十万言。今既不幸逝世，深虑其研治中国算学史之遗事，日久湮没，因就通讯所述及者，加以整理，贡献学界。现以交通阻隔，其遗稿之留于寓所者，深冀他日可再加整理，与世人相见，今先就所知略述一二，用作纪念！

章君治学深入，不避烦琐。其研讨中算史事，亦究极精微。今略举一二例，以见一般。章君来书称：

---

* 本文原载《科学》第24卷第11期(1940年)第799～804页。

（一）“薛凤祚生年，姜亮夫《历代名人年里碑传总表》载在崇祯元年（1628 年），是与王锡阐同年，享年五十三矣，不知何所据。案万历四十四年（1616 年）薛氏已受业孙奇逢之门，则其误必矣。”

（二）“梅文鼎事迹，待考之处甚多，今可考出梅文鼎系庶出。案方望溪撰墓表，只言母胡氏，然梅曾亮《柏枧山房文集》卷四《（梅氏）家谱约言》中载：梅期生讳世昌，一字大千，室鲍氏，侧室胡氏、陈氏，则文鼎为庶出也甚明。又梅文鼎及妻陈氏合葬独山，其确址尚待访云。”

（三）“《中国算学史》第 127 页所记秦九韶《大衍求一术》内欧几里得算法（Euclid Algorithm）可以下式书之：

$$u_n=\begin{vmatrix} q_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & q_3 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix}=k_{n-1}(q_2\cdots\cdots q_n)$$

$$a_n=\begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & q_2 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & q_n \end{vmatrix}=k_n(q_1\cdots\cdots q_n)$$

就中 k_n 之 n，记行列式之 order，此种特种行列式，名 Continuant。此理 Euler 亦知之。”

（四）“汪莱《衡斋算学》第五册第五十一条：

$$ax^3-bx^2+cx-d=0$$

可知之充分条件为 $d>\frac{bc}{a}$，原自不误，惜无证法，读者颇疑之耳。”

二 中国算学史著作

章俊之君之中国算学史著作，已经出版者计有：

（一）《阳历甲子考》 见《数学杂志》，一卷，一，二，三期，第 42～56，39～56，51～56 页。民国二十五年八月，十一月，及二十六年二月上海出版。

（二）《燹夷佛历解》 见《科学》第二十三卷九期，第 518—528 页，民国二十八年九月上海出版。

（三）《垛积比类疏证》 见《科学》第二十三卷十一期，第 647～663 页，民国二十八年十一月上海出版。

等各篇。其在计划中，及已成稿者，据其来书，则有下列各种，惜不永年，无由窥其全豹。今就来书先后次序，分别举出篇名，并愿后起者，继其遗志，有所述作焉。

（一）《敦煌算书考》 章君对敦煌所发见算书，甚感兴趣，拙作《敦煌石室立成算经》，曾由章君校勘，并于篇末收其附注。章君又校读巴黎所藏 Pelliot 3349 号，《算经》一卷并序于篇末多校出一题，曾有志作《敦煌算书考》，惜未成书。

（二）《比较历学丛考》 章君于《阳历甲子考》题为《比较历学丛考》之一，其二则拟为《岁实朔实考》，系说明连分数之见用于历法，与第一篇同为研究“大衍求一术”之副产品，其三拟为《阴历复活节算法》云。

（三）《穆尼阁学案》 章君因感于 Valdt 之考汤若望，Van

Hee 之考南怀仁，裴化行之考利玛窦，又以穆尼阁为介绍对数及弧三角入中国之第一人，因有志考订其事迹。曾加入中波文化协会，托该会向欧洲搜集穆尼阁逸事。又得法文考证穆尼阁生平一文(*Un Missionnaire Polonais Oublié*,*le Père Jean Nicolas Smogulecki*, *S.J. Missionnaire en Chine au XVII siècle*, par E. Kosibowicz, S. J., *Revue D'Histoire des Missions*, tome VI, 1929 年)。知穆氏西名 Smogulecki，乃波兰真正写法，其他均系别国转写书法，曾起草作《穆尼阁学案》。

(四)《中算素数论》 章君有志考究中算素数，于李善兰《考数根法》之外，参考多数中算书，拟作《中算素数论》，惜未成书。

(五)《几何原本考证》 俞大维君藏有拉丁文《几何原本》二种，其一《几何原本》十三卷，耶稣会士 Claude Richard (1589～1664)注，章君考得此人，本思来华，以事未果，遂在欧以数学教授终其身焉。首页造象，乃西班牙王斐理布第四。其二《几何原本》十五卷，并附欧几里得他著。但二本均非利、徐所自译。章君曾将此二书首页摄影，交顾养吾先生，登《数学杂志》，并拟作一篇考证焉。章君又称李、伟续译《几何》所据本，尚未考得云。

(六)《评：入华耶稣会士列传》 Pfister: *Notices Biographiques et Bibliographiques* 一书，由冯承钧译出，题名《入华耶稣会士列传》。章君来书称："书内裴化行考证可观，其余疏失尚多，暇日拟为逐条笺订，作一书评。"章君精通明清之际西算输入史事，如有遗稿，当甚可观。

(七)《越南访书志》《越南算学史略》《起历朔闰考》《越南算书志》 章君于二十七年十月二十二日抵安南河内，参观远东博古学院，发现安南国汉文算书多种，当即多方收购钞副，另购入他种安南文献凡三十种，并将该院所藏《安南书目》三册请北平

图书馆昆明办事处录副，留备众览。来书称："现正草《越南访书志》，次撰《越南算学史略》则极感困难，良以事属草创，无可凭依也。"至《越历朔闰考》则已成稿，在《西南研究》创刊号，民国二十九年一月，昆明发表，为章君绝笔之作。其第二篇约定为《越南算书志》云。

（八）《敦煌残历疑年举例》 章君来书，称此文已经成稿。

三 言语文字学与中国算学史研究

研究中算史事，言语文字学甚关重要。章君生长欧陆，民国十九年在德国柏林中学会考及格，肄业于格廷根大学，治算学哲学凡八学期，深通英、法、德、拉丁、希腊文，并有志于中算史之工作。据其自述："弱冠负笈德国格廷根大学，识 Neugebauer 教授，见其攻巴比仑、埃及数学，用力之勤，方法之严，肃然起敬。然既得他石攻错，修治中国算学史夙志益坚。"其研治中算史事，应用所习言语，博采欧美古今史料，多所创获，今举一二例，如下：

（一）章君称："'几何'二字，国内多谓为 geometry 之音译，实不尽然。因《几何原本》卷首曰，有度有数者，皆依赖十府中几何府属。按巴黎国立图书馆有《名理探十伦》五卷，此五卷内有《亚利十伦》*Καιηδοριαι*（具经 Organon 卷一），故《几何原本》所称十府，即十伦府（日译范畴）亦作十伦。几何（Quantity）十伦之一也。盖十七世纪犹以数学不过 science of quantities 耳，而 geometry 为数学中坚部分，遂僭'几何学'之号，因而直称之曰'几何'云。"

（二）明清之际耶稣会教士行文及刊刻算书，多有 I. H. S. 花押。经章俊之君与德人葛其婉女士（Dr. Margot Grzywacz）研究，知可作三国文读，即：

1. 希腊文,即 *ιησομζ* (耶稣)首三字母之大写。

2. 拉丁文有三种解法:

   a)Jesus (耶稣)　Hominum (人类之)　Salvator (救星)。

   b)In (在)　Hoc (此)　Salus (有福)。

   c)In (在)　Hoc (此)　Signs (符号中)(Vinces,必胜利)。

3. 德文作 Jesus (耶稣)—Heiland (救主)—Seligmacher (作福者)。

(三)章君因精通欧文,故曾确定故宫所藏满汉文七卷《几何原本》及十二卷《几何原本》,确均由 Pardies:*Géometrie practique et théorique* 原著译出,不过其中详略不同耳。章君并列表说明几何之入中国,有三来源,即:

《几何》
- 《原本》
  - 一、欧几里得"原本",丁先生解,利玛窦译。
  - 二、Pardies 自著《原本》张诚满译,康熙汉译,一,七卷本,一,十二卷本,后者修改收入《数理精蕴》。
- 《要法》,三、艾儒略所译《几何要法》,原本待考。

又对照原文,证明华译《三角数理》出于 John Hymers (1803～1887):*Treatise on Plane and Spherical Trigonometry* ,1847 年。又以《决疑数学》与棣氏原书校读,大相迳庭,知华译非其原本。又拟《乾坤体义》似译自 Johannes de Sacrobosco:*Sphaera Mundi*,1549 年。凡此诸事,并为前人所未发。

(四)章君以宋以前九九乘法表始于"九九八十一"终于"一一如一",其例甚多。日本、安南亦受其影响,故以"九九"称之,亦犹西人九九始于"一一如一",故德文称之曰 Ein mal eins 也。至其始于九九八十一之故,章君以为古人大约先有乘表,后造口诀,其乘法

表系三角形，其式如次：

9	8	7	6	5	4	3	2	1	
81	72	63	54	45	36	27	18	9	9
	64	56	48	40	32	24	16	8	8
		49	42	35	28	21	14	7	7
			36	30	24	18	12	6	6
				25	20	15	10	5	5
					16	12	8	4	4
						9	6	3	3
							4	2	2
								1	1

其于时流论史之不合，亦多论及，如：

（五）《元朝秘史》李序谓算盘于元朝西渐，说本法国汉学家亚倍尔雷缪沙（Abel Remusat），见中华书局印本李思纯著《元史学》，实不可信云。

（六）卫匡国（Martin Martini）《鞑靼战争记》记满清入关史事甚详。日人稻叶君山之《清朝全史》曾经采用，而中华书局汉译本误译卫氏之名为“马丁”，甚为不合。

其于西文中算史料，曾经苦心研治，即一书之微，必求其本末。尝谓金尼阁（Nicolas Trigault）所著之 *De Christiana Expeditione apud Sinas*……MDCXV 为马可波罗记录中华史事后之第一部著作，章氏因金氏成书在大唐景教流行中国碑发现之后，此碑于教士

印象颇深，今试考该碑拉丁文译名，并读金氏拉丁书名，则知其系故意影射。因亦从原意译该书为《大明景教流行中国记》，拙作《中国算学史》亦沿用其译名。章君考知此书已有法、英、德译本，二十世纪尚有新译本(1908 年)，并知金氏书，国内徐家汇、北堂各处尚有藏本，而山西陕西耶稣会文库(Archiv)，据 Cordier 氏所知，尚藏有一稿本云。此皆因能善用言语文字学，因而治史之实例也。

四　目录学与中国算学史研究

章君亦深知目录学与中国算学史之关系，故在欧之日，甚注意于欧文中算史料之收集，前后共运回十二箱，今已大部移赠国立浙江大学，战事期内并由章氏负责运输此项藏书，另编有目录，用共众览。拙作《中国算学史》曾收有章君所藏：

(一)金尼阁《大明景教流行中国史》，1616 年德文译本，内"利玛窦造象"，在第 185 页。

(二)远西耶稣会士丁先生集解，欧几里得《几何原本》十五卷(1589 年)，"原书首页"，在第 190 页。

(三)远西耶稣会士丁先生撰《同文算指》，拉丁文(1607 年)"原书首页"，在第 195 页。

章君自称所藏拉丁文算书，明末清初西士所据以译为华文者，多数得之德国 Leipzig 城旧书店 Gustav Fock。归国以后，曾参加校阅拙作《中国算学史》，《中算史论丛》(四)内《近代中算著述记》及《二十五年来中算史论文目录》，对于中算书尤加意收集，就其来书所述，知陆续收购有下列各书：

(一)《数理格致》四册，书内又题"数理钩元"，有"蟭螟巢"印，虽未署作者译者名，然细读之下，即知为奈端译文，其出自李善兰

手，亦无疑问。钞本图表均留有空格待补，以校欧文原籍，亦若合符节云。（见二十六年二月二十二日来书。）

（二）《代数备旨》十三章，狄考文编，光绪辛丑（1901年）巴蜀朴园校刊。

（三）《代形合参》三卷，附一卷，罗密士编，光绪甲辰（1904年）巴蜀朴园校刊。

（四）《算学课艺》四卷，同文馆算学教习李壬叔先生阅定，光绪壬辰（1892年）京都同文馆版。

（五）《中西算学启蒙易知》二卷，附一卷（《两湖书院算学课程》），光绪己亥（1899年）浙东三十三万卷楼石印（以上见二十六年五月二十二日来书）。

（六）《算学入门》上下二卷，徐绍桢撰，光绪丙午（1906年）刻（见二十六年六月六日来书。）

（七）《历象本要》（李光地）、《测量法义》、《测量异同》合一册，柯逢时家钞本（见二十六年六月十四日来书）。

（八）《策学备纂》三十二卷，诸暨吴颎亮公总编，其卷三天算内又分为十卷。支宝枬编，光绪十四年（1888年）上海点石斋石印。

（九）《西法策学汇圆》，内有西法数学。（以上见二十七年二月十六日来书。）

（十）《栎庵算书》，浏阳王正枢编，内分《算剩初编》、《对数通释》、《微积发积》、《九容广李》、《较角补项》，书上有“子廉启事”篆文印。

（十一）《算式辑要》四卷，光绪丁酉（1897年）长沙影珠山庐，刘世达，涤云氏刻本。

（十二）《笔算初阶》，阳湖方恺撰，羊城双门底古经阁校刊。（以上见二十七年四月二十三日来书。）

（十三）《算学入门》，周广询撰，光绪戊戌（1898 年）成都玉元堂校刊。（见二十七年十一月十二日来书。）

（十四）《代数术补式》十六卷，仪征解崇辉小云学。光绪庚子（1900 年）上海石印本。

（十五）《数学》上编，附卷三册（《直方大斋算学》），番禺曹汝英学。光绪甲辰（1904 年）武昌铅印本。

（十六）《代数浅释》四卷，《笔算摘要》一卷（《海槎书屋算稿》），中宿伍毓华肖坡编述。光绪三十年（1904 年）自序，受业李达英、黄缉光，男元恺、元长校字，广州麟书阁刊版。（以上见二十八年三月十四日来书）。

章君又向北平图书馆影摄《算学宝鉴》，向向觉民先生钞《阿尔热巴拉》，向本人钞《同文算指别编》及《诸家算法》内严恭《通原算法》，又在中央研究院钞该院所藏之《阳湖方恺手定文稿》内：

门人薛炳奎《代数课草》序、《笔算课草》序、《勾股代数课草》序（1883 年）共三篇。

门人梁擎中《代数课草》序一篇。

门人卫汝基、吴应鉴、易日初，《笔算课草》序共三编。

郑氏《弧三角辨例》一篇（章君自注：郑氏待考。）等八篇，民国二十七年十月二十二日，章君过安南河内，于远东博古学院参观所藏安南算书，于该馆及市上分别钞购得下列各书，其编号系据《安南书目》云。

A 汉文类

A 156	《算学底蕴》，130 页，一本，	章用钞藏
A 982	《意斋算法一得录》，353 页，二帙，	阮有慎撰 章用钞藏

A 1031	《笔算指南(新编)》,五卷,一帙,	范文裕撰 章用购藏
A 1204	《指明立成算法》,190 页,一本	潘辉框撰 章用钞藏
A 1336	《意斋算法》一本,(见 A982)	
A 1555	《大成算学指明》,57 页,一本,	范嘉纪撰 章用钞藏
A 1584	《算法奇妙》,70 页,一本,	章用钞藏
A 2931	《算法大成》,120 页,一本,	梁世荣撰 章用钞藏

AB 安南文类(安南人用汉文所撰)

AB 53	《九章立成并法》,一本,	范有僆撰 章用购藏
AB 173	《立成算法》,一本(见 AB53)	
AB 407	《九章算法立成》,75 页,一本,	章用钞藏
AB 563	《九章立成并法》,一本,(见 AB53)。	

近代中算书目之编辑*

一代文献，如及时集录，自可比较详实。司马迁《史记》，班固《汉书》，以及徐梦莘《三朝北盟会编》，李心传《建炎以来系年要录》均由当代人士根据当日史料，编成信史，为后人所称道。至唐、宋、元、明，则往往于国社沦亡之后，由后代官家代为编史，疏忽简略，在所不免。至专门史事，尤多未能详尽。例如《明史》由满清官吏编辑，其中记录历算书籍，仅及数种。吾人于三百年后根据各项典籍，尚可考知永乐时代算书，万历时代算书，数达百种。但于算盘发明之确实时期，及回回历算家土盘之计算方法，都因资料不全，至今尚未能详细确知。此外隋唐宋元算书，如根据正史以外他书，亦有可以补充之处。但往事仅足以资借鉴，今已不可复追。而清代距今不远，当时所编著刊刻之中算书籍，则至今尚无专书记录，甚以为憾，民国初年一般研治中算史者，以为研求中算史事，应先从搜罗中算书籍史料入手，至公私收藏家所藏中算书籍，亦须详细调查，编成书目，以供众览。

民国十五年六月清波学舍裘冲曼首先记录其私人购藏，与公私所收之明清两代有传本中算书籍，编为《中国算学书目汇编》，刊入《清华学报》第三卷第一期。其中版本不同者，亦一一记录，虽所

* 本文原载《读书通讯》1943 年第 57 期第 16～17 页。

举仅及千种，而创始之功终不可没。其后曾远荣、汤天栋、刘朝阳诸氏，各有增补。十五年以后裘氏本人收藏算书，逐年有所增益。此项藏书于二十三年让售与杭州浙江省立图书馆。该馆馆刊三卷三号及四号，载有《本馆新购裘氏双啸室中国算学书目》一文，其中甚多密笈。此数年内各界收藏中算书目，叠见于报章杂志。如《李俨所藏中国算学书目录》、《李俨所藏中国算学目录续编》、《东方图书馆善本算书解题》、《中算书录》，兹不详举。

至各图书馆现藏中算书籍，前亦未作有规模之调查。二十四年四月由北平图书馆馆员邓衍林专辑《北平各图书馆所藏中国算学书联合目录》一书。所调查在北平之图书馆共十九处，收录算书凡千余种。虽其中尚有刊误之处，亦已甚便学者。

同时孙文青君根据全国图书馆目，各省县志，以及各项图书六百余种，编成《中算书目汇刊》一稿，但因全国县志，分散各地，未能一一入录，此项《汇刊》所辑书目，尚未齐全。而规模之大，工作之勤，已甚可钦佩。

查裘冲曼编录《中国算学书目汇编》之前，原拟录成《天文算学书目汇编》。中分五门，(一)丛书，(二)算学书，(三)天文历法书，(四)杂著，(五)人名索引。上述已发表之《中国算学书目汇编》，则为其中之第二种。依书名首字笔画多少为序，逐一胪列，对于其他各项，尚未暇顾及。关于杂著一项，则王重民有《清代文集算学类论文》，李俨有《经世文编算学类论文》*，太可备参考。其以人名为序者，则本人于十七年十二月以后以人名首字笔画多少为序，写成《近代中算著述记》，分载于《图书馆学季刊》三卷四期及三卷二三四各期。此项著述记即以清代以后各家著述为限。除本人收藏中

* 此二文 1954 年均收入《中算史论丛》第五集，见本书第八卷。

以外，并参考上述裘冲曼、汤晴川、曾远荣、汤天栋、刘朝阳、邓衍林、孙文青诸君自己集录者。一面复与钱宝琮、顾明、章用、严敦杰诸君，往返通讯，多方征集。计共收五百余人。著书共收得二千余种。已较裘氏所记，多及一倍。为便于读者参考起见，经整理后，又收入《中算史论丛》(四)*。今虽未能出版，而清代各算家所编著，刊刻各项算书，已大致可见。但其缺漏之处，尚不可免。今以清末上海美华书馆印算书为例，吾人已知：

上海美华书馆于光绪十一年(1885年)迄民国元年(1912年)三十年间，铅印《形学备旨》(1885年)、《心算启蒙》(1886年)、《笔算数学》(1892年)、《代形合参》(1893年)、《对数表》(1893年)、《圆锥曲线》(1893年)、《心算初学》(1893年)、《八线备旨》(1894年)、《代数备旨》(1896年)、《勾股演代》(1903年)、《八线拾级》(1904年)、《勾股题镜》(1907年)、《微积学》(1912年)等十余种。其中《形学备旨》一书曾由该馆铅印十一次(1910年)，《笔算数学》曾由该馆铅印三十二次(1910年)，而每次复印之时期，尚未能一一确知。

又如吾人已知乌程徐树勳于光绪末年在成都刊刻《算雅》、《务民义斋算学》、《形学备旨习题解证》(1902年)、《平三角举要》、《增删算法统宗》、《古筹算考释》、《算学须知》、《勾股六术图解》、《董方立遗书》、《形学备旨》及《圆锥曲线》、《比例汇通》(1902年)等十余种算书。就中除一二种确知其刊刻年月外，其余尚未一一考出。兹仅举一二例，以见近代中算书籍之调查与考证，尚有待于各方之努力。

至关于地方传刻书籍，其在陕西省者已由李俨于二十三年八

---

* 1954年作者将其编入《中算史论丛》第二集，见本书第六卷。

月写成《清季陕西数学教育史料》一文，记入《西京日报》之《陕西省立第一图书馆第一届展览会特刊》内*。其在四川省者，已由严敦杰编有《四川天算艺文志述略》一文，刊入二十九年一月二日及八日《时事新报》学灯渝版六十六期及六十七期内。严君又有《清代四川算学书志》一文，刊入《图书季刊》新三卷二期。据上文所记，民国以来经各方努力，对于编述清代中算书目，已具有相当眉目。如再妥加整理，使一代文献有征，亦盛事也。

* 1954 年作者将其编入《中算史论丛》第四集，见本书第八卷。

日算累圆术*

1. 绪　　言

日本算学，可分为四期，第一期为中算输入时期(600～1650)，第二期为日算始兴时期(1650～1750)，第三期为日算发达时期(1750～1840)，第四期为日算衰落时期(1840～1900)。关于第一期内中国唐代算学输入日本，及近世期中算输入日本情形，已详《中国算学史》**，其余各期史事，别详日本算学史内，日算虽由中国输入，而第三期(1750～1840)该国算学相当发达，有青出于蓝之势，兹述此期之日算累圆术。

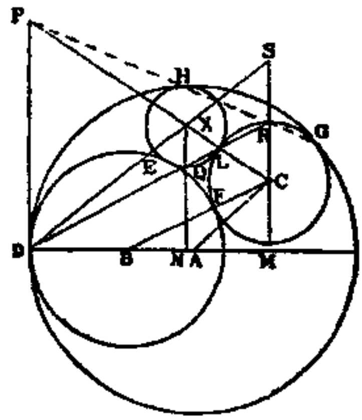
2. 久留岛氏累圆术

累圆术问题始见于泽口一之《古今算法记》(1670 年)卷七"平圆解空门"，即"外一大圆内容一中圆，及两相等小圆，求其关系"，关孝和(1642～1708)，建部贤弘(1664～1739)于《发微算法演段谚

* 本文原载《学艺杂志》第 17 卷(1947 年)第 10 号第 22～31 页。

** 见本书第一卷。

解》(1685年)为作演草。至久留岛义太(?～1757)《久氏遗稿》天、地二卷,则于"外圆内容大中小三圆,求其关系",如图(1)B,C 大中二圆互切又内容于 A 外圆内,求作 X 小圆再与三圆互切。



图(1)

解. 命 A,B,C,X 外、大、中、小四圆之半径为 a,b,c,x。有 a,b,c 求 x。

联 AB,作 CM,XN 垂直于 AB 线。X,C 两圆与 A 圆之切点为 H 及 G。联 X,C 及 H,G 延长线相交于 P。此 P 点亦在 A,B 两圆公共切点 D 上。

久留岛氏盖深知相似心(Centre of similitude)之理论,因得 $PG\cdot PH=PL^2=PD^2$,而 $PL=PD$,又知 D,Q,L,R 四点在一直线上。故 $c:x=CP:XP=MD:ND=SR:XQ=SR:x$。

$\therefore\quad SR=c$。

今 A,B 圆相切,内容 C,X 两圆,作 CM,XN 垂直于 AB 线。则 $\dfrac{CM+2c}{c}=\dfrac{XN}{x}$,$\dfrac{CM}{c}=r$,则 $\dfrac{XN}{x}=r+2$,逐次如是。即"容累圆心,作 AB 之垂线,与其各圆半径之比,成等差级数。"

又以 $\triangle ABC$ 之三边为 $a-b,b+c,a-c$,$\triangle ABC=\sqrt{abc(a-b-c)}$,$CM=\dfrac{2\triangle}{a-b}=cr$. $\quad\therefore r=\dfrac{2\triangle}{a-b}\times\dfrac{1}{c}$。

$$XN=\frac{2\triangle ABX}{a-b}=\frac{2\sqrt{abx(a-b-x)}}{a-b}=x(r+2)。$$

$$\therefore\frac{4abx(a-b-x)}{(a-b)^2}=x^2\left(\frac{2\triangle}{a-b}\times\frac{1}{c}+2\right)^2。$$

$$\therefore abc^2(a-b-x)=x[abc(a-b-c)+2(a-b)c\triangle$$
$$+c^2(a-b)^2]。$$

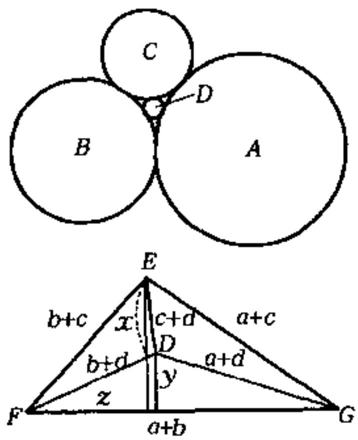
$$\therefore abc = x(ab+ac-bc+2\triangle)$$

$$\therefore x = \frac{abc}{ab+ac-bc+2\sqrt{abc(a-b-c)}}。$$

3. 山路氏四圆适等(1751 年)

久留岛义太门人山路主住(? ~1772)著《赘式演段》(1751 年)述及四圆适等,即四圆相切问题。

解. 命 A,B,C,D 四圆之半径为 a,b,c,d,如图(2)上,另如图(2)下内三角形之六斜线为 $a+c,a+b,b+c,b+d$, $a+d,c+d$。则



图(2)

$$\frac{(b+c)^2+(a+b)^2-(a+c)^2}{2}$$

$$=ab+bc+b^2-ab$$

$$=(a+b)z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A)$$

$$\frac{(b+d)^2+(a+b)^2-(a+d)^2}{2}-A$$

$$=ac-bc-ad+bd$$

$$=(a+b)u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (B)$$

$$(c+d)^2(a+b)^2-B^2=4a^2cd+4b^2cd+4abc^2+4abd^2$$

$$=(a+b)^2x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (C)$$

$$(2\triangle DFG)^2=4(a+b+d)abd=(a+b)^2y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (D)$$

又 $\qquad (b+c)^2-z^2=(x+y)^2$

$\therefore \qquad [(b+c)^2-z^2-y^2-x^2]^2=4x^2y^2$

$\therefore \qquad [(b+c)^2(a+b)^2-A^2-D-C]^2=4CD$

简约之,得 $\qquad a^2b^2c^2-2abc(ab+bc+ca)d+$

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2)d^2=0$$

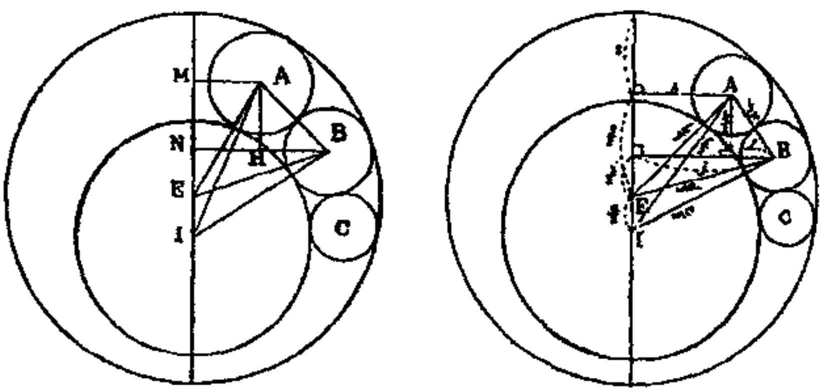
$$\therefore \quad \frac{abc}{d}=ab+bc+ba\pm\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

此与 Pappus 之计算,全相一致。

4. 安岛氏容累圆帘术(1784 年)

圆内容累圆径求法首见于有马赖徸《拾玑算法》(1766 年)卷二,交商第四及卷八,逐索第二以下,至山路主住门人安岛直圆(1739～1798)所著圆内容累圆术(1784 年)始详述其事。

解. 如图(3)a 及(3)b,外圆 E 内有内圆 I,另有 B 圆与之相切,求 A 圆之值。就中 E,I,B 为三圆直径,S 为矢。



a 图(3) b

又 $a=2\cdot IE=-E+I+2S=(I+S)-(E-S)$. $b=2\cdot EA=E-A$, $c=2\cdot IA=I+A$ $d=2\cdot EB=E-B$, $e=2\cdot IB=I+B$, $f=2\cdot AB=A+B$。

作 AM,BN 直垂于 IE,AH 直垂于 BN。

又以 $g=2\cdot EM$, $h=AM$, $i=2\cdot EN$, $j=BN$,

$k=2\cdot AH$，　$l=BH$。

故　$m=(I+s)(E-s)$，

则　$a^2=(E+I)^2-4m$。

在　$\triangle EIA$ 内　$ag=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)$，

∴　$a^2h^2=\frac{1}{4}(a^2b^2-a^2g^2)$

$$\boxed{\begin{aligned}&=\frac{1}{4}\left[ab-\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)\right]\left[ab+\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2}\right]\left[\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2}\right]\\&=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\\&\text{因}\quad a=-E+I+2s,\quad b=E-A,\quad c=I+A。\end{aligned}}$$ ①

∴　$a^2h^2=(I+s)(s-A)(-E+I+S+A)(E-s)$

又因　$m=(I+s)(E-s)$.

∴　$a^2h^2=m(S-A)(-E+I+S+A)$

$=m\{-(E-I)S+S^2+(E-I)A-A^2\}$

同理　$a^2j^2=m\{-(E-I)S+S^2+(E-I)B-B^2\}$

在　$\triangle EIB$ 内　$ai=\frac{1}{2}(e^2-d^2-a^2)$

$\therefore ak=ag-ai=\frac{1}{2}(c^2+d^2-b^2-e^2)$

又　$4a^2l^2=a^2f^2-a^2k^2=a^2f^2-\frac{1}{4}(c^2+d^2-b^2-e^2)^2$

---

① 草中识别有不易辨者间附补注外加轮廓为志。

$$=a^2f^2-\frac{1}{4}[(b+c)(-b+c)+(d+e)(d-e)]^2$$

因 $b=E-A$，$c=I+A$，$d=E-b$，$e=I+B$，$f=A+B$

$$4a^2l^2=a^2(A+B)^2-\frac{1}{4}[(E+I)(-E+I+2A)$$

$$+(E+I)(E-I-2B)]^2$$

$$=a^2(A+B)^2-\frac{1}{4}[(E+I)^2(A-B)^2\times 4]$$

$$=a^2(A+B)^2-[(E+I)^2(A+B)^2-4AB(E+I)^2]$$

即 $$4a^2l^2=a^2(A+B)^2-(E+I)^2(A-B)^2$$

$$=[a^2-(E+I)^2](A+B)^2+4(E+I)^2AB$$

因 $a^2=(E+I)^2-4m$

$\therefore a^2l^2=m(-A^2-2AB-B^2)+(E+I)^2AB$。

$$(a^2j.2l)^2=(a^2l^2+a^2j^2-a^2h^2)^2$$

$$=\{m[(E-I)B-2B^2-(E-I+2B)A]$$

$$+(E+I)^2AB\}^2$$

$$=\{m[(E-I)B-2B^2]+[-m(E-I)$$

$$-2mB+(E+I)^2B]A\}^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

或 $$4a^2j^2\cdot a^2l^2=4m[-(E-I)S+S^2+(E-I)B-B^2]$$

$$\times\{-mB^2+[-2m+(E+I^2)]AB-mA^2\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

因 (1)=(2)，假定 $P+QA+RA^2=0$，因此方程式有因子 a^2，

$$m^2[(E-I)B-2B^2]^2-4m[-(E-I)S+S^2+(E-I)A$$
$$-B^2](-mB^2)=P+2m[(E-I)B-2B^2]$$
$$[-m(E-I+2B)+(E+I)^2B]-4m[-(E-I)S$$
$$+S^2+(E-I)B-B^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$=Q+[-m(E-I-2B)+(E+I)^2B]^2$$
$$+4m^2[-(E-I)S+S^2+(E-I)B-B^2]=R。$$

P,Q,R 三式，并有$[(E+I)^2-4m]$或 a^2 之因数，就中：

$$P\equiv m^2B^2[(E-I)-2B]^2+m^2B^2[-4(E-I)S+4S^2$$
$$+4(E-I)B-4B^2]$$
$$\equiv m^2B^2[(E-I)^2-4(E-I)S+4S^2]$$
$$\equiv m^2B^2[(E+I)^2-4m] \qquad \equiv m^2B^2\cdot a^2$$

$$Q\equiv+2m[(E-I)B-2B^2]\{-m(E-I)+[-2m+(E+I)^2]B\}$$
$$-4m[(E-I)B-B^2-(E-I)S+S^2][-2m$$
$$+(E+I)^2]B$$
$$\equiv+2m[(E-I)B-2B^2][-m(E-I)]+2m[(E-I)B-B^2]$$
$$[-2m+(E+I)^2]B+2m(-B^2)[-2m+(E+I)^2]B-4m$$
$$[(E-I)B-B^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$-4m[-(E-I)S+S^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$\equiv-2m^2[(E-I)^2B-2(E-I)B^2]-2m[(E-I)B-B^2]$$
$$[-2m+(E+I)^2]B+2m(-B^2)[-2m+(E+I)^2]B$$
$$-4m[-(E-I)B-B^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$\equiv-2m^2[(E-I)^2B-2(E-I)B^2]-2m[(E-I)B][-2m+$$
$$(E+I)^2]B-4m[-(E-I)S+S^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$\equiv-2m^2[(E-I)^2B]-2m(E-I)B^2[(E+I)^2-4m]$$
$$-4m[-(E-I)S+S^2][-2m+(E+I)^2]B$$
$$\equiv-2m(E-I)B^2\cdot a^2-4m[-(E-I)S+S^2][-2m+(E$$
$$+I)^2]B-2m^2[(E-I)^2B]$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+[2m(E+I)^2(E-I)SB-8m^2(E-I)SB]+2m(E+I)^2(E-I)SB-4m(E+I)^2S^2B+8m^2S^2B-2m^2(E-I)^2B。$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+2m(E-I)SB\cdot a^2+2m(E+I)^2(E-I)SB-4m(E+I)^2S^2B+8m^2S^2B-2m^2(E-I)^2B。$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+2m(E-I)SB\cdot a^2-2m[-(E-I)S+2S^2](E+I)^2B-2m^2(E+I)^2B+8m^2EI\cdot B+8m^2S^2B。$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+2m(E-I)SB\cdot a^2-2m[m-(E-I)S+2S^2][(E+I)^2B]-2m[EI+S^2](-4m)\cdot B$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+2m(E-I)SB\cdot a^2-2m(EI+S^2)(E+I)^2B-2m(EI+S^2)(-4m)B$$

$$\equiv -2m(E-I)B^2\cdot a^2+2m(E-I)SB\cdot a^2-2m(EI+S^2)B[(E+I)^2-4m]$$

$$\equiv [-2m(E-I)B^2+2m(E-I)SB-2m(EI+S^2)B]a^2$$

$$R\equiv 4m^2[-(E-I)S+S^2+(E-I)B-B^2]+[-m(E-I)-2mB+(E+I)^2B]^2$$

$$\equiv 4m^2[EI-m+(E-I)B-B^2]+[m^2(E-I)^2+4m^2B^2+(E+I)^4B^2+4m^2(E-I)B-2m(E+I)^2(E-I)B-4m(E+I)^2B^2]$$

$$\equiv m^2[4EI-4m-4B^2+(E-I)^2+4B^2]-2m(E-I)B[(E+I)^2-2m-2m]+(E+I)^2B^2[(E+I)^2-4m]$$

$$\equiv [(E+I)^2B^2-2m(E-I)B+m^2][(E+I)^2-4m]$$

$$\equiv [(E+I)^2B^2-2m(E-I)B+m^2]a^2。$$

故 $P+QA+RA^2=0$ 方程式可书为：

$$m^2B^2+[-2m(E-I)B^2+2m(E-I)SB-2m(EI+S^2)B]A+[(E+I)^2B^2-2m(E-I)B+m^2]A^2=0 \quad\cdots\cdots (3)a$$

由公式(3)a 可于已知 E,I,S,B，及 $m=(I+S)(E-S)$之关系求得 A。

(3)a 式又可改书为

$$m^2A^2+[-2m(E-I)A^2+2m(E-I)SA-2m(EI+S^2)A]B+[(E+I)^2A^2-2m(E-I)A+m^2]B^2=0 \quad\cdots\cdots (3)b$$

系于已知 E,I,S,A 及 $m=(I+S)(E-S)$之关系求 B。

(3)a 式又可改书为

$$m^2B^2+[-2m(E-I)B^2+2m(E-I)SB-2m(EI+S^2)B]C+[(E+I)^2B^2-2m(E-I)B+m^2]C^2=0 \quad\cdots\cdots (3)c$$

系于已知 E,I,S,B，及 $m=(I+S)(E-S)$之关系求 C。

令 $$a\equiv m^2B^2+[-2m(E-I)B^2+2m(E-I)SB-2m(EI+S^2)B]A+[(E+I)^2B^2-2m(E-I)B+m^2]A^2=0 \quad\cdots\cdots (3)a$$

又令 $\beta=[(E-I)B-(E-I)S+(EI+S^2)]A-mB$

$$\beta^2=\beta^2-\alpha=\{[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)]^2-[(E-I)^2B^2+4EI\cdot B^2-2m(E-I)B+m^2]\}A$$

$$
\begin{aligned}
\beta^2 &= \{[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)]^2-[(E-I)B-m]^2 \\
&\quad -4EIB^2\}A \\
&= \{[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)-(E-I)B+m][(E \\
&\quad -I)(B-S)+(EI+S^2)-(E-I)B-m]-4EIB^2\}A^2 \\
&= \{[-S(E-I)+EI+S^2+m][(E-I)(2B-S)+EI+ \\
&\quad S-m]-4EIB^2\}A^2 \\
&= \{2EI[(E-I)(2B-S)-S(E-I)+2S^2]-4EIB^2\}A^2 \\
&= 2EI[2(E-I)(B-S)+2S^2-4EIB^2]A^2 \\
&= 4EI(B-S)(E-I-B-S)A^2 \equiv \gamma^2A^2
\end{aligned}
$$

$$\beta^2=4EI(B-S)(E-I-B-S)A^2\equiv\gamma^2A^2$$

$$\beta=\pm\gamma A$$

$$=[(E-I)B-(E-I)S+(EI+S^2)]A-mB$$

或 $[(E-I)B-(E-I)S+(EI+S^2)\mp\gamma]A-mB=0$

或 $[(E-I)B+2EI-m\mp\gamma]A-mB=0$ …… (4)

其中 $-\gamma$ 之值代表 A，$+\gamma$ 之值代表 C，

又以 $[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)]=T$

则 $(T-\gamma)A-mB=0$，　又 $(T+\gamma)C-mBC=0$，

消去 γ，得：$(2TC-mB)A-mBC-0$

即 $\{2[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)]C-mB\}A-mBC=0$

$[-mB+2(E-I)BC+2(EI+S^2)C-2(E-I)SC]A$

$-mBC=0$

或 $[-mB+2(E-I)BC+(4EI-2m)C]A-mBC=0$ ………………………………………………………… (5)

公式(5)为已知 $E,I,S,B,m=(I+S)(E-S)$ 及 C，求 A 之第一基本公式。

今以(4)图与以前(3)a 及(3)b 图相对照,知(4)图之斜线圆形,及 A_1 与 A_2,实与(3)a 及(3)b 图之 C,及 B,与 A 相同,故公式(4)

$$[(E-I)B+2EI-m-\gamma]A-mB=0,$$

可书为 $$[(E-I)A_1+2EI-m-\gamma]A_2-mA_1=0,$$

而 $$m=(I+S)(E-S)$$

$$\gamma=2\sqrt{(A_1+S)(A_1-S)IE-(E-I)(A_1-S)IE}$$

再以(4)图之 A_1,A_2,A_3 与(3)a 或(3)b 图之 C,B,A 相对照,则公式(5)

$$[-mB+2(E-I)BC+(4EI-2m)C]A-mBC=0$$

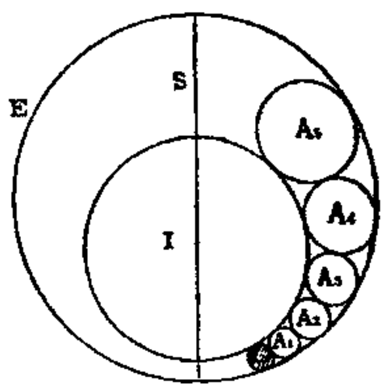
可书为:

$$[-mA_2+2(E-I)A_1A_2+(4EI-2m)A_1]A_3-mA_1A_2=0$$

即由 A_1,A_2 可求得 A_3,上式简之,得:

$$\left[-1+\frac{2(E-I)A_1}{m}+\frac{4EIA_1}{mA_2}-\frac{2A_1}{A_2}\right]A_3-A_1=0 \cdots\cdots (6)$$

上项公式为已知 E,I,S $m=(I+S)(E-S)$ 及 A_1,A_2 求 A_3 之第二基本公式。



图(4)

次令 $\frac{A_1}{A_1}=1=r_1,\frac{A_1}{A_2}=r_2,\frac{A_1}{A_3}=r_3,\frac{A_1}{A_4}=r_4\cdots\cdots$

又令 $4=\frac{2(E-I)A_1}{m}$, $k=\frac{4EI}{m}-2$

则(6)式可书为 $\frac{A_1}{A_3}=-1+4+kr_2=r_3$。

再于(6)式内，另以 A_2, A_2, A_4 代 A_1, A_2, A_3，则得：

$$\left[-1+\frac{2(E-I)A_2}{m}+\frac{4EIA_2}{mA_3}-\frac{2A_2}{A_3}\right]A_4-A_2=0$$

上项公式称为第三基本公式：

以 $\dfrac{A_1}{A_2}=r_2$ 乘之，得：$\left[-r_2+\dfrac{2(E-I)A_1}{m}+\dfrac{4EIA_1}{mA_3}-\dfrac{2A_1}{A_3}\right]A_4$

$$-A_1=0$$

或 $\quad(-r_2+4+kr_3=r_4)A_4-A_1=0$

即 $\quad\dfrac{A_1}{A_4}=-r_2+4+kr_3=r_4.$

同理 $\quad\dfrac{A_1}{A_5}=-r_3+4+kr_4=r_5.$

归纳得：各累圆之圆径率如下：

$$\frac{A_1}{A_1}=1=r_1,\qquad \frac{A_1}{A_2}=r_2,$$

$$\frac{A_1}{A_3}=-1+4+kr_2=-r_1+4+kr_2=r_3,$$

$$\frac{A_1}{A_4}=-r_2+4+kr_3=r_4,$$

$$\frac{A_1}{A_{12}}=-r_{n-2}+4+kr_{n-1}=r_n。$$

因(3)a 或(3)b 图之 BA，与(4)图之 A_1, A_2 相对照。

又 (3)a，b 图之 B 圆，或(4)图之 A_1 图全径与 S 相等。

即“内外大小两圆隙中正容一圆”

查以前算出(3)a，(3)b，(3)c 各公式后，曾令：

$\beta^2=4EI(B-S)(E-I-B-S)A^2\equiv\gamma^2A^2$，

因 $\quad B-S=0 \quad \beta=0=\gamma A$

故(4)公式之$[(E-I)(B-S)+(EI+S^2)\mp\gamma]A-mB=0$

可书为 $\qquad (EI+S^2)A=mB$ ………… 参看图(3)a 或图(3)b，

或 $(EI+S^2)A_2=mA_1=mS$ ………………… 参看图(4)

如前定义 $r_2=\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{S}{A_2}=\dfrac{EI+S^2}{(I+S)(E-S)}=\dfrac{4+k}{2}$,而

$$4=\frac{2(E-I)S}{(I+S)(E-S)},k=\frac{4EI}{(I+S)(E-S)}-2,$$

如以 $k=q-2$,即 $q=\dfrac{4EI}{m}$, $p=r_2-1$

$$4=2r_2-k=2p-q+4,\quad r_2=p+1。$$

逐次什入 $\dfrac{A_1}{A_3}=-1+4+kr_2=r_3,\dfrac{A_1}{A_4}=-r_2+4+kr_3=r_4$ ……

…… ……

各式,得 $r_2=p+1$, $r_3=pq+1$, $r_4=pq^2-2pq+r_2$, $r_5=pq^3-4pq^2+4pq+1$, $r_6=pq^4-6pq^3+11pq^2-6pq+r_2$, $r_7=pq^5-8pq^4+22pq^3-24pq^2+9pq+1$。

若内外两圆相切,则

$$S=E-I,\quad E-S=I,\quad I+S=E,\quad m=EI.$$

而 $4=\dfrac{2(E-I)A_1}{m}=\dfrac{2(E-I)A_1}{EI}$, $k=\dfrac{4EI}{m}-2=2$

又 $4=\dfrac{2(E-I)S}{EI}$, $k=2.$

$r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7\cdots\cdots r_n$ 各累圆之圆径率,可以追求。

此外尚有若干系题,例如上款已知"内外大小两圆(相切或不相切)隙中正容一圆"后求累圆之圆径率,则(甲)"内外大小两圆(相切或不相切)隙中左右容两圆"后亦可求累圆之圆径率,又原有小圆系置于大圆内(乙)亦可移于大圆外。又(丙)内外圆并可为无限大,将圆周变为直线后再求累圆之圆径率 r_n 等。

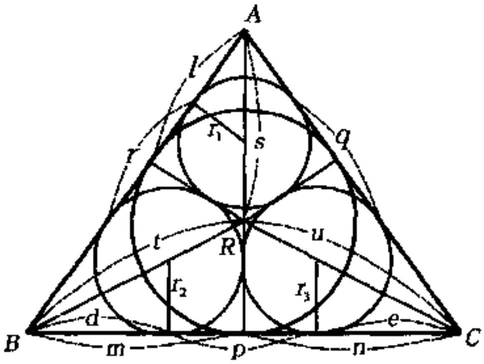
5. 安岛氏三斜容三圆术

安岛氏又"求于三角形内作三互切圆,此各圆又与三角形之二

边相切”。

解．如图(S)，对三角形 ABC 三角 A,B,C 之三边为 a,b,c。则 $-a+b+c=2l$，$a-b+c=2m$，$r+b-c=2n$。又内切圆径为 $2R$，三互切圆径为 $2r_1,2r_2,2r_3$。

又令 $2r_1=x^2$，$2r_2=y^2$，$2r_3=z^2$。



图(5)

$$\boxed{\begin{array}{l}(r_3+r_2)^2=(r_3-r_2)^2+p^2\quad 4r_2r_3=p^2\quad 2r_2=y^2\\ 2r_3=z^2\quad 4r_2r_3=y^2z^2\quad \therefore yz=p\end{array}}$$

即 $yz=p$，$zx=q$，$xy=r$

而 $2a\cdot 2r=(2p+2d+2c)2R=2yz\cdot 2R+2my^2+2nz^2$。

得 $$2yz\cdot 2R+2my^2+2nz^2-2m\cdot 2R-2n\cdot 2R=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

同理 $$2zx\cdot 2R+2nz^2+2lx^2-2n\cdot 2R-2l\cdot 2R=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$2xy\cdot 2R+2lx^2+2my^2-2l\cdot 2R-2m\cdot 2R=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

由(2)，(3)消去 x 及 x^2

$$2l\cdot 2m\cdot 2n=\frac{(a+b+c)^2\cdot 2l\cdot 2m\cdot 2n}{(a+b+c)^2}=(a+b+d)\left(\frac{4\triangle}{a+b+c}\right)^2=(a+b+c)(2R)^2$$

$$-4lyz-2y^2z^2-2nz^2-2my^2+2l\cdot 2R+2m\cdot 2R+2n\cdot 2R=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

(4)+(1) $$-lyz+2yz\cdot 2R-2y^2z^2+2l\cdot 2R=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

又 $(2l)^2+(2R)^2=4S^2$，与 $2\times(5)$ 式相减得：

$$(2l)^2+(2R)^2+4y^2z^2-2\cdot 2l\cdot 2R-4yz\cdot 2R+4lyz=4S^2 \quad\cdots\cdots (6)$$

开平方得： $2yz-2R+2l-2S=0$

即 $p=R+S-l,\quad q=R+t-m,\quad r=R+u-n$。

此系基本定理。

由此因 $yz=p,\quad zx=q_1,\quad xy=r$。

得 $x^2=\dfrac{qr}{p}=2r_1,\quad y^2=\dfrac{pr}{q}=2r_2,\quad z^2=\dfrac{pq}{r}=2r_3$,

次以 p 求三圆径 $2r_1, 2r_2, 2r_3$ 之值。

因 $a-p=d+e, \pi:2R=d:z^2,\quad (a-p)2R=d\cdot 2R+e\cdot 2R$

$$=my^2+nz^2 \quad\cdots\cdots (7)$$

(7)式 自乘，再与 $2m\cdot 2n\cdot p^2=2m\cdot 2n\cdot y^2z^2$ 式相减后开平方得：

$$\sqrt{\{(a-p)^2(2R)^2-2m\cdot 2n\cdot p^2\}}=-my^2+nz^2 \quad\cdots\cdots (8)$$

令 $\sqrt{\{(a-p)^2(2R)^2-2m\cdot 2n\cdot p^2\}}=P$

则 $z^2=\dfrac{(a-p)2R+P}{2n},\quad y^2=\dfrac{(a-p)2R-P}{2m}$,

又 $b-c=(q+e)-(r+d)=q-r+e-d$,

故 $(b-c)2R=xz\cdot 2R-xy\cdot 2R+nz^2-my^2$

两边减(8)式又各乘 z，得：

$$z\{(b-c)2R-P\}=xz\cdot 2R-xyz\cdot 2R=(z^2-p)2R\cdot x。$$

$$x^2=\frac{\left(b-c-\dfrac{P}{2R}\right)^2z^2}{(z^2-p)^2}$$

故，术曰：由 $-a+b+c=2l,\quad a-b+c=2m,\quad a+b-c=2n$,

算出 $2R=\sqrt{\dfrac{8lmn}{a+b+c}}$。

又由 $\sqrt{(l^2+R^2)}+R-l=p$ 算出

$$(a-p)2R=A \qquad \sqrt{(A^2-2m.2np^2)}=B。$$

$$\frac{A+B}{2n}=z^2=2r_3, \qquad \frac{A-B}{2m}=y^2=2r_2$$

$$\frac{[b-(B\div 2R+c)]^2 2r_3}{(2r_3-p)^2}=2r_1$$

例如： $a=307$ 寸， $b=375$ 寸， $c=252$ 寸，可求得：

$2r_1=72$ 寸， $2r_2=112.5$ 寸， $2r_3=128$ 寸。

本题称为 Malffatti 问题，由 Malffatti（1731～1807）发表于 *Memorie di Matematicae di Fisica*, *Modena*, 1803, tomo X，杂志内，在安岛直圆（1739～1798）去世后五年云，克济氏几何原本补编八章杂题内则引及 Steiner 氏所发见之作图法，及 Hart 氏之简单证明。

我国古代数学的成就*

我国是世界上文明发达最早的国家之一。在将近四千年的历史过程中，我国人民在各种科学上都有很大的成就；贡献最大的科学之一是数学。我国数学的历史就像我国历史一样悠久，而且代代都有创造和发明。现在就将我国历代数学的成就，作一轮廓性的叙述。

从结绳到文字记数

在有文字以前，是用结绳来记数的。周代著作《易经》里的"系辞"部分中就说："上古结绳而治，后世圣人易之以书契。"

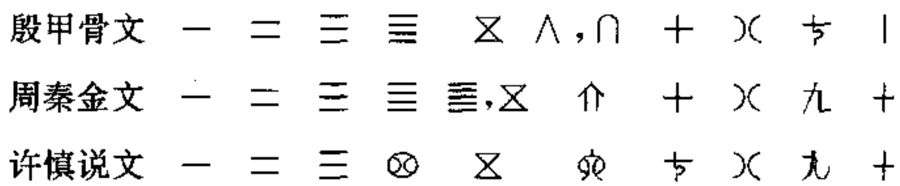
到了殷代，我国才有契形文字。在契形文字中，把1，2，3，4，5，6，7，8，9写作：一，二，三，亖，㐅，∧（或∩），十，)(，ㄘ。十以上是这样处理的：(1)在基本文字上加一个符号。如：2656记作千 ⋂ 㐅 ∩；(2)或各加一'又'字，如：199记作'一百又九又九'；(3)或说明十百千万，如2656记作'二千六百五十六'；(4)'零'字不另列，只

* 本文原载《科学大众》1954年6月号第220～223页。原文有压题图，同本卷第339页之图1。

记一个‘又’字，如：209 记作‘二百又九’。由此可见，这时候已经知道十进的方法了。

到了周代，因为社会实践和物质生产上的需要，在个、十、百、千、万之外，还有了“亿”字，“兆”字。

现在的汉字“一二三四五六七八九十”就是从契形文字演变来的。现在列表如下：



九九表和分数

周秦时期的学者，已经熟悉加减乘除四则的运算，并且能够应用分数。

为了便利乘、除的运算，就创造了“九九表”。这种九九表，从“九九八十一”到“二二四”一共有三十六句；和现在流行的由“一一如一”到“九九八十一”的九九表，次序不同。周秦时代的著作，常常引用这种九九歌诀。汉代用的也是这种九九表。我们在甘肃北部的居延和西部的敦煌，还寻到了汉简九九表(图 1)。

周秦时代还没有发明小数，但却已经发明了分数。在计算中，学者们就尽量运用分数，如大半$\left(\frac{2}{3}\right)$，半$\left(\frac{1}{2}\right)$和小半$\left(\frac{1}{3}\right)$等等。

两脚规和三角板

规(圆规)和矩(角尺或三角板)，我国很古就有了。汉代的著名

历史家司马迁在他的巨著《史记》中就记载着夏禹利用准绳和规 矩来治水的传说。汉代传说：规矩是神话中的人物伏羲制定的。山东嘉祥县的汉代武梁祠石室造像中，就有手拿矩的伏羲和手拿规的女娲的蛇身人面像。从图上看来，我国古代的规，是和现在圆规差不多的；而矩，又是和现在木匠用的角尺或学生用的三角板差不多的。

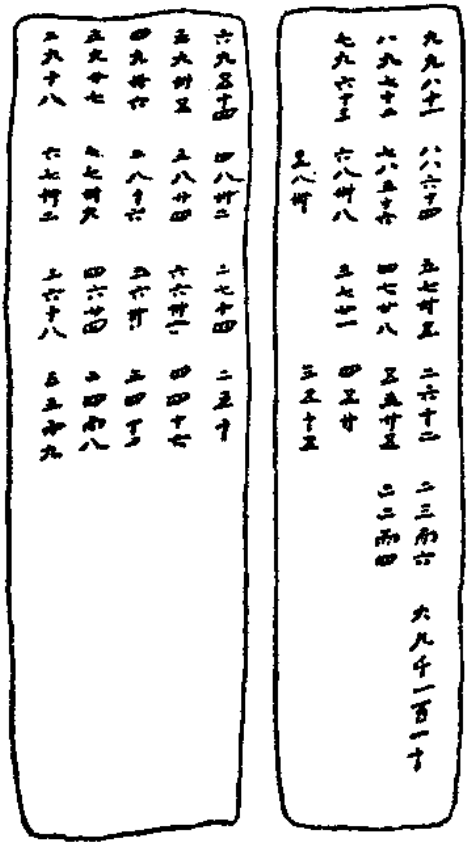


图 1 "九九术残木简"图。"九九术残木简"出敦煌北，长 260 毫米，宽 24 毫米，现存十六句。本图是据《流沙坠简》一书钞补的。

河南省安阳县地下发掘得的殷代车轴上的装饰品，就画有五边形、九边形等几何图形。如果没有一定的仪器和几何学知识，显然是画不出这样的几何图形来的。

无论如何，远在周代，圆规和角尺已是很普遍的东西了。当时的著作中一再说到它们。教育家孟子就曾说过：不论你怎样聪明机巧，不利用圆规和角尺，就作不出圆形和矩形来。

最早的算书和数学教育

在周秦时代，我国数学已有相当大的成就，出现了像《周髀算

经》那样的专门论述数学的著作，还用数学教育儿童。后代甚至有"周公作九章之法，以教天下"的传说(见图 2)。这里说的"九章之法"就是指数学。

到汉代即公元前 200 年，我国古代数学已经具体地成为一门专门的科学。班固著的《前汉书》和范晔著的《后汉书》都有儿童八岁入小学受到数学教育之类的记载。现在流传的《算经十书》中，有一部分是根据汉代初稿改编的，如《史记》和《前汉书》时常提到的"九数""九章"和"算术"，就是指《算经十书》里的《九章算术》。这本书是汉代数学家编著的。《周髀算经》里主要是论述圆周率、直角三角形勾股弦长度关系和等差级数这几个问题。而汉代的《九章算术》就已经相当完备了。从这本书当中，我们可以看到日用数学的各种演算和平面几何、立体几何的各项研究。

图 2 "周公作九章之法，以教天下"图(据 1604 年明代刻本黄龙吟《算法指南》临摹)。

勾股弦定理

我国数学家很早就研究直角三角形内勾股弦三边的关系。

《周髀算经》中曾经说到"勾广三，股修四，径隅五"；这就是说，在直角三角形的三边中，如果勾长（设为 a）是 3，股长（设为 b）是 4，那么弦长（设为 c）就是 5（看图 3）；也就是说，$a:b:c=3:4:5$。显然是正确的。

这在《周髀算经》上不仅说到了"勾三股四弦五"这样的特例，而且说到了"勾股各自乘，并而开方除之，得弦"那样普遍的演算方法；这是说：$c=\sqrt{a^2+b^2}$，即 $a^2+b^2=c^2$。这与希腊学者毕达哥拉斯在公元前 540 年所得到的结果是一致的。只是可惜《周髀算经》并没有把证明方法告诉我们。不过当时对于几何学理已有相当的认识，《周髀算经》本文说："环矩以为圆（看图 4），合矩以为方（看图 5）。"当将哲学家墨子说："圜，一中同长也。"圜就是球体，墨子这句话，意思是说：球体，有一个中心，它与球面上所有的点距离相等。

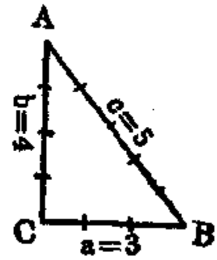


图 3

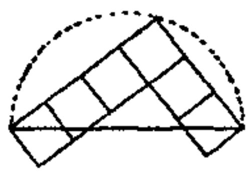


图 4 "环矩以为圆"图解（矩是角尺，或者就可说是直角三角形；"环矩以为圆"意思是：圆是同弦直角三角形顶点的轨迹）。

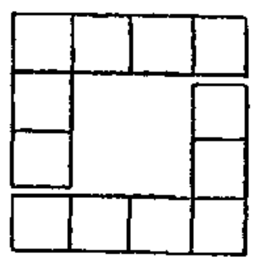


图 5 "合矩以为方"图解（"合矩以为方"意思是说：把勾三股四的两枝角尺，合在一起，可以凑成一个正方形）。

汉代编成的《九章算术》中更是非常明确地说："术曰：勾股各自乘，并而开方除之，即弦。"虽然上面也没有具体证明。但，汉代（?）学者赵君卿，就在他所著的《勾股方圆图注》中，按照自己所画的"弦图"（图 6）来证明。他的证明的叙述，按照现在的话

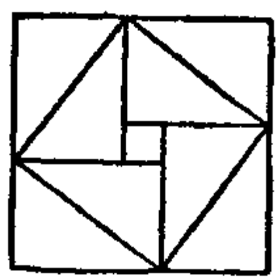


图 6 弦图。

说来，就是：勾股相乘 ab 等于这个直角三角形面积的 2 倍，再乘上 2 就等于直角三角形面积的 4 倍 $2ab$；而当中那个小正方形，是勾股长度差的平方 $(b-a)^2$；从图上可以看出，直角三角形面积的 4 倍，加上勾股长度差的平方，就等于当中那个斜着的正方形的面积即弦长的平方，写成式子就是 $2ab+(b-a)^2=c^2$。这个式子稍为简化一下，就成为：$a^2+b^2=c^2$。

后代数学家，还有各式各样的证明。

圆周率的伟大成就

关于圆周率问题，《周髀算经》上只说到“圆径一而周三”；这就是说，在圆内，如果直径是 1，那么圆周就是 3，也就是说圆周率 $\pi=3$。但这只是圆内接正六边形的周长与直径的比，作为圆周率显然是不精密的。

后来，就有许多学者进一步研究圆周率。如刘歆（？～23）求得 $\pi=3.1547$，张衡（78～137）求得 $\pi=\sqrt{10}$ 或 $\frac{92}{29}$，王蕃（219～257）求得 $\pi=\frac{142}{45}=3.155$。

三国时代的学者刘徽（公元 263 年时候人），更发表了他的著名的割圆（求圆周率）理论，他说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这就是说，圆内接正多边形边数越多，则它的周长与圆周相差越少；如果边数无穷，则它的周长与圆周相合。刘徽从这理论出发，从圆内接正六边形算起，边数倍进，……一直算到内接正九十六边形；如直径是 1，则内接正九十六边形的周长 $=3.141024\cdots\cdots$；他以 $\pi=3.14$ 入算。

到南北朝时，著名学者范阳蓟（在今河北省）人祖冲之（429～

500)，不但认为"周三径一"太过粗疏，而且对刘歆、张衡、王蕃、刘徽等人的新率也还不满意。因此，他再作进一步研究，著了《缀术》一书，算得圆周率 π 在 3.1415926 和 3.1415927 之间和 $\pi=\frac{355}{113}$（密率）、$\pi=\frac{22}{7}$（约率）。《缀术》虽然失传，可是他所算得的圆周率是有世界意义的。西洋人对圆周率的精密计算，比祖冲之要晚一千多年；直到 1573 年，日耳曼人瓦仑丁·奥妥(Valentin Otto)才推算到这个程度。由于祖冲之在数学上的卓越贡献，现在苏联国立莫斯科大学新校舍大礼堂前的走廊壁上，就镶嵌着祖冲之的彩色大理石像。

求圆球与角锥平截体的体积

祖冲之的儿子祖暅也是数学家，在数学上也有卓越的贡献——"开立圆术"。所谓"开立圆术"，就是求圆球体积的方法。他用几何方法，求得圆球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中 r 是圆球的半径。他所得的公式，虽然和亚其默得(Archimedes，前 287?～前 212)所得的一致，可是步骤并不相同。他在求圆球体积时，还使用了这样一个公理："界于两平面之间的两个立体，被任何一个平行于两平面的平面所截，若两截面的面积常相等，则两立体体积也必相等。"大约一千年以后，意大利数学家卡瓦利利(Cavalieri，1598～1647)才发现这个公理。现在一般把这公理叫作"卡瓦利利"公理，显然是不妥当的；我们应当改称为"祖暅公理"。

到唐代有一位叫王孝通的学者，著有一部《缉古算经》。这部书现在列在《算经十书》之内。王孝通是公元 620 年时人。他在书中

分析了平面和立体几何圆形，创造出计算这些图形的面积和体积的方法。如“仰观台”（就是角锥平截体，图 7）的体积，虽然《九章算术》已经算得 $V=\frac{h}{b}[(2b+d)a+(2d+b)c]$；但他在书中还分析成 $V=\frac{(c-a)(d-b)}{3}\times h+a\times\frac{d-b}{2}\times h+b\times\frac{c-a}{2}\times h+a(b-a)\times h+a^2h$，其中 a，b 是上广袤，c，d 是下广袤，h 是高。他在书中还将上式改写成三次方程式，用它去求 a 的未知数。

我国古代数学家，对于其他各种几何图形的面积和体积的计算，一般也都得到正确的结果。

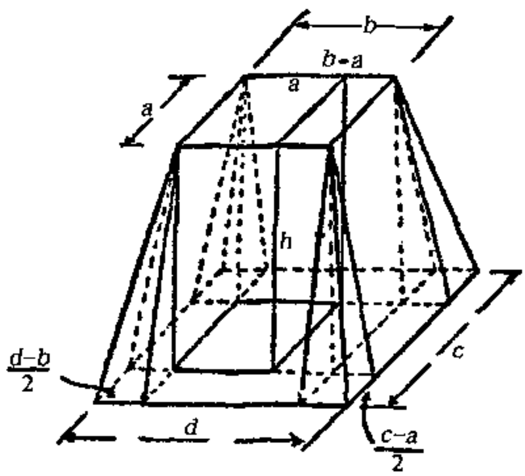


图 7 仰观台图

乘方和开方

在很久远的古代，我国学者就懂得了乘方和开方的运算。譬如在《周髀算经》中就提到这些运算。

关于开平方不尽，我国古代数学家有“不加借算”和“加借算”两个方法。所谓“不加借算”是这么一回事：如有 10 这一个数目，开平方后得 3 余 1，就用余数 1 做分子，用 3 乘 2（常数）得 6 做分母，与 3 加在一起，得 $3\frac{1}{6}$ 作为初步答案；也就是 $\sqrt{10}=3\frac{1}{2\times3}=3\frac{1}{6}$；

如列成公式，就是 $N=a_1^2+r_1$，$\sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=a_1+\frac{1}{2a_1}$。而“加借算”，就是在分母内另加一个常数1，即 $N=a_1^2+r_1$，$\sqrt{N}=\sqrt{a_1^2+r_1}=a_1+\frac{r_1}{2a+1}$。这些方法，又叫“平方零约术”。在西洋，公元50年前后和1175年以及1341年的刺伯达氏(Rhapdas)都有类似的公式，但不及我国的“不加借算”和“加借算”方法简单。

隋唐时代的算书和中外数学交流

隋唐时代，将《算经十书》作为学校的教本。《算经十书》是《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经》、《缉古》、《缀术》这十种算书。后来《缀术》亡失，就以《数术记遗》来代替。《算经十书》经唐李淳风审核过才交付国学(国立学校)采用。以前，甄鸾在周武帝时(561～578)虽然曾经撰注《九章》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经》、《纪遗》、《三等数》、《海岛》、《甄鸾算术》，可是到李淳风撰注后方才成为定本。

我国隋唐时代数学很发达，并且传到日本、朝鲜和越南等国。另一方面，印度的笔算、三等数法、三角函数表，也通过佛教，被介绍到我国。亚剌伯的沙盘算法，也可能在此时通过伊斯兰教，间接介绍到我国。

中算极盛时代——宋元时代

宋元时代(1000～1367)，我国数学最为发达。著名数学家有贾宪(1050～1100)、秦九韶、李治(1192～1279)、杨辉、郭守敬(1231

～1316)、朱世杰等人。他们所著的书大部分今天还流传着。

贾宪著有《算法斅古集》两卷。他找出了两项式乘方的系数规律，并且作了图解(图 8)。在西洋，这个图形被称为巴斯噶(Pascal)三角形。巴斯噶的生死年是 1623～1662，比贾宪要晚五百多年，显然也应改称为“贾宪三角形”。

左积　右隅

本 积 ①

商 除 ① ①

平 方 ① ② ①

立 方 ① ③ ③ ①

三 乘 ① ④ ⑥ ④ ①

四 乘 ① ⑤ ⑩ ⑩ ⑤ ①

五 乘 ① ⑥ ⑮ ⑳ ⑮ ⑥ ①

图 8　贾宪三角形图(三角形两斜边上数字均为 1，三角形内部每一数字等于上一列相邻两数字之和。设有两项式 $a+b$，图上第一列表示 $(a+b)^0=1$，第二列表示 $(a+b)^1=a+b$，第三列表示 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，第四列表示 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^2$，……)

秦九韶、李冶、朱世杰等人，都曾深入研究多次方程式，得到很大成就。譬如和涅氏(Horner)法，和涅在 1810 年才论到，而我国秦九韶在他五六百年之前就创造出这个方法了。在世界数学史上，我国的方程式论实在是先进的。

秦九韶在所著的《数书九章》卷五中论到三角形面积的新的求法公式，即 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，在西洋这叫海龙(Heron)公式，就中 a,b,c 为三角形的三边，而 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

杨辉在 1275 年论到“纵横图”(图 9)，还提到制图的方法。

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

图 9 “九九图”(纵横图之一,纵行,横列与对角线各数字相加都是369;而被粗线所分的九个方形,都是小纵横图,在每个小纵横图内,纵行、横列和对角线各数字相加也都相等。)

郭守敬在 1280 年用几何方法,求得球面三角形的两个公式,即

$$\sin a=\sin c\sin A,$$

$$\sin b=\frac{\sin c\cos A}{\sqrt{\sin^2 c\cos^2 A+\cos^2 c}} \qquad \text{(图 10)}$$

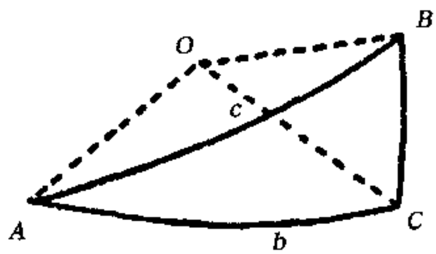


图 10 如图,A,B,C 是球面三角形三顶点,a,b,c 是它们的对边。

朱世杰的级数论,也是当时的创造。

算 盘

明朝中叶新发明的算盘,是我国数学史上另一件大事。算盘不

但可以作加减乘除，而且可以作乘方开方运算。珠算方法深入民间，直到现在还是世界上乐用的计算工具。

从明末起，西洋各种算法开始输入。但这些算法输入时，多不详细说明理由，因此我国数学家就自行研究，加以证明。

结　　语

我国古代人民在数学上的成就，是很丰富很伟大的，以上说的不过是一小部分而已。看到了这样丰富而伟大的民族遗产，使我们更加热爱我们伟大祖国。数学，是祖国社会主义工业化中必不可缺的有力工具。我们要承继我国数学的优秀传统，学习先人精研数学的伟大精神，为提高我国数学水平而奋斗！

中国数学发展情形*

现在说述“中国数学发展情形”。中国有悠久的历史，有悠久的文化，这不是一句空话。不独政治如此，就是各项科学在中国也是如此。毛主席曾说：“中国是世界文明发达最早的国家之一，中国已有了将近四千年的有文字可考的历史。”所以我们需要研究中国数学发展史，因为数学是一门基础性科学，可是以往虽然有不少的科学家和历史家，计划研究中国数学发展的情况，因为此项工作范围广大，任务十分繁重，到现在还是没有成熟，现在报告不周到，和不齐备之处，还希望各方的原谅。

中国数学的历史，暂时分做五期：

第一期：上古　从黄帝到汉初，前 2491～前 100 年，

第二期：中古　从汉初到隋中，前 100～公元 600 年，

第三期：近古　从隋唐到宋元，600～1367，

第四期：近世　从明到清中叶，1367～1750，

第五期：最近世　从清中叶到解放前，1750～1949。

公元以前黄帝以及尧舜禹汤文武的时代，是根据李兆洛《历代纪元编》估计的。在殷墟甲骨文字发现的前后，此项古代纪年的估

---

* 本文原载《数学通报》1955 年第 7 期第 1～9 页，《新华月报》1955 年第 11 期转载。

计，已有了不同的见解。现在为便利起见，还暂时照李兆洛的估计，就是：

黄帝元年庚寅，在公元前 2491 年，距现在约 4500 年；

唐尧元年丙子，在公元前 2145 年；

虞舜元年，在公元前 2042 年；

夏禹元年，在公元前 1889 年；

殷汤癸亥，在公元前 1558 年；

周武王，辛卯灭殷，在公元前 1050 年；

周共和元年庚申，在公元前 841 年；

秦始皇帝元年乙卯，在公元前 246 年；

汉高祖元年，在公元前 206 年；

汉武帝建元，辛丑，在公元前 140 年；

汉太初元年前一年，在公元前 100 年。

就中春秋，战国是在公元前 500 年的前后。

有时我们在数学史上，将远古黄帝起到五代末年，即公元前 2491 年到公元 960 年称做“古代”，以后由北宋开始到现在称做“现代”。这都是为便利研究起见，不十分确定的。

现在先说上古期，就是公元前 2491 年到公元前 100 年，此期最初一段是没有文字，只有根据传说的。最普遍知道根据传说、记录历史故事的作品，是春秋战国时期(公元前 500 年前后)的《世本》一书。这本书唐宋的学者还曾经看过，现在只有辑本①。汉代最著名的历史家司马迁还是根据《世本》一部分的资料来编《史记》。《史记》曾说：“黄帝隶首作数。”在这时期，即上古时期黄帝隶首以外知道算数的，还有伏羲、垂，以及《周髀算经》里所举的周公、商

① 有清秦嘉谟嘉庆二十一年，1816 年，《世本辑补》十卷。

高、荣方、陈子诸人。我们假定估计《周髀算经》是太初元年前一年，即公元前 100 年以前的作品，这就说明距离现在 4500 年前和 2000 年前中间，中华民族已经有了算数的观念、知道算数的应用和明白算数的专家。

我们最先的数学文献是：(一)结绳，(二)规矩，和(三)记数方法。

(一)关于结绳方面，春秋战国时期(即公元前 500 年前后)的学者庄子说："伏羲作结绳。"周代(即公元前 100 年前后)的《易经》在《系辞》里还更具体的说："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契。"这说明结绳制度是文字还没有发明以前的记录工具，直到现在，世界上还有些少数民族，应用结绳来记录，来算数。

(二)另外一种重要的数学工作工具是规和矩。因为用规和矩可以绘成各项的圆和方。汉代的历史家和人民群众在 2000 年前都根据传说，以为伏羲已经应用到规和矩，所以汉武梁祠的造像还绘有："伏羲手执规，女娲手执矩"的图象。现在发现着"伏羲手执规，女娲手执矩"的造象还不止一处。司马迁的《史记》又说，夏禹治水(即在公元前 1889 年)曾应用到规矩。在《史记·夏本纪》原文中说："(禹)陆行乘车，水行乘舟，泥行乘毳(敲)，山行乘檋(音局)；左准绳，右规矩。"春秋战国时期的学者，如墨子、孟子、荀子、庄子、韩非子、尸子都说到规矩。就中墨子还为"圆"下了一个定义，说："圜，一中同长也。"中国最古的算书《周髀算经》、《九章算术》又应用规矩绘制成各种几何形。所以《周髀算经》说："合矩以为方，环矩以为圆。"在这两句话里，我们知道古代对于几何已经有了深切的认识。因为"合矩以为方"是说用两个矩配合起来，可以制成各项大小的方形。"环矩以为圆"是说在某一直线上，所绘成多少正三角形(即勾股形)，它们顶点的轨迹是一个圆周形，因为明了了规矩，所以对

方圆的应用，亦十分明了。在商代（就是公元前1500年前后）白陶器图案，就大半是几何图案①。到汉代还应用几何图案到砖瓦上。现在还发现有不少的例子，这证明古代对规矩和方圆的广泛应用。

（三）是记数的方法。记数方法，古代和现在一样，有整数，有分数，有诸等数。最初时期由结绳进展到书契，记录比较简单，都是累积起来。少的从一到四，到五（一，二，三，亖，㐅），以及十一到十三（丅，〒，亍），和二十，三十，四十（卄，卅，卌），是累积的。这在殷甲骨文，以及周秦时期的金文（即铜铁器用品上的文字）上，都可以看到。后来在一以下，和一以上都有专名，如一以下有：小，半，大；一以上由二，三，四，五，六，七，八，九到十，再十进到百，到千，到万，到亿都有专名，其中十十到百，以及十万到亿都是十进。在古代对于分数，特别是单分数（即以分子为1，分母为某数的分数）的应用，尤为广泛。在春秋《左传》隐公年条，有一段故事说：封地的都城不要过大。并说明“大都不过三国之一，中五之一，小九之一”是古来的制度，过大，便不合制度。在这里大三分之一，小九分之一，中五分之一，是说明如$\frac{1}{3}$是大数，$\frac{1}{9}$便是小数，$\frac{1}{5}$是中数，即大小数中间的数，或$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{9}$的平均数。这平均数本来是$\frac{2}{9}$，也可以写成$\frac{1}{4.5}$，因为用“四舍五入”的原则，所以写成$\frac{1}{5}$，即：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}=\frac{1}{4.5}\doteq\frac{1}{5}。$$

这里又说明古代整数之外，分数多用单分数。计算方面亦知道应用“四舍五入”的方法。另外还有诸等数记数的方法，如二十四铢为两，十六两为斤。地亩的亩最先是一百（方）步叫做亩，后来是二百

① 见陈田之佛，吴山：《中国图案参考资料》（1953年）。

四十(方)步叫做亩。

古代中国数学相当有成就,有他的历史背景,并不是偶然的。第一因为曾在基础做起。古代在小学里,就注意数学教育,这事实是十分明显的。因为古代书籍《礼记》、《白虎通》,以及后来的《前汉书》都已说过。《前汉书》记周代教育制度说:“八岁入小学,学六甲,五方,书计之事。”八岁入小学的规定,是和现在一样,六甲是配合甲乙丙丁戊……等十甲,和子丑寅卯……等十二辰的单字,组成六十甲子的专名,以便记录年月日。学习书计之内,计是计算,就是基础的计算方法。学习基础计算方法之内,学习九九自然是其中步骤之一。所以我们现在还可以看到古代九九表,和九九的记录。在春秋战国时代(即公元前 500 年前后)的九九表记录,我们可以在《荀子》、《管子》,和《淮南子》各书上,零零碎碎的看到。比较具体的是敦煌和居延汉简上的九九乘法表。这里九九表,由九九记到二二,还包括着演习加法的步骤。以后在敦煌千佛洞里还发现写本的《立成算经》,也是由九九开始,还参加着加法的演习。

第二因为政治和历法是需要数学,古代中国政治和历法都相当需要数学,说中国历法和数学有关的书是《周髀算经》,说中国政治和数学有关的书是《九章算术》。

现在先说《周髀算经》。《周髀算经》全书暂分做三个阶段,其中周公商高问答部分是第一阶段,这是《周髀》的本文,以后记录荣方陈子问答部分是第二阶段,这是《周髀》的注文。其中说到“昔者荣方问陈子”,这说明不是注文,是注文的注文;又在下卷里,因为有和《前汉书·律历志》元封七年(即太初元年,公元前 104 年)“日月在建星”相同的记载,就是《周髀算经》曾同样的说,“日主昼,月主夜,昼夜为一日,日月俱起建星。”所以有人建议暂定《周髀算经》是公元前 100 年左右的作品,这是合理的。数学方面,除普通运算外,

《周髀算经》还说到等差级数,还说到相似正三角形(即勾股形)的应用。

其次是《九章算术》。《周髀算经》和《九章算术》现在所流传的都不是原来的书籍,都经后人的修改和补充过。在《周髀算经》的同时,或可能在《周髀算经》时期先已有《九章算术》,现在还不能确定。因为现在流传的《周髀算经》,在卷上之二有"陈子曰:……此皆'算术'之所及"的话。此外《前汉书·律历志》说:"数者一十百千万也,其法在'算术',宣于天下。"这两处所说的"算术"有人以为就是原始的《九章算术》。又因为周公是当时的政治家,是需要算术的,同时因为《礼记》有"周公作九数"的记载,便以为《九章算术》是周公所做的。还留有"周公作九章之法,以教天下"的传说。后来《九章算术》经魏刘徽(在公元 263 年)编注,变成比较确定的定本。原始的《九章算术》至少是和《周髀算经》同时,即公元前 100 年前后的作品。并且无论如何是当时政治家所需要的算学书,是没有疑问的。我们现在在所流传的《九章算术》里面已经知道算术中的整数、分数、诸等数的四则算法;比例、级数、开平方、开立方以及普通平面、立体形的计算,都已有详细的说明。

总结起来,中国在公元前 500 年,即春秋战国时代,对算学已经有丰富的知识,所以在当时诸子百家的著作里,特别是《墨子》、《管子》,可以看到此项史料。以后在公元前 100 年前后,另有关于政治和历法的专门著作。

不过古代是用什么方法来计算,用什么工具来计算呢?上面已经说过,远古用结绳,后来用契刻来记数。人人知道世界上有笔算,有珠算,中世纪还有土盘算法。在中国古代是另用盈握的筹码来做计算的工具。如用一个直的筹来代表一,用二个直的筹来代表二,……逐次如此,配合十进位的方法,和一纵十横的原则,累积起来,

各项数值都可以一一表示出来，还可以抄录在纸上，如 378 作|||丄Ⅲ，264 作||⊥||||。以后宋元时代天元算法的算稿内数字，还是如此表演的。我们在宋沈立的《河防通议》(约公元 1000 年)还可以看到此类的算稿，此项记数用的算筹，以前是比较长，以后逐渐减短，以前是不分正负，以后曾分做正负。此项用筹来计算的方法，直到公元 1400 年前后，珠算发明之后，和 1600 年前后西洋笔算输入之后，方不用它。不过旧算书上，至今还留有此项的记录，所以研究中算史的人，还要知道它才好。

第二期是中古时期，是公元前 100 年到公元 600 年中间 700 年的数学史时期。这时期因为中国文字记录资料比较多，所以知道中古时期数学成就的情形也比较清楚。此时期的重要大事是：(一)《九章算术》的整理；(二)圆周率的创造；(三)几何学的应用；(四)《算经十书》的编定。

(一)《九章算术》的整理：我们上面已经说过，《九章算术》是周秦时代政治家所创造的数学书。所以随时配合当时的需要，须加以修订和补充的。刘徽在注《九章算术》的序文时(公元 263 年)也说：

> 周公制礼而有九数，九数之流则《九章》是矣。往昔暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍，大司农中丞耿寿昌，皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补，故校其目，则与古或异，而所论者多近语也。

现在我们在居延汉简里，可以看到《九章算术》"粟米章"的残片。我们又在汉魏之后各著述家所引《九章》条目和文句，也看到有和现在宋本《九章算术》多少不同之处。不过汉以后，特别是魏刘徽编注之后，是没有大变动的。

本来汉朝即公元前 200 年到公元 200 年，中间约 400 年，算术

是十分需要，工作的人也比较发达。不独有许多数学家，从张苍、耿寿昌、许商、杜忠、尹咸、刘歆、张衡、刘洪、马续、郑玄、蔡邕，到赵爽（赵君卿）、徐岳至少十二三人，还有他们的数学著作，如史书所载，《杜忠算术》、《许商算术》。许商不独是数学家，还是水利专家。“算术”是当时数学的专名，比现在初学所指的“算术”范围还要大些，因为《九章算术》经刘徽编注之后，没有重大的变动，所以还保存到现在。现在先介绍《九章算术》的内容。

宋本《九章算术》共有九章。它的次序是 1. 方田，2. 粟米，3. 衰分，4. 少广，5. 商功，6. 均输，7. 盈朒，8. 方程，9. 勾股。九章之中，第一章“方田”是讲田地面积的计算，所有平面几何形的计算，都是正确的。第二章“粟米”是讲比例问题的计算。第三章“衰分”是讨论如何分配的计算。第四章“少广”是说开平方，开立方的计算方法。第五章“商功”是讲立体几何形，所有立体几何形的计算，也是正确的。第六章 “均输”是讨论运输的计算。第七章“盈朒”即盈不足，是用测验的方法，解决某些问题的近似数值。第八章“方程”是用直接的方法，解决某些问题的直接数值；特别是说明联立一次方程的计算。第九章“勾股”是讨论勾股形即正三角形的公理和应用。以上所有各章都是用提出题问加以解答的方法。应用的人遇有某些问题，可以按原来所举题问解决方法，如法解决，这是古代“算术”工作的步骤。

因为《九章算术》的整理，便引起了某些问题的重视，其中：

(1)特别是整数和分数四则的计算，以及比例、开平方、开立方的计算步骤。这在《九章算术》里都分别举例说过。其次是方程的计算，因为古代是用筹计算，如计算某些联立方程，将已知各数排列成正方或长方形式，叫做“方程”。如算平方是预先布置实（被开平方数），法（一次项系数）和借算（平方数的系数，1）三层。又算立

方是预先布置实(被开立方数),法(一次项数),中行(二次项系数)和借算(立方数的系数,1)四层。后来就在预先布置的三层或四层的程式上,逐步推算,改撰各层的数目,最后得到所求开平方、开立方的数字。明了古法开平方、开立方的计算步骤,所以计算二次方程、三次方程亦不为难。勾股一章内就有二次方程问题,也用这个方法求得二次方程的正根。后来隋唐宋元时期即第三期(600~1367),中国数学家就按相同的步骤来解决高次方程。高次方程以外和上面同时的还有《孙子算经》(《算经十书》之一),说到不定方程,《张丘建算经》(亦《算经十书》之一)又说明某些方程可以一问数答。

(2)各项几何形证明的步骤。因为正常的几何形计算,在《九章算术》是已经说过。不过还有正三角形(即勾股形)本身和有关的各项公理,此时方加补充。至于进行的步骤,在《周髀算经》赵爽(赵君卿)勾股方圆图注,就将几何形互相移补,各分段加以朱、青、黄诸色,以便"出入相补,各从其类",从此几何形各题的证法,有了正确的步骤。刘徽证《九章算术》内平面和立体各形,就用这步骤。此外又注意到正三角形内容圆周形的径和三边的关系。再次则注意到圆内容和圆外切各正多边形各边和圆径的关系。如圆内容多边形或圆外切各正多边形暂时未能贴切到圆周,则多边形各角尖和圆周中间的空隙之处,分别称做"朓旁"和"减旁"。以上各值都可算出。

(二)圆周率的创造:此期第二大事是圆周率的创造,因在《周髀算经》时期,以为圆周和直径的比率是3,即$\pi=3$。到此时已觉得不合实际,就发动另行计算,所得结果,如:

刘歆(? ~23),$\pi=3.1547$;

张衡(78～139),$\pi=\sqrt{10}=3.16$ 和$\frac{92}{29}=3.17$;

蔡邕(133～192),$\pi>\frac{25}{8}=3.125$;

王蕃(219～257),$\pi=\frac{142}{45}=3.155$;

刘徽(公元 263 年),$\pi=\frac{157}{50}=3.14$ 和 $\pi=3.141$;

皮延宗(公元 445 年),π 未详。

各人所制的圆周率,确实都已算好第二位,因为此时各数学家已明了圆内容和圆外切各正多边形各边和径的关系。刘徽以为圆内容正多边形,边数愈多,愈和圆周密合贴切。所以先由圆内容 6 边形起算,再算内容 12 边形,24,48,96 各边形,算到内容 96 边形,便已经知道 $\pi=3.14\frac{64}{125}$,为计算便利起见,命 $\pi=3.14$ 来入算。刘徽的方法,是十分科学化的,以后中国和世界的数学家都按同样的理论,来做圆周率的计算。

在这时期,最有成就的,要推南北朝宋代的祖冲之(429～500)。祖冲之通晓天文学,曾和当时的历算家讨论历法。冲之在初年先研究《九章算术》和刘徽一样,也注过《九章算术》,并且按刘徽的步骤逐步推演,算得较精密的圆周率。据史书所载,祖冲之圆周率,如:圆径一亿为一丈。

圆周盈数是三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽;

圆周朒数是三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽;

正数在盈朒二限之间。

如译为现在的记录,则

$$3.1415926<\pi<3.1415927。$$

可是为当时计算便利起见多用分数来登记,所以:

张衡圆率：$\pi=\frac{92}{29}$；

蔡邕圆率：$\pi<\frac{25}{8}$；

王蕃圆率：$\pi=\frac{142}{45}$；

刘徽圆率：$\pi=\frac{157}{50}$。

到中古的末期，还是如此。所以此时何承天(370～447)算出 $\pi=3.1428$ 后，同时又以 $\pi=\frac{22}{7}$ 入算。祖冲之为应当时的需要，也将所算得的圆周率改用分数来登记，取两个分数，一为 $\pi=\frac{22}{7}$ 称为"约率"，一为 $\pi=\frac{355}{113}$ 称为"密率"。此项 $\pi=\frac{22}{7}$ 的记录，在当时何承天已有相同之例，以 $\pi=\frac{22}{7}$ 入算。至 $\pi=\frac{355}{113}$ 则较德人 V. Otto1573 年的计算早一千年。史官又记祖冲之是："又设开差幂，开差立，……所著之书，名为《缀术》。"此项开差幂，开差立，究为何事，《缀术》究为何书。现在还不确定。不过其中开差幂，开差立，可能是当时的招差方法，稍后则刘焯曾以此方法来算公元 600 年的《皇极历》。其中分数的圆周率又可能是用当时的调日法算出的。

(三)几何学的应用：本来几何学的应用，在此期的初期上是十分成功的。如《九章算术》所记平面立体几何形的计算也十分合理。在此时期即中古期应用更为广大。张衡(78～139)《灵宪》也说几何[①]。其中可以作为代表的是刘徽介绍的重差术，和祖暅之创造的圆球体积的计算。本来注释《周髀算经》初期已经应用了相似三角形来计算，到刘徽注释《九章算术》时期已认为不够运用。就另造

① 洪颐煊，《经典集林》卷二十六：张衡《灵宪》一卷条下注称："用重差，勾股。"

"重差术",以便度高,测远,测深。这是现在所传的《海岛算经》,其次是祖暅之创造的圆球体积的计算(计算得 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,r=圆球半径)。关于重差术和圆球形体积的计算,都得力于几何学的修养。因为古代中华民族对几何学还有相当修养,所以在平面和在立体上,有这两项创造,也不是偶然的。详细方法,另有专文介绍,这里不再详说。

(四)《算经十书》的编定:以往算学范围较小,又没有专校培养,专门书籍教授,在第二期末期已感不便。所以在第二期末期最大事实,是各算书的编定。最初国内只有《周髀算经》和《九章算术》。到本期公私方面,另外都有著述。而流传较广的除《周髀算经》和《九章算术》外,还有《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、徐岳《数术纪遗》、董泉《三等数》,以及刘徽的《重差》术(即后来的《海岛算经》)、甄鸾的《五经算术》。甄鸾在南北朝梁朝(即公元 535 年)即做算经校订的工作。

上述各算书和算经,史书内并记明是甄鸾撰或注,这无疑是由甄鸾编定的,这作为后来第三期唐李淳风撰注《算经十书》的前身。

第三期即近古期,由公元 600 年到公元 1367 年是中算全盛时期。此期本来有充分的史迹,在期初印度文化随着佛教输入,在期末波斯、阿拉伯文化随着伊斯兰教输入,因为史料流传较少,还不能明白它的全部情形。现在先举几个大事来说:(一)王孝通的研究成就;(二)数学教育制度;(三)佛教和伊斯兰教文化的输入;(四)中国文化输入日本朝鲜;(五)宋金元数学的发展。

(一)王孝通的研究成就:在这初期最有成就的当推王孝通。王孝通在公元 619～626 年曾经参与讨论历法。他在所著《缉古算

经》上，用以往不同的方法来证述立体形的体积。例如仰观台(即角锥平截体)是由1个正方柱，1个长方柱，4个小角锥，4个半长方柱所组成，最后还列成三次方程，以便入算。《缉古算经》在当时即被重视，所以在公元656年即作为数学教科书之一，学校之中第二组专习《缀术》和《缉古》。就中七年学期，《缀术》限习四年，《缉古》限习三年。

(二)数学教育制度：数学教育在隋朝已经开始，唐代由公元600年到公元900年三百年中建都长安。公元628年开始设学办理专门教育事业，一面审定教科书以供应用。在公元656年始由李淳风领导审查《算经十书》共二十卷，公元680年李淳风注成《算经十书》二十卷。这是公家审定的教科书，以后各期办理算学教育，都用此项教科书，现在我们在宋本《算经十书》内还可以看到李淳风的注文。李淳风当时是收集过去前人注释的资料加以整理。李淳风所撰注的《算经十书》，是：

1.《九章》； 2.《海岛》； 3.《孙子》； 4.《五曹》； 5.《张丘建》； 6.《夏侯阳》； 7.《周髀》； 8.《五经算》； 9.《缉古》； 10.《缀术》。

另附 徐岳：《数术纪遗》；董泉：《三等数》。

上述各书由《九章》到《五经算》等八书为一组，另《缀术》、《缉古》二书为一组，都分七年学习。其中第一组：1.《九章》和2.《海岛》共学三年；3.《孙子》，4.《五曹》共一年；5.《张丘建》，6.《夏侯阳》各一年；7.《周髀》，8.《五经算》共一年。又第二组：9.《缀术》学四年；10.《缉古》学三年。一面兼习《纪遗》和《三等数》。考试时期亦大体按学习的比例分配。如十题之中第一组《九章》三帖，其余《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》各一帖，又第二组《缀术》六帖，《缉古》四帖。

算学教育制度到唐末因政治不良，已经停顿。直到宋元丰六年(1083 年)才开始设置算学。此时《缀术》一书，已经散失，因此就不分组学习，为便利学习起见，在元丰七年(1084 年)，由秘书省传刻过去已审定的算学教科书，计有十种，即：

1.《九章》； 2.《海岛》； 3.《孙子》； 4.《五曹》； 5.《张丘建》； 6.《夏侯阳》； 7.《周髀》； 8.《五经算》； 9.《缉古》； 10.《记遗》。

学校之中逐月都有考试，这是第二期公家对算学教育的情形。同时民间劳动民众，研究更有成就。上述十书之外，还有载在史书上，现在看不到的；还有未载在史书上，现在还可以看到的。譬如现在我们还在敦煌千佛洞里，发现算书、算表共六份，实际是四种，即：(一)《算书》，(二)《算表》，(三)《算经》一卷并序，(四)《立成算经》一卷。就中(二)《算表》，记明是公元 952 年的写本，地亩广和长在六十步以下是已知，检表便可得到亩数，(三)《算经》一卷并序，存有均田法第一，某某部第六，营造部第七，某某部第九各章，也是如以前《九章算术》之例，系应当时社会需要写成的。

(三)佛教和伊斯兰教文化的输入：在此时期，即唐宋时期，也可以说公元 600 年到 1367 年的七百余年间，因为佛教输入，同时也输入些算学文献，在开元六年(公元 718 年)瞿昙悉达译的《开元占经》内"算法字样"条，书明一字到九字各阿拉伯数字，又附注说："右天竺算法，用上件九个字乘除，其字皆一举扎而成，九数至十，进入前位，每空位处，恒安一点，有间咸记，无由辄错，运算便眼。"这是阿拉伯数字和笔算方法的输入。在《开元占经》里还介绍有"三角函数表"，它的方法，是先算定圆径是 3438，作为总分母，以后

$$\sin 15^\circ=\frac{890}{3438}(=0.26887),$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1719}{3438}(=0.50000),$$

$$\sin 45^\circ=\frac{2431}{3438}(=0.70710),$$

$$\sin 60^\circ=\frac{2978}{3438}(=0.86620),$$

$$\sin 75^\circ=\frac{3321}{3438}(=0.96596),$$

$$\sin 90^\circ=\frac{3438}{3438}(=1.00000)。$$

同时还输入三等数法。因中国以前用十进法，到此时便参用倍进法。如以前以十万为亿，此时另作万万为亿的记数。又以前专用筹算法，此时又认识到笔算法。这些都是同佛教一齐输入的结果。

其次是宋代末期伊斯兰教附带输入的算学。此期最为明确的，是土盘算法。其法以沙代纸，用沙土散在地面或盘上，以竹签或铁签书写。这方法先为印度算学家所用，流传到阿拉伯，更为伊斯兰教徒所采用，因而世守其法。回回历法传入中国的时期，土盘算法也连带输入。《大明会典》亦说："回回……子弟仍世其业，以本国土板历相兼推算。"所谓"土板历"即用土板盘推算的历法。

（四）中国文化输入日本、朝鲜：古代东亚各国和中国最有关系的，要算日本和朝鲜，中日史书都载 600～608 年中间中国日本已开始交通。在 701～703 年日本也开始确定数学教育制度。又设立学校，教授和考试算学。所采《算经十书》，是：

1.《九章》；2.《海岛》；3.《孙子》；4.《五曹》；7.《周髀》；8.《五经算》；10.《缀术》；

5.《六章》；6.《三开重差》；9.《九司》。

此时日本是用《六章》、《三开重差》和《九司》来代替《夏侯阳》、《张丘建》和《缉古》。不过在 889～897 年《日本国见在书目》还记有

夏侯阳、张丘建的《算经》,到现在还流传有公元970年所写"《口游》一书有和中国《孙子算经》相同的文句。

在朝鲜方面,在1000年前后,就是918～1392年的王氏高丽王朝时代,朝鲜也和中国交通,并在国立学校里设置算学一科,也和中国一样采取考试的方法。

(五)宋金元数学的发展:在这时期,就是说在600～1367年数学的发展情况。此时宋金元数学家是最有成绩,其中最特出的是天元术的创造。由于天元术的创造,而演变到四元(即四未知数),一面因演算的需要,发现和巴斯噶三角形(Pascal's triangle, 1654年)以及和涅氏方法(Horner's method, 1819年)相同方式的方程计算,中算家时代则较后者各早数百年。因杨辉介绍与巴斯噶三角形相同的方法是在1261年的书内,较后者(1654～1261)早390年。又秦九韶应用与和涅氏相同的方法,是在1247年。较后者(1819～1247)也早570年。

此期最特出的数学家,是秦九韶、李治、杨辉、郭守敬、朱世杰各人。就中:

秦九韶著有《数书九章》18卷(1247年);

李治有《测圆海镜》12卷(1248年),

　　《益古演段》3卷(1259年);

杨辉著有《详解九章算法》12卷(1261年),

　　《详解算法》若干卷,

　　《日用算法》2卷(1262年),

　　《杨辉算法》7卷(1274～1275);

郭守敬有《授时历》24卷(1231～1316);

朱世杰有《算学启蒙》3卷(1299年),

　　《四元玉鉴》3卷(1303年)。

都应用上述天元和四元的方法作演习。

由于上开资料，归纳言之，我们知道秦九韶的《数书九章》(1247年)内“大衍求一术”是用和欧几里得算法(Enclid Algorithm)相同的方式来演算，又已知道三角形的三边，如为已知。则求三角形面积，也用和海伦公式(Heron's formula)相同的术式来计算。

此期算家又已知各项垛积、招差、级数都可归纳到方程论里面。关于几何方面，在《测圆海镜》内有各项正三角形圆内容和圆外切的各项疑问。在割圆论方面有弧矢论、会圆术、平面割圆术、球面割圆术等基础理论，由此证明祖冲之圆周率的正确性，再算出球面三角形上的正弦公式。

第四期近世期由明到清中叶，即1367～1750年中间。此期由于民众需要，有数量较多的通俗算术书在市上流通。在此时期最重要的工作是算盘的发明，而算盘的妙处在于歌诀的运用。此项歌诀，最先是杨辉的“九归新括”(1274年)，其次是朱世杰的“九归诀”(1299年)，后来贾亨、丁巨(1355年)、安止斋，更说到“撞归”，并说明撞归的运用，以后算盘也照同样的方法运算。算盘的发明既如此重要，可是它的发明日期还不能确定。以往都以为是程大位写《算法统宗》(1592年)时才发明的。我们现在可以证实不是程大位写《算法统宗》时才发明的。在先些时算盘确已流传。我们举几个例来证。第一，在他一百年前吴敬著《九章比类算法》(1450年)曾说到算盘，同时马欢到过南洋，著有《瀛涯胜览》一书(1451年)曾说到古里国没有算盘；第二，在日本曾发现过汪讱庵重订的《指明算法》二卷，未记年月，其中详细说到算盘形式，可是原有的夏源泽《指明算法》二卷，是在1439年著的，现在还没有见到，如汪讱庵是

重订夏源泽的书，则在1439年，即吴敬1450年之前，中国已经有了算盘，并且是在程大位（1592年）之前150年了。

近世期的第二大事是西算的输入。中国本来在近古初期由印度经佛教输入算数方法，又在近古末期由波斯阿拉伯经伊斯兰教输入历法，就沿用着他的历法，称为回回历法。经过久远的区间，回回历法所测天象亦和实际不符合，以明末为尤甚。正在此时，即1581年天主教徒利玛窦来到中国，先住在广州的香山澳，到1601年正式入北京。同时天主教士到北京的还有数人。到1606年利玛窦和徐光启共译《几何原本》前六卷。这是近世期正式输入的第一部西法算书。同时和徐光启共同学算的还有李之藻、李天经、孙元化各人。所以利玛窦在译完《几何原本》之后，还和徐光启、李之藻共同编译《同文算指》（1613年），在此中输入笔算方法。又和徐光启共编《测量法义》、《测量异同》、《勾股义》各书（未记年月），又和李之藻共编《圜容较义》（1609年）一书。利玛窦于1610年死去，可是此时来中国的已不止利玛窦一人，所以利玛窦虽死去，他的工作还继续着，不过在崇祯末年，即1620年前后，中国各地农民已经起义，满族在满洲亦开始向内地活动。大炮火器当时尚十分需要，亦有一些人计划采用外来火器，所以当时译书或编译亦不限于算学或天文历学。到1629年明廷决定正式开局修历，此时利玛窦已经死去（1610年）。徐光启、李之藻、李天经就会同当时来华的西教士汤若望、龙华民、邓玉函各人共同修历并编历书。到明亡为止（1643年）共完成《崇祯历书》137卷。满清入关之后，继续修订历法，到1645年，修订以前《崇祯历书》，编成《新法历书》100卷，公布。以后还收入《四库全书》之内。

可是在此时期曾经有过新旧的争执，而当时输入的算法和历法，除笔算外又多不说明理由，特别是对数术、平面及球面三角术

以及割圆术，都是如此。因此清初在朝在野人士都感有深入研究西来算法的必要。清圣祖爱新觉罗玄烨（1654～1722）自己研究算数，并请西洋教士入宫以满语教授算法，并将此项讲义写成满文，现在故宫博物院图书馆还可以看到此项图书的原本。到康熙末年即 1714～1723 年又编辑《律历渊源》100 卷，其中《数理精蕴》则专论算数，并介绍代数学（即借根法或阿尔热巴拉）。

此时不独国家决定采用西洋历法，即在民众中间，亦有多数人士，热心学习算法。其最有成就的当推薛凤祚（？～1680）、明安图、年希尧的研究割圆、对数和平弧三角术。梅文鼎（1633～1721）、梅瑴成（1681～1763）的整理西算。就中明安图介绍杜德美（1668～1720）以级数记录的圜径求周、弧背求正弦、弧背求正矢的三法以及他自创的六术，共称杜氏（割圜）九术，亦由明安图一一加以几何证明。此外薛凤祚介绍穆尼阁输入的对数，年希尧对于三角术此时都有初步的说明，这是第一期。

最近世期是 1750～1949 年。此时期中国数学进展有和以前各期不同之处。因此期一面输入外来文化，一面整理旧有文化。外来文化在明末清初输入之后，还源源输入，可是没有次序。其中对九九加减术、对数术、三角术、三角函数表、割圆术以及圆锥曲线的成就，都少说明。所以在前期即近世期末叶就有人自行做研究工作，所成就的还不过大，此期再继续研究。

其次是古代算书，就是《算经十书》和宋金元中算家的重要数学书，以及官书如《数理精蕴》，都在此期流传到民众的各方面。就中《算经十书》在 1774～1783 年编《四库全书》时已经编入，并且还用聚珍版印刷流传。其余宋、金、元中算家算书：

李治　《测圆海镜》12 卷（1248 年）四库本，

李冶 《益古演段》3 卷(1259 年)四库本，

于 1797～1798 年刻入《知不足斋丛书》中；

朱世杰 《四元玉鉴》3 卷(1303 年)，

朱世杰 《算学启蒙》3 卷(1299 年)，

于 1836～1839 年由罗士琳校刻入《观我生室汇稿》中；

秦九韶 《数书九章》18 卷(1247 年)，

杨辉 《杨辉算法》7 卷(1274～1275)，

于 1840 年刻入《宜稼堂丛书》中。

为着整理中西算，因而引起中算家研究的热诚，在此时期中算家在平方零约术、整数术、演段和测圆术、方程论、招差术、对数解都有相当贡献。而代表人物。则王锡阐(1628～1682)、梅文鼎(1633～1721)之外，尚有陈世仁(1676～1722)、孔广森(1752～1786)、焦循(1763～1820)、汪莱(1768～1813)、李锐(1773～1817)、罗士琳(1789～1853)、项名达(1789～1850)、董祐诚(1791～1823)、徐有壬(1800～1850)、戴煦(1805～1860)以及李善兰(1811～1882)、华蘅芳(1833～1902)诸人。就中梅文鼎的总较法，安清翘(1759～1830)的五分一弧计算，汪莱的组合方法，项名达的椭圆周术，李善兰的尖锥术、数论，邹伯奇(1819～1869)的重心术和夏鸾翔(1823～1864)的致曲术，都有贡献。

在最近世期内其中较重要的还有一事，即微积分学的译出。李善兰和伟烈亚力于 1859 年译《代微积拾级》18 卷，是微积分学译成中文的第一本。自此中算家可以开始讨论世界性的数学问题。一方面，学校和民众亦都注重数学教育，多数读者可以直接阅读世界各国文字的科学图书，中国数学也已成为世界化。

可是中国数学史的研究，还未成熟。因以往由阮元(1764～1849)以后到 1900 年，即在 1799～1898 年前后 100 年，虽有过《畴

人传》的撰述，先后成书七十一卷，记录六十余万言，引用图书四百余种。又最近四十年来各杂志关于此项论文统计亦有350篇，共约四百万余言。

以后拟将过去已研究过的中国数学史情形，作为参考。例如已征得的资料，即可不必再费力征求，未征得的或不完全的，希望尽量修订和补充，使此项工作及早成熟。

再谈中国数学发展情形*

我们认为中国的数学文化是从黄帝时代开始的，即在公元前2491年左右开始的。这时文字虽还没有完全形成，可是已经开始对形有了认识。中国原始的文化称做龙山文化或黑陶文化，大概是在公元前2000年，这是新石器时代的晚期。

近年来所发现的这个时期的陶器有着各种几何图案。1953年在安徽灵璧县蒋庙村和浙江嘉兴县双桥的新石器时代遗址，都发现有几何图案的陶片，如双桥有方格、米字、椒眼、回字和席纹等图案①。稍后，考古学家在安阳发掘出来的殷代的车轴上，就看到画着五边形，九边形的几何图形的装饰②。

自殷代文化开始的初期，到周代金文发达的时期，我们可以在殷墟甲骨文和周代金文里面看到：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十以及十进到百、千、万的数字，并且象形文字之内如"二千"作"手"，"四千"作"手"，"五千"作"手"，还存在着象形结绳的形迹。

---

* 本文原题《中国数学发展情形(续)》，载《数学通报》1956年第5期 第1～11页。

① 见党华，《浙江嘉兴双桥发现的石器时代遗址》，《考古通讯》，1951年5期，科学出版社出版，第24页。

② 见陈述彭，《我国古代科学家在测绘史上的历史荣誉》，测绘通报，1955年一卷二期，第34页。

最先的数学工具是规和矩，这一点我们现在已经知道的。在(一)汉武梁祠造象，(二)汉规矩砖，(三)东汉石刻，(四)及(五)高昌墓室绘画上，都有规和矩的图形；近年(六)山东沂南汉墓也有规和矩的绘画[①]；又(七)吐鲁番发现的绢画上，同样也绘有伏羲手执矩，女娲手执规的图象[②]。可见此项工具，在古代的社会上已经广泛的应用着。

《史记》卷二《夏本纪》记录禹治水，因为需要工具较多所以有"左准绳"、"右规矩"的记载，准是测水平的工具，而绳是测垂直的工具；规用以画圆，矩用以画方。先秦哲学家对数学也有着相当的认识。总之约在公元前一世纪《九章算术》完成的时期，人民已经知道算术四则运算、田亩的面积计算和九九乘法表。这个时期数学是随着实际的需要而发展。在工艺方面印有一本《考工记》。此外还有实物流传下来，除陶器图案以外，金属器具更十分整齐。以后还制有度量衡标准器具，如秦商鞅量(公元前 229 年)、王莽铜斛(公元 9 年)等。

§1. 从上古到宋元

关于古代数学，我们先来谈上古(前 2491～前 100 年)、中古(前 100～600)和近古(600～1367)三部分，即先谈由上古到宋元这个时期。古代数学书籍，多半散失，流传到现在的是《算经十书》，即：

《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《数术记遗》、《五曹算

① 见《文物参考资料》，1954 年 8 月，第 40 页。

② 黄文弼，《吐鲁番考古记》，1954 年 4 月，北京，图版 59，图 61。

经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《海岛算经》，和宋元时代一些算书，如：

秦九韶：《数书九章》18 卷（1247 年），

李　治：《测圆海镜》12 卷（1248 年），

李　治：《益古演段》3 卷（1259 年），

杨　辉：《杨辉算法》7 卷和其他（1261～1275），

朱世杰：《算学启蒙》3 卷（1299 年）。

朱世杰：《四元玉鉴》3 卷（1303 年），

郭守敬：《授时历》（1231～1316）。

古代数学家中比较杰出的是赵君卿、刘徽（公元 263 年）、祖冲之（429～500）、祖暅、王孝通和李淳风等人。汉赵君卿注有《周髀算经》，魏刘徽注有《九章算术》（公元 263 年），南北朝宋祖冲之曾发现 $\pi=3.1415926\sim3.1415927$；祖暅计算出球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，r 表球半径；唐王孝通在所著《缉古算经》上说明仰观台（即角锥平截体）是由 1 个正方柱、1 个长方柱、4 个小角锥、4 个半长方柱所组成；唐李淳风注《算经十书》后，《算经十书》才有定本；到宋元两代，秦九韶（1247 年）、李治（1248～1259）、杨辉（1261～1275）、朱世杰（1299～1303）、郭守敬等人贡献尤为伟大。此外古代历算家对于数学也有不少贡献，他们的成绩，都散在史书和其他书籍里面。

关于古代数学，现在分几点来说明：

(1)分数的应用：中国古代应用分数的例子到处可以看到，除《九章算术》和各算经之外，我们还知道秦始皇时期《颛顼历》（公元前 246 年），拟定一年的日数是 $365\frac{1}{4}$ 天，因而叫做四分历法。又拟定一年的月数是 $12\frac{7}{19}$ 月，这样十九年便多一个月，这就是十九年

七闰的方法。因此每月的平均日数是：

$$365\frac{1}{4}\div 12\frac{7}{19}=\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}=\frac{1461}{235}\times\frac{19}{4}$$

$$=\frac{27759(\text{周天})}{940(\text{日法})}=29\frac{499}{940}\text{天。}$$

从这个例子可以看到带分数除法的步骤。后来《皇极历》(公元600年)把这个步骤称做“法乘而又法除”，实际在《颛顼历》(公元前246年)已先有例子了。

关于分数加法和减法，古代已经知道应用公分母来计算，如

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{3\times4-2\times5}{15(=3\times5)}=\frac{2}{15}\text{。}$$

这方法在算术和历书方面，叫做“齐同术”。在计算分数加减法时，分母已不是盲目互乘，而是应用“最小公倍数”来计算。如《九章算术》卷一有一题，指出$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=2\frac{43}{60(\text{一最小公倍数})}$。古代又说明分数和整数的关系，如$\frac{3}{5}=1-\frac{2}{5}$，其中$2=5-3$，在李业兴《兴和历》(公元540年)里，曾有下面的计算：

$$\frac{67117(\text{会余})}{208530(\text{日法})}=1-\frac{141413(\text{会虚}=208530-67117)}{208530(\text{日法})},$$

这就是一个例子。

关于分数的应用，还有一个例子，就是可以求另外一个分数作为原有分数的近似值。前汉邓平、刘歆嫌《颛顼历》算出每月的平均日数是$29\frac{499}{940}$，因为分母940数值太大，就另外拟了一个近似分母$=81$，从而算出分子$43\doteq18\times\frac{499}{940}$①。因此改定每月的平均日数是

---

① 在《宋书》卷十一，计算十二律时，亦先拟“近似分母”。

$29\frac{43}{81}$。这样，他们创造《太初历》(公元前104年)和《三统历》(公元前7年)，这在历法中称为“八十一分法”。

古代分数上的分子、分母不列在一起，有“不著母”和“分母寄左”的记法。到宋代秦九韶《数书九章》(1247年)里才有一个例子，将分数记出，如将乳香 $3056\frac{1}{4}$ 斤，写成

三 0 𝍤 𝍮

子 𝍠

母 𝍣。

后来元刘瑾在所著《律吕成书》中①

将　　1 1 3 1 4 2 8 5 7 1 4 $\frac{2}{7}$ 写成：

𝍠 𝍩 𝍢 𝍩 𝍣 𝍪 𝍧 𝍭 𝍦 𝍩 𝍣

百 十 亿 千 百 十 万 千 百 十 忽 𝍯 𝍡

又将　　1 0 6 3 6 8. 6 3 1 2 写成：

𝍠 口 𝍮 𝍢 𝍮 𝍧

十 万 千 百 十 忽 𝍮 𝍢 𝍩 𝍡

千 百 十 分。

这些例子说明我国古代的“分数记数法”和“小数记数法”在元代(1300年前后)已有记录。

(2)“四舍五入”：中国对分数、小数采用“四舍五入”是比较早的，公元237年的《景初历》已有这种记载。记录南北朝史事的《宋书》卷十二，在记《景初历》(公元237年)和《元嘉历》(公元443年)时，都引道：

① 元刘瑾，字公瑾，安福人，著《律吕成书》。见商务印书馆《丛书集成初编》第1660册，据墨海金壶的影印本。

半法以上排成一，不满半法废弃之。

法是分母，即分子大于分母一半的分数$\left(\text{即大于}\frac{1}{2}\right)$可进为一。又《魏书》卷一零七在记《正光历》（公元 521 年）和《兴和历》（公元 540 年）也都说：

半法以上排成一，不满半法弃之。

又《兴和历》

半法以上亦得一。

又《隋书》卷十七、卷十八在记载《大业历》（公元 608 年）和《皇极历》（公元 600 年）时也说：

本法以上亦从一，以下皆准此。

这说明中国在公元 237 年以后，对应用"四舍五入"的方法，已有明确记载。

《皇极历》又说：

半以上为进，以下为退，退以配前为强，进以配后为弱。

这仍是说明用"四舍五入"记录数字的步骤。如："7.3""四舍五入"之后，先写成"7"，再配以强字，写成"7 强"。这说明 7.3"四舍"之后，还有余数。又"7.6""四舍五入"之后，先写成"8"，再配以弱，写成"8 弱"。这说明 7.6"五入"之后，实有不足。这种记录方法，和现在相同。

(3)极限的概念：中国古代对极限的概念，也有相当的认识，例如惠施（前 380～前 300 时人，《庄子》说过"惠施多方，其书五车"）曾说：

一尺之捶，日取其半，万世不竭。

大意是说明 1 的一半是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$的一半是$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$的一半是$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}$的一半是$\frac{1}{16}$，…，这样逐次取下去，一万年也分不完，即

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2^3},\quad \frac{1}{2^4},\quad \cdots\cdots,\quad \frac{1}{2^n},\quad \cdots。$$

由此认识到$\frac{1}{2^n}$可取为无限小的数。

此外《九章算术》卷三有一个题目说："女子善织，日自倍。"即

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad \cdots,\quad 2^n,\quad \cdots。$$

由此认识到 2^n 可取为无限大的数。

魏刘徽(公元 263 年)应用极限这个概念来计算圆周率。最初，刘徽以圆田周三径一为率($\pi=3$)是圆内接六觚之周，以后割 6 觚成 12 觚，割 12 觚成 24 觚，成 48 觚，成 96 觚，…，成 1536 觚，成 3072 觚，…。即：

$$\begin{array}{ccccccccc} 6, & 12, & 24, & 48, & 96, & \cdots, & 1536, & 3072, & \cdots \\ 1\times 6, & 2\times 6, & 2^2\times 6, & 2^3\times 6, & 2^4\times 6, & \cdots, & 2^8\times 6, & 2^9\times 6, & \cdots \end{array}$$

所以最后他说：

> 割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体，而无所失矣。

即说明圆内接正 $2^n\times 6$ 边形的周，可以逼近圆周。

祖冲之(429～500)大概也由极限这个概念来计算圆周率值，因而得到

$$3.1415926<\pi<3.1415927，和\ \pi=\frac{355}{113}。$$

元赵友钦另外由圆内接正四边形起，算到圆内接正 16384 边形，即

$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & \cdots, & 16384 \\ 1\times 4, & 2\times 4, & 2^2\times 4, & 2^3\times 4, & 2^4\times 4, & \cdots, & 2^{12}\times 4 \end{array}$$

来证明 $\pi=\frac{355}{113}$这个数值的正确性。

(4)正负数值：古代中国历算家知道数有正负，首先载在《九章

算术》,后来刘洪(158～183 年时人)《乾象历》(公元 174 年)将正负术应用到历法上,刘洪自己也编有《九章算术》(如《大藏经音义》卷六所记)。

《九章算术》卷八,载有正负数的计算法则:

"同名相除	$(+a)-(+b)=+(a-b)$	(1)
异名相益	$(+a)-(-b)=+(a+b)$	(2)
正无入负之	$0\ -(+b)=-b$	(3)
负无入正之	$0\ -(-b)=+b$	(4)
其异名相除	$(+a)+(-b)=+(a-b)$	$(1)_1$
同名相益	$(+a)+(+b)=+(a+b)$	$(2)_1$
正无入正之	$(+a)+\ 0\ =+a$	$(3)_1$
负无入负之"	$(-a)+\ 0\ =-a$	$(4)_1$

刘洪的《乾象历》将正负数的计算法则记为:

"强正,弱负;

强弱相并:同名相从	$(+a)+(+b)=+(a+b)$	$(2)_1$
异名相消	$(+a)+(-b)=+(a-b)$	$(1)_1$
其相减也:同名相消	$(+a)-(+b)=+(a-b)$	(2)
异名相从	$(+a)-(-b)=+(a+b)$	(1)
无对互之"	$0\ +(+b)=+b$	$(3)_1$
	$0\ +(-b)=-b$	$(4)_1$
	$0\ -(+b)=-b$	(3)
	$0\ -(-b)=+b$	(4)

刘徽注《九章算术》(公元 263 年)说:

无入,为无对也。

这是说"无入"这个名词在前,而"无对"这个名词在后。这说明刘洪的《乾象历》(公元 174 年)是在《九章算术》之后。宋杨辉在《详解九

章算法·纂类》(1261 年)中将正负数计算法则称做"正负法"。这时已将"益,除"和"从,消"改称"加,减"。朱世杰《算学启蒙》(1299 年)又将正负术列在卷首。

《九章算术》在盈不足、方程各章的运算上都需要正负术。以后在历法上,应用更大,如历法说月行有迟疾、盈缩,因此有损益率。谈盈缩和损益就必然要用正负术。

在历算方面,正负术十分重要。如刘焯《皇极历》(公元 600 年)中应用内插法,对于"前多"、"前少"的计算,分别正负,十分严格。

《兴和历》(公元 540 年)还举出$\frac{3}{5}=1-\frac{2}{5}$形式的运算例子,也说明正负术的应用。这种计算方式,可能比较《兴和历》还早。《九章算术》卷七,"有人持钱之蜀贾"一题,先算出本钱,"又术"说:

初持之本,并五返之钱以减之,即利也。

因　初持之本　$30468\,\frac{84876}{371293}$,

五返之钱　60000。

算利钱可能是由下列步骤得来的:

$$60000(\text{五返之钱})-30468\,\frac{84876}{371293}(\text{初持之本})$$
$$=60000-\left(30468+1-\frac{371293-84876}{371293}\right)$$
$$=60000-\left(30469-\frac{286417}{371293}\right)$$
$$=29531\,\frac{286417}{371293}(\text{利钱})。$$

(5)内插法的应用和其他近似值的运算:《九章算术》卷七盈不足章,说明内插法的初步应用,此项方法,应用到一次方程,是直线内插法。《九章算术》卷七"有人持钱之蜀贾"一题,先假定本钱:

例如假定　本钱 30000(a)　不足　$1738\,\frac{1}{2}(c)$

本钱 40000(b)　　多　$35390\frac{8}{10}$(d)

后，再按盈不足术进行计算。因为 x＝初持本钱，故可由 $\frac{x-a}{c}=\frac{b-x}{d}$ 这个比例式算出：

$$x=\frac{ad+bc}{c+d}=30468\frac{84876}{371293}。$$

内插法由直线应用到曲线，是由刘焯(544～610)开始的。刘焯在计算《皇极历》(公元 600 年)时，首先用等间距二次内插法公式来计算。关于已知两主变数(x 和 $x+h$)的随变数数值(U_x 和 U_{x+h})求内插于两主变数中间的某主变数的随变数数值(U_{x+n_1h}或 U_{x-n_2h})[①] 这个问题。刘焯创造了下列两个公式：

(i)"前多者"(求较第一个主变数 x 比较大的 $x+n_1h$ 的随变数数值时)，用：

$$U_{x+n_1h}=U_x+\left(\frac{n_1T}{2}+n_1S-\frac{n_1^2}{2}\cdot S\right),$$

(ii)"前少者"(求较第一个主变数 x 比较小的 $x-n_2h$ 的随变数数值时)，用：

$$U_{x-n_2h}=U_x-\left(\frac{n_2T}{2}-n_2S+\frac{n_2^2}{2}\cdot S\right)$$

或

$$U_{x,\pm nh}=U_x\pm\left(\frac{nT}{2}\pm nS\mp\frac{n^2}{2}\cdot S\right),$$

其中

$$S=\triangle U_x-\triangle U_{x+h},$$

① 参看徐润炎、陆智常译，别席考维奇(Я. С. Безикович)著：《近似计算法》，第五章插入法，1954 年，北京，第 104～140 页。

$$T=\triangle U_x+\triangle U_{x+h}。$$

例如：

主变数 $x(h=1)$：	1	2	3	4	5	6	7	8	9
随变数 U_x：	1	4	9	16	25	36	49	64	81
第一次差分 $\triangle U_x$：	3	5	7	9	11	13	15	17	
第二次差分：		2	2	2	2	2	2	2	

(i)由 $x=4,5,\cdots$的随变数数值来求 $x=4.161$ 的随变数数值是“前多者”，这时用公式

$$U_{x+n_1h}=U_x+\left(\frac{n_1T}{2}+n_1S-\frac{n_1^2}{2}\cdot S\right)$$

进行计算。将 $x=4,h=1,n_1=0.161,S=-2,T=11+9=20$ 代入公式，即得

$$U_{4\cdot161}=16+\left[\frac{0.161}{2}\times20+0.161\times(-2)-\frac{0.161^2}{2}\times(-2)\right]$$
$$=17.313921。$$

(ii) 由 $x=5,4,\cdots$的随变数数值来求 $x=4.161$ 的随变数数值是“前少者”，这时用公式

$$U_{x-n_2h}=U_x-\left[\frac{n_2T}{2}-n_2S+\frac{n_2^2}{2}\cdot S\right]$$

进行计算。将 $x=5,h=1,n_2=0.839,S=-2,T=9+7=16$ 代入公式，即得

$$U_{4\cdot161}=U_{5-0.839}=25-\left[\frac{0.839}{2}\times16-0.839\times(-2)+\right.$$
$$\left.+\frac{0.839^2}{2}\times(-2)\right]=17.313921。$$

后来唐代僧一行(683～727)也应用过二次内插法，而元郭守敬(1231～1316)、朱世杰(1303年)又应用过高次内插法。总之，“近似计算法”中的内插法，由直线到曲线，都是中国最早应用的。

关于其他近似值的运算，还有开平方的“不加借算”、“加借算”和开立方的“加借算”等方法，例如：

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}$$，“不加借算”（《孙子算经》）；

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}$$，“加借算”（《五经算术》、《张丘建算经》）；

$$\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+1}$$。“加借算”（《张丘建算经》）。

此外南北朝宋何承天（370～447）在“调日法”中应用强弱二率：“累强弱之数，得中平之率”算出近似数值。现在知道这个方法，是以“欧几里得(Euclid)除法律”做根据的。

已知某数（连着小数）比较准确，又知道它的强弱二率，就可用一次方程的步骤，来算出新的分数。例如已知 $\pi=3.14159265$，又知 $\frac{22}{7}>\pi>3$。

因　$\pi=\frac{22x+3y}{7x+y}=3.14159265$，于是可算出 $\frac{x}{y}=\frac{16}{1}$，因此

$$\pi=\frac{22\times16+3\times1}{7\times16+1\times1}=\frac{355}{113}。$$

(6)级数计算：级数计算问题，在中国也有较早的记录，古代算书如《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》以及前汉书对等差级数

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots\cdots+[a+(n-1)d]$$

和等比级数

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

都有计算的例子。

此外，在《九章算术》卷七“有人持钱之蜀贾”一题中，如令 $x=$ 初持之本，则原题可写成：

$$
\begin{aligned}
x=&10000\left(\frac{10}{13}\right)^5+11000\left(\frac{10}{13}\right)^4+12000\left(\frac{10}{13}\right)^3\\
&+13000\left(\frac{10}{13}\right)^2++14000\left(\frac{10}{13}\right)\\
=&\left[10000+11000\left(\frac{13}{10}\right)+12000\left(\frac{13}{10}\right)^2\right.\\
&\left.+13000\left(\frac{13}{10}\right)^3+14000\left(\frac{13}{10}\right)^4\right]\div\left(\frac{13}{10}\right)^5。
\end{aligned}
$$

如令 $a=10000, b=1000, c=\frac{13}{10}$,就可能这时对 $\sum[a+(n-1)\cdot b]c^{n-1}$ 已有认识。

又《孙子算经》卷上载有“从九九至一一,总成一千一百五十五”;后来敦煌千佛洞《立成算经》一卷亦记明

“九九八十一,直下八十一,……八八六十四,直下六十四……”

一一如一,直下一,都计得一千一百五十五。

即 $9(9+8+7+6+5+4+3+2+1)+8(8+7+6+5+4+3+2+1)+\cdots+4(4+3+2+1)+3(3+2+1)+2(2+1)+1(1)=1155$。

因此这时可能对 $\sum n\frac{n(n+1)}{2}$ 也有认识。这些例子都属于高阶等差级数的计算范围,到宋元明时期对高阶等差级数更有专门的论述。

(7)一次同余式组的计算(求一术的计算):在《孙子算经》卷下,列有下面这个“求一术”问题和它的演算方式,实际这是一次同余式组的计算。

今有物不知其数,三三数之,剩二,五五数之,剩三,七七数之,剩二,问物几何,答曰二十三。

术曰:三三数之剩二,置一百四十,五五数之,剩三,置六

十三，七七数之剩二，置三十，并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得。

凡三三数之剩一，则置七十，五五数之剩一，则置二十一，七七数之剩一，则置十五，一百六以上，以一百五减之即得。

设 x 为所求数，问题是解一次同余式组① $x\equiv b_1(\bmod. 3)$，$x\equiv b_2(\bmod. 5)$，$x\equiv b_3(\bmod. 7)$，这里 $3\times5\times7=3\times35=5\times21=7\times15=105$；并且

$$35\times2\equiv1(\bmod. 3),\qquad 21\times5\equiv1(\bmod. 5),$$
$$15\times1\equiv1(\bmod. 7)。$$

因此适合已知组的 x，应该有下列的形式：

$$x=(35\times2\cdot b_1+21\times1\cdot b_2+15\times1\cdot b_3)(\bmod. 105)$$
$$=(70b_1+21b_2+15b_3)(\bmod. 105)。$$

现在知道 $x\equiv2(\bmod. 3)$，$x\equiv3(\bmod. 5)$，$x\equiv2(\bmod. 7)$，因此

$$x\equiv70\times2+21\times3+15\times2(\bmod. 105)\equiv$$
$$\equiv140+63+30(\bmod. 105)\equiv23(\bmod. 105)。$$

以上说明《孙子算经》的计算步骤是有数论的基础的。到了宋代秦九韶更将这种方法发展成大衍求一术，见他所著的《数书九章》(1247 年)一书中。

古代在历法上还有一种求近似数值的求一法；例如赵𢾊在《元始历》(公元 412 年)用一年等于 $12\frac{221}{600}$个月；和一年有 $12\frac{7}{19}$个月相比，得出

---

① 关于解一次同余式组可参看裘光明译，И. М. 维诺格拉陀夫(Виноградов)著：《数论基础》(1953 年)，第四章，第 58～60 页。关于上列《孙子算经》的算题，苏联出版的数论书内已引用，见 А. К. Сушкевич 著：《数论初等教程》，1954 年出版，第 84 页(原书尚未译出)。

$$\frac{7}{19}-\frac{221}{600}=\frac{1}{19\times600=11400},$$

就中　　$7\times600-19\times221=1$。

同理，祖冲之在《大明历》(公元463年)中有下面的计算

$$\frac{7}{19}-\frac{144}{391}=\frac{1}{19\times391}=\frac{1}{7429},$$

李业兴在《正光历》(公元521年)中有下面的计算

$$\frac{7}{19}-\frac{186}{505}=\frac{1}{19\times505}=\frac{1}{9595},$$

李业兴在《兴和历》(公元540年)中又有下面的计算

$$\frac{7}{19}-\frac{207}{562}=\frac{1}{19\times562}=\frac{1}{10678},$$

而宋景业在《天保历》(公元550年)中有下面的计算

$$\frac{7}{19}-\frac{249}{676}=\frac{1}{19\times676}=\frac{1}{12844}。$$

这些都因为他们发现古代的"十九年有七个闰月"的方法不确切，而想创造另一分数，使一万年左右，才需要减一个闰月。如《元始历》(公元412年)的$\frac{221}{600}$，即600年有221个闰月，因此11400年才需要减一闰月，这种求一方法，五、六世纪历法内曾广泛应用。

古代算书中还有其他不定方程的问题，有时一题有几个解答。如《九章算术》卷八"五家共井"题未记丈尺，只算得井深的率和各绠长率①。

(8)方程计算：古代早已知道方程的计算，并且还要应用正负术。《九章算术》以及算经十书内其他算经，对于一次联立方程，都

① 《聚珍版丛书》本已有下列按语说："假定井深七丈二尺一寸，可半之得三丈六尺有半寸，可倍之得一四丈四尺二寸。"

有不少问题。

在《九章算术》计算开平方过程中已发现一个平方可由两个小平方和两个小长方形所组成，即

$$A^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2。$$

如改写 $a=x$，就有：

$$x^2+2bx+b^2-A^2=0$$

的二次方程。《九章算术》中另外有一题需要列成"二次方程"来计算。魏刘徽就利用这个原理创立了小数开方。

到王孝通著《缉古算经》时，他还记录了"三次方程"，以后宋元数学家又研究了"高次方程"，而解高次方程的方法和后来和涅(Horner)的方法一样。

在公元 1000 年前后，已创有"天元术"，用"天元"来代表一切"未知数项"，而用"太"来代表"常数项"，和现在以 x 代表未知数意义相同。所以

$$x^4+2x^3+3x^2+4x+5=0$$

在"天元术"中写成：

丨	〢	〣	〤	〥	(原式直行)
				太	

在 5 下记一"太"字。又如

$$x^4+\quad+3x^2+4x+5=0$$

在"天元术"中写成：

丨	□	〣	〤	〥	(原式直行)
			元		

在 4 下记一"元"字。

因为有了"常数项"和"未知数项"，便可以知道其他数项的地位。古代是用筹来进行计算，因此一切数项，都预先留着地位，对正

负数值，则用筹的形式（如正是正方形的筹，负是三角形的筹）或颜色（如正赤，负黑）来分别。在记录时则在数字上画一斜线作记，如“－8”，写成“𝍧”。此外天元之外，还有地元、人元、物元来记 y，z，w 各未知项。

在宋元时期，不独知道：

$$A^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$A^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

的组成，并且发现二项式系数可排成以下巴斯噶（Pascal）三角形。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

这个三角形，首先载于杨辉《详解九章算法》（1261 年）中，称做“开方 作法本源”，在《永乐大典》（1403 年）内，杨辉自注以为“出‘释锁’算书，贾宪用此术”，这说明这个三角形的发现更在杨辉《详解九章算法》（1261 年）之前。原图记到

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+$$
$$+15a^2b^4+6ab^5+b^6。$$

这是世界上最早记录，后来朱世杰（1303）、吴敬（1450 年）也有记录，都在

Al-Kashi （ ? ～1456），1427 年
Petrus Apianus (1495～1552)，1527 年
Blaise Pascal (1623～1662)，1654 年

各人记录之前，所以杨辉记录(1261 年)是最先的记录。

高次方程的计算方法当和上面二项式系数排成的三角形有关。在杨辉《详解九章算法》(1261 年)中还引有贾宪立成释锁平方及立方法。其中所述贾宪递增三乘开方法和和涅方法(1819 年)相同。又在杨辉(1261 年)引述之前，宋秦九韶在《数书九章》(1247 年)内，也已广泛的应用到和涅同样的方法来计算高次方程。因此这种计算高次方程的方法也是我国首先发现的。

(9)几何形的计算：中国古代关于平面和立体几何形的公式，在《九章算术》和其他算经中都有记录。其中有些是近似算法，如计算某圆的弧(a)，矢(b)，弦(c)，径(d)以及面积(A)的关系在《九章算术》中已有记录，以后的历算家还继续有发明，这些公式是：

$$A=\frac{1}{2}(bc+b^2), \tag{1}$$

$$d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b, \tag{2}$$

$$a=\frac{2b^2}{d}+c。 \tag{3}$$

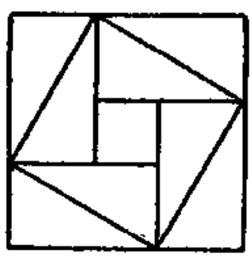
此外还有以下这些关于几何形的计算：

（一） 汉赵君卿注《周髀算经》，他用“勾股弦方图”的弦图，即

$$4\left(\frac{1}{2}ab\right)+(b-a)^2=c^2$$

来证明勾股弦定理

$$a^2+b^2=c^2。$$



（弦 图）

（二） 魏刘徽注《九章算术》中由圆内接六边形起来计算圆周率，以后元赵友钦由圆内接四边形起来计算圆周率。

（三） 齐祖暅在开立圆术中计算球体积，得到 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 或 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$，其中 r,D 是圆半径和直径。

（四） 唐王孝通著《缉古算经》说明仰观台（即角锥平截体）的组成方式。

（五） 宋沈括（1030～1094）创造算隙积术的公式。

（六） 宋秦九韶（1247 年）创造算三角形三斜求积的海伦公式。

（七） 元郭守敬（1231～1316）有关于球面割圆术的球面三角形的两个公式。

这些都是中国古代数学家对于几何学有修养的创作。

§2. 从明到清中叶

现在再谈古代数学发展的第四个时期，由明到清中叶，即1367～1750 年间的情况。这个时期有两件大事：第一就是民间数学发展（包括算盘）的成就；第二就是明清之际西洋算法的输入。关于第二点现在不预备多谈。关于民间数学包含简算方法和口诀应用等等，这在宋末已经开始，因此先谈它的渊源。

宋杨辉（算法通变本末）卷上（1274 年）称："口诵者为因。"因此这时已用到口诀。另外还有以下这些计算方法：

（一）乘除可以互换，如：

因 $\frac{1}{3}=0.3333$（三烦） 则 $\frac{1}{0.3333}=3$ 如 $\frac{x}{3333}=\frac{3x}{10000}$

$\frac{1}{4}=0.2500$ $\frac{1}{0.2500}=4$ $\frac{x}{25}=\frac{4x}{100}$

$\frac{1}{5}=0.2000$　　$\frac{1}{0.2000}=5$　　$\frac{x}{2}=\frac{5x}{10}$

……　　……　　……

$\frac{1}{8}=0.1250$　　$\frac{1}{0.1250}=\frac{1}{8}$　　$\frac{x}{125}=\frac{8x}{1000}$

$\frac{1}{9}=0.111\dot{1}$(繁一)　　$\frac{1}{0.111\dot{1}}=\frac{1}{9}$　　$\frac{x}{1111}=\frac{9x}{10000}$

（二） 加减可以代乘除，如：

因　$9=10-1$　则　$9x=10x-x$

$8=10-2$　　$8x=10x-2x$

$7=10-3$　　$7x=10x-3x$

……　　……

(加一位)加减代乘除

(加一)因 $11=10+1$ 则 $11x=10x+x$

(加二)　$12=10+2$　　$12x=10x+2x$

(加三)　$13=10+3$　　$13x=10x+3x$

(加二位)加减代乘除

同理　$111=110+1$ 则 $111x=110x+x$

$112=110+2$　　$112x=110x+2x$

……　　……

（三） 化两为斤的分数(其中分数是指分数和小数)：

因　16 两＝1 斤

则

$$1\text{ 两}=\frac{1}{16}\text{斤}=0.0625\text{ 斤},$$

$$2\text{ 两}=\frac{1}{8}\text{斤}=0.1250\text{ 斤},$$

$$3\text{ 两}=\frac{3}{16}\text{斤}=0.1875\text{ 斤},$$

$$4\text{ 两}=\frac{1}{4}\text{斤}=0.2500\text{ 斤},$$

………………………………

$$12\text{ 两}=\frac{3}{4}\text{斤}=0.7500\text{ 斤},$$

$$13\text{ 两}=\frac{13}{16}\text{斤}=0.8125\text{ 斤},$$

$$14\text{ 两}=\frac{7}{8}\text{斤}=0.8750\text{ 斤},$$

$$15\text{ 两}=\frac{15}{16}\text{斤}=0.9375\text{ 斤},$$

此外关于除法歌诀也是随时演进的。例如一位归除法歌诀，杨辉（1274 年）、朱世杰（1299 年）、贾亨、丁巨（1355 年）等人都有记录，而朱世杰、贾亨较杨辉还有改进，例如一位除法：（三归）杨辉（1274 年）有歌诀："见一下二十一，即七。"即：$\frac{10}{3}=1+\left(2+\frac{1}{3}\right)=1+\frac{7}{3}$。朱世杰（1299 年）有歌诀："三一三十一"即：$\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$。贾亨称："三归：见一三十一"，即$\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$。而丁巨（1355）有歌诀：（七归）"呼七一下加三"即：$\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$（八归）；"呼八二下加四"，即：$\frac{20}{8}=2+\frac{4}{8}$。

二位除法，杨辉也设有歌诀，如

（八十三归）：

"见一下十七"	即$\frac{100}{83}=1+\frac{17}{83}$,
"见二下三十四"	$\frac{200}{83}=2+\frac{34}{83}$,
"见三下五十一"	$\frac{300}{83}=3+\frac{51}{83}$,

“见四下六十八”　　$\frac{400}{83}=4+\frac{68}{83}$,

“见四一五作五”　　$\frac{415}{83}=5$。

这是后来飞归口诀记录的轮廓。

二位以上除法的撞归法,元贾亨、丁巨(1355年)、安止斋都已采用,事实上在朱世杰(1299年)的著作上已可看到。

贾亨“撞归法”载:

“二归为九十二”$\left(因\frac{20}{2}=9+\frac{2}{2}\right)$,丁巨有歌诀:(二归)“撞归九十二”

“三归为九十三”$\left(因\frac{30}{3}=9+\frac{3}{3}\right)$,

……　　……

“九归为九十九”$\left(因\frac{90}{9}=9+\frac{9}{9}\right)$。

以上说明用撞归法的原因;是被除数和除数首位相同,又不能除一,只好先假定最大的商数作“9”,如发现商数过大,则将商数退一作“8”。还有

(一归)“无除减一下还一”,

(二归)“无除减一下还二”,

……　……………………

(九归)“无除减一下还九”

的“减一”歌诀,可是朱世杰(1299年)只说:“但遇无除还头位。”现举例说明此项演算方法:

$$\frac{210}{24}=9\,\frac{10+20}{24}=9\,\frac{30(<9\times4)}{24},$$

此式即现在方法中的见二无除作九,因 $30<9\times4$,知道商数9过大,因此上式等于

$\frac{210}{24}=(9-\overline{1})+\frac{30+\overline{20}}{24}$，此式即现在采用的方法中的无除去一下还二

$=8\frac{50(>8\times4)}{24}$，因 50>8×4，可减去 32 余 18

$=8\frac{18}{24}$。

上述归除、撞归、减一这几种方法，经过一个阶段之后，到吴敬(1450 年)、程大位(1592 年)时就整理各项歌诀，便十分成熟地应用到算盘上面去了。

§3. 清中叶以后

最近世期是 1750～1949 年，此时期有几件大事，即：

(一) 古典数学书的流传，

(二) 数学家传记的编纂，

(三) 中算家研究数学的成就，

(四) 中外文化的交流。

(一) 明代编纂《永乐大典》(1403～1406)，收罗相当多的我国旧有书籍，到清初时《永乐大典》已有残缺，因此另外编纂了一部丛书称做《图书集成》(1726 年)，可是不及《永乐大典》丰富。到 1773 年又另编一部大丛书，称做《四库全书》(1773～1781)，共收有书籍 3450 余种，36000 册，分别钞藏在七阁(1781～1787)。关于数学书，《四库全书》也从《永乐大典》里钞有几种，但没有全部钞出。由于《四库全书》的收集，因此在武英殿聚珍版里就刻有《算经十书》七种，《武英殿聚珍版丛书》出版后，《算经十书》才流传较广，以后其他各丛书也有重印和补充，到 1797～1842 年另一组古典数学书，即宋元时期(1078～1373)秦九韶(1247 年)，李冶(1248～

1259)，杨辉(1261～1275)，朱世杰(1299～1303)的著作，也都陆续刊印流传下来。

（二） 在《四库全书》编纂之前，《图书集成》(1726 年)第 128 卷算法部，只有二十八条，记录着以往数学的故事。因此阮元(1764～1849)、罗士琳(1789～1853)、华世芳(1854～1905)、诸可宝(1845～1923)和黄钟骏在(1799～1898)在百年中间完成《畴人传》七十一卷共六十余万字，是中国数学史的初步工作。

（三） 中国数学家在此时期的研究工作：为

（1） 方程论

这个时期中国数学家如孔广森(1752～1786)、焦循(1763～1820)、汪莱(1768～1813)、李锐(1773～1817)等，因为研读过宋元时期(1078～1373)的数学书，对方程论十分了解。因为这些旧算书里对"方程论"里的巴斯噶三角形、牛顿(Newton)二项式系数、和涅方法都已说过，并且都是世界之最先记录，所以汪莱曾研究到二三次方程有无正负根的问题，并举出这种方程所具的条件。到李锐著《开方说》三卷(1817 年)时又创立考验方程根的方法，他的方法和笛卡儿(Descartes，1637)法相同。

到第二时期如罗士琳(1789～1853)、汪香祖(1862 年)都按和涅方法求高次方程的根值。其余戴煦(1805～1860)、项名达(1789～1850)、邹伯奇(1819～1869)、夏鸾翔(1823～1864)等人则按牛顿二项式定理求

$$N^{\frac{1}{2}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{2}},\quad N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}},$$
$$N^{n_1}=(P\pm Q)^{n_1}$$

的展式中各项的系数，其中特别是邹伯奇、夏鸾翔和华蘅芳(1833～1903)等人又讨论到方程根的近似数值的计算方法。

（2） 级数论

级数论是十九世纪中国数学家所熟知的另一分科，在宋元时期即十一到十四世纪(1078～1373)时期的数学书，已论述级数。其中较重要的，如沈括(1030～1094)所说的隙积，朱世杰所说的垛积，都有求级数和的算法。在十八世纪初期，还有一位数学家陈世仁(1676～1722)曾著《少广补遗》一卷，导论各类级数。以后汪莱(1768～1818)计算$(r-1)$乘三角堆总和

$$\sum \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)}{(r-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!},$$

董祐诚(1791～1823)计算$(r-1)$乘方锥堆总和

$$\sum \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n+r-2)}{r!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n+r-1)}{(r+1)!}。$$

到第二期罗士琳(1789～1853)编有《四元玉鉴细草》二十四卷(1836年)对于朱世杰《四元玉鉴》(1303年)原书的级数，曾详加解释。以后李善兰(1811～1882)、华蘅芳(1833～1902)对级数都有研究。李善兰学说可归纳出一个恒等式，即

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}^2\binom{r+2p-i}{2p}=\binom{r+p}{p}^2 \text{①}$$

(3) 数论

最近世期中国数学家，对于数论十分有研究，因秦九韶《数学九章》十八卷(1247年)载在《永乐大典》(1408年)又收在《四库全书》(1781年)，而此书所述"大衍求一术"即"同余式理论"比较《算

① 参看章用《垛积比类疏证》《科学》，1939年11月第23卷11期，第647～663页。这恒等式的初等解法见数学通报1955年2月号，问题解答栏。

经十书》里的《孙子算经》所述更为详细，所以这个时期中国数学家如张敦仁（1754～1834）、焦循（1763～1820）、骆腾凤（1770～1841）、李锐（1773～1817）和时曰淳（1873年）、黄宗宪（1896年）等人对秦九韶的大衍求一术都有解释。以后李善兰（1811～1882）对素数论也有研究。在李善兰的《则古昔斋算学》十四种（1872年）内有一册专论素数。

（四） 关于历代和最近世期中外文化交流的情况，在前篇中已经谈到过，这里就不再说了。

郭守敬球面割圆术*

古代印度三角函数表内的正弦函数表曾随《九执历》输入中国。此表系分一象限为 90°,1°为 60′。

又因 周天 $2\pi r = 360\times 60$, $\pi = 3.1416$。

故 半径, $r = \dfrac{360\times 60}{2\pi} = 3438$。

此项函数表和三角计算法未被广用,到元代郭守敬(1231～1316)则另行创造。郭守敬令 周天

$$2\pi r = 365\,\frac{1}{4},\quad \pi = 3。$$

故 全径 $d = 121.75$, 半径 $r = 60.8750$,

一象限为 $91^\circ.31$。

所算系用古代割圆弧矢术的公式,故"黄赤道相求弧矢诸率立成[①]上",所列

$$\begin{aligned}
\alpha = \ 1^\circ &\quad \sin 1^\circ = 1.0000, &\quad \operatorname{vers} 1^\circ = 0.0082,\\
24^\circ &\quad \sin 24^\circ = 23.8070, &\quad \operatorname{vers} 24^\circ = 4.8482,\\
44^\circ &\quad \sin 44^\circ = 41.7454, &\quad \operatorname{vers} 44^\circ = 16.5682,
\end{aligned}$$

---

* 本文原载《测绘通报》1956 年第 1 期第 5～10 页。

① 古时的历家将日月五星在天上运行时的盈缩迟疾之数,预先为它排定立表,以便推步时取用,这种数表就叫做"立成"。为了某某用的,就叫做"××立成",如"黄赤道相求弧矢诸率立成"等等。"立成"用现在的话来说就是"计算用表"。

$91^\circ.31 \quad \sin 91^\circ.31 = 60.8750, \qquad \text{vers}\ 91^\circ.31 = 60.8750$。

和现代三角函数表校对有出入，而原理则相同。现就《明史》所引《大统历法》① 内"法原"加以说明，最后说明球面三角形的算法在郭守敬时期已被应用。

古代割圆术弧矢公式有以下各种：

$$A=\frac{1}{2}(cb+b^2), \qquad \text{出《九章算术》} \tag{1}$$

$$d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b, \qquad \text{出《九章算术》，勾股章} \tag{2}$$

$$a=\frac{2b^2}{d}+c, \qquad \text{出宋沈括(1030～1094)《梦溪梦谈》} \tag{3}$$

宋杨辉《详解九章算法》(1261 年)由(1)(2)式算得

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0, \qquad (4)_1$$

元郭守敬(1231～1316)由(2)(3)式算得

$$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0。② \qquad (4)_2$$

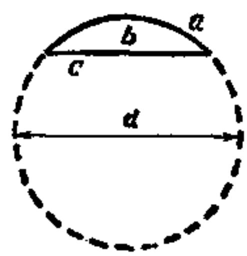


图 1

元郭守敬 (1231～1316) 首论球面割圆术，并算好三角函数表，称做"黄赤道相求弧

---

① 《大统历法》系明初刘基等所编纂的一种历法。这个历法几乎全部以元郭守敬的《授时历》为蓝本，仅仅作了少许的变更。据《明史》所载分为：法原，立成，推步三编。法原和推步又各分为七目。此篇所讨论的系法原中(三)黄赤道差和(四)黄赤道内外度等两目。

② 上列各式中的罗马字母，如图 1 所示：a 是弓形(古时称为弧矢形)的弦(古时称为弧背，折半之称为半弧背)，c 是弓形的弦(古时称为弧弦，折半之称为半弧弦)，b 是 a 弧中点和 c 弦中点的连线(古时称为矢，亦称弧矢)，d 是直径(古时称为全径)，A 是弓形的面积。弓形的一半古时称为半弧矢形，弓形的弧与弦之差折半称为半背弦差。

矢诸率立成上"，"黄赤道相求弧矢诸率立成下"等，其割浑圆即算弧三角法。兹引有黄道积度求赤道积度及赤道内外度，又实测二至黄赤道内外半弧背二十四度（所测就整）①。

如图 2 所示②：A 为春分点；D 为夏至点。AD 为黄道象限弧；AE 为赤道象限弧。

今有 BD 为黄道积度，求(1)赤道积度 CE，(2)赤道内外度 BC。

自 D 作 DR 线与 OE 正交，自 B 作 BM 线与 OD 正交。

郭守敬因周天 $\pi d=365\frac{1}{4}$，$\pi=3$，故全径 $d=121.75$，半径 $r=60.875$，一象限 $=90°.31$。

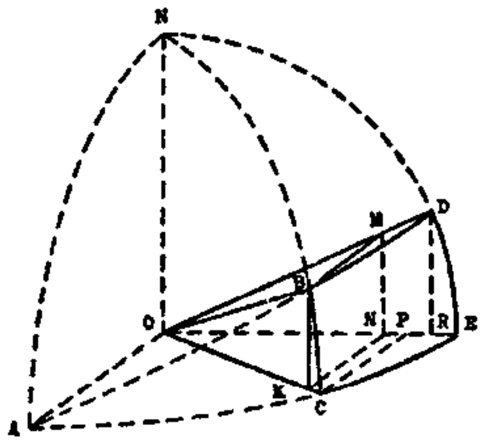


图 2

① "黄道积度"即为现在的"黄经的余角"；"赤道积度"即为现在的"赤经的余角"；"赤道内外度"即为现在的"赤纬"；"二至黄赤道内外半弧背"即现在的"黄赤交角"。

当年郭守敬将周天分为 $365\frac{1}{4}$ 度，所以实测"黄道交角"得约 24 度（经过凑整），现在我们都是将周天分为 360°，实测"黄赤交角"约为 23°27′。

② 古时称大圆之半径为大弦，其相应的勾、股称为大勾，大股。比半径小的线段（大圆半径上任一点至圆心的距离）为小弦，其相应的勾、股称为小勾，小股。如图 2 所示，OD 为大弦，则 DR 为大勾，OR 为大股；OM 为小弦，则 MN 为小勾，ON 为小股。

此外古时称 $\sin\alpha$（正弦）为"×半弧弦"，称 $\operatorname{vers}\alpha$（正矢）为"×矢度"，称某道上的角度为"×道积度"。

据《明史》卷三十二志第八历二:《大统历法》一上“法原”。

(三)“黄赤道差

求黄道各度下赤道积度术:

置周天半径,内减去黄道矢度,余为

(以下系说明)

已知 BD 弧求 CE 弧。从(二)“弧矢割圆”知

全径,$d=2r=121.75$

半径, $r=60.875$

BD 弧$\left(即\dfrac{a}{2}=1^{\circ}\right)$

用 $b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\dfrac{a^2d^2}{4}=0$ (4)$_2$

式,在 BDM 半弧矢形(就中弧 $a=2BD$,矢 $b=MD$,弦 $c=2BM$)算得黄道矢度:$MD=b=0.0082$,或检“黄赤道相求弧矢诸率立成上”,亦得 $MD=b=0.0082$。

$$r-b=OM$$

(以下系据《明史》内资料补注)

“如黄道半弧背1度,求赤道积度。如以半弧背1度求矢度。”

因 $\dfrac{a}{2}=1$

(为黄道半弧背)。

由 $b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\dfrac{a^2d^2}{4}=0$ (4)$_2$

式,因$\dfrac{a}{2}=1$,则$\dfrac{a^2}{4}=1$

$d=121.75$

$d^2=14823.0625$

$d^3=1804707.859375$

$ad=2\times121.75=243.50$

即 $b^4+14823.0625b^2-243.50b^2-1804707.859375b+14823.0625=0$

$b=0.0082$。

$OM=r-b=60.875-0.0082=60.8668$

黄赤道小弦。	（为黄赤道小弦）。	（为黄赤道小弦）。
置黄赤道小弦，以黄赤道大股乘之，大股见割圆。为实，黄赤道大弦半径为法，实如法而一①，为黄赤道小股。	又在 DER 半弧矢形（就中弧 $a_1=2DE$，矢 $b_1=RE$，弦 $c_1=2DR$）因在 $\triangle OMN$，ODR 相似正三角形中，有下式： $\frac{OM\times OR}{OD}=ON$ （为黄赤道小股）。	又 $\frac{60.8668\times 56.0268}{60.875}$ $=\frac{3410.17203024}{60.875}$ $=56.0192=ON$ （为黄赤道小股）。 就中：黄赤道大股 $OR=r-RE$ $=60.875-4.8482$ $=56.0268.$ 又 $RE=4.8482$ 黄道矢度，系检查“黄赤道相求弧矢诸率立成上”对照 vers $\alpha=$ vers 24 得来。
置黄道矢自乘为实，以周天全径为法，实如法而一，为黄道半背弦差。	将沈括公式 $a=\frac{2b^2}{d}+c$，(3) 改书为： $\frac{b^2}{d}=\frac{a-c}{2}$	$\frac{b^2}{d}=\frac{0.0082^2}{121.75}=$ $=0.00000055$ （为黄道半背弦差）。

① 此地所谓“实”即相当于现在的“被除数”，所谓“法”即相当于现在的“除数”，“实如法而一”就是以除数去除被除数而求得商的意思。

$$=\frac{1}{2}(2BD-2BM)$$

(为黄道半背弦差)。

以差去减黄道积度。即黄道半弧背。余为黄道半弧弦。

“置黄道半弧背 1 度，内减黄道半背弦差，余为半弧弦，因差在微以下，不减，即用 1 度为半弧弦”，即：

$$\frac{a}{2}-\frac{b^2}{d}=\frac{c}{2}=BM$$

(为黄道半弧弦)。

由 $\frac{b^2}{d}=\frac{a-c}{2}$，得：

$$\frac{a}{2}-\frac{b^2}{d}=\frac{c}{2}=BM=$$

$$=1-\frac{0.0082^2}{121.75}=$$

$$=1-0.00000055=1$$

(为黄道半弧弦)。

置黄道半弧弦自之为股幂，黄赤道小股自之为勾幂，二幂并之，以开平方法除之，为赤道小弦。

“置黄道半弧弦 1 度自之得 1 度为股幂，黄赤道小股 56.0192 自之得 3138.15076864 为勾幂。二幂并之得 3139.15076864 为弦实，平方开之得 56.0281 (为赤道小弦)。”

$$\sqrt{BM^2+ON^2}=$$

$$=\sqrt{KN^2+ON^2}=$$

$$=\sqrt{1^2+56.0192^2}=$$

$$=\sqrt{3139.15076864}$$

$$=56.0281=OK$$

(为赤道小弦)。

置黄道半弧弦，以周天半径亦为赤道大弦。乘之为实，以赤道小弦为法而一，为赤道半弧弦。

因 $BM=KN$，$OE=OC$；又在 $\triangle OKN$，OCP 相似正三角形中，有下式

$$\frac{(KN=BM)\times OC}{OK}=$$

$$=\frac{c_2}{2}=CP$$

因

$$KN=BM=1$$

$$OC=r=60.875$$

$$OK=56.0281$$

$$\frac{60.875\times 1}{56.0281}=1.0865$$

(为赤道半弧弦)。

	（为赤道半弧弦）。	
置黄赤道小股，亦为赤道横小勾。以赤道大弦即半径。乘之为实，以赤道小弦为法而一，为赤道横大勾。	又在$\triangle OKN$，OCP相似正三角形中，有下式 $$\frac{ON\times OC}{OK}=OP$$ （为赤道横大勾）。 $(5)_1$	又因 $ON=56.0192$ $$\frac{56.0192\times 60.875}{56.0281}$$ $$=\frac{3410.1688}{56.0281}$$ $$=60.8653$$ （为赤道横大勾）。
以减半径，余为赤道横弧矢。	$$b_2=r-OP$$ $$=PE$$ （为赤道横弧矢）。	在CEP半弧矢形（就中 $a_2=2CE$，$b_2=PE$，$c_2=2CP$） 因 $r=60.875$，$b_2=r-OP=PE=60.875-60.8653=0.0097$ （为赤道横弧矢）。
横弧矢自之为实，以全径为法而一，为赤道半背弦差。	如前例求“黄道背弦差”例： $$\frac{PE^2}{d}=\frac{b_2^2}{d}=\frac{a_2-c_2}{2}$$ $$=\frac{1}{2}(2CE-2CP)$$ （为赤道半背弦差）。	$$\frac{b_2^2}{d}=\frac{0.0097^2}{121.75}$$ $$=0.00000077$$ （为赤道半背弦差）。 赤道半弧弦： $$CP=\frac{c_2}{2}=1.0865,$$
以差加赤道半弧弦为赤道积度。”	$$\frac{c_2}{2}+\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{a_2}{2},$$ 或 $$CP+\frac{(r-OP)^2}{d}=CE$$ （为赤道积度）。	赤道半背弦差 $$\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{b_2^2}{d}$$ $$=0.00000077$$ $$\frac{c_2}{2}+\frac{a_2-c_2}{2}=$$

		$=10865=\frac{a_2}{2}$ （为赤道积度）。

在图 2 中，如算弧三角形 ABC，令 BC 弧 $=a$，AC 弧 $=b$，AB 弧 $=c$，又 $\angle BAC=\angle A$，则由

$$OP=\frac{ON\times OC}{OK} \tag{5$_1$}$$

$$=\frac{OM\times OR}{\sqrt{ON^2+BM^2}}=\frac{OM\times OR}{\sqrt{\frac{OM^2\times OR^2}{OD^2}+BM^2}},$$

可得

$$\sin b=\frac{\sin c\cos A}{\sqrt{\sin^2 c\cos^2 A+\cos^2 c}}。\tag{5$_2$}$$

就中　$\sin b=\frac{OP}{OC}$，$\sin c=\frac{OM}{OB}$，$\cos A=\frac{OR}{OD}$，$\cos c=\frac{BM}{OB}$，

$$r=OA=OB=OC=OD=OE。$$

（四）"黄赤道内外度　推黄道各度距赤道内外（度）…术：	次已知 BD 弧，求 BC 弧。	"如冬至后 44 度，求太阳去赤道内外（度）…。"
置半径内减去赤道小弦，余为赤道（大小）二弦差。又为黄赤道小弧矢，又为内外矢，又为股弦差。	由前已知 $r-b=OM$， 和 $OK=$ $\sqrt{(KN=BM)^2+ON^2}$ （为赤道小弦）。就中赤道小勾，小股系检"黄赤道相求弧矢诸率立成上"表。	$r=60.875$， $B=44°$。 $OK=$ $\sqrt{41.7454^2+40.7782^2}$ $=58.3569$ （为赤道小弦）。 $r-OK=$ $60.875-58.3569$， 或　$CK=b_3=2.5181$

	同前例，在 BCK 半弧矢形（就中弧 $a_3=2BC$，矢 $b_3=CK$，弦 $c_3=2BK$）中， $r-OK=CK=b_3$ （为赤道二弦差，又为黄赤道小弧矢）。	（为赤道二弦差，又为黄赤道小弧矢）。
置半径内减去黄道矢度，余为黄赤道小弦。	$r-b=r-MD=OM$ （为黄赤道小弦）。就中 MD 值检表得来。	又 $r=60.875$， $B=44°$， $OM=60.875-16.5682$ $=44.3068$ （为黄赤道小弦）。
以二至黄赤道内外半弧弦乘之为实，以黄赤道大弦为法，即半径。除之，为黄赤道小弧弦。即黄赤道内外半弧弦，又为黄赤道小勾。	因在 $\triangle OMN$，ODR 相似正三角形，有 $\frac{OM\times DR}{OD}=MN$ $=BK=\frac{c_3}{2}$ $(6)_{\mathrm{I}}$ （为黄赤道小弧弦）。	假定 $A=24°$时 $DR=23.71$， $\frac{c_3}{2}=BK=$ $=\frac{44.3068\times23.71}{60.875}$ $=17.2569$ （为黄赤道小弧弦）。
置黄赤道小弧矢，自之，即赤道二弦差。以全径除之，为半背弦差。	改书沈括公式成 $\frac{CK^2}{d}=\frac{b_3^2}{d}=\frac{a_3-c_3}{2}$ （为半背弦差）。	前已算出： 因 $CK=b_3=2.5181$， $\frac{2.5181^2}{d=121.75}=0.0521$ （为半背弦差）。
以差加黄赤道小弧弦为黄赤道小	$\frac{a_3-c_3}{2}+\frac{c_3}{2}$	$\frac{a_3}{2}=0.0520+$

弧半背，即黄赤道内外度。……”	$=\frac{a_3}{2}=BC$ （为黄赤道内外度）。	$+17.2569=17.3089$ （为黄赤道内外度）。

如图 2，如算弧三角形 ABC，令 BC 弧 $=a$，AC 弧 $=b$，AB 弧 $=c$，又 $\angle BAC=\angle A$，则由

$$BK=\frac{OM\times DR}{OD}, \tag{6$_1$}$$

可得

$$\sin a=\sin c\sin A。 \tag{6$_2$}$$

就中

$$\sin a=\frac{BK}{OB},\sin c=\frac{OM}{OB},\sin A=\frac{DR}{OD},$$

$$r=OA=OB=OC=OD=OE。$$

有人认为郭守敬球面割圆术不是中国所发现，可能是受国外一部分学者意见的影响，因日本三上义夫曾如此说过。

林科棠译，三上义夫著，《中国算学之特色》第六十三页称：

> 《授时历》中使用类似球面三角法，恐视为传阿拉伯之知识，亦无不可。盖古算书中无其痕迹，古历法中亦无其法。至是乃忽然使用，谓为根据外来知识，原无不合也。故《授时历》之受阿拉伯影响，必然无疑，惟其影响至如何程度，实一疑问也。

可是中算家对于球体早已有相当的认识。这在祖暅（祖冲之（429～500）子）计算球的体积：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 时，已经可以看到。清梅文鼎（1633～1721）曾写《堑堵测量》二卷，来说明球面割圆术。

郭守敬在论述球面割圆术之外，又说到比较隋刘焯（544～616）等间距二次招差术，和唐僧一行（683～727）不等间距二次招差术进一步的三次招差术。郭守敬又创做“立成”算表。郭守敬实在是当时的数学家。所以在未有确实资料之前，不必一定以为球面

三角法，非传自阿拉伯不可。

参 考 文 献

《明史》卷三十二，志第八，历二，百衲本二十四史本《明史》第七册。

梅文鼎《堑堵测量》卷一及卷二，《历算全书》本。

Gauchet, L., *Note Sur La Trigonométrie Sphérique de Kouo Cheou-King*, *Toung-Pao*, Vol. XVIII, 1917 年 (pp. 151～174)。

日本薮内清《隋唐历法之研究》，第六章内"九执历之研究"，昭和十九年(1944 年) 1 月(第 154 页)。

李俨《中国古代数学史料》内附：古代三角函数表，1954 年 5 月(＊见本书第二卷。——编者)。

中国古代中算家的测绘术*

中国文化具有悠久而光辉的历史，毛主席说："中国是世界文明发达最早的国家之一。"中国古代水利、农业、天文，十分发达，此项工作需要测绘，中算家又兼通测绘，为着说明这些情况，现就古代中算家对于进行测绘术的经过，分述如下：

中国最早掌握着准、绳、规、矩四种测绘工具。公元前二千年，禹治水，即需用此四项工具。《史记》卷二《夏本纪》说：(禹)"陆行乘车，水行乘舟，泥行乘橇（音敲），山行乘檋（音局），左准绳，右规矩，载四行，以开九州，通九道。"《周髀算经》卷上说："故禹之所以治天下者，此数之所生也。"也说明进行水利，需要算数。汉成帝初（公元前 32 年）河堤都尉许商开凿滴水通海，此水名商，为着纪念许商，又在商旁加水，说明他工作的伟大和成就。许商（一作许商）是中算家，又著有《许商算术》二十六卷。总之治理水利需要测算，是毫无疑问的。所以隋仁寿四年（公元 604 年）十一月"发丁男数十万掘堑自龙门东接长平、汲郡，抵临清关，度河至浚仪、襄城，达于上洛，以置关防。"此项掘堑工程，需要测算。所称掘堑，即《九章算术》的穿堑。唐李籍《九章算术音义》："堑，七艳切，长于沟也，水之绕城者。"《九章算术》卷五商功有计算穿地内、穿沟、穿堑、

* 本文原载《测绘通报》1956 年第 4 期第 145～147 页。

穿渠计算体积的方法，又有春程(出土)人功，夏程人功，秋程人功，去沙、砾、水、石之功，和定功相比较的比例率。

再次是农业。中国“田”字，是几何图形的象形文字，《九章算术》第一章就是“方田”，说明田是四四方方的。古代封建社会时期，《王制》说：“公、侯田方百里，伯七十里，子、男五十里”，是统计有可耕的方田百里算是公、侯爵，有七十方里耕地是伯爵，有五十方里耕地是子、男爵。这是统计方田的数字，加以确定的。至如何知道此项田亩的多少数字，自然需要测算统计。《九章算术》第一章，方田，内列有计算面积方法，如：

平方形即方田，它的面积 $s=a^2$，就中 a 是每边长度，如图 1。

矩形即广田，它的面积 $s=ab$，就中 a,b 是两边长度，如图 2。

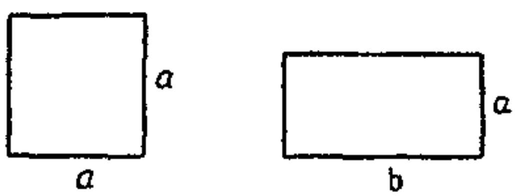


图 1　　图 2

三角形即圭田，它的面积 $s=\frac{1}{2}ab$，就中 b 是底边，a 是高度，如图(3)。

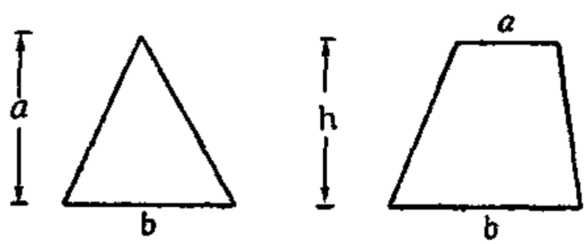


图 3　　图 4

梯形作斜田、箕田，它的面积 $s=\frac{a+b}{2}h$，就中 a,b 是上下边，h 是高度，如图 4。

都是就田做对象，说明田地是需要测算的，有着测算工具和上述公式，测算田亩自然可以进行。

中国古代天文历法，是需要观测，所以《史记》卷二十六唐司马贞《索隐》引《世本》说："黄帝使羲和占日，常仪占月，臾区占星象，伶伦造律吕，大挠作甲子，隶首作算数。"就中占日、占月、占星象，即观测日、月、星象，这和作算数同时，是说明中国四千年前已同时注重观测和算数。

《尚书·尧典》说到"期三百六旬有六日"，和用闰月定历法的原则。因地绕日一周成一岁，月绕地一周成一月，地自转一周成一日，用一日做单位，估计起来年、月都有奇零。古代用竹竿、土圭测日影，发现夏至日影最短，冬至日影最长。又连测四年，发现四年内 1461 日的日影，渐渐恢复原处，就定一年做 $\frac{1461}{4}=365\frac{1}{4}$ 日。《颛顼历》(公元前 264 年)，和以后《太初历》(公元前 104 年)、《三统历》(公元前 7 年)、《四分历》(公元 85 年)都是这个系统，说明祖国最初历法，即由观测得来。

《周髀算经》说："日中立竿测影。"又说："即取竹，空径一寸，长八尺，捕影而视之，空正掩日。"是说明用竹管测日的方法。

古代测量所用土圭和浑天仪。宋武帝(公元 420 年)平中原，曾发现赵刘曜的浑天仪和土圭，其中："浑仪铭题是光初四年(公元 321 年)铸，土圭是光初八年(公元 325 年)作，并是(赵)刘曜所制"(见《隋书》卷十六)。

到贞观中(627～649)唐李淳风造四游仪，开元十年(公元 722 年)僧一行同梁令瓒造黄道游仪，测算工作更加进步。

掌握"准绳规矩"的工具，进行测算的方法。《周髀算经》卷上说到："平矩以正绳，偃矩以望高，复矩以测深，卧矩以知远。"唐李籍《音义》："偃，于宪切，仰也。复，敷目切，俯也。矩，表也。仰表所以望高，俯表所以测深。"这说明如何用矩来做测量。到魏刘徽注《九章算术》(公元 263 年)又造重差方法，列在《九章》后面。他自己在《九章序》说："辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。"现存《算经十书》内《海岛算经》，就是刘徽的重差，共有九题。

《海岛算经》第二题：

今有望松(x)生山上，不知高下，立两表齐高二丈(a)，前后相去五十步(b)，令后表与前表参相直，从前表却行七步四尺(c)，薄地遥望松末，与表端参合，又望松本入表二尺八寸(e)。复从后表却行八步五尺(d)，薄地遥望松末，亦与表端参合。问松高(x)及山去表(y)各几何。

答曰：高一二丈二尺八寸，山去表一里二十八步七分步之四。

术曰：以入表(e)乘表间(b)为度，相多($d-c$)为法，除之，加入表，即得松高(x)。

求表去山远近(y)者，置表间(b)，以前表却行(c)乘之，为实，相多($d-c$)为法，除之，得山去表(y)。

第二题内"薄地"，和第一题"人目着地"相同，就是唐李淳风引汉张衡《灵宪》所说用"薄地之仪"的测量方法。

此题图 5，如术意，得：

$$x=\frac{be}{d-c}+e;$$

$$y=\frac{bc}{d-c}。$$

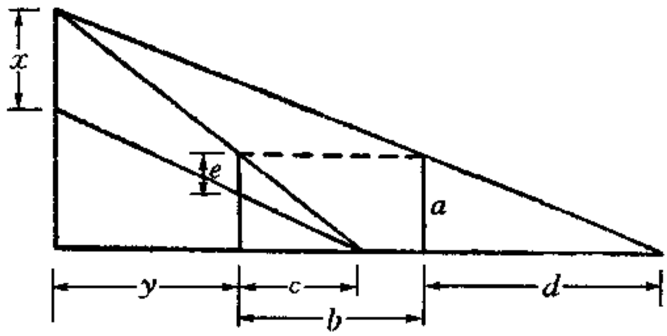


图　5

关于绘图方法,《周髀算经》卷上说:"凡为此图,以丈为尺,以尺为寸,以寸为分。分:一千里,凡用缯方八尺一寸,今用缯方四尺五分,分为二千里。"这说明制图用比例尺的方法。上半段说明,如用 1 分＝1000 里的比例尺标准,则用方八尺一寸的帛缯,可在上面绘方八十一万里的图。下半段说明,如用 1 分＝2000 里的比例尺标准,则只须用四尺五分的帛缯,即可在上面绘方八十一万里的图。

到晋裴秀(224～271)对于绘图方法,更有成就。《晋书》卷三十五《裴秀传》:

> 裴秀字秀彦,河东闻喜人也……作《禹贡地域图》十八篇,奏之,藏于秘府。其序曰:
>
> 图书之设由来尚矣,自古立象垂制,而赖其用。三代置其官,国史掌厥职。暨汉屠咸阳,丞相萧何尽收秦之图籍。今秘书既无古之地图,又无萧何所得,惟有汉氏《舆地》及《括地》诸杂图,各不设分率,又不考正准望,亦不备载名山大川。……今……为《地图》十八篇。
>
> 制图之体有六焉。一曰分率,所以辨广轮之度也;二曰准望,所以正彼此之体也;三曰道里,所以定所由之数也;四曰高

下，五曰方邪，六曰迂直，此三者各因地而制宜，所以校夷险之异也。

有图象而无分率，则无以审远近之差。有分率而无准望，虽得之于一隅，必失之于他方。有准望而无道里，则施于山海绝隔之地，不能以相通。有道里而无高下、方邪、迂直之校，则径路之数，必与远近之实相违，失准望之正矣，故以此六者参而考之。

然远近之实定于分率，彼此之实定于道里，度数之实定于高下、方邪、迂直之算。故虽有峻山巨海之隔，绝域殊方之迥，登降诡曲之因，皆可得举而定者。准望之法既正，则曲直远近无所隐其形也。……

泰始七年(公元 271 年)薨，时年四十八。

此传第一段介绍秦汉地图的文献。第二、三段说明测绘的六项规律，和六项：分率、准望、道里、高下、方邪、迂直的相互关系。其中第一项分率，即《周髀算经》所记分为一千里，分为二千里的分率。是用比例尺的方法。所以裴秀说："有图象而无分率，则无以审远近之差。"准望、道里，即高低、远近的定测。所以裴秀说："准望所以正彼此之体，道里所以定所由之数。"最后裴秀又将高下、方邪、迂直三项归纳称："度数之实定于高下、方邪、迂直之算。"是说明通过算术，以进行测绘。

祖 冲 之*

大约公元五世纪，中国数学家祖冲之（429～500）计算出圆周率的数值是在 3.1415926 与 3.1415927 之间；并且用分数来表示，把$\frac{22}{7}$叫做“约率”，$\frac{355}{113}$叫做“密率”。在欧洲，圆周率$\frac{355}{113}$是日耳曼学者奥托（Valentin Otto 或 Valentinus Otto）在 1573 年得到的，已经在祖冲之后一千多年了。所以，日本数学史家三上义夫（1875～1950）曾经建议把这个圆周率叫做“祖率”，作为对这位杰出的中国古代数学家的纪念。

中国古代农业的发展推动了天文学的研究，也推动了数学的研究。三千年前，算术中的九九乘法歌诀已经成为普通的常识。在中国最古的两部数学著作《周髀算经》和《九章算术》（这两部书大约在公元前后一世纪完成）中，我们可以看到，在那样辽远的时候，中国数学家对于算术、代数、几何的研究都已经有很大的成就，并根据研究的结果，运用到实际生活中去，例如计算田地的面积、土方的体积、粮食的分配和测算太阳离地的高度等等。

在很早的时候，中国便有了画圆的工具。山东嘉祥县一座汉代祠宇（建成于 129～147）里有一幅石刻，画面上有两个古代传说中蛇身人首的神人伏羲和女娲（图 1）。左边的一个人（女娲）手里拿

---

* 本文原载《科学大众》1956 年第 9 期第 417～419 页。

的便是在古书中叫做“规”的画圆工具，相当于现在的圆规。另一个人（伏羲）手中的画直角的工具叫做“矩”（角尺）。要计算圆的面积和圆形容器的体积，都必须要知道圆周率。所以圆周率的问题很早就引起了中国数学家的注意。

图 1　伏羲手执矩，女娲手执规图。

在《周髀算经》中曾经把圆周的长度定为直径的 3 倍，就是圆周率为 3。汉代伟大的天文学家张衡（78～139）对数学也有研究，他把圆周率定做 3.16。三国时代魏国的数学家刘徽（公元三世纪）计算出圆周率是 3.14。

刘徽研究圆周率的方法叫做“割圆术”。看图 2，首先用半径把圆周 6 等分，作内接正 6 边形；再 12 等分，作 12 边形，假定半径为 1，用中国古代早已发明的“勾股弦定理”，计算出 12 边形的周界之和；然后把圆继续

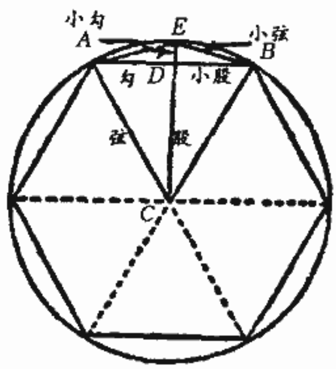


图 2　刘徽割圆术图解。

24 等分……直到 96 等分，求出 96 边形的周界之和。刘徽说："割之弥细，所失(多边形周界与圆周的差数——引者注)弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"他的计算到 96 边形为止，得到的周界之和是 6.282048。假定直径是 1，那末周界就是 3.141024。他舍弃了后面四位小数，把圆周率定作 3.14。

刘徽这个方法和理论对当时的数学研究来说，具有极大的进步意义。他已经知道用逐次分析的方法，使折线逐步地接近曲线，用多边形的周界逐步地接近圆周，已经有了极限的观念。

刘徽之后二百年，祖冲之终于计算出圆周率的更精确的数字。唐代初期(公元七世纪)官修的史书《隋书》中，对祖冲之和他以前的学者对圆周率的研究，有详细的记载。《隋书》指出：古代数学定圆周率为三，圆径率为一，方法很不精密，常有误差。张衡、刘徽和其他学者，各自定出新率，没有一致意见。祖冲之用精密的方法，以圆径为 1 丈，计算出圆周的大数是 3.1415927 丈，小数是 3.1415926 丈，真正的数值在这大小两数之间；密率是圆径 113，圆周 355；约率是圆径 7，圆周 22。《隋书》认为祖冲之的方法，十分精密，认为祖冲之是杰出的数学家。他所著的书，名叫《缀术》。

祖冲之的时代，是中国正处于南北分裂的时代，北方是鲜卑族建立的魏朝，南方是汉族建立的宋朝和继之而起的齐朝。由于汉族的南迁，富庶的南中国得到开发，经济生活日益繁荣，对度量衡的要求也更加精密。祖冲之对圆周率的研究成果适应了这个需要。根据《隋书》的记载，祖冲之曾经用他的圆周率，计算出一种圆柱形的古代量器的容积，所得到的结果，比较以前精密得多。在另外一种史书上，还记载着公元 561 年曾经用他的圆周率计算出一种名叫"玉斗"的量器的容积。

祖冲之的《缀术》在唐代(618～907)官学的数学部门曾经被规

定为高级班的教科书，学习期限四年（修业年限共七年），可见是一部艰深的、当时在数学研究中有重要地位的著作。可是大约在公元十二世纪初，在北方游牧民族南侵、宋朝南迁前后，这部宝贵的著作不幸遗失了。因此，关于祖冲之在数学上的造诣，包括他对圆周率的求法，还有待于搜集更多的材料进行研究。照目前看来，在圆周率的求法上，他可能发展了刘徽的“割圆术”，但是也可能有他自己的创造。

祖冲之是河北涞水人，后来迁到江南居住。他的先祖曾经做过掌管历法的官吏，祖父做过皇家工程师。家庭的传统使他对科学研究有很好的条件，他自己也肯钻研。在担任政府和地方官职期间，他对科学研究未尝间断。除了数学以外，他在天文学上也有卓越的贡献。

中国古历为了使太阳运行（实际上当然是地球运行）一周和月亮运行一周的日数相配合，曾经发明 19 年 7 闰法，即 19 年中有 7 个闰年，这闰年每年多一个月。祖冲之认为不够精密，改为在 391 年中设置 144 个闰年，他测定每一回归年（太阳连续两次经过春分点所需要的时间）的日数是 365.24281481 日，与近代科学所得的日数相差大约五十秒；他又测定月亮环行一周的日数是 27.21223 日，与近代科学所得到的日数 27.21222 日相差不足一秒。他推翻旧说，确定木星在天空环行 7 次约 84 年，近代天文学知道木星公转 1 次是 11.86 年，7 次是 83.02 年，和祖冲之的数字很接近。

公元 462 年，就是他三十三岁的时候，祖冲之提出了他制作的通称《大明历》的新历法。这个历法除了包括上述他的研究成果以外，还破天荒地应用了“岁差”。古人以冬至点（太阳离地最近处）为一年之首。在四世纪的时候，天文学家虞喜首先发现了“岁差”的现象，也就是冬至点每 50 年要西移 1 度，所以太阳从今年冬至起绕

行太阳一周到明年冬至，并没有回到今年冬至原来的位置。祖冲之根据自己研究的结果，证实了虞喜的说法，但是他主张冬至点每45年余西移1度。岁差的发现和在造历中应用(尽管岁差的数字很不精密)，使回归年和恒星年(太阳连续两次经过某一恒星所需的时间，就是地球的公转周期)有了分别，这在中国古代天文学史上有划时代的意义。

不难看出，祖冲之在天文学上的成就，是和他在数学上的造诣分不开的。他又继承了中国古代天文学家的优良传统，除了从古书中搜集大量材料以外，还亲自从事于实际的观测。新历就是他根据研究和观测的结果制作出来的。

但是祖冲之把新历向皇帝提出之后，立即受到当时皇帝的宠臣戴法星的反对，指责祖冲之"诬天背经"。后来虽然经过科学比较，证明新历比旧历要好，但是由于当时朝代的更迭，在祖冲之逝世之前，一直没有施行。直到公元509年，才由祖冲之的儿子祖暅重新提出实行新历，510年开始施行，至公元589年为止，一共施行了80年。

祖冲之不但是数学家、天文学家，还是一个机械制造专家，这很可能是受他那位担任皇家工程师的祖父的影响。

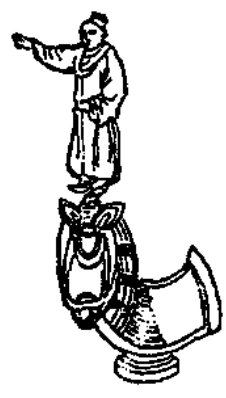


图3 我国古代的指南车

中国古代就有人能制造指南车，利用机械的原理，不论车子如何回转，车上木人手指的方向永远向南(图3)。当时的皇帝得到了一部指南车，但是内部机械已经完全遗失，只能做为皇帝仪仗队里的陈设。可是祖冲之用铜制机件，把它修复了。他还创造了一种陆上的运输工具，一种每天能走50公里的"千里船"和一种利用水力的水碓磨。他的这些创造现在都已经看不到

了。根据后代的记载，指南车的主要部分是一组由五个齿轮所组成的差动齿轮机，而陆上运输工具是仿照三国时代的(220～280)诸葛亮发明的“木牛、流马”(两种车辆)制成的。“千里船”可能是用轮子激水前进的，唐、宋(公元7～13世纪)两代历史记载中都有这样的船只。至于水碓磨，远在祖冲之以前许多世纪，中国就已有“水碓”和“水磨”，因此他把两者联结起来并加以改进是完全可能的。直到今天，我国南方农村里还广泛地流行着水碓磨。从当时南中国农业生产的发展来看，祖冲之这些创造也都是适应了社会的需要。

同比他早350年的多才多艺的张衡一样，祖冲之不但在科学和机械制造上有很大的成就，并且爱好哲学、文学和音乐。他曾经注释过古代哲学经典著作《易经》、《论语》、《老子》、《庄子》等书，写过小说“述异记”，还制作过一种校正乐器的铜尺。

祖冲之的儿子祖暅继承了家庭的科学传统。他用立体几何中的一种方法求得圆球的体积，如果用现代数学来表示，那末他所用的公式是$V=\frac{11}{22}D^3$，也就是$V=\frac{4}{3}\pi r^3$。这里V是圆球体积，D和r分别是圆球的直径和半径，$\pi=\frac{22}{7}$。他还制作了铜日圭(测量日影，以定纬度)和滴漏(时计)，都极精密。公元514年，他曾经在治淮工程中服务。祖暅的儿子祖皓也擅长数学，通晓天文。但是公元549年，祖皓在将军侯景的武装叛乱中被杀，从此，家庭世代相传的学术传统便不幸中断了。

中国古代的数学很早便传到亚洲各国，特别是印度和日本。据日本数学史家的研究，祖冲之的《缀术》曾经传入日本，日本数学家关孝和(1642～1708)可能见到，但是后来也散佚了。今天，祖冲之在科学，特别是数学上的成就已为全世界公正的科学家所公认。在苏联莫斯科大学，祖冲之的塑像和世界各国科学家的塑像并列。这

位杰出的中国古代数学家在身后 1500 年终于享受到了他应得的，但是在他生前却梦想不到的荣誉。

梅文鼎的生平及其著作目录*

梅文鼎字定九，号勿庵，安徽宣城县人。梅氏世居宣城县东南七十里的柏枧山口，以后散居蒲田等三十余村。文鼎祖端箬，父士昌（1569～1654），文鼎明崇祯六年（1633 年）生，儿时从父和塾师罗士宾仰观星象，知道大略。自二十七岁到三十七岁（1659～1669），这十年期间，从同里倪正学习天文历法，读《台官通轨》、《大统历算交食法》各书。清康熙五年（1666 年）到南京应乡试，读到明清时期的泰西历算书。十四年（1675 年）又从吴门姚氏购得《崇祯历书》。文鼎为学甚勤，自言废寝食者四十年。从倪正学习时，已开始著书。首先修订《台官》、《交食法》，成《历学骈枝》四卷（1662 年）。倪正以为智过于师。以后继续著《中西算学通》。算学方面首先著《方程论》六卷（1672 年），又著《筹算》七卷（1678 年），康熙十九年（1680 年）蔡璿曾为刻出，时在南京。康熙二十八年（1689 年），文鼎到北京，亦尝午夜篝灯夜读，昧爽则兴。先是清廷开始设局修《明史》（1666 年），其中《历志》最后由黄宗羲（1610～1695）主编，交文鼎审阅，文鼎曾摘讹舛五十余处。著有《明史历志拟稿》三卷（1689 年），以后《明史》正式历志，即采用文鼎的拟稿。

关于算学方面，文鼎自著《勿庵历算书目》（1702年），说明拟编

---

* 本文原载《安徽历史学报》创刊号（1957 年）第 93～94 页。

《中西算学通初编》和《续编》,除(1)《中西算学通序例》一卷(已刻)之外,又(2)《勿庵筹算》七卷为第一书(已刻)(1680年),(3)《勿庵笔算》五卷为第二书(已刻)(1693年),(4)《勿庵度算》二卷为第三书(已刻),(5)《比例数解》四卷为第四书,(6)《三角法举要》五卷为第五书(已刻)(1672年),(7)《方程论》六卷为第六书(已刻)(1672年,1687年),(8)《几何摘要》三卷为第七书,(9)《勾股测量》二卷为第八书,(10)《九数存古》十卷为第九书,拟做初编。自此以后,并为续编,即:

(11)《少广通法》一卷(已刻)

(12)《方田通法》一卷(已刻)

(13)《几何补编》四卷(已刻)

(14)《西镜录订注》一卷

(15)《权度通几》一卷

(16)《奇器补诠》二卷

(17)《正弦简法补》一卷

(18)《弧三角举要》五卷(已刻)

(19)《环中黍尺》五卷(已刻)

(20)《堑堵测量》二卷(已刻)

(21)《用勾股解几何原本之根》一卷(已刻)

(22)《仰观复矩》一卷

(23)《方圆幂积》(已刻)

(24)《丽泽珠玑》一卷

(25)《古算器考》一卷(已刻)

(26)《数学星槎》一卷

以上算学书共二十六种,内已刻者十六种。

梅文鼎曾馆李光地(1642~1718)家,其子李钟伦(1663~

1709),其弟李鼎征都从文鼎学习,又由李光地举荐,与修《明史·历志》,并进谒清帝爱新觉罗玄烨(1702年,1705年)。文鼎弟文鼐(1641～?),文鼐子以燕(1654～1705),孙瑴成(1681～1763),玕成;曾孙鈖、鈚、鉁、钫、鏐、鋮,都通算学,其中瑴成较著名。文鼎于康熙六十年(1721年)死,年八十九岁(1633～1721)。

文鼎死后,魏荔彤曾于雍正元年(1723年)以兼济堂名义刻《梅氏历算全书》三十种七十五卷,此书亦收入《四库全书》(1781年)之内。文鼎孙瑴成曾于乾隆四年(1739年)编有《兼济堂历算书刊缪》一卷,说明魏荔彤所刻《梅氏历算全书》内:命名之缪、凡例之缪、目录序次之缪、算法诸书之缪、历法诸书之缪各点,因于乾隆二十四年(1759年)另以承学堂名义刻《梅氏丛书辑要》二十三种,六十一卷,附录二种二卷。关于算学方面,兼济堂《梅氏历算全书》(1723年),和承学堂《梅氏丛书辑要》(1759年)所校刻不同各点,分列如下:

《梅氏历算全书》(1723年)	《梅氏丛书辑要》(1759年)
平三角举要五卷(即三角法举要)	平三角举要五卷
勾股阐微四卷	勾股举隅一卷
	几何通解一卷
弧三角举要五卷	弧三角举要五卷
环中黍尺六卷	环中黍尺五卷
堑堵测量二卷	堑堵测量二卷
方圆幂积一卷	方圆幂积一卷
几何补编五卷(原四卷,多补遗一卷)	几何补编四卷
解割圆八线之根一卷(杨作枚撰)	

古算衍略一卷	
〔即:古算器考,方田通法〕	
笔算五卷	笔算五卷
	附:方田通法
	古算器考
筹算七卷	筹算二卷
度算释例二卷	度算释例二卷
方程论六卷	方程论六卷
少广拾遗一卷	少广拾遗一卷

参 考 文 献

李俨《梅文鼎年谱》,《中算史论丛》第三集(1956年)第544~576页内引文(*见本书第七卷。——编者)。

梅瑴成《兼济堂历算书刊缪》(日本浅草文库藏钞本),李俨藏影摄本一册。

《中国学术家列传》第349~350页。

第八届国际科学史年会内数学史情形报告*

第八届国际科学史年会(VIII° Congresso Internationale di storia delle scienze)于1956年9月3～9日在意大利的佛罗伦萨(Firenze)和米兰(Milano)举行的。

此次参加年会的共有三十二个国家,出席和提出论文的,共有363人①,实际出席和宣读论文的将近百人。

---

* 本文原载《数学进展》第3卷第1期(1957年2月)第164～165页。

① 计划参加此次年会的国家和人数,如下:

(1)	Argentina	1人	(18)	Jugoslavia	3
(2)	Austria	1	(19)	Lussemburgo	1
(3)	Belgio	5	(20)	Messico	1
(4)	Brasille	1	(21)	Olanda,荷兰	19
(5)	Canada	2	(22)	Polonia,波兰	16
(6)	Cina,中国	4	(23)	Portogallo	3
(7)	Cecoslovacchia	4	(24)	Romania	1
(8)	Danimarca	1	(25)	Sivia	6
(9)	Egitto	1	(26)	Spagna	2
(10)	Francia,法国	52	(27)	Svezia	5
(11)	Germania,德国	1	(28)	Svizzera	6
(12)	Giappone,日本	3	(29)	Tunisia	1
(13)	Grecia	3	(30)	Turchia	5
(14)	Italia,意大利	85	(31)	U.R.S.S. 苏联	53
(15)	Irag	1	(32)	U.S.A. 美国	38
(16)	Israela	12			
(17)	Ingliterra,英国	26			共363人

其中第一组是数学、物理和天文。曾将论文提要先期寄交年会的有72篇，属于数学的共20篇，尚有在开会时期加入的论文，总结此次年会，其中有关东方和中国的数学史论文，共有6篇，即：

1. 波兰：J. Dianni，波兰数学家的割圆术。

2. 法国：G. Guitel，埃及古代数字记法。

3. 日本：小堀宪(A. Kobori)，十七世纪的和算。

4. 苏联：尤什凯维契(А. П. Юшкевич)，阿拉伯数学发展各特点。

5. 中国：王铃，中国小数记数发展史。

6. 中国：李俨，古代中算家内插法计算。

查国际科学史会，曾编有季刊，名：*Archives internationales d'Histoire des Sciences*，每期约120页，在巴黎出版。此次曾在会上向各方征稿，并征订户。此季刊由1947年创刊，历年所发表论文已逾百篇。闻尚可补配全分季刊(即由1947年到1956年的)。

又日本科学史学会亦已编有十年的会刊，名《科学史研究》，由东京岩波书店出版。1956年7～9月已出版到39号。

武田楠雄(Kusno Takeda)1953～1956年曾在该季刊中发表关于中算史的论文，如：

明代算术书形式的变迁，《科学史研究》，26号(1953年)。

明代数学之特质，Ⅰ—Ⅲ，《科学史研究》，28，29，34号(1954～1955)。

同文算指之成立，《科学史研究》，30号(1954年)。

《四部总录算法编》序*

研究中国算数方法，首先需要参考书目，这在以往是深切感到的。1926年俨曾编有《明代算学书志》；1928～1929年曾编有《近代中算著述记》。1943年又将这观感在《近代中算书目的编辑》一文中作了详细记述，发表于《读书通讯》第五十七期(第16～17页)。此文曾收在《中算史论丛》第五集《三十年来的中国算学史》之内**。现在只将其第三节的头一段引述于下：

> 一代文献，如及时集录，自可比较详实。司马迁《史记》，班固《汉书》，以及徐梦莘《三朝北盟会编》，李心传《建炎以来系年要录》，都由当代人士，根据当日史料，编成信史，为后人所称道。到唐宋元明，则往往在国社沦亡之后，由后一朝官家，代它编史，疏忽简略，自不能免。此外专门史料，尤未能详细记录；例如《明史》由清朝官吏编辑，其中记录历算书籍，仅仅有几种。我们在三百年后，根据各项典籍，还可考出永乐时代算书，万历时代算书，数有百种。可是算盘发明的确实时期，和回

* 本文写于1956年6月22日，原载《四部总录算法编》六～七叶，商务印书馆1957年，文物出版社1984年重印。

** 见本书第八卷，两者文字稍有不同。——编者。

回历算家土盘的计算方法，都因为资料不全，到现在还未能详尽确切知道。此外隋唐宋元算书，如根据正史以外其他各书，也有可以补充的地方。此项史料，已经陆续载在拙作《中国算学史》(1937 年)之内。可是以往的事，仅仅可以作为我们的参考，现在既然事隔时远，无法补救，问题似不甚大。明清距离现在还不太远，当时所编著刊刻的中算书籍，到现在还没有专门的著作记录，是十分抱憾的。1912 年以来，一般研治中算史的学者，都以为研求中国算学史，应当首先从搜罗中算书籍史料入手。此外公私收藏的中算书籍，也要详细调查，编成书目，供给群众观览。

以上所述，是多年前的情况，而且主要指明清两代中算书目的编集，在今天看来，是不够全面的。目前很需要有一部比较详备而全面的中算书目提要，供研究中国算数方法和纂著中算史料者作为参考。俨以往所编《近代中算著述记》限于清代，而在 1928 年初编成之后，到 1937 年、1940 年、1953 年，都有修订。现在发现其中还有遗漏，需要补充。可见仅仅编录一个书目，也是十分繁重的工作。除编辑书目之外，进一步的更应当编辑一部书目提要，这是一件极需要做的事，但一时还没法顾到。

过去俨写过《东方图书馆善本算书解题》、《明代算学书志》*，可为编写算书提要的开端。以后又于 1935 年曾将我自己所藏算数书籍在西安图书馆展览，各图书分别编有提要来说明，名曰《中算书录》，刊载于《西安日报中央圖刊》中。以上都只限于个人所知所见，以及自藏的狭小范围，不是全面的。祖国文化遗产中，资料丰富、数

* 此二文，前者 1934 年收入《中算史论丛》(二)，后者 1928 年收入《中算史论丛》(一)，1954 年修订后均收入《中算史论丛》第二集。又见本书第六卷。——编者

量极多的中算图书，没有一部全面的书目提要，总是一般学习、研究中国算数方法和整理自然科学史的工作者，常感到遗憾的。

无锡丁福保先生曾受业于其同乡华若汀(蘅芳)、若溪(世芳)两位名算学家，在清末担任里中竢实学堂算学教习时，就编有《算学书目提要》等书。1926年起，曾和他的学生周云青共同编纂《四部总录》一书，广及经史子集四部。这部书网罗古代以至近世学者的著作，以现今还有传本者为限，并备载前人序跋、解题的一种书目，范围很广。全书早经脱稿，又大部分已排竣，但始终未曾出版。而丁先生已经逝世(1952年卒)。

《算法编》就是全书中关于算学的部分。这次提出出版，曾经周先生加以整理，补充了不少新材料，内容比旧编又丰富得多了。

周先生在搜集参考资料上，很用过一番功夫。他把北京图书馆所藏的南通冯清渠(瀓)的《算学考初编》稿本二十卷，以及我所收藏的番禺梁孝乐(兆铿)的《天文算法考》稿本十六册，其中有用的资料，尽量采入，希望竭力做到完备。此外又把我所发表过的《中算书录》，也全部收入本编内。还有我国现存的算学丛书极多，过去尚无详细的目录，他根据《丛书总录》稿本，把整个天文算法类先附印在此编补遗之内，供做参考，对读者也可以有很多的帮助。

我多年来就主张要为学习、研究祖国算法以及编写中算史料工作者，搜集目录学的资料，首先需要整理出一部比较完备全面的中西算学书目提要。《算法编》的出版，在这方面，可以说是一个最好的起点。椎轮为大辂之始，我希望研究我国算学史的同志们，能够利用这一部工具书，对我们祖先遗著，继续深入研究，撷精捃华，发扬光大，使原有着光荣传统的算学，能发出更灿烂光辉的异采！

《铜陵算法》的介绍*

（一）

《铜陵算法》一书是十六世纪说明珠算的民间算书之一，现在可以看到的有二种校订本：第（一）种是《铜陵算法》，日本东北大学有藏本[①]，书面题：

书内第一行题有：

校正《铜陵算法》序　京都打磨厂文口堂梓行

字样，另有王相晋升序文七行，如下：

古者伏羲始画八卦，周公叙述《九章》。至于玄元益古₁，

---

* 本文原载《安徽历史学报》第 2 号(1958 年)第 67～70 页。

① 见日本武田楠雄《明代数学之特质》，《科学史研究》，第 29 号，第 8～18 页。

(如)积细草,其旨深矣,使初学者无可寻绎旧有(铜陵总龟)诸家₂(算法)非不精详,奈何刊者恒(有)鱼鲁之误,亥豕之讹₃他书不可,而况算书,真所谓差之毫厘,(失)之千里也₄友人俞子笃培(素)精算学,深得其奥,偶因暇日重较₅是书,详晰而精(微),简易而洞彻,使学者一览了然,诚₆后学之津梁,钧衡之秘宝也,识者鉴志。王相晋升题₇"①

此序文上半节引《事林广记》"算法源流",下半节又和集新堂本《指明算法》,王相序文相同。又(一)种书面题《算法指明》是李俨藏本,书内《算法指明序》文句,和《指明算法》大体相同,除目录外,第一页前有:

新镌校正《铜陵算法》上卷

莆阳俞嘉会笃培氏校订

京都打磨厂永魁斋梓行

三行,全书目录如下:

(上卷)

算盘定式(分别法实左右图),九九上法,九九退法,九因合数,九归歌,乘除加减倍折总诀,算至极数法大数,小数,丈尺,粮数,觔两,田亩变算口诀,算学节要,分别法实左右图,九归算法,九因还原法,乘法,归除法,撞归法,起一还原法,便蒙法实总诀,混归法歌诀。

(下卷)

(混归法歌诀,续),分别物价乘除法实歌诀,截两成斤歌,倾煎论色,丈量田地总歌,田亩科粮带耗法,田中算稻法,铺地锦歌,掌中定位歌诀,因乘定位法,一掌金法。

---

① 字有括号的,是校补字。

此外还有一种称做《铜陵九章捷径算法》，曾经流传到日本，现已佚亡。

查王相字晋升号訒庵，琅琊或临川人，亦有误作汪訒庵，他曾参订蒋守诚《绘意云笺》(1677 年)，又自撰卜筮书:《增补玉匣记通书》(1684 年)，题"康熙甲子(1684 年)嘉平，琅琊王相晋升识"①

关于《指明算法》，现在有(一)种《指明算法》二卷，是福州集新堂藏版本，题:"戊戌(1718 年)瓜月重写新镌"(日本小仓金之助收藏);又有(一)种题:"新镌校正《指明算法》二卷，金陵郑元美校正，以文居藏版本"，(日本冈本则录收藏)。这说明我们见到的清初的《指明算法》、《算法指明》，以及《铜陵算法》，都是俞嘉会和王相的校订本。

(二)

铜陵是一县名，明属南京省池州，清属安徽省池州府。铜陵县位于长江南岸，是明末清初以来商业相当发达的县城。现在见到的《铜陵算法》是校订本，旧有原本还未发现，校订本也没有提及原撰人姓名和著书年月。王相自称琅琊人，琅琊是在安徽滁县西南十里，琅琊山中，宋建炎中置有一寨，今基址尚存。以往文人好以古代地名自称，如以琅琊为根据，王相也是安徽人，可是王相参订蒋守诚《绘意云笺》(1677 年)四册，是题:

义兴蒋守诚，正先编辑

临川王相晋升参订

① 参看藤原松三郎《中国数学史之研究》Ⅳ、《东北数学杂志》第四十八卷(1941 年)。

二行，在同书第四卷，又题

琅琊，王相晋升汇选。

查义兴是安徽霍山县地。临川明时江西省抚州府治。王相又作临川人未知何故。此外蒋守诚曾撰有《算法全书》四卷，有康熙十四年(1675 年)自序。

以上说明王相曾和同里安徽人撰各篇序文，他是安徽人，在清初可以看到原本《铜陵算法》。而《铜陵算法》又是适应铜陵县农民和商人的民间算书。

(三)

为了适应农民的民间算书，在明代算书中还有关于"各县科则"的记录，如程大位《算法统宗》(1592 年)曾记录万历九年(1581 年)"休宁县科则"，徐心鲁《盘珠算法》(1573 年)曾引有"铜陵科则只如然"的歌词。其中《算法统宗》卷三记：

休宁县科则　附辨亩法论

本县于万历九年(1581 年)清丈，有粮里编号，二百一十一里□带□无粮里三十四里半。以千字文编号，自在城东北隅，天字一号起，至三十二都八图，建字号止。

田亩起科等则每斗加耗七合。地。山同。

田　每一亩古科

米共五升三合五勺

带耗

麦共二升一合四勺

带耗

地　每一亩古科

米共三升二合一勺

带耗

麦共二升一合一勺

带耗

新　　制

米共三升八合七勺一秒三　带耗

麦共一升九合八勺七秒　带耗

(米)比古来增,而麦减何也,盖谓古有官庄产土,租米重,而租麦轻,又紫阳书院田,府县学田,有米无麦,今变总归于一则,丈出亩步,摊派租米租麦各亩步不相等,而田、山、塘等起科,不废古法,惟地扣合米麦总数之故云。

山　按原额计亩。新丈不计步数。

每亩共米一升零七勺带耗麦同。

塘池潭埸同田则

园圃洲堤同地则

坟茔境迹多作上地

开垦陇野以作荒地□百为亩,入山税

又《盘珠算法》(1573年)书中引有"铜陵科则只如然"的歌词和《算法统宗》(1592年)记录万历九年(1581年)"休宁县科则"是具有相同的意义。新刻订正家传秘诀《盘珠算法》(1573年),士民利用,卷之二,记有:

新起钱粮歌法

'算田麦米歌'

田米八升七合二(勺)

田麦八勺七抄三(撮)

地麦三升六合二(勺)

地豆四(升)四(合)六(勺)相兼
山麦三合三勺九(抄)
山米一升一(合)二(勺)连
基米五升三合五(勺)
塘粮四二九无遍
田米八因加九是
基粮折半七加全
其余各则相乘亩
铜陵科则只如然

接着附有说明,即:

计开

小弓田二亩折作一亩,其法以小弓亩数在位,用五因一归就是折田。每折田一亩科正米八升七合二勺,其法以折田亩数在位用八因(一)遍复加九(一)遍也(=8+0.9×8)。科正麦八勺七秒三撮。其法以折田数在位,用八七三乘之是也。

小弓地二亩折作一亩,同田法,以小弓地亩在位,用五因一遍乃是折也。每折地一亩科正米三升六合二勺。法以折地(亩)数在位,用三六二乘之是也。科正豆四升四合六勺。以折地(亩数)在位,用四四六乘之。

小弓基地二亩折作一亩,同前法五因。每折基一亩科正米五升三合五勺。乘法,其法以折基在位,五因一遍,加七一遍也(=5+0.7×5=5.35)。

小弓山一亩四分七厘折作一亩,其法以小弓田在位,以一四七乘之,法是折山也。每折山一亩科正麦三合三勺九抄,科正米一升一合二勺。俱以乘法。

按《明会要》卷五十四食货二“田赋”条称:

明初定官、民田赋,凡官田亩税五升三合五勺,民田三升

三合五勺，重租田八升五合五勺，后官田一斗二升，芦地五合三勺，草塌地三合一勺(《世法录》)。

其中有和《算法统宗》(1592 年)卷三所记

田 每一亩 古科

米共五升三合五勺 带耗

之例相同的。其中"带耗"明初曾定"每斗起耗七合；每石则为七升的制度"[①]，明代田赋以后陆续加重，有至一斗以上的，如建文六年(1405 年)有减到一斗以下的，以后又加重，因史称："建文二年(1400 年)正月诏减江浙田赋，亩不得过一斗，有司违者罪之。后永乐中，尽革建文政，浙西赋复重。"[②] 所以《新镌校正铜陵算法》内："田亩科粮带耗法"题问有"每田一亩，科粮米八升六合，一斗二升五合，一斗五升四合三勺二抄"；以及"正米一石加耗七升"的题问，都是明代制度。到清代也曾将田亩分做"田"，"地"，"山"，"塘"，"基地"，"芦洲沙地"各项，和"折银办法"，可是科粮减轻。例如乾隆丁丑年(1750 年)重镌《铜陵县志》卷四称：

平田 每折实田一亩科南米一升八合二勺七抄一撮六圭六粟三粒一颗四颖三稷。

每折实田一亩科黄豆九合七勺四抄三撮七圭三粟一粒五颖。

和"每折实田一亩该银一钱四厘七毫二丝三忽二纤八沙四卢四渺一漠一埃"之例，其中"折银办法"是沿用明代制度，因"明太祖时，尝折纳税粮于陕西，浙江，民以为便。"又"正统元年(1436 年)遂仿

① 见《天下郡国利病书》和《明史》。

② 见《明会要》卷五十四引《三编》。

其制，米麦每石折银二钱五分……其后概行于天下。”① 可是明清折银数目尚有不同，这又可看出《铜陵算法》以及《盘珠算法》(1573年)所记“铜陵科则”原是明代制度。

(四)

复次《盘珠算法》(1573年)卷末编有：“算升斗数法”表，即将每石折银几钱，转换成每钱该几斗、几升的算表，如：

二钱一石算每银一钱该五斗

二钱五分一石算每钱四斗

… … … … …

三钱一石算每钱三斗三升三合

… … … … …

四钱一石算每钱二斗五升

… … … … …

五钱一石算每钱一斗六升六合

… … … … …

一两一石算每钱九升九合

… … … … …

一两一钱一石算每钱八升九合

的换算表。

《铜陵算法》上卷也编有“新增照常钱盘”表，称：

市价有折几钱之说，一钱每两扣除二厘，二钱每两扣除四厘，折至五钱者每两扣除一分，至于银有成色，亦照此核算。

① 见《明会要》卷五十四引《世法录》。

如：

三钱　合钱三千三百三十三文

… … … … …

三钱五分　合钱二千八百五十七文

… … … … …

四钱　合钱二千五百文

… … … … …

四钱五分　合钱二千二百二十二文

… … … … …

五钱　合钱二千文

… … … … …

五钱五分　合钱一千八百一十八文

… … … … …

的换算表，这些都是适应民间需要的。按《明史》卷七十九《食货志》第五十五食货三“仓库”条记：“嘉靖八年(1529年)乃令各抚按设社仓，令民二三十家为一社，……一人为社首，……一人为社正，能书算者一人为社副。”此时农村已需要能书算的人，自然同时也需要此类民间需要的算书。

（五）

除“田亩科粮带耗法”之外，《新镌校正铜陵算法》上卷还有“丈量田地总歌”，《盘珠算法》(1573年)也有“指明歌诀”。这“指明歌诀”是指指明算法的歌诀，这说明当时民间算书除注意“田亩科粮带耗法”之外，还注意丈量田地方法。

清初安徽算家梅文鼎(1633～1721)在所著《古算演略》之内

《方田通法》序(1666年)称：

今年春里中有事履亩，或见问桐陵法，遂出斯编相质，命曰方田通法云。

编中载有：

原法歌诀出桐陵

量田捷法人少知，

不乘一数便留之

二弓折半六而一$\left(20=\frac{240}{2}\times\frac{1}{6}\right)$

三步之中用八归$\left(30=\frac{240}{8}\right)$

四步由来六归是$\left(40=\frac{240}{6}\right)$

五步还宜六八归$\left(50=\frac{240}{6\times 8}\right)$

六数四归无走作$\left(60=\frac{240}{4}\right)$

八上三归无改移$\left(80=\frac{240}{3}\right)$

十二将来折一半$\left(120=\frac{240}{2}\right)$

十六三而加倍齐$\left(160=2\times\frac{240}{3}\right)$

二十四中随数喝$(240=240)$

廿五中分六八归$\left(250=\frac{240}{2}\times\frac{1}{6\times 8}\right)$

三十二上尤甚准

四因还要用三归$\left(320=\frac{240}{3}\times 4\right)$

四十八上加一倍$(480=2\times 240)$

八封宫中谁得知

三归八因尤甚准($240=6\times 80$)

胜如神见不差池

七二倍之加遍五$\left(720=1\frac{1}{2}(2\times 240)\right)$

九十六上四因之($960=4\times 240$)

十五之中逢二八$\left(15=\frac{240}{2\times 8}\right)$

七五之中四八归$\left(75=\frac{240}{4\times 8}\right)$

三七半时当八八$\left(37\frac{1}{2}=\frac{240}{8\times 8}\right)$

九弓加五四归奇$\left(90=1.5\times\frac{240}{4}\right)$

十八折之加五定$\left(180=\frac{240}{2}\times 1.5\right)$

三六之中加五施($360=1.5\times 240$)

此是明师真口诀

千金不度世人知

这说明多于二百四十步(即一亩),或少于二百四十步的步数,都可以二百四十步(一亩)为单位来换算。

梅文鼎《方田通法》(1666年)又记有"方田原法",称:"以所丈田横步,与其纵步相乘,得数为实,以一亩二百四十步为法除之,满法为亩,不满退除为分厘。"这又是小数应用方法。可是所谓"原法歌诀出铜陵"未见《铜陵算法》和《新镌校正铜陵算法》,即《盘珠算法》(1573年),以及明代算书,都无记载。不过是出自原本《铜陵算法》,则比较可信的。可能因为此法比较不通俗,以后未曾被普遍应用到。

此外还有一例,如日本关孝和(1640? ～1708)《指要算法》

(1712 年刊)称:$\pi=\frac{63}{20}=3.15$ 为铜陵法。现在校订本《铜陵算法》也未看到。

(六)

《铜陵算法》还有一个特点,就是介绍算盘,因为现存校订本《铜陵算法》都引有“初定算盘图式”是和《算法统宗》卷二第一页所记完全相同,也和《盘珠算法》(1573 年),《数学通轨》(1578 年)各书相同,如《盘珠算法》(1573 年)所记“铜陵科则”是出自《铜陵算法》,这又说明《铜陵算法》应在《盘珠算法》(1573 年)之前,并已有介绍珠盘和珠算方法的记录。

(七)

总上所记:《铜陵算法》是一部十六世纪说明珠算的民间算书,记有工、农有用的算法表,又是配合铜陵县农民应用的算学书,事在《盘珠算法》(1573 年)之前。现在流传的,是十七世纪流行的校订本。

中算家的记数法*

（一）

中国文字是由结绳书契，逐步演进的。《易·系辞》讲："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契。"

中国文字，在殷武丁以前 500 年（前 1700～前 1238?）已经开始，发展到武丁时代，大体成为定型。1899 年以后发现的殷虚甲骨，记有殷代卜辞，它所包含的时代，由盘庚迁殷到纣王末年，应是公元前 1300 年，到公元前 1028 年。殷虚甲骨文内说到一至十的数字。

再晚些时，周秦金文，以及古代货币文也应用一至十的数字。

东汉许慎《说文解字》是公元 121 年的作品，这部书收集战国、秦、汉的文字，加以排比。少数是参考西周晚叶的《史榴篇》。《说文》对一至十的文字，也有介绍。

现在先将这四种古代数字列在下面，作一比较：

---

* 本文系应苏联《数学史研究》主编 A. П. 尤什凯维奇教授特约稿。又载于中国《数学通报》1958 年 6 月号第 1～5 页，第 20 页。

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
殷甲骨文：	一；	二；	三；	亖；	☒；	∧，∩；	十；	)(；	九；	丨；
周秦金文：	一；	二；	三；	亖；	亖，☒；	介；	十；	)(；	九；	十；
古货币文：	一；	二；	三；	亖；	╳，☒；	介；	十；	)(；	九；	丨，I；
许慎说文：	一；	二；	三；	四；	☒；	六；	七；	)(；	九；	十。

中国文字到汉熹平四年(公元175年)石经时代,已有和现在相同的定型。不过"二十","三十"还是合文作"廿"、"卅"。

甲骨文内可以看到的殷代记数,有以对、以五、以十为计数单位的方法,是从人手和手指发生的。其中最成功的自然是十进法,现在所看到甲骨文内数字,最小是"一",由一递加到十,即一,二,三,四,五,六,七,八,九,十。十以上十进,即:十十为百,十百为千,十千为万。甲骨文内数字,最大是"万"。其中一,二,三,四和十,廿,卅,卌是象形字;五,六,七,八,九,百,千,万是假借字。如"五是午,六是入,七是切,八是分的初形;九是虿,离(即蠍子)的象形",又廿是二十,卅是三十,卌是四十,百是"一白",千是"一人"(读若千)的合文。

"万"以上又十进为"意",因《说文》心部称"十万曰意",意一作亿。唐颜师古注《前汉书》称:"十万曰亿,此古说也。"

"意"或"亿"以上又十进为"兆"。后汉郑玄注《诗经》楚茨,假乐,以及孔传《尚书》五子之歌,都说到"十万曰亿,十亿曰兆"。《逸周书》也有"十万曰亿"的记录①。

千,万,亿,兆之后,是否再十进为某数,某数再十进为某某数。根据《说文》禾部称:"一曰数意至万曰秭",即万意曰秭。其中是经过十万为亿,十亿为兆,十兆即百亿为某数,又千亿为某某数。达到

① 见李俨《中国古代数学史料》第18页(＊见本书第二卷。——编者)。

万亿为秭。韦昭注《国语》万以上有亿，兆，经，姟和畡各字。《风俗通》在万以上有亿，兆，经（京），垓（姟，畡），秭，选，载，极各字，都是十进。这说明公元二、三世纪时期，已有

一，十，百，千，万，亿，兆，（京），（垓），秭，选，载，极

的十进记数字。

在三世纪时期，万以上有十进，万进二种方法。现在有几个例子。如：《前汉书·律历志》第一下称"一亿三千四百八万二千九十七"和"一亿二千二百二万九千六百五分"。

《九章算术》卷四称：

今有积三十九亿七千二百一十五万六百二十五步，问为方几何？答曰：六万三千二十五步。

即 $\sqrt{3972150625}=63025$。

《孙子算经》卷上称：

"五亿一千六百五十六万六百五十二"，

"四十六亿四千九百四万五千八百六十八"，

"三千七百六十五亿七千二百七十一万五千三百八"，

都是用"万万曰亿"来记数。再进一步，还有万亿曰兆，万兆曰京，万京曰垓的例子。如：三世纪郑玄注《礼记·内则》称"万亿曰兆"；晋杜预注《左传》称"万万曰亿，万亿曰兆"；三国吴韦昭注《国语》称"万万兆曰垓"，是因万万曰亿，万亿曰兆，万兆曰（京），万（京）曰垓（即万万兆曰垓）。

所以在十进法内万以上，可暂定：

"一，十，百，千，万，亿，兆，（京），（垓），秭"，是以十进；

在万进法内万以上，也是

"一，十，百，千，万，亿，兆，（京），（垓），秭"，是以万进。

所以《礼记·内则》唐孔颖达疏引：

《算法》：亿之数，有大小二法，小数以十为等，十万为亿，大数以万为等，万万为亿也①。

《九章算术》卷四又称：

今有积一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百尺，问为立圆径几何?，答曰：一万四千三百尺。

此处"万亿"未曾更名为"兆"，是大数亿以上不必即是"万亿曰兆"。

根据《孙子算经》卷上称：

凡大数之法：万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京，万万京曰陔，万万陔曰秭，万万秭曰壤，万万壤曰沟，万万沟曰涧，万万涧曰正，万万正曰载。

《数术记遗》称：

黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。十等者亿，兆，京，垓，秭，壤，沟，涧，正，载。三等者谓上中下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也；中数者万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也；上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。

甄鸾注《数术记遗》引

徐爰受记云：亿亿曰兆，兆兆曰京也，此即上数也。

总上所述是中国记数万以下都是十进法。万以上到亿有十进，万进二种。亿以上有万进，万万进，倍进三种。都是随着时代而演进的。列表如下：

十进制：一十百千万

《算法》：小数
《数术记遗》：下数 } 十进制　万，亿，兆，京，(经)，垓，秭，

---

① 《资治通鉴》卷二百二十四，引同。

选，载，极

《算法》：大数　万进制　万，亿，兆，京，垓，秭。

《孙子算经》：大数 }
《数术记遗》：中数 }　万万进制　万，亿，兆，京，陔，秭，壤，沟，涧，正，载。

《数术记遗》：上数　倍进制　万，亿，兆，京，陔，秭，壤，沟，涧，正，载。

到元魏以后，即公元四、五世纪，受了印度的影响，亿以上还有百进，千进说法。所以《翻译名义》集卷三称："亿分四等。一：以十万为亿；二：以百万为亿；三：以千万为亿；四：以万万为亿。"此次"万万为亿"是倍进法。实际此时介绍的多百进，千进二项。就中强调的是千进法，特别是在小数方面。如元魏月婆首那，或北齐阁那崛多，和唐菩提流支译《大宝积经》都介绍："千亿分或千千分为俱致分"，"千千亿分，或千千俱致分为那由他分。"都是千进[①]。

归结来说，中国二、三世纪十进，万进是中国旧法，元魏以来即四、五世纪，另有万万进，倍进，还有旧法的演进。其中百进和千进是受印度的影响。

（二）

在甲骨文内看不到小于单位一以下的记数字。到二世纪《说文解字》，清段玉裁注"尺，十寸也"称："寸，十分也。（引《说文解字》）禾部曰十发为程，一程为分，十分为寸。"分以下的记数字见于古书的：

① 参看李俨《中国古代数学史料》，第158～167，168～169页（*见本书第二卷第228～241页。——编者）

《广韵》卷一和卷五都称："丝：《说文》云蚕所吐也。又，一蚕为忽，十忽为丝。"

《孙子算经》卷上称："度之所起，起于忽。欲知其忽，蚕吐丝为忽，十忽为一丝。"和前书（《广韵》）相同。再进，《孙子算经》卷上又称：

十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引。

又《前汉书·律历志》称："十升为斗，十斗为斛。"这说明度量衡中度：如以尺为单位，则尺以上有丈、引二个十进记数字；尺以下有寸、分、厘、毫、丝、忽六个十进数字；如以丈为单位，丈以下有尺、寸、分、厘、毫、丝、忽七个十进数字。又度量衡中量：如以斗为单位，可十进为斛，十分为升，也是十进制。

到十三、十四世纪秦九韶《数书九章》（1247 年）卷十二：忽以下有微、尘、沙、渺、莽、轻、清、烟各名称。朱世杰《算学启蒙》（1299 年）总括内，忽以下有微、纤、沙、尘、埃、渺、漠、模糊，……各名称。

（三）

关于单位以下的处理，即如何记数，原有分数和小数两项。属于分数一类的，是

（a） 有确定分子、分母加以记录。如《淮南子》记《颛顼历》："一岁为 $365\frac{1}{4}$ 日，一月为 $29\frac{499}{940}$ 日。"此项记数，通分纳子，可以还原。

（b） 指定某一分子、分母加以记录。如景初历（公元 237 年）历法中记十二辰为：

	$\frac{1}{12}$,	$\frac{2}{12}$,	$\frac{3}{12}$,	$\frac{4}{12}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{6}{12}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{8}{12}$,	$\frac{9}{12}$,	$\frac{10}{12}$,	$\frac{11}{12}$,	$\frac{12}{12}$;
或	$\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{1}{2}$;	$\frac{7}{12}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{5}{6}$,	$\frac{11}{12}$,	1,
称为：	“强；	少弱	少，	少强；	半弱，	半	半强；	太弱，	太，	太强；	一辰弱，	一辰
或	（初）			（少半），		（半），		（太半），				（末）

其中少半$\left(\frac{1}{3}\right)$，半$\left(\frac{1}{2}\right)$，太半$\left(\frac{2}{3}\right)$记录较早，如汉代汉简、《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》内都可以看到。

(c) 是变换原分数的分母为另一分母，再求近似分子。如计算律吕，《史记》变换奇零分母为“3”之统一分母。《宋书》引文变换为“12”之统一分母。在历法中还有变换为“60”为“100”之例。

属于小数一类的，是：

(d) 仅书约数，如记“奇，有余，有奇”各字。如《九章算术》称：“有分者上下辈之。”刘徽（公元263年）注称：“车、牛、人之数，不可分裂，推少就多，均赋之宜。”或仅书余数，不再计算下去。如《魏书》卷一百七上志第八律历三上称：“经月大余二十九，小余三万九千七百六十七。”即：2213377（周天）÷74952（日法）＝29（经月大余），（小余）39769。

(e) 逐位定名，如刘徽注《九章算术》（公元263年）书明“股八寸六分六厘二秒五忽、五分忽之二。”

(f) 不逐位定名，仅列数字。如《旧唐书》卷三十三志第十三历二麟德甲子元历：“推法一千三百四十（1340年），期实四十八万九千四百二十八（489428）。”“期周三百六十五日，余二十四，奇四十八。一期之总日，及余奇数，为期周。”即

$$489428 \div 1340 = 365.2448。$$

也可以作为100分的例子，即365日，（余）24，（奇）48。

(g) 预定单位。如祖冲之算圆周率，因要算圆周率到小数点

八位，因"以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数右盈朒二限之间"。

（四）

中国由公元二、三世纪到公元十三、十四世纪是用筹策来算数。这种筹策，《汉书·律历志》称：长六寸，径三分。北周甄鸾注《数术记遗》称：长四寸，方三分。《隋书·律历志》称：长三寸，广二分。是逐渐由长减短，由粗减细，大体长由 1.4 公寸减到 0.9 公寸；粗由 0.7 公分减到 0.6 公分。

筹策是列在算盘上，算盘上画有方格，以便安置筹策。它用纵式的筹，记一（$=1=10^0$），百（$=100=10^2$），万（$=10000=10^4$），……各位的数，即：

纵式：　〡，〢，〣，〤，〥，〦，〧，〨，〩；
　　　　1，2，3，4，5，6，7，8，9，

又用横式的筹，记十（$=10=10^1$），千，（$=1000=10^3$），十万（$=100000=10^5$），……各位的数，即

横式：　一，二，三，亖，𝍤，𝍥，𝍦，𝍧，𝍨；
　　　　1，2，3，4，5，6，7，8，9。

所以 6 7 2 8 记成⊥〧二〨。在古代算书中如《孙子算经》称："凡算之法，先识其位，一纵十横；百立千僵；千十相望，万百相当。"又敦煌千佛洞《立成算经》称："一纵，十横；百立，千僵；万竖，亿横。"都是例子。所以唐窥基《瑜伽师地论略纂》卷五称："如运一筹，置一名一，置百名百，置千名千。"即某筹策置在单位是单数，置在十位是十数，置在百位是百数，置在千位是千数，余类推。筹策在算盘上进退，并不困难。

中算家对于定位是十分注意的，筹策在算盘上虽然进退可以应用，可是对定位还是用各项方法来控制。《孙子算经》说："凡算之法，先识其位。"又如在"除法"说"实如法而一"，或"实如法得一某件"，是说明某法数 b，除某实数 a，希望得个整数商 q，使实法数之比和整数商与一之比一样，即 $\frac{a}{b}=\frac{q}{1}$，或 $a=bq$，如得不到整数，即"实有余者，以法命之，以法为母，实余为子"。如 $a_1=b_1q_1+r_1$，即可写成 $\frac{a_1}{b_1}=q_1+\frac{r_1}{b_1}$，以及"有分者上下辈之"，和其他方法。

以上所说，可由筹算实际"除法"的步骤来说明，如除法①。例1：如求 243972÷753，先置被除数即实数𝍪𝍣𝍫𝍨𝍯𝍡于中位，又置除数即法数𝍦𝍭𝍢于下位，如图 1：

						上位，商
𝍪	𝍣	𝍫	𝍨	𝍯	𝍡	中位，实
			𝍦	𝍭	𝍢	下位，法

图　1

法数𝍦𝍭𝍢向左移二位，即商数当在百位，此时开始进行除法，议得商数第一数𝍢，如图 2：

			𝍢			上位，商
𝍪	𝍣	𝍫	𝍨	𝍯	𝍡	中位，实
	𝍦	𝍭	𝍢			下位，法

图　2

第一次用商数第一数𝍢，遍乘下位法数，逐次从中位实数内减去，后除𝍠𝍰〇𝍯𝍡。此时将下位法数向右移一位，即商数当在十

① 见李俨《十三、十四世纪中国民间数学》第 51～53 页（＊见本书第二卷第 460～462 页。——编者）。

位，再开始进行除法，议得商数第二数二，如图 3：

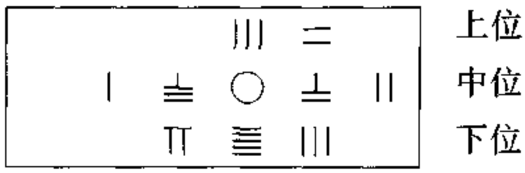


图 3

第二次用商数第二数二，遍乘下位法数，逐次从中位实数内减去，后余三〇一||，此时将下位法数再向右移一位，即商数当在单位或一位，再开始进行除法，议得商数第三数||||，如图 4：

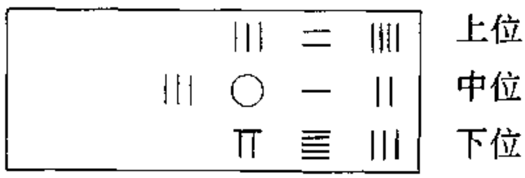


图 4

第三次用商数第三数||||，遍乘下位法数，从中位实数内减去后，无余。中位，下位去掉后，仅余上位商数|||二||||，如图 5：

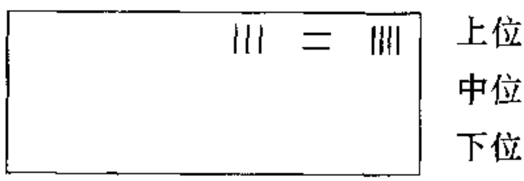


图 5

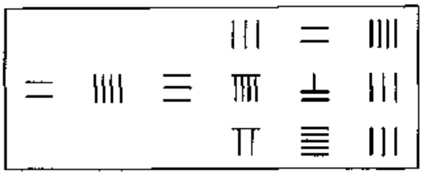
此时“实如法而一”，任务已经完成，

即　　$243972 \div 753 = 324$。

亦即　　$243972 \div 753 = 324 : 1$。

例 2.　求 $243973 \div 753$。

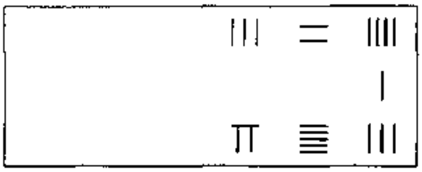
此时如上例所举排列筹位，如图 1 至图 4：



上位，商
中位，实
下位，法

图 1 至图 4

最后中位实数内减去后尚余 1，下位更不去掉它，如图 5：



上位，商
中位，实(分子)
下位，法(分母)

即 $$243973 \div 753 = 324 \text{ 余 } 1;$$

或 $$243973 \div 753 = 324\,\frac{1}{753}。$$

在开平方，开立方计算时，也注重定位，所以《九章算术》等书开平方术语称：置本积为实，借一算为下隅，常超一位约实。其中强调“借一算”来进行定位，因平方内

$$1^2=1,10^2=100,100^2=10000,$$

$$1000^2=1000000,$$

所以“借一算”常超一位，来约实。又开立方术称：置本积为实，借一算为下隅，常超二位约之。因立方内

$$1^3=1,10^3=1000,100^3=1000000,$$

$$1000^3=1000000000,$$

所以“借一算”常超二位，来约实。

其余开平方用 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；开立方用 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，来进行，也是可以看到的①。

---

① 参看李俨《十三、十四世纪中国民间数学》第 54～57 页所引《通原算法》(1372 年)开平方，和开立方的例子(*见本书第二卷第 463～466 页。——编者)。

《九章算术》曾称："议所得，以一乘所借一算为法，而以除。"所以移某"借算"到某位，即是假定某数，是某位的数，再以"议所得"的数，来乘它，因以"除实"，便知道所"议所得"的数，是否正确。或是太多，或是太少。这就是"借一算"的作用。

（五）

因为在筹算算除法时，将实数法数上下对列之后，曾因需要求10位数，则将法数进一位；求100位数，则将法数进二位，余类推。如求得100位数后，即退一位来求10位数，又求得10位数后，再退一位到单位来求单位数。

同样在筹算算开平方法时，将实数（即常数）和"借一算"上下对列。曾因需要求10位数，则将"借一算"进二位，所谓"借一算超一等"；求100位数，则将"借一算"再进二位。余类推。每位数值，算出后，"借一算"后退最后退到单位，来求单位数。

同样算开立方法时，将实数（即常数）和"借一算"也上下对列。曾因需要求10位数，则将"借一算"进三位，所谓"借一算超二等"，求100位数，则将"借一算"再进二位，余类推。每位数值算出后，"借一算"后退，最后退到单位，来求单位数。

因为上面在除法可以进一位求较前的某一数值。在开平方可以进二位求较前的某一数值；在开立方可以进三位求较前的某一数值：自然在除法可以退一位，开平方可以退二位，开立方可以退三位，来求较后的某一数值。刘徽注《九章算术》卷四（公元263年）"开方"条称："其一退以十为母，其再退以百为母，退之弥下，其分弥细。"所以在例题内注称："今有半径一尺……开方除之，下至秒忽。又一退法求其微数，微数无名者以为分子，以下为分母，约作

五分忽之二。"是以尺为单位数，以下则以退法来求，直到算到"忽"法。因"忽"以下当时未有专名，再约算出它的约分数，作为结束。

（六）

某一实数，在除，在开平方，在开立方到单位数后，已有各项处理方法，并可进求小数。至实际如何记录，如除法，筹算在除不尽时，如 $243973 \div 753 = 324\frac{1}{753}$，留在盘上的筹是：

𝍢𝍪𝍣，（上位）商

𝍠，（中位）实（分子）

𝍦𝍭𝍢，（下位）法（分母）

《孙子算经》卷上在除法称："实有余者，以法命之；以法为母，实余为子。"意义和列法都十分明了。以后宋秦九韶《数书九章》(1247 年)则将 $3056\frac{1}{4}$ 写成：

𝍫〇𝍭𝍥

子𝍠

母𝍣

又元刘瑾《律吕成书》卷一则将

1 1 3 1 4 2 8 5 7 1 4 $\frac{72}{100}$ 忽，

写成：𝍠𝍩𝍢𝍩𝍣𝍪𝍧𝍭𝍦𝍩𝍣

百十亿千百十万千百十忽 𝍯 𝍡

又将 1 0 6 3 6 8. 6 3 1 2.

写成：𝍠□𝍮𝍢𝍮𝍧

十万千百十忽𝍮𝍢𝍩𝍡

千百十分

表示十进小数的记法。

中国算数因在算盘上演算，所以对于“0”的应用，还是较晚。因在筹算算盘上遇零则留一空格，不必更作记录十世纪还是如此，如敦煌千佛洞《立成算法》记

四百五文 作：𝍣　𝍭

二百八文 作：𝍡　𝍧

百八　　 作：𝍠　𝍧

中国用零在历法记录实例较多。《唐书》、《宋史》还是如筹算空格之例，留着空格最早是南宋蔡沈《律吕新书》留有“□”字，《金史》大明历留有“○”字[①]。以后《事林广记》(1264～1324)还用“○”记零，用“ȯ”记五。如“九九算法”内记“一○：二五一十；一ȯ：三五十五；二○：四五二十”就是例子。

同时在算书上，如李治《测圆海镜》(1248年)，《益古演段》(1259年)朱世杰《算学启蒙》(1299年)，《四元玉鉴》(1303年)，杨辉《日用算法》(1262年)各书，除用纵横筹记数外，普遍以“○”记零。

其中秦九韶《数书九章》(1247年)和杨辉《日用算法》(1262)各书除用“○”记零外，还用其他筹码记录4，5，9各数，如

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	×	ō	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	○
横式	𝍩	𝍪	𝍫	×	ȯ	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	○

在前则宋司马光(1019～1086)撰“潜虚”一卷曾用

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，
𝍠，𝍡，𝍢，𝍣，×，𝍥，𝍦，𝍧，𝍨，十，

① 钱宝琮《中国数学史话》第107页(*见本书第二卷第594页。——编者)，根据严敦杰考证。

作记录。到十六世纪王文素《算学宝鉴》(1524 年)用：

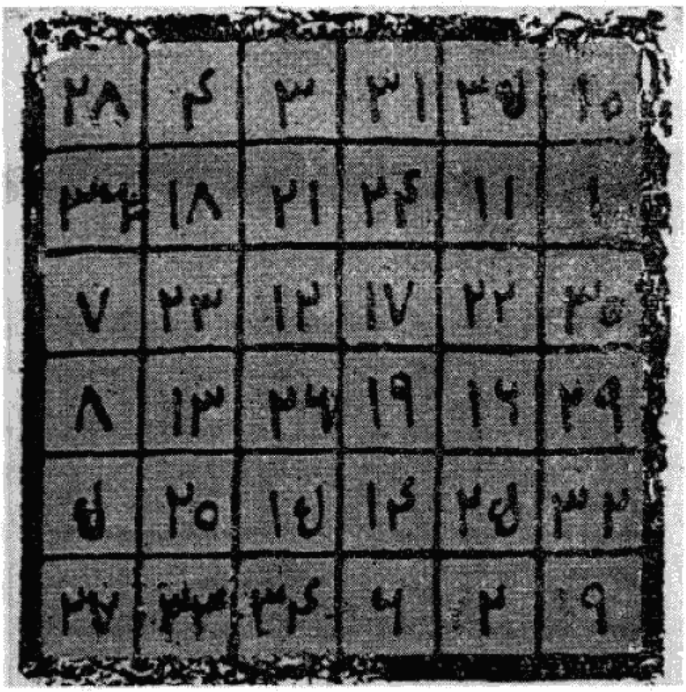
1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，0
〡，〢，〣，〤，〥 〦，〧，〨，〩，一，〇

徐心鲁订《盘珠算法》(1573 年)用

1，2，3，4，5，6，7，8，9，0
〡，〢，〣，〤，〥 〦，〧，〨，〩，〇

做暗马，这就是后来所称的“苏州码子”。

阿拉伯输入的纵横图*



（一）

1956 年冬陕西省文物管理委员会在西安东北角斡耳垛元代安西王府旧址发现三个同样的阿拉伯数码字铁版。原图如上。

这图是一个复形纵横图，是六六图，纵横斜总数相等。

---

* 本文原载《文物参考资料》1958 年第 7 期第 17～19 页。

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

纵横斜一百一十一

六六图

中间套一个四四图，即：

18	21	24	11
23	12	17	22
13	26	19	16
20	15	14	25

或

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

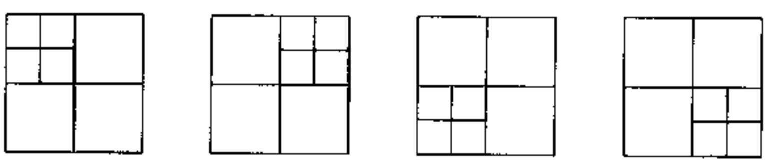
纵横斜三十四

四四图

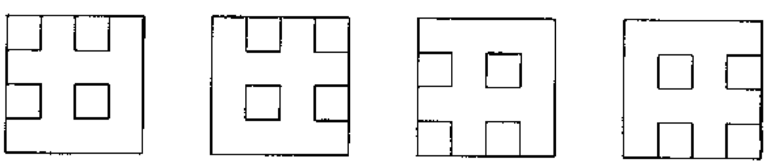
纵横斜总数也相等，所以称做复形纵横图。

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

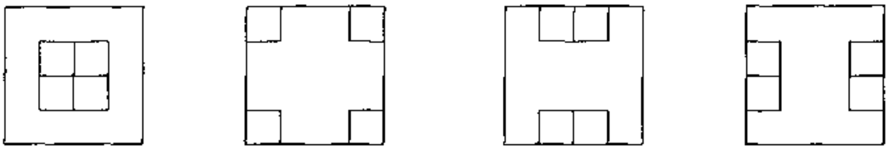
这个基础四四图，即左图，它有一特性，即除纵横斜各和数三十四相同之外，其余正方四、对方四、中方一、角方一、长方二，各数的和数也同是三十四。



正 方 四

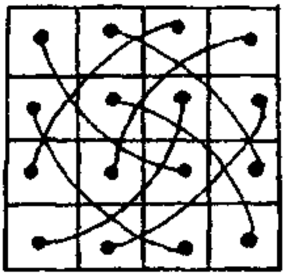


对 方 四



中方一　　角方一　　长　方　二

又如下面左图线条所指各数相和都是一十七(三十四之半),所以



8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

原四四图又称做完全型四四图。此次所发现的阿拉伯数字六六纵横图是由完全型四四图组成的。它组成的经过和以后推进的情形,试述如下。

(二)

由四四纵横图,进为六六纵横图,因:

$$\frac{6^2-4^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

就在原四四图各格,每格加"10",配在中间。

由六六纵横图,进为八八纵横图,因:

$$\frac{8^2-6^2}{2}=\frac{64-36}{2}=14$$

就在原六六图各格,每格加"14",配在中间。

又由八八纵横图,进为十十纵横图,即百子图,因:

$$\frac{10^2-8^2}{2}=\frac{100-64}{2}=18$$

就在原八八图各格，每格加“18”，配在中间。余类推。

上述西安发现的阿拉伯数字六六纵横图，就是由基础四四图每格各加“10”字配在中间。所有数字是由 11 到 26 所组成。此时将所余数字分列在上下行各格，如：

上行	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下行	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

各上下行各格上下对照，和数为“37”。

现先将最后上下两格“9，28；10，27”的数字提出，配在斜角上。此时有一条件，即六六图的上下或左右空格，必须再配三个上行各格数字，和三个下行各格数字，如此合配成 $3\times37=111$ 的总和数字。如六六图四角数字已经配好后，如右行上下有“10，9”的数字，可是总数是要“111”，因为 $111-(10+9)=92$，所余三数字必须在 30 前后（因$\frac{92}{3}\doteq30$）。现选出“29，30，32”三字，并配一“1”，和上下的“10，9”配合，即有三组 37 即 $3\times37=111$ 的总数。最后因上面有“28，10”的数字，一个在上行上，一个在下行上，而总数是要 111，又因 $111-(28+10)=73$，所余四个数字亦须两个在上行上，两个在下行上，使共成 73，现选出“31，35”并配“4，3”，即得六六图如下：

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

18	21	24	11
23	12	17	22
13	26	19	16
20	15	14	25

根据上述方法，又可由六六纵横图进为八八纵横图。原六六图是由

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

六六图

1 到 36 数字所配成。八八图中间的六六图是经由原六六图每格各加“14”所组成，所有数字是由 15 到 50 所组成。此时将所余数字，分列在上下行各格，如：

上行	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
下行	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51

各上下行各格上下对照，和数为“65”。

现先将最后上下两格“13，52；14，51”的数字提出，配在斜角上。此时有一条件，即八八图的上下或左右空格，必须再配四个上行各格数字和四个下行各格数字，如此合配成 4×65＝260 的总和数字。如八八图四角数字已经配好后，如右行上下有“14，13”的数字，可是总数是要“260”，因为 260－(14＋13)＝233，则所余四数字必须在 60 前后，(因$\frac{233}{4}$÷60)。现选出“53，58，59，60”四字，并

52	4	62	56	8	54	10	14
5	42	18	17	45	49	24	60
64	50	32	35	38	25	15	1
6	21	37	26	31	36	44	59
63	22	27	40	33	30	43	2
7	19	34	29	28	39	46	58
12	41	47	48	20	16	23	53
51	61	3	9	57	11	56	13

八　八　图

配两个小数字“1，2”，和上下的“14，13”配合，即有四组 65，即 4×

65＝260 的总数。最后因上面“52，14”的数字，一个在上行上，一个在下行上，而总数是要 260，又因 260－（52＋14）＝194，所余六个数字，亦须三个在上行上，三个在下行上，使共成 194，现选出“54，56，62”并配“4，8，10”，即得八八图。同理可制成百子图，图如下：

84	4	92	11	91	13	89	16	87	18
5	70	22	80	74	26	72	28	32	96
98	23	60	36	35	63	67	42	78	3
6	82	68	50	53	56	43	33	19	95
99	24	39	55	44	49	54	62	77	2
7	81	40	45	58	51	48	61	20	94
100	25	37	52	47	46	57	64	76	1
8	30	59	65	66	38	34	41	71	93
15	69	79	21	27	75	29	73	31	86
83	97	9	90	10	88	12	85	14	17

百　子　图

（三）

根据上述资料和推算，知道十三、十四世纪阿拉伯和中国的文化交流是十分发达的。我国的纵横图，曾列在宋代杨辉《续古摘奇算法》（1275 年）一书之内，可能是在此图之前。又知道这个输入的六六纵横图，它的组成是十分有规律的，通过它的做法，我们可以再制成其他的偶数复形纵横图，如八八图、百子图之类。此项复形纵横图的做法，在国内惟有北京故宫博物院图书馆所发现的“三三等数图”一书，有相类的记录，但步骤并不一致。

参 考 文 献

严敦杰《阿拉伯数码字传到中国来的历史》,《数学通报》1957 年 10 月号,第 1～4 页。

平山谛《方阵の话》第 54 页,东京,1954 年 5 月。

李俨《中算史论丛》第一集,第 175～194 页,第 222～227 页,北京科学出版社(1954 年 11 月)(＊见本书第六卷。——编者)。

从中算家的割圆术看和算家的圆理和角术*

(一) 绪 言

日本(和)算家和中算家一样,对古代圆周率值 $\pi=3$ 不满意,设法先作圆周率数值的计算,他们的方法也和中算家刘徽(公元 263 年)《九章注》、赵友钦(十三世纪)《革象新书》步骤一样,分别由圆内容六边形,圆内容四边形起算,逐渐使内容多边形贴近圆周,得到多数位的圆周率值,至多的,有 1744 年所算得 52 位的正确数。

十八世纪初期,杜氏九术输入中国之后,中算家知道圆周率值可由级数算出,此项级数未有证明。中算家因于十八、十九世纪设法以代数和几何方法证明杜氏九术的真确性,并附带对多边形的性质加以研究。日本(和)算家也同样做此项研究,在计算数值方面经过繁重的手续,并应用此多数位的数值,以及测验,归纳方法,得到各项级数。和算的圆理和角术,一部分虽和中算家方法相似,可是范围较广,现仅就中算家割圆术所看到的和算家圆理和角术发展情形加以说述。

---

* 本文原载《科学史集刊》第二集(1959 年)第 80~125 页。

（二） 圆周率的计算

日本在十七世纪和十八世纪初叶的数学书，从毛利重能《割算书》(1622 年)到关孝和(1642? ～1708)《括要算法》(1709 年)都记录有圆周率值，其中多半是约数。惟村松茂清《算俎》(1633 年)、关孝和《括要算法》(1709 年)计算方法是趋向正确，并且和元赵友钦《革象新书》一样，由圆内容四等边形起算。

《算俎》算到圆内容 $2^{13}\times 4$ 等边形，得 $\pi=3.1415926^{\triangle}487776988669248$①,《括要算法》算到圆内容 $2^{15}\times 4$ 等边形，得 $\pi=3.141592653^{\triangle}2889927759$。

《括要算法》又算出圆内容

$2^{13}\times 4=32768$ 等边形，得：

$$周=3.14159264877669856708=a$$

$2^{14}\times 4=65536$ 等边形，得：

$$周=3.14159265238659135 71=b$$

$2^{15}\times 4=131072$ 等边形，得：

$$周=3.14159265328899277 59=c$$

后，用“增约术”算出

$$定周=b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

$$=3.1415926535$$

因此比较祖冲之多算出二位正确。

在中国则 1622～1709 年期间，西洋圆周率计算法已经输入中

① △以上是正确值，下同。

国。明徐光启撰译《测量全义》(1631 年)已介绍

$$\pi>3.14159265358979323846$$

$$\pi<3.14159265358979323847$$

的数值。

又《数理精蕴》(1723 年)也说明圆内容、圆外切六边形起算，和圆内容、圆外切四边形起算，求圆周率的方法。并计算得平均值正确到二十位的圆周率值

$$\pi=3.14159265358979323846^{\triangle}$$

和算家村松茂清(1633)、关孝和(1709 年)之外，镰田俊清(?～1749)《宅间流圆理》(1722 年)继续村松茂清(1633 年)、关孝和(1709 年)的方法，并由圆内容外切 $2^{42}\times4$ 等边形算出

$$\pi>3.1415926535897932384626433 6658$$

$$\pi<3.1415926535897932384626434 1667$$

又由圆内容 $2^{26}\times6$ 等边形算出

$$\pi=3.141592653589793^{\triangle}11$$

又建部贤弘(1664～1739)《不休缀术》(1722 年)尚算出：圆周率值 41 位正确，如

$$\pi=3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 7950\ 2884\ 1971\ 6$$

松永良弼(?～1744)著《方圆算经》(1739 年)也算出：圆周率值 50 位正确，如：

$$\pi=3.1415926535897932384626433832$$
$$79502884197169399375 10^{\triangle}$$

以上各家未曾提到是否利用《测量全义》(1631 年)、《数理精蕴》(1723 年)以及杜德美(Pierre Jartoux，1668～1720)九术的方法。因《数理精蕴》1723 年方始出版，杜氏九术 1721 年方由梅瑴成(1681～1763)《赤水遗珍》(1721 年)内介绍有三术镰田俊清(1722

年)、建部贤弘(1722 年)、松永良弼(? ～1744)计算圆周率时,可能未曾见到,可是至少是受中算家魏刘徽(公元 263 年)和元赵友钦(十三世纪)的影响。因刘徽注《九章算术》、赵友钦《革象新书》已分别用圆内容六边形,和圆内容四边形起算 π 的正值。

十八世纪中算家,则因《测量全义》(1631 年)、《数理精蕴》(1723 年)已有计算,不复重复计算多位圆周率值。

十九世纪和算家斋藤直义(1816～1889)曾在 1860 年刊本《数理神篇》内举有下列用连乘式求 π 的公式,即

$$(1)\ \pi=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)^2(2n+1)\times 2$$

或 $$(2)\ \frac{\pi}{2}=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

这又和 John Wallis(1616～1703),*Arithmetica Infinitorum*, 1656 年,所记相同。

十九世纪国内华衡芳译《三角数理》(1877 年)方介绍 Wallis 的连乘式。

(三) 角 术

和算角术,是日本数学家计算各等边多边形(角形)的方法。如已知各等边形,各边$=a$,再求各等边形(角形)外切圆半径(角中径)y 的公式,和各等边形(角形)内容圆半径(平中径)x 的公式。此项公式,先列在附表如等边十角形(正十角形)

$$y^4-3a^2y^2+a^4=0$$

或 $$(y^2-ay-a^2)^{⊛①}\ (y^2+ay-a^2)=0$$

① 有⊛星号的,是指应用公式,余仿此。

并指定 $$y^2-ay-a^2=0$$

为最后应用公式。

又 $$16x^4-40a^2x^2+5a^4=0。$$

圆外切，圆内容，各等边形，各边$=a$	各等边形（角形）外切圆半径（角中径）y 公式	各等边形（角形）内容圆半径（平中径）x 公式
等边三角形（正三角形）	$3y^2-a^2=0$	$2\sqrt{3}\,x-a=0$
等边四角形（正方形）	$2y^2-a^2=0$	$2x-a=0$
等边五角形（正五角形）	$5y^4-5a^2y^2+a^4=0$	$80x^4-40a^2x^2-a^4=0$
等边六角形（正六角形）	$6y^4-5a^2y^2+a^4=0$ 或$(y-a)\circledast(6y^3+6ay^2+a^2y-a^3)=0$	$2x-\sqrt{3}\,a=0$
等边七角形（正七角形）	$7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6=0$	$448x^6+450a^2x^4-84a^4x^2+a^6=0$
等边八角形（正八角形）	$2y^4-4a^2y^2+a^4=0$	$4x^2-4ax-a^2=0$
等边九角形（正九角形）	$9y^8-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8=0$ 或$(3y^6-9a^2y^4+6a^4y^2-a^6)\odot\cdot(3y^2-a^2)=0$	$192x^6-432a^2x^4-132a^4x^2-a^6=0$
等边十角形（正十角形）	$y^4-3a^2y^2+a^4=0$ 或$(y^2-ay-a^2)\circledast(y^2+ay-a^2)=0$	$16x^4-40\cdot a^2x^2+5a^4=0$
等边十一角形（正十一角形）	$11y^{10}-55a^2y^8+77a^4y^6-44a^6y^4+11a^8y^2-a^{10}=0$	$11264x^{10}-42240a^2x^8+29568a^4x^6-5280a^6x^4+220\cdot a^8x^2-a^{10}=0$
等边十二角形（正十二角形）	$2y^6-9a^2y^4+6a^4y^2-a^6=0$ 或$(y^4-4a^2y^2+a^4)\circledast(2y^2-a^2)=0$	$x^2-8ax+a^2=0$
等边十三角形（正十三角形）	$13y^{12}-91a^2y^{10}+182a^4y^8-156a^6y^6+65a^8y^4-13a^{10}y^2+a^{12}=0$	
等边十四角形（正十四角形）	$4y^8-25a^2y^6+26a^4y^4-9a^6y^2+a^8=0$ 或$(y^6-6a^2y^4+5a^4y^2-a^6)(4y^2-a^2)=0$ 或$(y^3-2ay^2-a^2y+a^3)\circledast\cdot(y^3+2ay^2-a^2y-a^3)\cdot(4y^2-a^2)=0$	

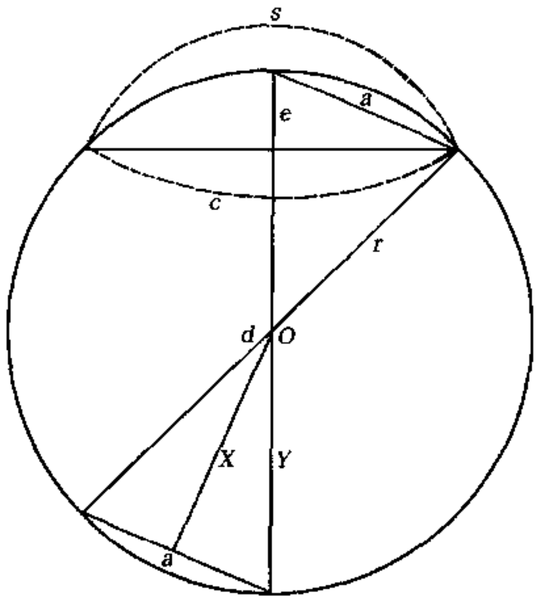
续

圆外切,圆内容,各等边形,各边$=a$	各等边形(角形)外切圆半径(角中径)y公式	各等边形(角形)内容圆半径(平中径)x公式
等边十五角形(正十五角形)	$15y^{14}-140a^2y^{12}+378a^4y^{10}-450a^6y^8+275a^8y^6-90a^{10}y^4+15a^{12}y^2-a^{14}=0$ 或$(y^8-8a^2y^6+14a^4y^4-7a^6y^2+a^8)^{\circledast}(5y^4-5a^2y^2+a^4)(3y^2+a^2)=0$	
等边十六角形(正十六角形)	$2y^8-16a^2y^6+20a^4y^4-8a^6y^2+a^8=0$	
等边十七角形(正十七角形)	$17y^{16}-204a^2y^{14}+714a^4y^{12}-1122a^6y^{10}+935a^8y^8-442a^{10}y^6+119a^{12}y^4-17a^{14}y^2+a^{16}=0$	
等边十八角形(正十八角形)	$y^8-10a^2y^6+15a^4y^4-7a^6y^2+a^8=0$ 或$(y^4-2ay^3-3a^2y^2+a^3y+a^4)(y^4+2ay^3-3a^2y^2-a^3y+a^4)=0$ 或$(y^3-3ay^2+a^3)^{\circledast}(y+a)(y^3+3ay^2-a^2)(y-a)=0$	
等边十九角形(正十九角形)	$19y^{18}-285a^2y^{16}+1254a^4y^{14}-2508a^6y^{12}+2717a^8y^{10}-1729a^{10}y^8+665a^{12}y^6-152a^{14}y^4+19a^{16}y^2-a^{18}=0$	
等边二十角形(正二十角形)	$2y^{10}-25a^2y^8+50a^4y^6-35a^6y^4+10a^8y^2-a^{10}=0$ 或$(y^8-12a^2y^6+19a^4y^4-8a^6y^2+a^8)^{\circledast}(2y^2-a^2)=0$	

关孝和(1642? ～1708)遗著《括要算法》(1709年)曾逐一用几何方法证明各等边形外切圆半径和内容圆半径各公式。

又关孝和再传弟子松永良弼(? ～1744)则就此项公式作一归纳,演成级数,以便入算。

再次则安岛直圆(1733? ～1798)《拾玑算法解》则就各等边形各弦线(斜线)关系,如图



圆径$=d=2r$，　　角中径$=Y$

背弧$=s$，　　平中径$=X$

通弦$=a$，

正矢$=e=versa$，　　圆中心：O，

作一说明(见第四节)。又坂部广胖(1759～1824)《点窜指南录》(1815年)说明各等边形各弦线关系之外，又逐一用代数方法证明各等边形外切圆和内容圆半径。

关孝和遗著《括要算法》(1709年)曾逐一用几何方法证明各等边形外切圆半径Y，和内容圆半径X各公式。现举数例如下。

3. 正五角形　　$A_4A_3=a$，$A_4A_2=a_2=$(二斜)

如图，$\triangle OA_2C \backsim \triangle A_4A_3B_2$。

因　　$\angle OA_2C=\angle A_4A_3B_2$，

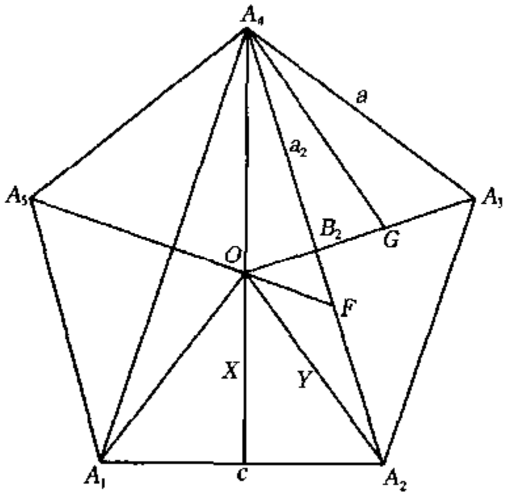
$$\therefore \quad \frac{Y}{X}=\frac{a}{\frac{1}{2}a_2}=\frac{2a}{a_2} \qquad (甲)$$

其中　$A_4B_2=\frac{1}{2}a_2$。

即二分弧通弦（二斜）之半。

又$\triangle A_4OB_2 \backsim \triangle A_4A_2C$，

$$\frac{Y}{OB_2}=\frac{a_2}{\frac{1}{2}a}=\frac{2a_2}{a}\text{（乙）}$$



（甲）（乙）二式相乘得：

$$\begin{aligned}Y^2&=4X\cdot OB_2\\&=2^2\cdot X\cdot r_2\quad(1)\end{aligned}$$

其中　$OB_2=r_2$ 称做“二乘线”。

又　$$4X^2+a^2=4Y^2=16X\cdot r_2\qquad\text{（寄左式）}$$

又因　$\triangle A_4A_3G=\triangle A_4OF$，其中 $OF=GA_3=d$。

$$\begin{aligned}a^2-Y^2&=A_4A_3^2-A_4G^2=(A_4B_2{}^2+A_3B_2^2)-(A_4B_2^2+OB_2^2)\\&=A_3B_2^2-OB_2^2=(A_3B_2-OB_2)(A_3B_2-OB_2)\\&=Y\cdot GA_3=OF\cdot Y=d\cdot Y。\end{aligned}$$

$$\therefore 4a^2-4Y^2=4\cdot OF\cdot Y。\qquad(2)$$

又因　$\triangle OA_2c \backsim \triangle OB_2F$，

$$\frac{X}{Y}=\frac{OB_2}{OF}=\frac{r_2}{OF},\qquad(3)$$

$$3a^2-4X^2=4\cdot OF\cdot Y=\frac{4\cdot r_2\cdot Y^2}{X},$$

∴　$$16X^2(3a^2-4X^2)=64\cdot r_2\cdot XY^2。$$

由“寄左式”知　$$\begin{aligned}(4X^2+a^2)^2&=4Y^2\cdot 16Xr_2\\&=64r_2\cdot X\cdot Y^2\end{aligned}$$

即　$$16X^2(3a^2-4X^2)=(4X^2+a^2)^2$$

最后得 $80X^4 - 40 \cdot aX^2 + a^2 = 0$

次由前(2),(3)式,即 $a^2 - Y^2 = d \cdot Y$ (2)

$$\frac{X}{Y} = \frac{r_2}{d} \quad (3)$$

(其中 $r_2 = OB_2, d = OF$)。

和"寄左式" $4Y^2 - a^2 = 4X^2$,

再消去 d,得

$$(a^2 - Y^2)(4Y^2 - a^2) = 4X^2 \cdot d \cdot Y = 4 \cdot r_2 \cdot X \cdot Y^2 \quad (4)$$

又由(1) $,Y^4 = 4 \cdot r_2 \cdot X \cdot Y^2$ (5)

得 $Y^4 = (a^2 - Y^2)(4Y^2 - a^2)$,

最后得 $5Y^4 - 5a^2Y^2 + a^4 = 0$。

5. 正七角形

如图, $A_5A_4 = a$

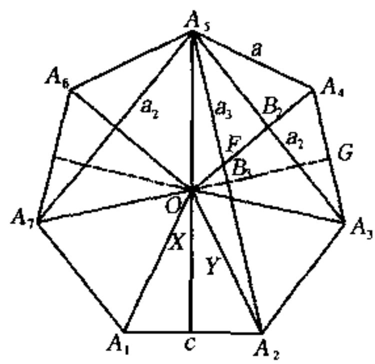
$A_5A_3 = a =$(二斜),

$A_5B_2 = \dfrac{a_2}{2}$

即二分弧通弦(二斜)之半。

$A_5A_2 = a_3 =$(三斜),

$A_5B_3 = \dfrac{a_3}{2}$



即三分弧通弦(三斜)之半。

如图,和正五角形同样,有

$$4X^2 + a^2 = 4Y^2\text{(寄左式)} \quad (1)$$

自乘得 $(4X^2 + a^2)^2 = 16Y^4$。

因

$$\frac{Y}{X} = \frac{2a}{a_2} \qquad (\triangle OGA_4 \backsim \triangle A_5A_4B_2),$$

$$\frac{Y}{OB_2}=\frac{2a_2}{a_3} \qquad (\triangle A_5B_2O \backsim \triangle A_7B_3A_5),$$

$$\frac{Y}{OB_3}=\frac{2a_3}{a_2} \qquad (\triangle A_5cA_2 \backsim \triangle A_5B_3O)。$$

三式相乘得 $Y^3 = 8X \cdot OB_2 \cdot OB_3 = 2^3 \cdot X \cdot r_2 \cdot r_3$ (2)

其中 $OB_2 = r_2$ 称做“二垂线”，

$OB_3 = r_3$ 称做“三垂线”。

(2) 式代入上式得：

$$(4X^2 + a^2)^2 = 128 \cdot OB_2 \cdot OB_3 \cdot X \cdot Y \qquad (甲)$$

又如前例 $Y^2 - a^2 = OB_2^2 - A_4B_2^2$

$$= (OB_2 + A_4B_2)(OB_2 - A_4B_2) = OF \cdot Y,$$

(此处 $A_4B_2 = B_2F$)

或 $4Y^2 - 4a^2 = 4 \cdot OF \cdot Y$。

代入(1) 式，得： $4X^2 - 3a^2 = 4 \cdot OF \cdot Y$。 (3)

又因 $A_5A_4^2 = 2OA_4^2 - 2OA_4 \cdot OB_2$,

即 $a^2 = 2Y^2 - 2 \cdot OB_2 \cdot Y$。

以(1) 式代入，消去 $2Y^2$，得

$$4X^2 - a^2 = 4 \cdot OB_2 \cdot Y。$$

两边各以(3) 式和 32 相乘， 得：

$$32(4X^2 - a^2)(4X^2 - 3a^2)$$
$$= 32 \times 16 \times OB_2 \cdot OF \cdot Y^2$$

又因 $\frac{X}{Y} = \frac{OF}{OB_3}, OF = OB_3 \cdot \frac{Y}{X}, (\triangle OcA_2 \backsim \triangle OB_3F)$。

代入右边后代入(甲) 式，得：

$$32(4X^2 - a^2)(4X^2 - 3a^2)X$$
$$= 32 \times 16 \times OB_2 \cdot OB_3XY^3 = (4X^2 + a^2)^3$$

最后得　$448X^6+450\cdot a^2X^4-84a^4X^2+a^6=0$。

前已算出　$$Y^3=8\cdot X\cdot OB_2\cdot OB_3$$
$$=2^3\cdot X\cdot OB_2\cdot OB_3 \tag{2}$$

和　$$Y^2-a^2=OF\cdot Y,$$
$$2Y^2-a^2=2\cdot OB_2\cdot Y,$$
$$4Y^2-a^2=4X^2。\tag{1}$$

后三式相乘得

$$(4Y^2-a^2)(2Y^2-a^2)(Y^2-a^2)$$
$$=8\cdot OB_2\cdot OFX^2Y^2$$
$$=(8\cdot OB_2\cdot OB_3\cdot X)\cdot Y^3,$$

右边代入(2)式得:

$$(4Y^2-a^2)(2Y^2-a^2)(Y^2-a^2)=Y^6,$$

最后得　$7Y^6-14a^2Y^4+7a^4Y^2-a^6=0$。

9. 正十一角形

如图，　$A_1A_2=a$,

$A_1A_3=a_2=$(二斜),

$A_3A_6=A_3A_{11}=A_7A_{10}=a_3=$(三斜),

$A_3A_{10}=A_2A_6=a_4=$(四斜),

$A_1A_6=A_2A_7=a_5=$(五斜),

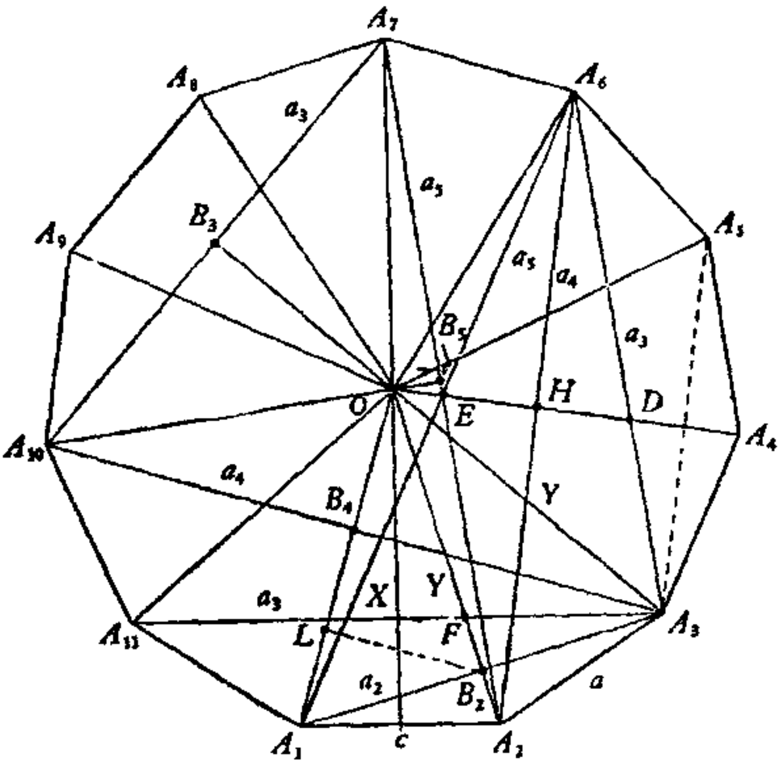
……………………

因

$$\frac{Y}{X}=\frac{2a}{a_2}\qquad(\triangle OcA_1\backsim\triangle A_3B_2A_2)$$

$$\frac{Y}{OB_3}=\frac{2a_2}{a_4}\qquad(\triangle OB_2A_1\backsim\triangle A_3B_4A_1)$$

$$\frac{Y}{OB_3}=\frac{2a_3}{a_5}\qquad(\triangle OB_3A_{10}\backsim\triangle A_{10}B_5A_7)$$



$$\frac{Y}{OB_4}=\frac{2a_4}{a_3}\quad(\triangle OB_4A_{10}\backsim\triangle A_3A_{10}B_3)$$

$$\frac{Y}{OB_5}=\frac{2a_5}{a}\quad(\triangle OB_5A_7\backsim\triangle A_7cA_2)$$

五式相乘得：

$$Y^5=32\cdot X\cdot OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5\tag{1}$$

既得(1)式后，因右边有 X,OB_2,OB_3,OB_4,OB_5 各数，当将此各数化为 Y 和 a 的函数，以便入算。

由前因$OB_2\cdot OB_4=\frac{a_3Y^2}{4a_2}$，要消去 a_3，因在 $A_1A_2A_3A_{11}$等边箕形（又称等脚台形或腰袴形）内得下式 $a_3=\frac{a_2^2-a^2}{a}=\frac{a_2^2}{a}-a$，

以 $a_2=\dfrac{2aX}{Y}$,代入上式,得

$$a_3=\frac{4a^2X^2}{aY^2}-a=\frac{a(4X^2-Y^2)}{Y^2}。$$

又因 $4X^2+a^2=4Y^2$,再代入上式,得:

$$a_3=\frac{a(3Y^2-a^2)}{Y^2}=\frac{a}{Y}\cdot\frac{(3Y^2-a^2)}{Y}。$$

因此

$$OB_2\cdot OB_4=\frac{a}{Y}\cdot\frac{(3Y^2-a^2)}{Y}\cdot\frac{Y^2}{4a^2}$$

$$=\frac{a(3Y^2-a^2)}{4a^2}=\frac{Y}{X}\cdot\frac{(3Y^2-a^2)}{8} \qquad (2)$$

又 $$Y^2-a^2=OF\cdot Y=OB_3\cdot\frac{Y^2}{X},$$

$$\left(因此处\ OD=OF。又\frac{OD}{OB_3}=\frac{Y}{X}\right)$$

∴ $$OB_3=\frac{(Y^2-a^2)X}{Y^2} \qquad (3)$$

又 $$4Y^2-a^2=4X^2,$$

$$a^2(4Y^2-a^2)=4a^2X^2=\left(2\cdot\frac{a_2}{2}\right)^2Y^2,$$

$$\left(因\frac{X}{Y}=\frac{a_2}{2a}\right)$$

$$2Y^4-A_1A_3^2Y=2Y^4-4\left(\frac{a_2}{2}\right)^2Y^2$$

$$=2Y^2\left[Y^2-2\left(\frac{a_2}{2}\right)^2\right],$$

$$\left[因\ Y^2-2\left(\frac{a_2}{2}\right)^2=OB_2^2-\left(\frac{a_2}{2}\right)^2=OL^2-LA_1^2=OB_4\cdot Y\right]。$$

∴ $$2Y^4-4\left(\frac{a_2}{2}\right)^2Y^2=2\,OB_4Y^3$$

又由上式 $$\left[a^2(4Y^2-a^2)=\left(2\cdot\frac{a_2}{2}\right)^2Y^2\right],$$

因得 $$2Y^4-4a^2Y^2+a^4=2\cdot OB_4\cdot Y^3 \qquad (甲)$$

又因 $$Y^2-a^2=OD\cdot Y=OB_3\cdot\frac{Y^2}{X},$$

$$Y^2(Y^2-a^2)=OD\cdot Y^3 \qquad (乙)$$

因 $2\,OB_4-OD=OE$，又$OH=OB_4$，$EH=HD$，

故(甲)－(乙)$=OE\cdot Y^3$ ，

即

$$(2Y^4-4a^2Y^2+a^4)-Y^2(Y^2-a^2)$$

$$=Y^4-3a^2Y+a^4=OE\cdot Y^3=OB_5\cdot\frac{Y^4}{X} \qquad (4)$$

$$Y^5=32X\cdot OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5$$

$$=32X\cdot\frac{Y}{X}\cdot\frac{(3Y^2-a^2)}{8}\cdot\frac{(Y^2-a^2)X}{Y^2}\cdot$$

$$\frac{X}{Y^4}(Y^4-3a^2Y^2+a^2)$$

$$=4X^2\cdot\frac{(Y^4-3a^2Y^2+a^2)}{Y^5}\cdot(Y^2-a^2)(3Y^2-a^2)$$

$$=\frac{(Y^4-3a^2Y^2+a^2)(Y^2-a^2)(3Y^2-a^2)(4Y^2-a^2)}{Y^5},$$

即 $Y^{10}=(Y^4-3a^2Y^2+a^2)(Y^2-a^2)(3Y^2-a^2)(4Y^2-a^2)$，

或 $11Y^{10}-55a^2Y^8+77a^4Y^6-44a^6Y^4+11a^8Y^2-a^{10}=0$。

次求(平中径)即内容圆半径 X 之值。

因 $$4X^2+a^2=4Y^2$$

$$(4X^2+a^2)^3=64X^6$$

$$=2048\cdot OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5\cdot X\cdot Y,$$

$$(因\ Y^5=32\,OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5X) \qquad (1)$$

又 $$4Y^2-4a^2=4X^2-3a^2=4\cdot OD\cdot Y=4\,OB_3\cdot\frac{Y^2}{X}\quad(2)$$

前已算出 $$4(3Y^2-a^2)=\frac{32\cdot OB_2\cdot OB_4}{Y}\cdot X$$

又 $8Y^2+(4Y^2-4a^2)=4(3Y^2-a^2)=\dfrac{32\cdot OB_2\cdot OB_4}{Y}\cdot X$,

即 $$(8X^2+2a^2)+(4X^2-3a^2)=12X^2-a^2$$
$$=\frac{32\cdot OB_2\cdot OB_4}{Y}\cdot X\quad(3)$$

$$64a^2X^2=16a_2^2Y^2$$
$$2(4X^2+a^2)^2-64a^2X^2=32Y^4-16a_2^2Y^2$$
$$=32\cdot OB_4\cdot Y^3\quad(4)$$

又 $$(4X^2+a^2)(4X^2-3a^2)=4Y^2\cdot 4\cdot OD\cdot Y$$

第一: $$32\cdot OB_4\cdot Y^3-4Y^2\cdot 4\cdot OD\cdot Y$$
$$=16\cdot OE\cdot Y^3=16\cdot OB_5\cdot\frac{Y^4}{X}。$$

第二: $$[2(4X^2+a^2)^2-64a^2X^2]-[(4X^2+a^2)(4X^2-3a^2)]$$
$$=5a^4-40a^2X^2+16X^4=16\cdot OB_5\cdot\frac{Y^4}{X}\quad(5)$$

$16\times(5)\times(2)\times(3)$即:

$$16\left(16\cdot OB_5\cdot\frac{Y^4}{X}\right)\left(4\cdot OB_3\cdot\frac{Y^2}{X}\right)\left(\frac{32\cdot OB_2\cdot OB_4}{Y}\cdot X\right)$$
$$=16\times16\times4\times32\times OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5\cdot\frac{Y^5}{X}$$
$$=1024\cdot\frac{Y^{10}}{X^2}=(4Y^2)^5\cdot\frac{1}{X^2}=(4X^2+a^2)^5\cdot\frac{1}{X^2}。$$

左边 $$16(5a^4-40a^2X^2+16X^4)(4X^2-3a^2)(12X^2-a^2)$$
$$=(4X^2+a^2)^5\cdot\frac{1}{X^2}$$

即 $16(5a^4-40a^2X^2+16X^4)(4X^2-3a^2)(12X^2-a^2)X^2$

$$=(4X^2+a^2)^5$$

最后得：

$$11264X^{10}-42240a^2X^8+29568a^4X^6-5280a^6X^4+220a^8X^2-a^{10}=0$$

在关孝和《括要算法》(1709 年)计算角术中可以看到。

在正五角形：$Y^2=2^2XOB_2=2^2\cdot X\cdot r_2$

其中 X＝平中径，r_2＝二垂线。

Y＝角中径。

在正七角形：$Y^3=2^3\cdot X\cdot OB_2\cdot OB_3=2^3\cdot X\cdot r_2\cdot r_3$

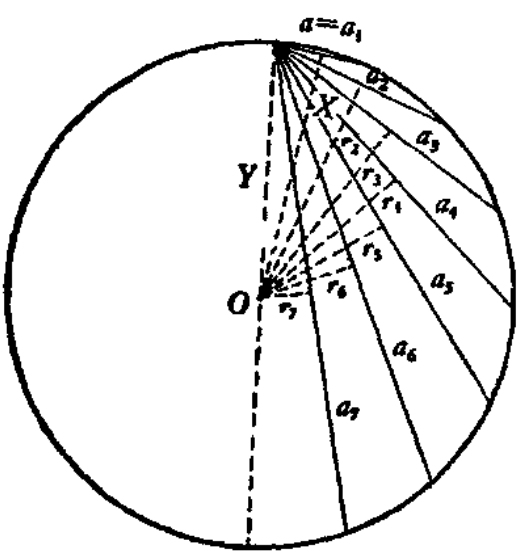
其中 X＝平中径，r_2＝二垂线。

r_3＝三垂线。

……………… Y＝角中径。

在正十一角形：$Y^5=2^5\cdot X\cdot OB_2\cdot OB_3\cdot OB_4\cdot OB_5$

$$=2^5\cdot X\cdot r_2\cdot r_3\cdot r_4\cdot r_5$$



其中 $X=$(平中径),$r_2=$二垂线。

$r_3=$三垂线。

$r_4=$四垂线。

$r_5=$五垂线。

同理 $Y=$角中径。

在 $2n+1$ 角形:$Y^n=2^n\cdot X\cdot r_2\cdot r_3\cdot r_4\cdots r_{n-1}\cdot r_n$。

其中 $X=$平中径,$r_2=$二垂线。

$r_3=$三垂线。

……………

$r_n=n$ 垂线。

$Y=$角中径。

松永良弼(?~1744)对角术的计算另设有递加圆,说明求各等边形(角形)外切圆半径(角中径)Y 的各公式内数字系数之成就。现先设(A)组递加圆:

$$2+2+2+2+2+\cdots 2(n-1)$$

$$1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)$$

$$1+4+9+16+25+36+\cdots+\frac{n(2n)}{2!}$$

即:朱世杰,四角垛

$$1+5+14+30+55+91+\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

即:朱世杰,四角落一垛

$$1+6+20+50+105+196+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

即:董祐诚,三乘方锥堆

$$1+7+27+77+182+378+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

即:董祐诚,四乘方锥堆。

同时此项 $4m=n$ 偶数正等边形。Y 的方程亦可记录如下：

$$2Y^{2m}-\frac{2m^2}{2!}\cdot a^2\cdot Y^{2m-2}+\frac{2m^2(m^2-1^2)}{4!}a^4Y^{2m-4}$$
$$-\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{6!}\cdot a^6Y^{2m-6}$$
$$+\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{8!}\cdot a^8Y^{2m-8}-\cdots\pm a^{2m}=0。$$

$n=$	(4)	(8)	(12)	(16)	(20)	(24)	(28)	……$n=4n$
$m=$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	……
	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	……2
	−1	−4,	−9,	−16,	−25,	−36,	−46,	……$-\frac{2m^2}{2!}$
		1,	6,	20,	50,	105,	196,	……$+\frac{2m^2(m^2-1^2)}{4!}$
			−1,	−8,	−35,	−112,	−94,	……$-\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{6!}$
				1,	10,	54,	210	……$+\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{8!}$
						−12,	−77	
	正四角形	正八角形	正十二角形	正十六角形	正二十角形	正二十四角形	正二十八角形	正 $4m$ 角形

次设(B)组递加圆：

$1+1+1+\cdots\cdots$

$1+2+3+4+5+6+7+\cdots\cdots+n.$

即：朱世杰，茭草垛

$1+3+6+10+15+21+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}$

即：朱世杰，三角垛

$1+4+10+20+35+56+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$，

即：朱世杰，四角垛

$1+5+15+35+70+126+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

即：朱世杰，撒星更落一垛

$$1+6+21+56+126+252+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

即：朱世杰，三角撒星更落一形

$$1+7+28+84+210+\cdots\cdots$$

如前（A）组递加图之例

抽取奇数行列，逐次向右移一位。又正负相间，加以排列，如附表所记各直行。即各 $4m+2=n=2(2m+1)=2m$，正等边形中 Y 的方程的系数：

n	[6],	[10],	[14],	[18],	[22]
$m\cdots$	(1),	(2),	(3),	(4),	(5),
$m_1\cdots$	⟨3⟩,	⟨5⟩,	⟨7⟩,	⟨9⟩,	⟨11⟩
	1	1	1	1	1
	−1	−3	−6	−10	−15
		1	5	15	35
			−1	−7	−28
				1	9
					1
	正六角形	正十角形	正十四角形	正十八角形	正二十二角形

并设 $K_1=\frac{m_1\pm1}{4}$，$K_2=\frac{m_1\pm3}{4}$，$K_3=\frac{m_1\pm5}{4}$，$K_4=\frac{m_1\pm7}{4}$，$K_5=\frac{m_1\pm9}{4}$……等式，如 m_1 代入时，上式应当用“＋”号，或“－”号，看

是否可以 4 除尽为定。如正十八角形，$m_1=9, K_1=\frac{9-1}{4}=2, K_2=\frac{9+3}{4}=3, K_3=\frac{9-5}{4}=1, K_4=\frac{9+7}{4}=4, K_5=\frac{9-9}{4}=0$

又可设：

$$1-\frac{K_1}{1!}\cdot\frac{a}{y}-\frac{K_1\cdot K_2}{2!}\cdot\frac{a^2}{y^2}+\frac{K_1K_2K_3}{3!}\cdot\frac{a^3}{y^3}+\cdots=0。$$

（其中符号次序为－，－；＋，＋；－，－；＋，＋。）

例如正六角形 $6=2\times3(=m_1)$

$$K_1=1, K_2=0。y-a=0。$$

正十角形 $10=2\times5(=m_1)$

$$K_1=1, K_2=2, K_3=0。$$

即得 $1-\frac{a}{y}-\frac{a^2}{y^2}=0, y^2-ay-a^2=0。$

正十四角形 $14=2\times7(=m_1)$

$$K_1=2, K_2=1, K_3=3, K_4=0。$$

即得 $$1-\frac{2a}{y}-\frac{a^2}{y^2}+\frac{a^3}{y^3}=0。$$

$$y^3-2ay^2-a^2y+a^3=0。$$

正十八角形 $18=2\times9(=m_1)$

$$K_1=2, K_2=3, K_3=1, K_4=4, K_5=0。$$

即 $$1-\frac{2a}{y}-\frac{3a^2}{y^2}+\frac{a^3}{y^3}+\frac{a^4}{y^4}=0。$$

$$y^4-2ay^3-3a^2y^2+a^3y+a^4=0。$$

同时中算家董祐诚(1791～1823)《割圜连比例图解》三卷(1819年)算“(1)有通弦求通弧加倍几分之通弦：凡弦之倍分，皆取奇数。”①

① 参见李俨《中算史论丛》第三集第 352～364 页，(X)式(＊见本书第七卷。——编者)。

$$C_m = mC - \frac{m(m^2-1^2)C^3}{4\cdot 3!\quad \cdot r^2} + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)C^5}{4^2\cdot 5!\quad \cdot r^4} - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)C^7}{4^3\cdot 7!\quad \cdot r^6} + \cdots$$

也是由“递加图”归纳得来。

有马赖徸(1714～1783)《拾玑算法》(1766 年)内载有圆内容多边形弦,矢问题。

安岛直圆(1733? ～1798)“拾玑算法解”因对此项问题作一讨论。

如图(1)(2),

$$AB=BC=CD,\cdots=a=a_1=\text{“原面”}=1$$

算出

$$AC=a_2=\text{“二斜”}$$
$$=1.941883634852104054313965488090150168\text{ 太强}$$

$$AD=a_3=\text{“三斜”}$$
$$=2.77091205130441\cdots$$

$$AE=a_4=\text{“四斜”}$$
$$=3.43890513119430\cdots$$

其中 $\frac{a_2}{a}=2\cos\theta$ 称做“因法”

如图(1),延长 AD,令 $DP=a$

$$\angle CDP=\angle ABC=180^\circ-2\theta,$$

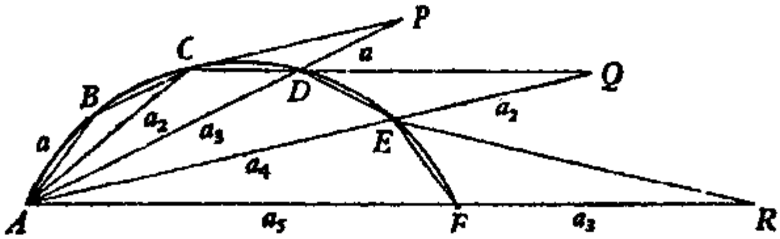
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDP$。

因此 $\triangle ACP$ 是二等边三角形

可得 $a_2\times\text{“因法”}=a_2\times 2\cos\theta$

即 $2a_2\cdot\cos\theta-a=a_3=\text{“三斜”}$

又延长 AE,令 $EQ=a_2$



(1)

$$\angle DEQ = \angle ACD = 180 - 2\theta,$$

∴ $$\triangle ACD \equiv \triangle DEQ,$$

因此$\triangle ADQ$是二等边三角形。

又 $$\triangle BCD \backsim \triangle ANE,$$

$$\text{“二矢”}: a_2 = NO : a_4,$$

$$NO = \frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{二矢}), \tag{1}$$

又 $$\triangle BCM \backsim \triangle BDG,$$

$$a : \text{“二矢”} = a_2 : \text{“三矢”},$$

∴ $$\text{“三矢”} = \frac{a_2}{a}\cdot(\text{二矢}) \tag{2}$$

又 $$\triangle DGE \backsim \triangle ACO$$

$$\text{“四矢”} = \frac{a_2}{a}\cdot(\text{三矢}),$$

即 $$\text{“四矢”} = \frac{a_2^2}{a^2}\cdot(\text{二矢}) =$$

$$= \left(\frac{a_4^*}{a^2+2}\right)(\text{二矢}) \tag{3}$$

其中 $\frac{a_4^*}{a^2}$ 称做“乘率”。

又 $$\triangle ACO \backsim \triangle RDI,$$

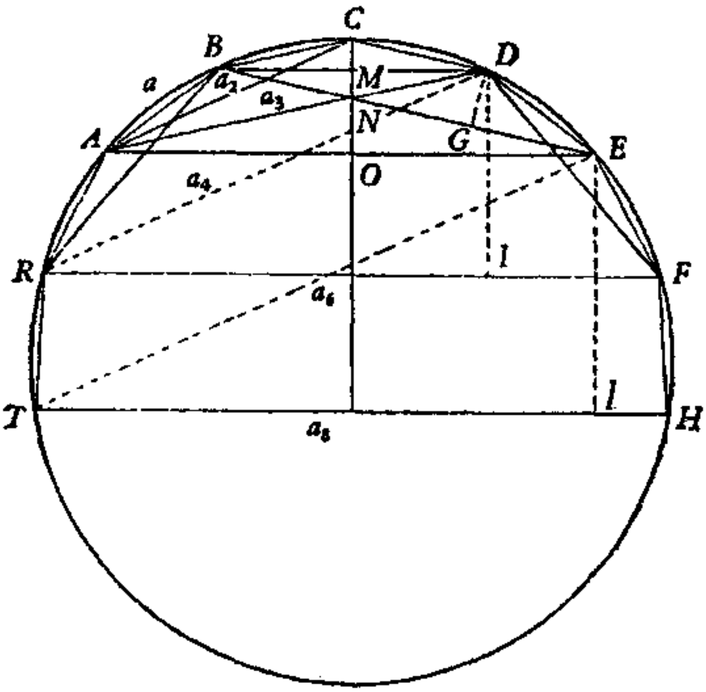
$$CO : AC = DI : RD,$$

$$“四矢” : a_2 = DI : a_4。$$

$$\therefore \qquad DI = \frac{a_4^*}{a^2}\cdot(四矢)$$

$$\therefore \qquad “六矢” = \frac{a^4}{a^2}\cdot(四矢)+(二矢) \qquad (4)$$

又在 $BDRF$ 等边箕形(又称等脚台形或腰袴形)内



(2)

$$RD^2 - DF^2 = DB \cdot RF。$$

即 $$a_4^2 - a_2^2 = a_2 a_6。$$

即 $$a_6 = \frac{a_4^2}{a_2} - a_2 = a_4\cdot(乘率) - a_2 \qquad (5)$$

如前 $$“四矢” : a_2 = DI : a_4。$$

同例 $$DI : a_4 = EJ : a_6$$

$$EJ=\frac{a_6}{a_2}\cdot(\text{四矢})$$

$$\begin{aligned}\text{“八矢”}&=EJ+(\text{四矢})\\&=\left(\frac{a_6}{a_2}+1\right)\cdot(\text{四矢})\\&=\left[\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{乘率})-1+1\right]\cdot(\text{四矢})\\&=\frac{a_4^2}{a_2^2}\cdot(\text{四矢})=\frac{a_4}{a_2}(\text{“六矢”}-\text{“二矢”})。\end{aligned}$$

$$\left(\text{因}\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_2^2}{a^2}-2\right)$$

$$\text{“八矢”}=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{六矢})+2(\text{二矢})-(\text{四矢})\tag{6}$$

同理

$$\text{“十矢”}=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{八矢})+2(\text{二矢})-(\text{六矢})\tag{7}$$

$$\text{“十二矢”}=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{十矢})+2(\text{二矢})-(\text{八矢})\tag{8}$$

以上是求“偶数面矢”的例子。

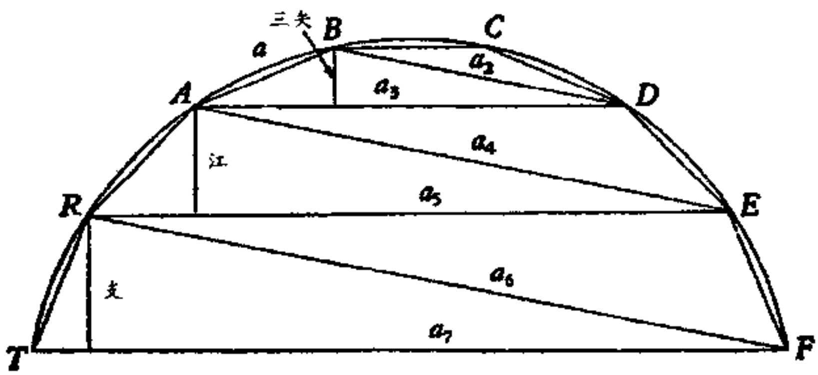
以下再依(2)式进求“奇数面矢”的方法。

如前已知

$$\text{三矢}=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{二矢})\qquad\text{(i)或(2)}$$

又 $$a_2:\text{三矢}=a_4:\text{“江”}\qquad\text{(看下图)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\text{“江”}&=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{三矢})=\frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a}\cdot(\text{二矢})\\&=\left(\frac{a_2^2}{a^2}-2\right)\frac{a_2}{a}\cdot(\text{二矢})\\&=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{四矢})-2(\text{三矢})\end{aligned}$$



∴ 五矢＝江＋(三矢)

$$=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{四矢})-(\text{三矢}) \qquad \text{(ii)}$$

又 a_2：三矢＝a_6：“支”

$$\text{“支”}=\frac{a_6}{a_2}\cdot(\text{三矢})$$

$$=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{乘率})\cdot(\text{三矢})-(\text{三矢})$$

$$=\left(\frac{a_4^2}{a_2^2}-1\right)\cdot(\text{三矢})$$

$$=\left[\left(\frac{a_2}{a}\right)^5+4\left(\frac{a_2}{a}\right)^3+3\left(\frac{a_2}{a}\right)\right]\cdot(\text{二矢})$$

$$=\left(\frac{a_2}{a}\right)^3\cdot(\text{四矢})-4\left(\frac{a_2}{a}\right)^2\cdot(\text{四矢})+$$

$$+3\left(\frac{a_2}{a}\right)\cdot(\text{二矢})$$

因 $$(\text{六矢})=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{四矢})+(\text{二矢}) \qquad \text{(A)}$$

$$=\left(\frac{a_2}{a}\right)^2(\text{四矢})-2(\text{四矢})+(\text{二矢}),$$

$$\text{支}=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{六矢})-(\text{二矢}),$$

七矢＝(三矢)＋(江)＋(支)

$$=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{六矢})-(\text{五矢}) \tag{iii}$$

同理

$$\text{九矢}=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{八矢})-(\text{七矢}) \tag{iv}$$

$$\text{十一矢}=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{十矢})-(\text{九矢}) \tag{v}$$

总结得 $$a_{n+1}=K\cdot a_n-a_{n-1}$$

其中 $K=\frac{a_2}{a}$称做“因法”参看(A)

总上所述

$$(\text{二矢})=\sqrt{a^2-\frac{a_2^2}{4}}$$

$$(\text{三矢})=\frac{a_2}{a}(\text{二矢})$$

$$(\text{四矢})=\left(\frac{a_4}{a_2}+2\right)\cdot(\text{二矢})=\frac{a_4}{a_2}\cdot(\text{二矢})+2(\text{二矢})$$

$$(\text{五矢})=\frac{a_2}{a}\cdot(\text{四矢})-(\text{三矢})$$

$$(\text{六矢})=\frac{a_4}{a_2}(\text{四矢})+2(\text{二矢})-(\text{二矢})$$

$$(\text{七矢})=\frac{a_2}{a}(\text{六矢})-(\text{五矢})$$

$$(\text{八矢})=\frac{a_4}{a_2}(\text{六矢})+2(\text{二矢})-(\text{四矢})$$

$$(\text{九矢})=\frac{a_2}{a}(\text{八矢})-(\text{七矢})$$

$$(\text{十矢})=\frac{a_4}{a_2}(\text{八矢})+2(\text{二矢})-(\text{六矢})$$

$$(\text{十一矢})=\frac{a_2}{a}(\text{十矢})-(\text{九矢})$$

$$(\text{十二矢})=\frac{a_6}{a_2}(\text{十矢})+2(\text{二矢})-(\text{八矢})。$$

安岛直圆(1733?～1798)《拾玑算法解》是在圆内容多边形,已知各边,如

“一面” $a=a_1=1$

“二斜” $a_2=1.941883634852104054313965$

488090150168 太强

进求各斜 a_3,a_4,a_5,a_6。

以及矢$\frac{1}{2}b_1$(二矢),…$\frac{1}{2}b_2$(四矢),…

他的成就前已具述。

同时中算家董祐诚(1791～1823)《割圜连比例图解》(1819年),和项名达(1789～1850)《象数一原》(1850年)是用“连比例”术计算此项问题。如上例,董祐诚同样先由 a_1,a_2 算出

$$(\text{二矢})\frac{1}{2}b_1=\sqrt{a_1^2-\left(\frac{a_2}{2}\right)^2}$$

$$=0.239315664287557$$

之值,因得:

$$\phi_1=\text{圆半径}=r=\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2\times0.239315664287557}$$

$$\phi_2=(\text{一面})=a_1=1\text{ 寸}$$

$$\phi_3=\text{倍(二矢)}=b_1=2\times0.239315664287557。$$

$$\phi_4=b_1^2=(2\times0.239315664287557)^2$$

$$\phi_5=b_1^3=(2\times0.239315664287557)^3$$

$$\phi_6=b_1^4=(2\times0.239315664287557)^4$$

……

同样可算出

$$a_3=\text{“三斜”}=3\phi_2-\phi_4$$

$$=2.77091205130641\cdots$$

$$a_4 = \text{“四斜”} = 4\phi_2 - \frac{5}{2}\phi_4 + \frac{7}{32}\phi_6$$

$$= 3.43890513119430\cdots$$

$$a_5 = \text{“五斜”} = 5\phi_2 - 5\phi_4 + \phi_6。$$

$$\cdots\cdots$$

其中

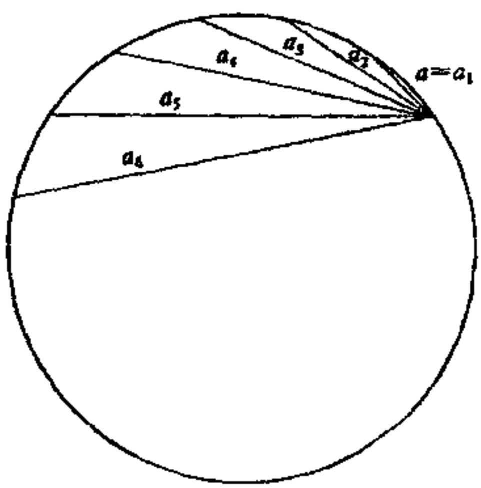
$$\text{二矢} = \frac{1}{2}b_1$$

$$= 0.239315664287557$$

$$\text{倍二矢} = b$$

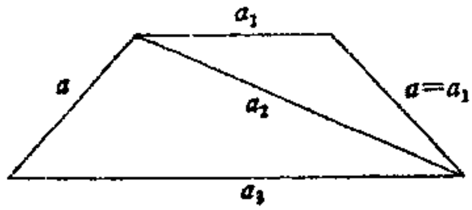
$$= 2 \times 0.239315664287557$$

日本坂部广胖(1759～1824)《点窜指南录》(1815年)的“角术”,也和关孝和(1642? ～1708)一样,是计算各等边多边形(角形)的方法,如已知各等边形,各边$=a$,再求各等边形(角形)外切圆半径(角中径)Y各公式,和各等边形(角形)内容圆半径(平中径)X各公式。不过时间较关孝和后一世纪,计算方法较前则有进步,他的主要方法是配合代数方法来计算,不专用几何方法。



坂部广胖(1759～1824)《点窜指南录》(1815年)的“角术”计算,是和中算家和算家一样,将全弧分为若干等分,每分弦为$a=a_1$,其中a即$\frac{1}{n}$分弧通弦的一边,其余$\frac{2}{n}$分弧通弦称为“二斜”即a_2,$\frac{3}{n}$分弧通弦称为“三斜”即a_3,$\frac{4}{n}$分

弧通弦称为“四斜”即 a_4,…余类推,如图。又如图



“三斜”$a_3=\dfrac{a_2^2-a^2}{a}$。

如下左图,同样

“四斜”$a_4=\dfrac{a_3^2-a_2}{a_2}$。

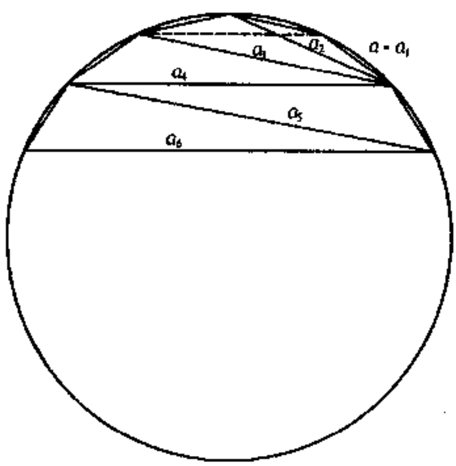
“五斜”$a_5=\dfrac{a_4^2-a^2}{a_3}$。

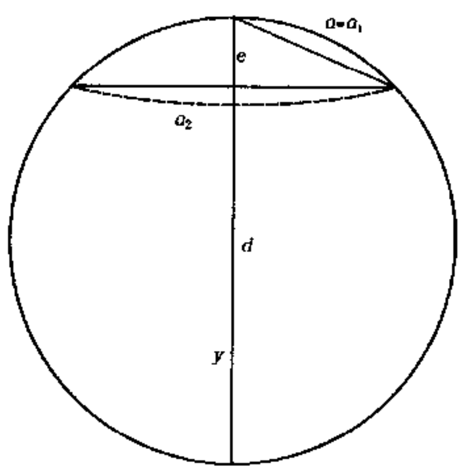
“六斜”$a_6=\dfrac{a_5^2-a^2}{a_4}$。

又如下右图

$$a^2=e\cdot d=2\cdot e\cdot y。$$

即 $$2e=\frac{a^2}{y}。$$





又 $$4a^2-4e^2=a_2^2,$$

$$4a^2-\frac{a^4}{y^2}=a_2^2。\tag{1}$$

从此可逐次求出“某率的 z_n”。

如(1)式,两边各乘$\left(\dfrac{y^2}{a^2}\right)$得:

$$4y^2 - a^2 = \frac{a_2^2 y^2}{a^2} = \frac{y^2}{a^2} \cdot a_2^2$$

$$= \frac{y^2}{a^2} z_2^2 \text{ 称做(二率)}^2\text{。}$$

$\frac{y}{a} \cdot z_2$ 称做二率

其中 $z_2 = a_2$,是“二率的 z_2”。

因“三斜”内 $a_2^2 - a^2 = a_3 \cdot a$。

代入(1)式得 $3a^2 - \frac{a^4}{y^2} = a_3 \cdot a$。

两边各乘$\left(\frac{y^2}{a^2}\right)$得 $3y^2 - a^2 = \frac{y^2 \cdot a_3}{a}$。

$$= \frac{y^2}{a} \cdot z_3 \text{ 称做三率}$$

自乘得 $9y^4 - 6a^2y^2 + a^4 = \frac{y^4}{a^2} \cdot z_3^2$ 称做(三率)^2,

其中 $z_3 = a_3$,是“三率的 z_3”。

因“四斜”内 $a_3^2 - a^2 = a_4 \cdot a_2$,

或 $z_3^2 - a^2 = z_4 \cdot z_2$,

其中 $z_4 = a_4$。

两边各乘$\left(\frac{y^4}{a^2}\right)$得:

$$\frac{y^4}{a^2} \cdot z_3^2 - y^4 = \frac{y^4}{a^2} \cdot z_4 \cdot z_2$$

将(三率)^{2}之值代入上式左边,得:

$$8y^4 - 6a^2y^2 + a^4 = \frac{y^4}{a^2} \cdot z_4 \cdot z_2$$

自乘得:

$$64y^8 - 96a^2y^6 + 54a^4y^4 - 12a^6y^2 + a^8 = \frac{y^8}{a^4} \cdot z_4^2 \cdot z_2^2$$

上式以(二率)^2 即 $4y^2-a^2=\frac{y^2}{a^2}\cdot z_2^2$ 除,得

$$16y^6-20a^2y^4+8a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a^2}\cdot z_4^2$$

称做(四率)^2,$\frac{y^3}{a}\cdot z_4$ 称做四率,

其中 $z_4=a_4$,是"四率的 z_4"。

上面(四率)^2 两边各减 y^6 得

$$15y^6-20a^2y^4+8a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a^2}z_4^2-y^6=\frac{y^4}{a}\cdot\frac{y^2(z_4^2-a^2)}{a}。$$

上式以三率即 $3y^2-a^2=\frac{y^2}{a}\cdot z_3$ 除,得:

$$5y^4-5a^2y^2+a^4=\frac{y^4}{a}\cdot\frac{z_4^2-a^2}{z_3}=\frac{y^4}{a}\cdot z_5$$

称做五率。自乘得

$$25y^8-50a^2y^6+35a^4y^4-10a^6y^2+a^8=\frac{y^8}{a^2}\cdot z_5^2$$

称做(五率)^2,其中 $z_5=\frac{z_4^2-a^2}{z_3}$,是"五率的 z_5"。

上面(五率)^2 两边各减 y^8 得:

$$24y^8-50a^2y^6+35a^4y^4-10a^6y^2+a^8$$
$$=\frac{y^8}{a^2}\cdot z_5^2-y^8=\frac{y^9}{a^2}(z_5^2-a^2)$$

因由 $a_3^2-a^2=a_4a_2$

得 $z_3^2-a^2=z_4z_2$ 其中 $z_4=a_4$,

同样得 $z_5^2-a^2=z_6\cdot z_4$ 其中 $z_6=a_6$,

$z_7^2-a^2=z_8\cdot z_6$ 其中 $z_8=a_8$,

$z_9^2-a^2=z_{10}\cdot z_8$ 其中 $z_{10}=a_{10}\cdots$

……………………

故上式

$$24y^8-50a^2y^6+35a^4y^4-10a^6y^2+a^8=\frac{y^8}{a^2}\cdot z_6\cdot z_4$$

自乘得：

$$576y^{16}-2400a^2y^{14}+4180a^4y^{12}-3780a^6y^{10}+2273a^8y^8$$
$$-800a^{10}y^6+170a^{12}y^4-20a^{14}y^2+a^{16}$$
$$=\frac{y^{16}}{a^4}\cdot z_6^2\cdot z_4^2。$$

以(四率)^{2}除上式得：

$$36y^{10}-105a^2y^8+112a^4y^6-54a^6y^4+12a^8y^2$$
$$-a^{10}=\frac{y^{10}}{a^2}\cdot z_6^2 \qquad \text{称做(六率)}^2。$$

$$\frac{y^5}{a}\cdot z_6 \qquad \text{称做六率，}$$

其中 $$z_6=\frac{z_5^2-a^2}{z_4}\text{，是“六率的 }z_6\text{”。}$$

如前例(六率)^{2}两边各减 y^{10}，再以五率除得：

$$7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a}\cdot\frac{z_6^2-a^2}{z_5}=\frac{y^6}{a}\cdot z_7 \text{ 称做七率。}$$

自乘得：

$$49y^{12}-196a^2y^{10}+194a^4y^8-210a^6y^6+77a^8y^4$$
$$-14a^{10}y^2+a^{12}=\frac{y^{12}}{a^2}\cdot z_7^2 \text{ 称做(七率)}^2，$$

其中 $$z_7=\frac{z_6^2-a^2}{z_5}\text{，是“七率的 }z_7\text{”。}$$

又如前例(七率)^{2}两边各减 y^{12}，自乘后，再以(六率)^{2}除得：

$$64y^{14}-336a^2y^{12}+682a^4y^{10}-660a^6y^8+352a^8y^6$$
$$-104a^{10}y^4+16a^{12}y^2-a^{14}=\frac{y^{14}}{a^2}\cdot z_8^2$$

称做(八率)^2，其中 $\frac{y^7}{a}\cdot z_8$ 称做八率。

又 $$z_8=\frac{z_7^2-a^2}{z_6}$$ 是"八率的 z_8"。

上面(八率)^2 式,两边各减 y^{14},并应用 $z_9=\frac{z_8^2-a^2}{z_7}$ 公式代入的方法算得

$$63y^{14}-336a^2y^{12}+682a^4y^{10}-660a^6y^8+352a^8y^6-104a^{10}y^4$$
$$+16a^{12}y^2-a^{14}=\frac{y^{14}}{a^2}\cdot z_9\cdot z_7。$$

再以七率 $7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a}\cdot z_7$

除上式得

$$9y^6-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8=\frac{y^8}{a}\cdot z_9$$ 称做九率,

其中 $$z_9=\frac{z_8^2-a^2}{z_7}$$ 是"九率的 z_9"。

十率以上,可以用同样步骤求得。

总上所得,知

二率 $=\frac{y}{a}\cdot z_2$,　其中 $z_2=a_2$ 是"二率的 z_2",

三率 $=\frac{y^2}{a}\cdot z_3$,　其中 $z_3=a_3$ 是"三率的 z_3",

四率 $=\frac{y^3}{a}\cdot z_4$,　其中 $z_4=a_4$ 是"四率的 z_4",

五率 $=\frac{y^4}{a}\cdot z_5$,　其中 z_5,　是"五率的 z_5",

六率 $=\frac{y^5}{a}\cdot z_6$,　其中 z_6,　是"六率的 z_6",

七率 $=\frac{y^6}{a}\cdot z_7$,　其中 z_7,　是"七率的 z_7",

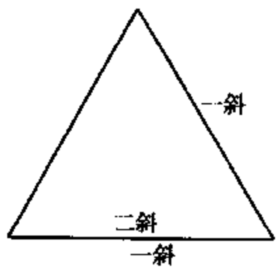
八率 $=\frac{y^7}{a}\cdot z_8$,　其中 z_8,　是"八率的 z_8",

$$九率=\frac{y^8}{a}\cdot z_9,\quad 其中 z_9,\quad 是“九率的 z_9”,$$

$$十率=\frac{y^9}{a}\cdot z_{10},\quad 其中 z_{10},\quad 是“十率的 z_{10}”。$$

现在进求等边多边形(各边=a),外切圆半径 y 的实用公式如

1. 三角形



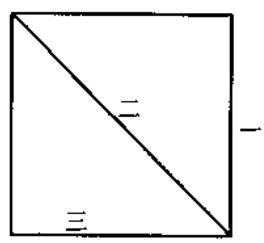
因 $z_2=a$,

如图,在三角形内 一斜=二斜。用(一率)^2,(二率)^2

即(二率)^2 $\quad 4y^2-a^2=\frac{y^2}{a^2}\cdot z^2=y^2$。

∴ $\quad 3y^2-a^2=0$

2. 正方形



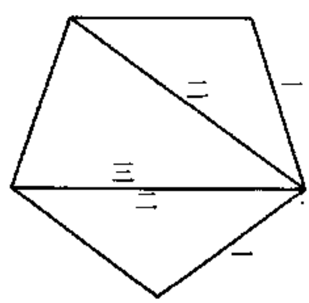
因 $z_3=a$,

如图,在正方形内 一斜=三斜。用(一率)(三率)

即(三率) $\quad 3y^2-a^2=\frac{y^2}{a}\cdot z_3=y^2$

∴ $\quad 2y^2-a^2=0$

3. 正五角形



因 $z_3=z_2$

如图在正五角形内　二斜≡三斜。用(二率)^2,(三率)^2

因(二率)^2　　$4y^2 - a^2 = \frac{y^2}{a^2} \cdot z_2^2$

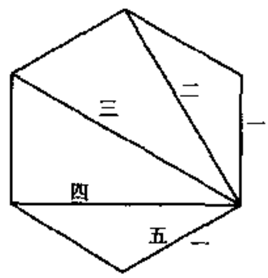
又(三率)^2　　$9y^4 - 6a^2y^2 + a^4 = \frac{y^4}{a^2} \cdot z_3^2$

又　　$z_3 = z_2$。

故　　$y^2(4y^2 - a^2) = 9y^4 - 6a^2y^2 + a^4$。

∴　　$5y^4 - 5a^2y^2 + a^4 = 0$。

4. 正六角形



因 $z_5 = a$

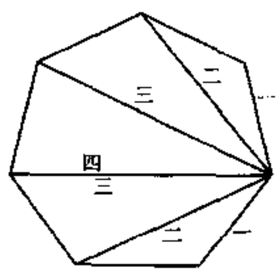
如图在正六角形内　一斜≡五斜。用(一率),(五率)

即(五率),　　$5y^4 - 5a^2y^2 + a^4 = \frac{y^4}{a} \cdot z_5$

$$5y^4 - 5a^2y^2 + a^4 = y^4$$

∴　　$4y^4 - 5a^2y^2 + a^4 = 0$。

5. 正七角形。



因 $z_4 = z_3$

如图在正七角形内　三斜≡四斜。用(三率)^2,(四率)^2

即(四率)$^2 = y^2$(三率)^2

$$16y^6 - 20a^2y^4 + 8a^4y^2 - a^6 = (9y^4 - 6a^2y^2 + a^4)y^2$$

$$\therefore\quad 7y^6 - 14a^2y^4 + 7a^4y^2 - a^6 = 0。$$

6. 正八角形。　　因 $z_5=z_3$。　　用(三率),(五率),

$$(\text{五率})=\frac{y^4}{a}\cdot z_5=\frac{y^4}{a}\cdot z_3=y^2\left(\frac{y^2}{a}\cdot z_3\right)。$$

$$5y^4-5a^2y^2+a^4=\frac{y^4}{a}\cdot z_5=y^2\times(\text{三率})=y^2(3y^2-a^2)。$$

$$\therefore\quad 2y^4-4a^2y^2+a^4=0。$$

7. 正九角形　　因 $z_5=z_4$。　　用(四率)^2,(五率)^2

$$(5y^4-5a^2y^2+a^4)^2=\frac{y^8}{a^2}z_5^2$$

$$=y^2\left(\frac{y^6}{a^2}\cdot z_4^2\right)=y^2\times(\text{四率})^2$$

$$=y^2(16y^6-20a^2y^4+8a^4y^2-a^6)。$$

$$\therefore\quad 9y^8-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8=0。$$

两边各除 $3y^2-a^2$ 得

$$3y^6-9a^2y^4+6a^4y^2-a^6=0。$$

8. 正十角形。　　因 $z_7=z_3$　　用(三率)(七率)。

$$7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a}\cdot z_7$$

$$=y^4\left(\frac{y^2}{a}z_3\right)=y^4\times(\text{三率})$$

$$=y^4(3y^2-a^2)。$$

$$\therefore\quad 4y^6-13a^2y^4+7a^4y^2-a^6=0。$$

两边各除 $4y^2-a^2$ 得:

$$y^4-3a^2y^2+a^4=0。$$

此方程式又可分解成

$$(y^2-ay-a^2)[1](y^2+ay-a^2)=0。$$

关孝和“括要算法”(1709 年)用

$$y^2-ay-a^2=0$$

公式。

9. 正十一角形。　因 $z_6=z_5$　用(五率)^2,(六率)^2

$$36y^{10}-105a^2y^8+112a^4y^6-54a^6y^4+12a^8y^2-a^{10}$$

$$=\frac{y^{10}}{a^2}\cdot z_6^2=y^2\left(\frac{y^8}{a^2}\cdot z_5^2\right)=y^2(\text{五率})^2$$

$$=y^2(25y^8-50a^2y^6+35a^4y^4-10a^6y^2+a^8)。$$

$$\therefore\quad 11y^{10}-55a^2y^8+77a^4y^6-44a^6y^4+11a^8y^2-a^{10}=0。$$

10. 正十二角形　因 $z_7=z_5$.　用(五率),(七率)

$$7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6=\frac{y^6}{a}\cdot z_7=y^2\left(\frac{y^4}{a}\cdot z_5\right)$$

$$=y^2\times(\text{五率})=y^2(5y^4-5a^2y^2+a^4)。$$

$$\therefore\quad 2y^6-9a^2y^4+6a^4y^2-a^6=0。$$

两边各除 $2y^2-a^2$ 得

$$y^4-4a^2y^2+a^4=0。$$

11. 正十三角形　因 $z_7=z_6$,　用(六率)^2,(七率)^2

$$(7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6)^2=\frac{y^{12}}{a^2}\cdot z_7^2$$

$$=y^2\left(\frac{y^{10}}{a^2}\cdot z_6^2\right)=y^2\times(\text{六率})^2$$

$$=y^2(36y^{10}-105a^2y^8+112a^4y^6-54a^6y^4+12a^8y^2-a^{10})。$$

$$\therefore\quad 13y^{12}-91a^2y^{10}+182a^4y^8-156a^6y^6+65a^8y^4-13a^{10}y^2+a^{12}=0。$$

12. 正十四角形　因 $z_9=z_5$　用(五率),(九率)

$$9y^8-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8=\frac{y^8}{a}\cdot z_9$$

$$=y^4\cdot\left(\frac{y^4}{a}\cdot z_5\right)=y^4\times(\text{五率})$$

$$=y^4(5y^4-5a^2y^2+a^4)。$$

$$\therefore\quad 4y^8-25a^2y^6+26a^4y^4-9a^6y^2+a^8=0。$$

两边各除 $4y^2-a^2$ 得

$$y^6-6a^2y^4+5a^4y^2-a^6=0。$$

此方程式又可分解成

$$(y^3-2ay^2-a^2y+a^3)^{\circledast}(y^3-2ay^2-a^2y-a^3)=0。$$

关孝和“括要算法”(1709 年)用

$$y^3-2ay^2-a^2y+a^3=0。$$

13. 正十五角形　　因 $z_8=z_7$　　用(七率)^2,(八率)^2

$$64y^{14}-336a^2y^{12}+682a^4y^{10}-660a^6y^8$$

$$+352a^8y^6-104a^{10}y^4+16a^{12}y^2-a^{14}=\frac{y^{14}}{a^2}z_8^2$$

$$=y^2\left(\frac{y^{12}}{a^2}\cdot z_7^2\right)=y^2\times(\text{七率})^2$$

$$=y^2(7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6)^2$$

$$\therefore\quad 15y^{14}-140a^2y^{12}+378a^4y^{10}-450a^6y^8+275a^8y^6-$$

$$-90a^{10}y^4+15a^{12}\cdot y^2-a^{14}=0。$$

两边各除$(3y^2+a^2)(5y^4-7a^2y^2+a^4)$,得

$$y^8-8a^2y^6+14a^4y^4-7a^6y^2+a^8=0。$$

14. 正十六角形,　　因 $z_9=z_7$,　　用(七率),(九率)

$$9y^8-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8=\frac{y^8}{a}\cdot z_9$$

$$=y^2\left(\frac{y^6}{a}\cdot z_7\right)=y^2(7y^6-14a^2y^4+7a^4y^2-a^6)$$

$$\therefore\quad 2y^8-16a^2y^6+20a^4y^4-8a^6y^2+a^8=0。$$

15. 正十七角形,　　因 $z_9=z_8$,　　用(八率)^2,(九率)^2

$$(9y^8-30a^2y^6+27a^4y^4-9a^6y^2+a^8)^2=\frac{y^{16}}{a^2}\cdot z_9^2$$

$$=y^2\left(\frac{y^{14}}{a^2}\cdot z_8^2\right)=y^2(64y^{14}-336a^2y^{12}+682a^4y^{10}$$

$$-660a^6y^8+352a^8y^6-104a^{10}y^4+16a^{12}y^2-a^{14})。$$

∴ $$17y^{16}-204a^2y^{14}+714a^4y^{12}-1122a^6y^{10}+935a^8y^8$$
$$-442a^{10}y^6+119a^{12}y^4-17a^{14}y^2+a^{16}=0。$$

16. 十八角形　　因 $z_{11}=z_7$　　用(七率),(十一率)

得　$y^8-10a^2y^6+15a^4y^4-7a^6y^2+a^8=0$。

上式可分解成

$$(y^3-3ay^2+a^3)^*(y^3+3ay^2-a^3)(y^2-a^2)=0。$$

关孝和用

$$y^3-3ay^2+a^3=0。$$

17. 正十九角形　　因 $z_{11}=z_9$　　用(九率)^2,(十一率)^2

得　$19y^{18}-285a^2y^{16}+1254a^4y^{14}-2508a^6y^{12}+2717a^8y^{10}-$
$$-1729a^{10}y^8+665a^{12}y^6-152a^{14}y^4+19a^{16}y^2-a^{18}=0。$$

18. 正二十角形　　因 $z_{11}=z_9$　　用(九率),(十一率)

得　$2y^{10}-25a^2y^8+50a^4y^6-35a^6y^4+10a^8y^2-a^{10}=0$。

除　　$2y^2-a^2$ 得。

$$y^8-12a^2y^6+19a^4a^4-8a^6y^2+a^8=0。$$

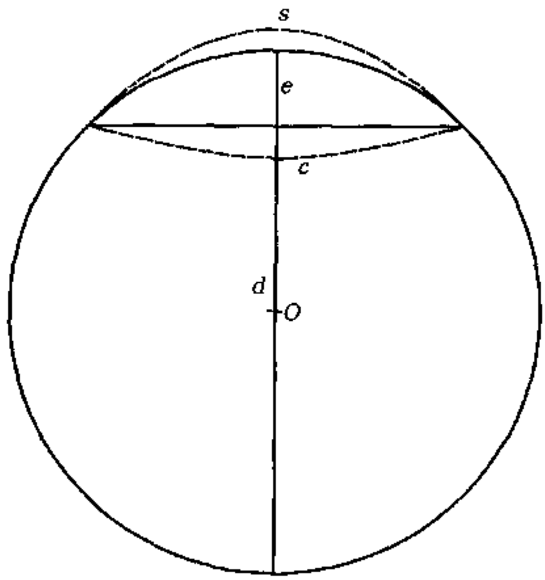
余略。

(四)圆理内杜氏九术的计算

在说明圆理杜氏九术计算之前先就杜氏九术作一介绍。陈际新称:"(九术)内圜径求周(Ⅰ),弧背求(正)弦(Ⅱ),求矢(Ⅲ)三法,本泰西杜氏德美所著。"其余六术为明安图所补创。朱鸿、张豸冠、董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦、丁取忠、夏鸾翔复通称杜氏九术。

杜氏九术如下:

(一)圜径(d)求周(πd)。



$$\pi d = d\left[3 + \frac{3\cdot 1^2}{4\cdot 3!} + \frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!} + \frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!} + \cdots\right]$$

或

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{3!} + \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{5!} + \frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!} + \cdots,$$

或

$$\pi d = 3d\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!} \qquad (\text{I})$$

（二）弧背(S)求正弦($\sin\alpha$)。

$$\sin\alpha = S - \frac{S^3}{3!\cdot r^2} + \frac{S^5}{5!\cdot r^4} - \frac{S^7}{7!\cdot r^6} + \frac{S^9}{9!\cdot r^8} -$$

或

$$\sin\alpha = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{S^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!} \qquad (\text{II})$$

（三）弧背(S)求正弦($\text{vers}\,\alpha$)。

$$\text{vers}\,\alpha = \frac{S^2}{2!\cdot r} - \frac{S^4}{4!\cdot r^3} + \frac{S^6}{6!\cdot r^5} - \frac{S^8}{8!\cdot r^7} + \frac{S^{10}}{10!\cdot r^9} -$$

或

$$\text{vers }\alpha=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{S^{2n}}{r^{2n-1}\cdot(2n)!}\qquad(\text{Ⅲ})$$

（四）弧背（$2S$）求通弦（c）。

$$c=2S-\frac{(2S)^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{(2S)^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}-\frac{(2S)^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\frac{(2S)^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}-\cdots,$$

或

$$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2S^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\qquad(\text{Ⅳ})$$

（五）弧背（$2S$）求矢（vers α）。

$$\text{vers }\alpha=\frac{(2S)^2}{4\cdot 2!\cdot r}-\frac{(2S)^4}{4^2\cdot 4!\cdot r^3}+\frac{(2S)^6}{4^3\cdot 6!\cdot r^5}-\frac{(2S)^8}{4^4\cdot 8!\cdot r^7}+\cdots,$$

或

$$\text{vers }\alpha=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2S)^{2n}}{4^n\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!}\qquad(\text{Ⅴ})$$

（六）通弦（c）求弧背（$2S$）。

$$2S=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}+\cdots,$$

或

$$2S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}\cdot c^{2n-1}\qquad(\text{Ⅵ})$$

（七）正弦（$\sin\alpha$）求弧背（S）。

$$S=\sin\alpha+\frac{1^2\cdot\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot \sin^9\alpha}{9!\cdot r^8}+\cdots,$$

或

$$S=\sum_1^\infty \frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{2^{2(n-1)}(2n-1)!}\sin^{2n-1}\alpha \qquad (\text{Ⅶ})$$

此式是由(Ⅴ)式，

令 $C=2\sin\alpha$ 代得。

(八)正矢($2\text{vers}\ \alpha$)求弧背(S)。

$$S^2=r\left[(2\text{vers}\ \alpha)+\frac{1^2(2\text{vers}\alpha)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2(2\text{vers}\alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2(2\text{vers}\alpha)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\right],$$

或

$$S_2=2r\sum_1^\infty \frac{1^2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}(2n)!}(2\text{vers}\ \alpha)^n \qquad (\text{Ⅷ})$$

(九)矢($\text{vers}\ \alpha$)求弧背($2S$)。

$$(2S)^2=r\left[(8\text{vers}\ \alpha)+\frac{1^2(8\text{vers}\alpha)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2(8\text{vers}\alpha)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6r^2}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2(8\text{vers}\alpha)^4}{4^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\right],$$

或

$$(2S)^2=2r\sum_1^\infty \frac{1^2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\cdot r^{n-1}(2n)!}(8\text{vers}\ \alpha)^n \quad (\text{Ⅸ})$$

和算家将多位小数约成分数，称做“零约术”，中算家亦有比例。祖冲之最先曾将圆周率值

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

约成 $\pi=\frac{355}{113}$。特别在清代计算割圆时，亦曾用到。如

明安图(约 1750 年)的《割圜密率捷法》在算“万分全弧通弦率

数”时，算出：

$$166666665000=\frac{4\times(10000)^3}{24.00000024}\doteq\frac{4\times(10000)^3}{24}\doteq\frac{(10000)^3}{3!}$$

$$333333300000003000\doteq\frac{(10000)^3}{3!}\times\frac{4^2(10000)^2}{80.000007}$$

$$\doteq\frac{(10000)^3}{3!}\times\frac{4^2(10000)^2}{20}\doteq\frac{4(10000)^5}{5!}$$

$$317460206349214571428500000$$

$$\doteq\frac{4(10000)^5}{5!}\times\frac{4(10000)^2}{42}\doteq\frac{4^2(10000)^7}{7!}$$

$$1763666948853963668407555555750000$$

$$\doteq\frac{4^2(10000)^7}{7!}\times\frac{4(10000)}{72}\doteq\frac{4^3(10000)^9}{9!}$$

$$64133291646681276243526696204727267 0000$$

$$\doteq\frac{4^3(10000)^9}{9!}\times\frac{4(10000)^2}{110}\doteq\frac{4^4(10000)^{11}}{11!}$$

$$16444413857794457374149343983955092123078700000$$

$$\doteq\frac{4^4(10000)^{11}}{11!}\times\frac{4(10000)^2}{156}\doteq\frac{4^5(10000)^{13}}{13!}$$

$$31322640727114357526697869850597636645662879994270000$$

$$\doteq\frac{4^5(10000)^{13}}{13!}\times\frac{4(10000)^2}{210}\doteq\frac{4^6(10000)^{15}}{15!}$$

明安图(约 1750 年)的“割圜密率捷法”又在算“万分全弧正矢率数”时，算出

$$100000000=\frac{2}{2}(10000)^2=\frac{2(10000)^2}{2!}$$

$$1666666650000000\doteq\frac{2^2}{2\times12}(10000)^4\doteq\frac{2^2(10000)^4}{4!}$$

$$11111110555555\ 60000000$$

$$\doteq\frac{2^2}{4!}(10000)^4\times\frac{2(10000)^2}{30}\doteq\frac{2^3(10000)^6}{6!}$$

3968253412698432142857000000

$$\doteq\frac{2^3(10000)^6}{6!}\times\frac{2(10000)^2}{56}\doteq\frac{2^4(10000)^8}{8!}$$

881833950554746281490634920640000000

$$\doteq\frac{2^4(10000)^8}{8!}\times\frac{2(10000)^2}{90}\doteq\frac{2^5(10000)^{10}}{10!}$$

1336111712361843884661684103001924000000000

$$\doteq\frac{2^5(10000)^{10}}{10!}\times\frac{2(10000)^2}{132}\doteq\frac{2^6(10000)^{12}}{12!}$$

146825410039739845665361178012686914209600000000

$$\doteq\frac{2^6(10000)^{12}}{12!}\times\frac{2(10000)^2}{182}\doteq\frac{2^7(10000)^{14}}{14!}$$

12235444841274077184430989575438759179051003108000000

$$\doteq\frac{2^7(1000)^{14}}{14!}\times\frac{2(1000)^2}{240}\doteq\frac{2^8(10000)^{16}}{16!}。$$

日本镰田俊清(?～1749)曾集录宅间能清以下各算家学派(如宅间流)的数理，编成《宅间流圆理》(1722 年)较先举出弧，矢；弦，弧互求三式，如：

$$S=2\sqrt{ed}\left[1+\frac{1^2}{2\cdot3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{3^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{3^2\cdot5^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

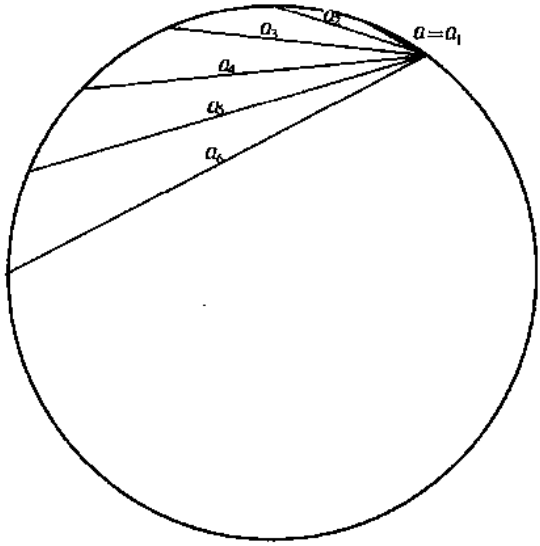
$$c=S\left[1-\frac{1}{3!}\left(\frac{S}{d}\right)^2+\frac{1}{5!}\left(\frac{S}{d}\right)^4-\frac{1}{7!}\left(\frac{S}{d}\right)^6+\cdots\right]$$

即杜氏九术之(Ⅳ)。

$$S=c\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

以上三式即松永良弼(?～1744)《方圆算经》(1739 年)所举(5)，(8)，(4)各式都在十八世纪初叶，此时杜氏九术还未正式输入日本。

镰田俊清又在《宅间流圆理》内引有计算弧长的实例。因如图，(一面)，$a=a_1$　$d=$圆直径



（二斜）$=a_2$，（三斜）$=a_3$，

（四斜）$=a_4$，（五斜）$=a_6$，

（六斜）$=a_7$，

……

其中

$$\sqrt{d^2-a^2}\div\frac{d}{2}=K$$

=“因法”。

又因 $a_{n+1}=K\cdot a_n-a_{n-1}$（说明见安岛直圆《拾玑算法解》）。

（例） 如求圆直径 $d=10$，内 $a=8$ 相对的弧长。

因 $\sqrt{10^2-8^2}\div\frac{10}{2}=1.2=K$。

因得

$$a_2=1.2\times8=9.6$$

$$a_3=1.2\times9.6-8.00=3.52$$

此时 $a_3<a$，再是 $a_3=b=b_1$。

令 $d=10 \quad b_1=3.52$。

又因 $\sqrt{10^2-3.52^2}\div\frac{10}{2}=1.872=K_1$，

因得

$$b_2=6.58944,$$

$$b_3=8.81543168,$$

$$b_4=9.91304810496,$$

$$b_5=9.741794372485,$$

$$b_6 = 8.323690956,$$

$$b_7 = 5.840155187146,$$

$$b_8 = 2.609079554。$$

此时

$$b_8 = 2.609079554 < b_1 \quad (= 3.52)。$$

如前令　$d = 10, \quad c_1 = 2.609079554。$

又因　$\sqrt{10^2 - 2.609079554^2} = 1.93073 = K_2,$

因得　$c_2 = 5.0374238,$

$$c_3 = 7.1168156245,$$

$$c_4 = 8.70318123,$$

$$c_5 = 9.6866577,$$

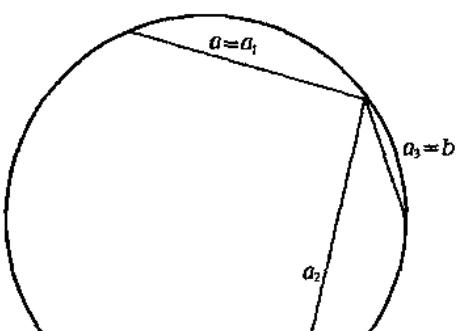
$$c_6 = 9.999\cdots \text{ 即 } c_6 = d \doteq 10。$$

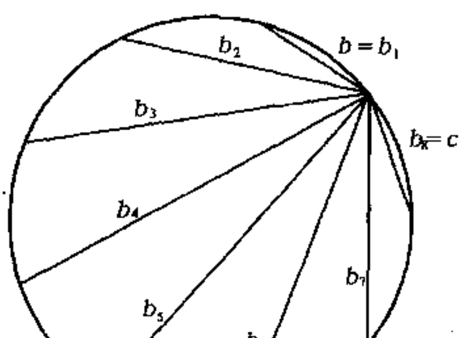
即直径 $d=10$ 时有十二边形，每边之通径长为 $c_1=2.609079554$。

相对弧长为　$\dfrac{P}{12}$，

又　$b_1 = 3.52$。

相对弧长为　$P\left(1 - \dfrac{1}{12}\right) \div 8 = \dfrac{11}{8 \cdot 12}P$。





最后　　　　$a = 8.00$,

相对弧长当为　　$P\left(1-\frac{11}{8.12}\right) \div 3 = \frac{85}{12.24}P$。

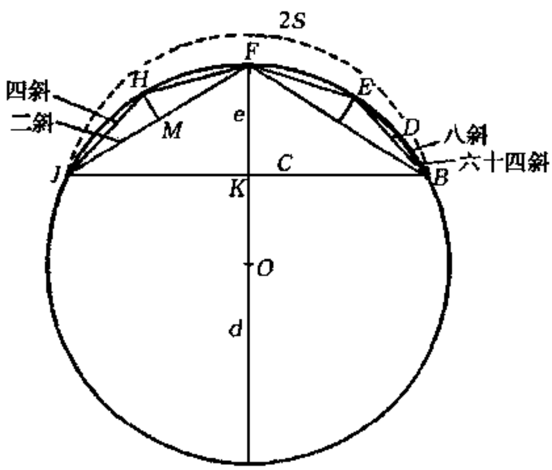
以　　　　$P = 3.1415926535$

代入上式确定　　$a = 8$,

相对弧长为　　9.326388,

其中　　　　$d = 10$。

建部贤弘(1664～1739)在《不休缀术算经》(1722年)内最先算出杜氏九术内各题



如图,$JFBL$ 圆,圆心 O;圆径 $FL=d=2r$;弦 $JB=C_1$,称做“一斜”,即全弧 S 的通弦。“矢”,$FK=c$,“弧背”,$\overset{\frown}{JFB}=2S$,“半背”$=S$。

平分$\overset{\frown}{JFB}$弧于 F,联 JF,FB 弦,$JF=FB=C_2$,称做“二斜”,即二分全弧的通弦。

又平分$\overset{\frown}{JF}$,$\overset{\frown}{FB}$弧于 H,于 E,联 JH,HF;FE,$EB=C_4$,称做“四斜”,即四分全弧的通弦。

又平分$\overset{\frown}{EB}$弧于 D,联 ED,DB。弦 $DB,ED=C_8$,称做“八斜”,即八分全弧的通弦。

又因 $$\triangle LBF \backsim \triangle BKF$$

$$FB^2=C_2^2=FK\cdot d=ed。$$

定半背幂	0.00010000003333335111112253969066667282347769479595875
泛半背幂	0.0001
一定差	0.00000000003333335111112253969066667282347769479595875
一泛差	0.00000000003333333333333333333333333333333333333333333
二定差	0.00000000000000001777778920635733333949014436146262542
二泛差	0.00000000000000001777777777777777777777777777777777777
三定差	0.00000000000000000000001142857955556171236658368484764
三泛差	0.00000000000000000000001142857142857142857142857142857
四定差	0.00000000000000000000000000000812699028379515511341907
四泛差	0.00000000000000000000000000000812698412698412698412698
五定差	0.00000000000000000000000000000000000615681102812929204
五泛差	0.00000000000000000000000000000000000615680615680615681
六定差	0.0000000000000000000000000000000000000000487132313582
六泛差	0.0000000000000000000000000000000000000000487131915703

其中 $$FB=C_2=\text{“二斜”}。$$

假令 $$\text{圆径 } FL:d=1.000\text{ 尺}=10\text{ 寸}$$

$$\text{矢 } FK:e=0.00001\text{ 寸}$$

从“二斜”,“四斜”,“八斜”……分到“六十四斜”逐渐接近弧长。算到“六十四斜”,再以 64 乘之,以 2 除之,其中$\left(\frac{64\cdot C_{64}}{2}\right)^2$数值可以算出。假定此弧的平方数值为$\left(\frac{64\cdot C_{64}}{2}\right)^2$和相对的弦方即 $e\cdot d$ 相较是有出入。其中相差数,亦可逐次算出。如令

$$S^2=\left(\frac{64C_{64}}{2}\right)^2$$

$S^2=0.00010000003333335111112253969066667282347769479595875$ 称做“定半背幂”。

又 $ed=0.00001\times10=0.0001$ 称做“泛半背幂”。

其中 $S^2-ed=0.00000000003333335111112253969066667282347769479595875$ 称做“一定差”，

又 $0.0000000000\dot{3}333333333333333$

$=0.0000000000\dot{3}$

$\doteq(0.00001)^2\times\frac{1}{3}=e^2\times\frac{1}{3}$ 称做“一泛差”。

又 $(S^2-ed)-e^2\times\frac{1}{3}=$(一定差)$-$(一泛差)

$=0.00000000000000001777778920635733333949014436146262542$ 称做“二定差”。

因 $\frac{8}{45}=0.1\dot{7}77777777777777=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=0.1\dot{7}$

又 $[(0.00001)^3\div10]=0.0000000000000001$

即 $0.0000000000000000177777777\dot{7}$

$\doteq[(0.00001)^3\div10]\times\frac{8}{45}=(e^3\div d)\times\frac{8}{3\times15}$

$=e^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\right)$

$=$(一泛差)$\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}$ 称做“二泛差”。

又 $\left[(S^2-ed)-e^2\times\frac{1}{3}\right]-e^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\right)$

$=$(二定差)$-$(二泛差)$=$

$=0.00000000000000000000001142857955556171236658368484764$ 称做“三定差”。

又因 $\frac{4}{35}=0.1\dot{1}4285\dot{7}142857142857142857142857142857$

$\doteq 0.1\dot{1}4285\dot{7}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\right)\frac{9}{14}=\frac{8}{45}\times\frac{9}{14}$

又 $[(0.00001)^4\div 10^2]\times\frac{4}{35}=e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\left(\frac{3}{d}\times\frac{9}{14}\right)$

$=$(二泛差)$\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}$ 称做“三泛差”。

又 $\left(S^2-ed-e^2\times\frac{1}{3}-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\right)-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}$

$=$(三定差)$-$(三泛差)

$=0.000000000000000000000000000008126990283795155113419 07$ 称做“四定差”。

又因 $\frac{128}{1575}=0.08\dot{1}26984126984126984$

$\doteq 0.08\dot{1}2698\dot{4}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\right)\times\frac{32}{45}$

$=\frac{4}{35}\times\frac{32}{45}$

又 $[(0.00001)^5\div 10^3]\times\frac{128}{1575}$

$$=e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\left(\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}\right)$$

$=$（三泛差）$\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}$，　　称做“四泛差”。

又　$$\left(S^2-ed-e^2\times\frac{1}{3}-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\right)$$

$$-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}$$

$=$（四定差）$-$（四泛差）

$=0.00000000000000000000000000000000000615681102812929209$　　称做“五定差”。

又因　$\frac{128}{2079}\fallingdotseq 0.0\dot{6}1568615680\dot{0}6156801$

$$\fallingdotseq 0.0\dot{6}1568\dot{0}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{32}{45}\right)\times\frac{25}{33}$$

$$=\frac{128}{1575}\times\frac{25}{33}$$

又　$$\left[(0.00001)^6\div 10^4\right]\times\frac{128}{2079}$$

$$=e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}\times\left(\frac{e}{d}\times\frac{25}{33}\right)$$

$=$（四泛差）$\times\frac{e}{d}\times\frac{25}{33}$，　　称做“五泛差”。

又　$$S^2-ed-e^2\times\frac{1}{3}-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}$$

$$-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}$$

$$-e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}\times\frac{25}{33}$$

$=$(五定差)$-$(五泛差)

$=0.00000000000000000000000000000000000000000487132313582$　　称做“六定差”。

又因　$\frac{1024}{21021}=0.0487131915703$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{32}{45}\times\frac{25}{33}\right)\times\frac{72}{91}$$

$$=\frac{128}{2079}\times\frac{72}{91}$$

又　$[(0.00001)^7\div10^5]\times\frac{1024}{21021}$

$$=e^2\times\frac{1}{3}\times\frac{e}{d}\times\frac{8}{15}\times\frac{e}{d}\times\frac{9}{14}\times\frac{e}{d}\times\frac{32}{45}\times\frac{e}{d}\times\frac{25}{33}\times\left(\frac{e}{d}\times\frac{72}{91}\right)$$

$=$(五泛差)$\times\frac{e}{d}\times\frac{72}{91}$　　称做“六泛差”。

以后还可以如法求“七定差”,“八定差”等等。

即　(六定差)$-$(六泛差)$=$(七定差)

(七定差)$-$(六泛差)$=$(八定差),等等。

至此可作一总结，即

$$S^2=ed+e^2\times\frac{1}{3}+\frac{e^3}{d}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{e^4}{d^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}$$
$$+\frac{e^5}{d^3}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{32}{45}$$
$$+\frac{e^6}{d^4}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{32}{45}\times\frac{25}{33}$$
$$+\frac{e^7}{d^5}\times\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{32}{45}\times\frac{25}{33}\times\frac{72}{91}+\cdots$$
$$=ed\Big[1+\frac{1}{3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\left(\frac{e}{d}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 7}\left(\frac{e}{d}\right)^3$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}\left(\frac{e}{d}\right)^4$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}\cdot\frac{5^2}{3\cdot 11}\left(\frac{e}{d}\right)^5$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}\cdot\frac{5^2}{3\cdot 11}\cdot\frac{2\cdot 6^2}{7\cdot 13}\left(\frac{e}{d}\right)^6$$
$$+\cdots\Big]$$

即

$$S^2=ed\Big[1+\frac{2^2}{3\cdot 4}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{e}{d}\right)^2$$
$$+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{e}{d}\right)^3$$
$$+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\left(\frac{e}{d}\right)^4$$
$$+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}\left(\frac{e}{d}\right)^5+\cdots\Big]$$

以上是建部贤弘所举的公式。

上式如令

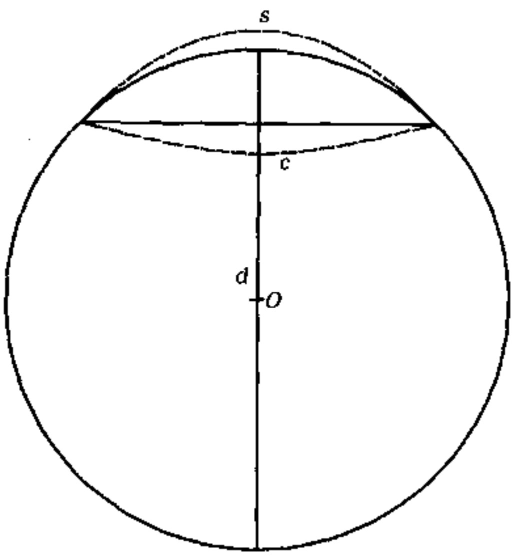
$$ed=\mathrm{vevs}\ \alpha\cdot 2r=r(2\mathrm{vevs}\ \alpha)$$

可改书为

$$S^2=r\left[(2\text{vevs }\alpha)+\frac{1^2(2\text{vevs }\alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{vevs }\alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6r^2}\right.$$
$$+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{vevs }\alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8r^3}$$
$$+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2(2\text{vevs }\alpha)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10r^4}$$
$$\left.+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2(2\text{vevs }\alpha)^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12r^5}+\cdots\right]$$

就和杜氏九术“正矢(2vers α)求弧背 S”公式(Ⅷ)相同。

松永良弼(? ～1744)《方圆算经》(1739 年)列有下开九公式。



如图,圆内

直径$=d=2r$

弦$=c$

矢$=e$

弧$=s$

$$(2\pi r)^2=9d^2\left(1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\right)\tag{1}$$

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot6}+\frac{1^2\cdot3^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot r^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14}+\cdots\right)\tag{2}$$

上式即杜氏九术之（Ⅰ）。

松永良弼用以上公式，算 π 的正确值到 50 位，即：

$\pi=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$。

又举：

$$S^2=4ed\left[1+\frac{2}{6}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2\cdot8}{6\cdot15}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2\cdot8\cdot18}{6\cdot15\cdot28}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

或

$$S^2=4ed\left[1+\frac{2^2}{3\cdot4}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2^2\cdot4^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]\tag{3}$$

上式即杜氏九术之（Ⅷ）

$$S=c\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]\tag{4}$$

$$S=2\sqrt{ed}\left[1+\frac{1^2}{2\cdot3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{3^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{3^2\cdot5^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]\tag{5}$$

$$S=\frac{4ed}{c}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{e}{d}\right)-\frac{2}{3\cdot5}\left(\frac{e}{d}\right)^2-\frac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^3-\cdots\right]\tag{6}$$

$$e=\frac{s^2}{4d}\left[1-\frac{1}{3\cdot4}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{s}{d}\right)^4-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\left(\frac{s}{d}\right)^6+\cdots\right]\tag{7}$$

上式即杜氏九术之(Ⅴ)。

$$c=s\left[1-\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{s}{d}\right)^4-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{s}{d}\right)^6+\cdots\right] \tag{8}$$

上式即杜氏九术之(Ⅳ)

$$A=\frac{2}{3}ce\left[1+\frac{1}{5}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2\cdot3}{5\cdot7}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2^2\cdot3\cdot4}{5\cdot7\cdot9}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right] \tag{9}$$

此时并已知

$$\sqrt{1-\left(\frac{e}{d}\right)}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{d}-\frac{1}{8}\left(\frac{e}{d}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{e}{d}\right)^3-\cdots,$$

和

$$1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P=\frac{1}{P+1}(n^{P+1}+c\cdot n^P+\cdots)。$$

又

$$\frac{1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{m+1}+\frac{c}{m+1}\cdot\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$n\to\infty,\frac{1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P}{n^{P+1}}\to\frac{1}{m+1},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^P+2^P+3^P+\cdots+n^P}{n^{P+1}}=\frac{1}{m+1} \tag{1}$$

有马赖徸(1714～1783)《拾玑算法》(1766年),列有下开三公式,其中第一,第二式和松永良弼(1739年)所记相同。如

$$s=2\sqrt{ed}\left[1+\frac{1}{3!}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{3^2}{5!}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{3^2\cdot5^2}{7!}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right] \quad 松永(5)$$

$$c=s\left[1-\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{s}{d}\right)^4-\cdots\right] \quad 松永(8)$$

亦即杜氏九术之(Ⅳ),

又 $e=\frac{s^2}{Ad}\left[1-\frac{1}{3\cdot4}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{s}{d}\right)^4-\cdots\right]$,

其中　弧$=s$,

矢$=e$,

直径$=d$。

安岛直圆(1733? ～1798)《弧背术解》对割圆术亦有说明。

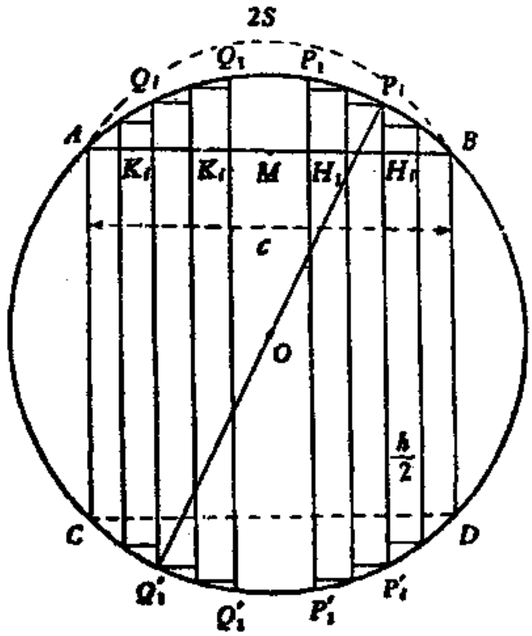
如上图,令$\overset{\frown}{AB}=2S$ 为弧背长

圆直径 P_iQ_i',$d=2r$,

$AB=c$ 为通弦长。其中点为 M。

将此通弦 AB,左右分为 n 段。即通弦 AB 总分为 n 大段。其中 $h=\frac{c}{n}$。

左右分段,其中每段



如 $MH_1=MK_1=\frac{h}{2}$

并作 $P_1QP_1'Q_1'$矩形。

如此在通弦 AB。

M 点之右,有 $H_1,H_2,H_3,\cdots H_i,\cdots H_n(=B)$各点

M 点之左,有 $K_1,K_2,K_3,\cdots K_i,\cdots K_n(=A)$各点。

以上各点各作互相平行的 AB 弦垂线,交于弧上,如 $P_1P_1'\cdots P_iP_i'\cdots$;$Q_1Q_1'\cdots Q_iQ_i'$各线。其中 $K_iH_i=ih$。

因直径 $=P_iQ_1'$，$P_i'Q_i'=ih$。

在 P_iQ_i，$P_i'Q_i'$ 矩形内

$$P_iP_i'=\sqrt{d^2-(ih)^2},(i=1,2,\cdots n)。$$

令 $P_iP'_i=Y_i$，

则带弧形 $ABCD$ 之面积 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_ih$

展开 $$Y_i=\sqrt{d^2-(ih)^2}$$

$$=d\left[1-\frac{i^2}{2}\left(\frac{h}{d}\right)^2-\frac{i^4}{8}\left(\frac{h}{d}\right)^4-\frac{i^6}{16}\left(\frac{h}{d}\right)^6-\cdots\right]。$$

$$\sum_{i=1}^{n}Y_ih=dh\left[n-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{d}\right)^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\right.$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{d}\right)^4(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{h}{d}\right)^6(1^6+2^6+3^6+\cdots+n^5)$$

$$-\frac{15}{384}\left(\frac{h}{d}\right)^8(1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8)$$

$$-\frac{105}{3840}\left(\frac{h}{d}\right)^{14}(1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10})$$

$$-\frac{945}{46080}\left(\frac{h}{d}\right)^{12}(1^{12}+2^{12}+3^{12}+\cdots+n^{12})$$

$$\left.-\cdots\right]。$$

又因

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$1^6+2^6+3^6+4^6+\cdots+n^6$$

$$=\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)$$

$$1^8+2^8+3^8+4^8+\cdots+n^8$$

$$=\frac{1}{40}(10n^9+45n^8+60n^7-4n^5+20n^3-3n)$$

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+4^{10}+\cdots+n^{10}$$

$$=\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n)$$

$$1^{12}+2^{12}+3^{12}+4^{12}+\cdots+n^{12}$$

$$=\frac{1}{2730}(210n^{13}+1365n^{12}+2720n^{11}-5002n^9-9009n^5+4550n^3-691n)。$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}Y_ih=&ndh-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{d}\cdot\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)\\&-\frac{1}{8}\cdot\frac{h^5}{d^3}\cdot\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)\\&-\frac{1}{16}\cdot\frac{h^7}{d^5}\cdot\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)\\&-\frac{15}{384}\cdot\frac{h^9}{d^7}\cdot\frac{1}{40}(10n^9+45n^8+60n^7-4n^5+20n^3-3n)\\&-\frac{105}{3840}\cdot\frac{h^{11}}{d^9}\cdot\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n)。\end{aligned}$$

又因 $h=\frac{c}{n}$,

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Y_ih=cd-\frac{c^3}{6d}-\frac{c^5}{40d^3}-\frac{c^7}{112d^5}-\cdots$$

为带弧形 $ABCD$ 之值。

又此带弧形 $ABCD=2$(扇形 AOB)$+2\triangle AOC$。 (1)

∴ 2(带弧形 $ABCD$)$=4$(扇形 AOB)+矩形 $ABCD$。 (2)

又 $\overset{\frown}{AB}=2S$ 为弧背长

$$4(\text{扇形 } AOB)=2r(2S) \tag{3}$$

矩形 $ABCD=c\ \sqrt{d^2-c^2}$

$$=c\cdot d\left(1-\frac{c^2}{2d^2}-\frac{c^4}{8d^4}-\frac{c^6}{16d^6}-\cdots\right) \tag{4}$$

由(1),(2),(3),(4)知:弧背$=\dfrac{2(1)-(4)}{d}$,即

$$d(2S)=2\left(cd-\frac{c^3}{6d}-\frac{c^5}{40d^3}-\frac{c^7}{112d^5}-\cdots\right)$$

$$-\left(cd-\frac{c^3}{2d}-\frac{c^5}{8d^3}-\frac{c^7}{16d^5}-\cdots\right)$$

$$=cd+\frac{c^3}{6d}-\frac{3c^5}{40d^3}-\frac{5c^7}{112d^5}+\cdots \tag{5}$$

即

$$2S=c+\frac{c^3}{6d^2}+\frac{3c^5}{40d^4}+\frac{5c^7}{112d^6}+\cdots \tag{6}$$

或

$$2S=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!\quad\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot 5!\quad\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2c^7}{4^3\cdot 7!\quad\cdot r^6}+\cdots \tag{Ⅵ}$$

这是杜氏九术的第六术(Ⅵ),又可化得杜氏九术的第一术(Ⅰ)。因由(Ⅵ)以 $2S=\dfrac{\pi d}{6}$,$c=\dfrac{d}{2}$代入可化得(Ⅰ)。

门重富(1756~1816)《算法弧矢索隐》(1801 年),以测验和归纳的方法,说明镰田俊清(1722 年),和松永良弼(1739 年)所举

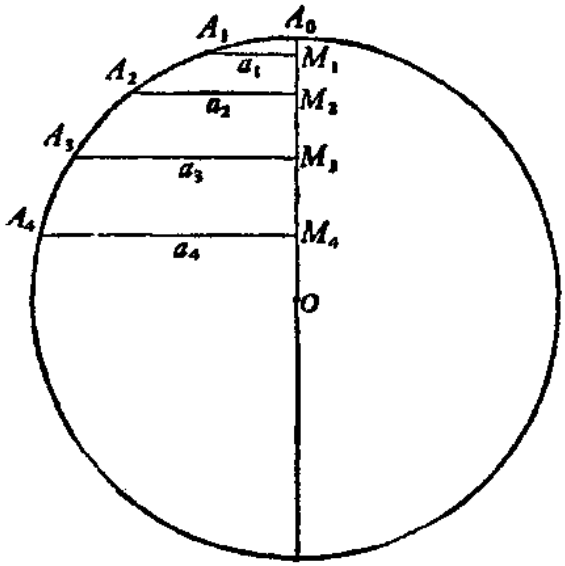
$$S=c\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{e}{d}\right)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{e}{d}\right)^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{e}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

公式的算法。

如图将圆分为若干分,直径 $d=1$。

各弦 $A_0A_1=A_1A_2=\cdots=A_7A_8=0.001$

其中 $\widehat{A_0A_8}=S$。



则

$$A_0M_1 = e = 0.000001$$

$$\left(\frac{e}{d}\right) = 10^{-6}。$$

又 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$ 到直径 A_0O 之垂线

$$A_1M_1 = a_1, A_2M_2 = a_2, A_3M_3 = a_3, A_4M_4 = a_4, \cdots$$

先算出

$$S_1,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_6,\quad a_7,\quad a_8。$$

小数到五十位。如下表所示。

$a = 0.0010$
$S = 0.00100000016666674166671130955419149062614469765570$
$a_1 = 0.00099999994999998479999374999609374726562294921713 8$
$a_2 = 0.00199999500000175000037500017187510156256835942480$
$a_3 = 0.00299998250002362499381249888281204296850097640478$
$a_4 = 0.00399995800011549989275002234375345312626171938085$
$a_5 = 0.00499991750037537422968797480460548827020995731005$
$a_6 = 0.00599985700096524726512860851355830499220511439942$
$a_7 = 0.00699977250212711633958018170807706748098030266833$
$a_8 = 0.00799966000419897690556639658186899766148556701603$

$S_1 = 10^{-8} \times 0.066666686666677380959325401796991520548432$
$b_1 = 10^{-8} \times 0.199999899999997499998749999218749453124589 8$
$b_2 = 10^{-8} \times 0.333332633333558333379166686979178385464414$
$b_3 = 10^{-8} \times 0.466664566669141666070833231770793489562304$
$b_4 = 10^{-8} \times 0.599995380010724991062501726562752343838320$
$b_5 = 10^{-8} \times 0.733324753365508282687532804682200780572877$
$b_6 = 10^{-8} \times 0.866652366744805759927015346976332271392347$
$b_7 = 10^{-8} \times 0.999977900164960136924270595636102577593275$

$S_2 = 10^{-14} \times 0.0533333523809634920710678266767998 00$
$c_1 = 10^{-14} \times 0.1066666133333199999933333291666637 49$
$c_2 = 10^{-14} \times 0.1599996914286657143042857222214331 25$
$c_3 = 10^{-14} \times 0.2133324952390031743968253630952252 77$
$c_4 = 10^{-14} \times 0.2666649333369444416540409138258289 47$
$c_5 = 10^{-14} \times 0.3199969142959142710324674262598750 44$
$c_6 = 10^{-14} \times 0.3733283466903532805767250033362162 69$

$S_3 = 10^{-20} \times 0.045714303492074401162093967926$
$d_1 = 10^{-20} \times 0.076190438095228571423809520833$
$d_2 = 10^{-20} \times 0.106666471111168888900000004722$
$d_3 = 10^{-20} \times 0.137142361905268398158008640529$
$d_4 = 10^{-20} \times 0.167618069843158728778388519948$
$d_5 = 10^{-20} \times 0.198093554290803975832471472087$

$S_4 = 10^{-25} \times 0.004063493725830780775542 7$
$e_1 = 10^{-25} \times 0.006095235047618285713904 7$
$e_2 = 10^{-25} \times 0.008126969720061875902660 9$
$e_3 = 10^{-25} \times 0.010158695526729492722322 0$
$e_4 = 10^{-25} \times 0.012190410251202512027171 9$

$S_5 = 10^{-30} \times 0.000369408525696627 29$
$f_1 = 10^{-30} \times 0.000517171458585793 93$
$f_2 = 10^{-30} \times 0.000664933914086240 16$
$f_3 = 10^{-30} \times 0.000812695755802279 85$

$S_6 = 10^{-35} \times 0.000034099248877$
$g_1 = 10^{-35} \times 0.000045465622732$
$g_2 = 10^{-35} \times 0.000056831960217$

$S_7 = 10^{-40} \times 0.31828$
$h_1 = 10^{-40} \times 0.40918$

$S_8 = 10^{-45} \times 0.31825$

并在表内可以看到。

$$a_1>\frac{a_2}{2}>\frac{a_3}{3}>\frac{a_4}{4}>\frac{a_5}{5}>\frac{a_6}{6}>\frac{a_7}{7}>\frac{a_8}{8}。$$

为探求支配弧长的规律起见将上面相联两数各求差数,逐次再各求差数得

第一组。

$$S-a_1=S_1,\quad a_1-\frac{a_2}{2}=b_1,\quad \frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}=b_2,$$

$$\frac{a_3}{3}-\frac{a_4}{4}=b_3,\quad \frac{a_4}{4}-\frac{a_5}{5}=b_4,\quad \frac{a_5}{5}-\frac{a_6}{6}=b_5,$$

$$\frac{a_6}{6}-\frac{a_7}{7}=b_6,\quad \frac{a_7}{7}-\frac{a_8}{8}=b_7。$$

第二组。

$$S_1-\frac{b}{3}=S_2,\quad \frac{b_1}{3}-\frac{b_2}{5}=c_1,\quad \frac{b_2}{5}-\frac{b_3}{7}=c_2,$$

$$\frac{b_3}{7}-\frac{b_4}{9}=c_3,\quad \frac{b_4}{9}-\frac{b_5}{11}=c_4,\quad \frac{b_5}{11}-\frac{b_6}{13}=c_5,$$

$$\frac{b_6}{13}-\frac{b_7}{15}=c_6。$$

第三组。

$$S_2-\frac{c_1}{2}=S_3,\quad \frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{3}=d_1,\quad \frac{c_2}{3}-\frac{c_3}{4}=d_2,$$

$$\frac{c_3}{4}-\frac{c_4}{5}=d_3,\quad \frac{c_4}{5}-\frac{c_5}{6}=d_4,\quad \frac{c_5}{6}-\frac{c_6}{7}=d_5。$$

第四组。

$$S_3-\frac{3}{5}d_1=S_4,\quad \frac{3}{5}d_1-\frac{3}{7}d_2=e_1,\quad \frac{3}{7}d_2-\frac{3}{9}d_3=e_2,$$

$$\frac{3}{9}d_3-\frac{3}{11}d_4=e_3,\quad \frac{3}{11}d_4-\frac{3}{13}d_5=e_4。$$

第五组。

$$S_4-\frac{2}{3}e_1=S_5,\quad \frac{2}{3}e_1-\frac{2}{4}e_2=f_1,\quad \frac{2}{4}e_2-\frac{2}{5}e_3=f_2,$$

$$\frac{2}{5}e_3-\frac{2}{6}e_4=f_3。$$

第六组。

$$S_5-\frac{5}{7}f_1=S_6,\quad \frac{5}{7}f_1-\frac{5}{9}f_2=g_1,\quad \frac{5}{7}f_2-\frac{5}{11}f_3=g_2。$$

第七组。

$$S_6-\frac{3}{4}g_1=S_7,\quad \frac{3}{4}g_1-\frac{3}{5}g_2=h_1。$$

第八组。

$$S_7-\frac{7}{9}h_1=S_8=10^{-45}\times 0.31825,$$

此时差数极微。以后可以不计。即可将弧背 S,高为 $a_1,b_1,c_1,d_1,\cdots$ 之连续加数。或 $a_1\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{c}{d}\right)+\cdots\right]$ 之连续加数。如下所示

$$\begin{aligned}S&=a_1+\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{2}c_1+\frac{3}{5}d_1+\frac{2}{3}e_1+\frac{5}{7}f_1+\frac{3}{4}g_1+\frac{7}{9}h_1\\&=a_1+\frac{2}{3}a_1\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{8}{15}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{48}{105}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^3\\&\quad+\frac{384}{945}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^4+\frac{3840}{10395}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^5+\frac{46080}{135135}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^6\\&\quad+\frac{645120}{2027025}a_1\left(\frac{c}{d}\right)^7+\cdots\end{aligned}$$

其中

$$c=10^{-6},\quad d=1$$

又

$$\frac{b_1}{a_1}=2$$

$$\frac{c_1}{b_1}=\frac{8}{15}\quad \frac{f_1}{e_1}=\frac{28}{33}=\frac{4\times 7}{3\times 11}$$

$$\frac{d_1}{c_1}=\frac{5}{7}\quad \frac{g_1}{f_1}=\frac{80}{91}=\frac{8\times 10}{7\times 13}$$

$$\frac{e_1}{d_1}=\frac{4}{5}\quad \frac{h_1}{g_1}=\frac{9}{10}。$$

故

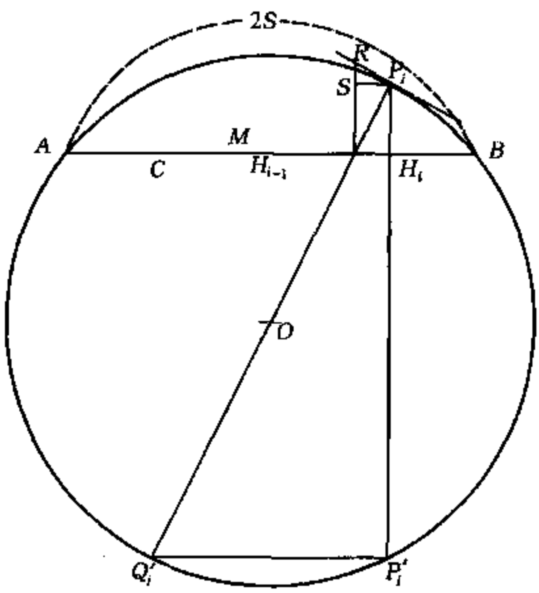
$$S = a_1\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{c}{d}\right)^3\right.$$
$$+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{c}{d}\right)^4+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\left(\frac{c}{d}\right)^5$$
$$+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}\left(\frac{c}{d}\right)^6$$
$$\left.+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}\left(\frac{c}{d}\right)^7+\cdots\right]。$$

十九世纪和田宁(1787～1840)和五十年前十八世纪安岛直圆(1733? ～1798)一样,先就某弧 $2S$,的弦长 AB 作 n 等分。如图令

$$MH_i=ih,\quad H_{i-1}-H_i=h=\frac{C}{n}$$

$$P_i'Q_i'=2MH_i=2ih。$$

自 H_{i-1},H_i 各作互相平行的 AB 弦垂线。自 P_i 作圆之切线,和 H_{i-1}向 AB 弦垂线交于 R 和 S



$$\triangle P_iRS \backsim \triangle P_iP_i'Q_i'$$

$$RP_i : SP_i = P_iQ_i' : P_iP_i'$$

$$\therefore RP_i = \frac{P_iQ_i' \cdot SP_i}{P_iP_i'} = \frac{dh}{\sqrt{d^2-(2ih)^2}} = \frac{h}{\sqrt{1-\left(\frac{2ih}{d}\right)^2}}$$

展开$\left[1-\left(\frac{2ih}{d}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$式

得 $RP_i = h\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2ih}{d}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{2ih}{d}\right)^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2ih}{d}\right)^6+\cdots\right]$

可求得

$$l = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} RP_i = d\left[\frac{C}{d}+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{C^3}{d^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{C^5}{d^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{C^7}{d^6}+\cdots\right]$$

或

$$2S = C+\frac{1^2\cdot C^3}{4\cdot 3!\ \cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot C^5}{4^2\cdot 3!\ \cdot r^4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot C^7}{4^3\cdot 7!\ \cdot r^6}+\cdots \qquad (\text{VI})$$

参 考 文 献

三上义夫《东西数学史》,1930 年,共立社。

藤原松三郎《日本数学史要》,1952 年,宝文馆。

加藤平左卫门《和算の研究》:

《行列式及圆理》,1940 年,开成馆

《杂论》Ⅰ,1954 年,日本学术振兴会

《杂论》Ⅱ,1955 年,日本学术振兴会

《杂论》Ⅲ,1956 年,日本学术振兴会。

日本学士院编,《明治前日本数学史》第一卷,1955 年,岩波书店。

平山谛《圆周率の历史》,1955 年,中教出版株式会社。

细井淙《东西数学思想史》,1955 年,共立社。

中国数学的历史发展*

中国数学有着悠久的历史，远在公元前 1300 年到公元前 1028 年殷朝的甲骨文字上，可以看到数字的记载，和十进数的记录。殷人“以十”做计数单位外，还用“以对”，“以五”做计数的单位。此项文字和用筹计数记数法也互相配合。在文字方面：1，2，3，4；10，20，30 各字是抽象的象形字；5，6，7，8，9；百，千，万各字是假借字。在筹算记数方面：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10；以及 11，12，13，14，15，16，17，18，19，20 则配合“以五”，“以十”做计数单位来记录，所以筹算法则：五以下以一筹各当一：五以上，以一筹当五，余筹各当一。一至九纵列，一十至九十横列，以后纵横相间，布列成数。即：

	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9
纵列成：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横列成：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

如 6728 作“𝍮𝍦𝍪𝍧”，又 6708 作“𝍮𝍦 𝍧”。

用筹记数是在文字传布之后。在文字传布之前，有“用绳记数”的传说。

---

* 文本系前苏联科学院自然科学及技术史研究所编辑专刊特约稿，并发表于中国《数学通报》1959 年第 10 期第 5～11 页。

此时数学的工具，除筹算以外，还有用规，用矩的方法。规是圆规，矩是方矩，是绘画几何形的必需工具；至少用规画圆，用矩画方是必要的。在未有文字以前，各种陶器都不断有着整齐的几何图案，到公元一世纪的汉砖上，更有不少的几何图案，可能是由规矩制成的。

因要做计算，所以创造筹算的记数法。运算离不了加减乘除的四则。其中减不了的，便产生“不足”的数；除不尽的，便产生整数，和“有余”的数，即“分数”。整数，分数，不足数构成有理数系。在公元前 2000 年到公元前 771 年，中国已具有这个数系的雏型，如魏李悝《法经》在“尽地力之歌”内说：

> 今一夫挟五口，治田百亩，岁收亩一石半，为粟百五十石，除十一之税十五石，余百三十五石；食：人月一石半，五人终岁为粟九十石，余有四十五石。石三十，为钱千三百五十，除社间，尝新，春秋之祠，用钱三百，余千五十；衣：人率钱三百，五人终岁用千五百，不足四百五十。

又在公元前 2028 年到公元前 771 年的末期，周秦时期，百家争鸣，各子书中时时提到九九数表的口诀，如《荀子》和《战国策》东周策各书，都提到：

> 九九八十一；八九七十二；七九六十三；六九五十四；
> 五九四十五；四九三十六；三九二十七；二九一十八

等等的例子。

同时因乐律、历法的计算，时时遇到分数问题。因将正整数后有奇零分数的数，称做“有分”，或称做“有奇”，并将某些分数，定以专名，如：“少半”$\left(=\frac{1}{3}\right)$，“半”$\left(=\frac{1}{2}\right)$，“太半”$\left(=\frac{2}{3}\right)$；而这些专名又指明有：“$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$”的关系。

以后历算家对某正数(N)前后的数,就称做强弱率,或盈朒数:

$$弱率<正数<强率,$$

$$朒数<正数<盈数。$$

同时有比例率,开方率,以及小公倍数各项,都因社会需要得以成立。如前引魏李悝《法经》内"岁收","月食","衣","人率钱"等,就时时提到比例率;又古代用干支纪日,就以十(10)干,配十二(12)支,得到它的小公倍数六十(60),因组成六十甲子,作为纪日、纪岁之用。

此时又确定数学教育方法。《礼记》"内则第十二"曾记"九年教之数日"。其中"教数日"以后注释家以为是教六十甲子的名称;又《周礼》卷三、卷四说"教六艺",其中"六艺"是礼、乐、射、御、书、数,又"数"是九数;以后汉代(公元前一、二世纪)就将"九数"演成《九章算术》的算书。

中国古代用十进记数,所以小数概念,极早产生,如《九章算术注》以为:"其一退以十为母,其再退以百为母,……"就说明小数概念。至分数的名称,在此时虽已出现,但计算方法,还未备有详细的实例,并由于在筹算上不便计算分数,所以在进行计算分数时,历算家十分注重"齐同"(即求公分母)和"寄母"(即求得公分母后,另寄在一边)的方法。《新唐书·历志》小注上,尚着重说:

> 凡相加减,而秒母不齐,当令母互乘子,而加减之;母相乘为法①。

这是说明

$$\frac{a}{b}\pm\frac{a_1}{b_1}=\frac{ab_1\pm a_1b}{bb_1}=\frac{ab_1}{bb_1}\pm\frac{a_1b}{bb_1}$$

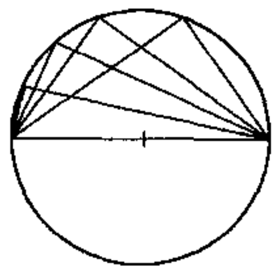
---

① 见《新唐书》卷二十八,志第十八上,历志。

的计算步骤。

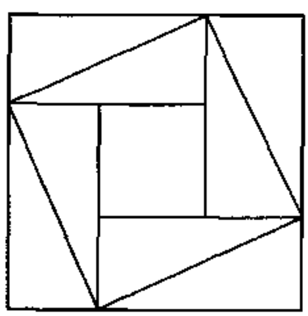
汉朝建立在公元前206年，文化比较周秦前进，数学方面现在可看到的有(一)《周髀算经》和(二)《九章算术》二书。《汉书·艺文志》又曾著录有《杜忠算术》十六卷，《许商算术》二十六卷，在公元前26年曾经尹咸校过，现在都已失传，只知道许商在公元前32年到公元前8年曾做过汉朝的官吏。

现存的(一)《周髀算经》是说明天文测量的书，其中在算术方面曾做过分数四则计算和开平方算法。又在几何方面，《周髀算经》说明某一圆直径上所成各勾股形顶点的轨迹，可成圆形，因有“环矩以为圆”的定义。又曾认定：$3^2+4^2=5^2$ 或 $a^2+b^2=c^2$，因有“勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日(即弦)”的定理。

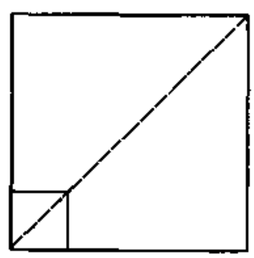


约公元三世纪赵爽注《周髀算经》另介绍有“弦图”以证明：

$$a^2+b^2=c^2。$$



弦图



$\frac{1}{4}$弦图

此弦图和 1/4 弦图，是汉代几何学的基础图案①。

又现在传本《九章算术》九卷，共有 246 题问，是理论配合实际，十分切合实用的算书，九卷之内：

1. 方田　算田亩面积，有分数计算；
2. 粟米　算粮食交换，有比例计算；
3. 衰分　有配分比例计算；
4. 少广　有开平方、开立方计算；
5. 商功　算各项体积；
6. 均输　算均输方法和四则杂题；
7. 盈不足　算有余和不足及同类杂题；
8. 方程　算联立一次方程，并论正负数；
9. 勾股　算勾股定理应用问题。

此书粟米章内"铢、两、斤、钧、石"是公元一、二世纪前后度量衡制度名称之一。"粟米"的名，又见于当时《盐铁论》的著书。又均输章内"均输"是公元前 104 年所创立的运输制度。又衰分章内"大夫、不更、簪裹、上造、公士"，是汉代爵位名称，所以可断定《九章算术》是汉代公元一、二世纪的著作。

总结周秦到汉代即公元前 771 年到公元一、二世纪各算书，我们可以知道此期在算术、代数和几何的成就如下：

(A)算术方面

(一)分数应用　分数加减，原不限于"母互乘子，而加减之"的"齐同"方法，而是应用"最小公倍数"做公分母，如《九章算术》卷一内：

① 因此二图尚可以解释欧几里得《几何原本》二卷 1—10 的题问。

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=2\frac{43}{60(=\text{最小公倍数})}。$$

并有应用近似分母的例子，即如嫌某公分母数值太大，可另拟一数值较小的分母。如公元前 104 年的《太初历》嫌每月平均日数 $29\frac{497}{940}$的分母数值 940 太大，另拟一数值较小的分母 81，因而算出 $29\frac{497}{940}\doteq 29\frac{43}{81}$。

(二)累乘数　此时认识：数可累乘而增大，如《管子·地员篇》第五十八称："先立一(即置一)而三之，四开，以合九九"即：

$$3^4=1\times 3^2\times 3^2=1\times 9\times 9=81.$$

又《淮南子·天文训》称："十二各以三成：故置一而十一，三之，为积分十七万七千一百四十七。"即

$$3^{11}=1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times 3^1\times$$
$$\times 3^1\times 3^1\times 3^1=1\times 3^{11}=177147。$$

上述例中的"立一"，"置一"，是指在筹算的算盘上，先"立一个一的算筹"，或"置一个一的算筹"，再作某些数的累乘。

(三)极限观念　周秦百家子书，以及汉魏算书，即公元前二十世纪到公元一、二世纪的长期著作，已随时有着极限观念。如《庄子》记有"一尺之捶，日取其半，万世不竭"，即指：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n}。$$

由此认识到$\frac{1}{2^n}$可以成就无限小的数。

至刘徽《九章算术注》(公元 263 年)更应用极限观念，如使圆内容多边形的边数，逐渐可以大到无穷，总数值可以近于圆周。

(四)数的分类

(a)将整数或分数配以较大和较小的数，

如前记
$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$
即
$$少<半<太,$$
或如
$$\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$$
即
$$微<少<半<太。$$
再分配以强弱数,成就:
$$\frac{1}{3}<\frac{7}{12}<\frac{5}{6}$$
即
$$少强<半强<太强,$$
和
$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4},$$
即
$$少<半<太,$$
和
$$\frac{1}{6}<\frac{5}{12}<\frac{2}{3}$$
即
$$少弱<半弱<太弱,$$
并各立有专名,如上所记。

(b)又将整数分做奇偶。如《九章算术》卷一称:"可半者",是指"偶数";"不可半者",是指"奇数"。

(c)用"以少减多,更相减损"的"辗转相减法",和"欧几里得除法"的"辗转相除法"一样目的,是求某两数的大公约数。如(923,559)=13,(83,65)=1。

(d)由于求"约数"的认识,因而确实知道"比例数"的存在,如《九章算术》卷二粟米章有讨论简单比例的问题。又卷三衰分章有讨论配分比例的问题。至《九章算术》卷七盈不足章则是讨论一次内插法的应用,如"每人出钱,a_1,盈 b_1;出钱 a_2,不足 b_2,而求 s=人数,t=物价"题,则得到:
$$s=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2},\quad t=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}。$$

上述公式可能由代数学上的方程，或几何学上的相似三角形计算得来。

（五）正负值和其他　在《九章算术》以及四分历法*（公元174年）内曾举有：

$$(+a)-(+b)=+(a-b), \quad (1)$$

$$(+a)-(-b)=+(a+b), \quad (2)$$

$$0-(+b)=-b, \quad (3)$$

$$0-(-b)=+b, \quad (4)$$

$$(+a)+(-b)=+(a-b), \quad (5)$$

$$(+a)+(+b)=+(a+b), \quad (6)$$

$$(+a)+0=+a, \quad (7)$$

$$(-a)+0=-a。 \quad (8)$$

各原则。我们又知道任意数 p 都可写成：

$$\frac{p}{t}=u+\frac{y}{t}, \quad p=tu+y。$$

又 $p=tu+uy-uy+y=(t-y)u+y(u+1)$，

其中 $uy-uy=0$。《九章算术》卷二，有几个题问，都由此法算出。

如：

$$576=78\times7+30=48\times7+30\times8(=7+1),$$

$$1120=198\times5+130=68\times5+130\times6(=5+1),$$

$$5820=980\times5+920=60\times5+920\times6(=5+1)。$$

又上述 $p=tu+y$，还可改书成：$p\equiv y(\mathrm{mod}.\,t)$。

为后来同余式计算的基础。

(B)代数方面

除上述正负数和它们的应用之外，在《九章算术》卷八方程章

---

* 此似指刘洪《乾象历》（公元206年），但不是四分历。——编者。

有联立一次方程的计算,又有开平方、开立方导出解释二次方程、三次方程的步骤。

(C)几何方面

中国古代有三角形、正方形、长方形、圆形、弓形……各平面形面积的计算,其中《周髀算经》、《九章算术》所举各“整数勾股”,可能因已经掌握:

$$a^2+b^2=c^2,$$

或 $$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

的公式而得来的。

例如 $m=4,n=1$; $8^2+15^2=17^2$。

$m=5,n=2$; $20^2+21^2=29^2$。等等。

中国古代又有立方、平行六面体、角锥(Pyramid)、角锥平截体、楔形(Wedge)、楔形平截体、圆柱、圆锥(Cone)、圆锥平截体、球形……各立体形体积的计算,并说明各体积如何互相组合得来,几何方面其中较重要的是约在公元三世纪赵爽注《周髀算经》所介绍的“弦图”和《九章算术》在计算“勾股容圆图”所记:

内容圆径 $$d=\frac{2ab}{a+b+c}$$

的公式,其中 a,b,c 为勾、股、弦;d 为内容圆径。

刘徽另于注《九章算术》(公元 263 年)之后,附有“重差”方法(后称《海岛算经》),用几何上相似三角形原则,做测量和计算城池远近的工作。

查公元二世纪汉朝《九章算术》传世之后,三、四、五世纪民间还出现有其他数学书,并有相当成就,其中以刘徽《九章算术注》(公元 263 年),祖冲之(429～500)圆周率和祖暅圆球体积的计算为较重要。因中国圆周率,除古代假定 $\pi=3$ 之外,此时期刘歆 $\pi=$

3.1547，张衡 $\pi=\sqrt{10}$，蔡邕 $\pi>3.125$，王蕃(228～266)$\pi=3.155$ 都不精确。刘徽在注《九章算术》时(公元 263 年)，以为如圆球体积本身计算无误，则 $V=\frac{9}{16}D^3$ 数值嫌过多，$V=\frac{8}{16}D^3$ 数值又嫌过少，其中 $D=$ 圆球径，$V=$ 圆球体积。即

$$(\pi=3)(\pi=\pi)\left(\pi=3\ \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{8}{16}D^3<V\left(=\frac{\pi}{6}D^3\right)<\frac{9}{16}D^3。$$

刘徽另于《九章算术》卷一注内，先由圆内容 6 边形起算，陆续算到内容 96 边形，得 $\pi_{96}=3.14\ \frac{64}{625}$，以后尚可按这步骤继续接算。祖冲之(429～500)曾算得：

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

并算得
$$\pi=\frac{355}{113},\quad \pi=\frac{22}{7}。$$

在公元六、七世纪，即隋唐初期，曾采用数学教育方法，用《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》、《缉古》、《记遗》、《三等数》各书做教本，并设博士职位。在公元 680 年由李淳风注释《五曹》、《孙子》、……各算经，分做二十卷，当时(650～683)的数学家，算历博士王孝通所著的《缉古算经》四卷，也在采用之列。

唐代所用各算学教本，除《缀术》一种已经遗失外，其余：(一)王孝通所著《缉古算经》曾就各立体形加以分析说明，又尽量应用二次，三次方程来解析勾股题问都有成就。又(二)《孙子算经》曾创立联立一次同余式解法。如：

$$x\equiv r_1(\mathrm{mod}.\ q_1),$$

$$x\equiv r_2(\mathrm{mod}.\ q_2),$$

$$x \equiv r_3 (\mathrm{mod}.\ q_3),$$

其中 $r_1=2, r_2=3, r_3=2$;

又 $q_1=3, q_2=5, q_3=7$,是素数。

首先求出满足下列同余式的辅助数 N_1, N_2, N_3:

$$N_1 q_2 q_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ q_1),$$

$$N_2 q_1 q_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ q_2),$$

$$N_3 q_1 q_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ q_3),$$

即

$$35N_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 3),$$

$$21N_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 5),$$

$$15N_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 7)。$$

最后一列同余式,更简列为:

$$2N_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 3),$$

$$N_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 5),$$

$$N_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}.\ 7),$$

由此选定 $N_1=2, N_2=1, N_3=1$,便得:

$$x \equiv (N_1 q_2 q_3 r_1 + N_2 q_1 q_3 r_2 + N_3 q_1 q_2 r_3) (\mathrm{mod}.\ q_1 q_2 q_3)$$

$$\equiv (140+63+36) (\mathrm{mod}.\ 105)$$

$$=223-105t,$$

其中 t 为任意整数。

令 $t=2$ 时,得 $x=23$ 为最小值。

同时尚有若干成就,如:

(一)开平方不尽,有:

(a)不加借算,如《孙子算经》,即 $\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}$ 和(b)加借算,如《张丘建算经》,即 $\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}$ 的例子。在刘徽《九章算术注》(公元 263 年)卷四又说明称:“有积分令不加借算而命

分，则当微少；其加借算而命分，则又微多。”即：

$$a+\frac{r}{2a}<\sqrt{a^2+r}<a+\frac{r}{2a+1}。$$

（二）多项式内插法，刘焯（544～610）先有“自变数等间距二次内插公式”的应用，稍后僧一行（张遂，683～727）有“自变数不等间距二次内插公式”的应用，同时还列有三次内插形式。

（三）二，三次方程的计算，前已述过是由开平方，开立方导引得来，王孝通《缉古算经》此时有具体解释二次，三次方程方法，到十、十一世纪多次多元方程另得到具体解析的方法。

中国数学到十一世纪进入新时代。数学家贾宪曾在此时说到“增乘开方法”，并设有“开方作法本源图”。宋杨辉《详解九章算法》（1261 年）列有“开方作法本源”图，即 Pascal 三角形如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

记明增乘方（即多次方程）的廉草，还自注称：“出《释锁算书》，贾宪用此术。”和贾宪同时的王洙（997～1057）曾记明贾宪是楚衍的弟子，楚衍在天圣元年（1023 年）曾修《崇元历法》。王洙著书当在 1023 年后，他卒于 1057 年，即《释锁算书》当在 1050 年前后有刻本传世，以后杨辉加以介绍。

多次方程之外，又有多元方程并综合为多次多元方程，即方程未知数先有天元，次有地元，再次有人元，物元。说到天元的有十三世纪李治（1248，1259 年）各算书；说到地元的，现存有元刻本阴阳备用三元节要（1306 年）一书；说到天元，地元，人元，物元的，现存有朱世杰的《四元玉鉴》三卷（1303 年）一书。关于天元术发展情况据祖颐《四元玉鉴后序》（1303 年）称：

> 平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。……燕山朱汉卿(世杰)先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天地人物立成四元。

上述十一世纪的增乘开平方法，是解数字方程的霍纳(Horner)方法(1819 年)。如解方程

$$x^2-71824=0。\quad x=268。$$

在杨辉《详解九章算法·纂类》(1261 年)是引贾宪(公元十一世纪人)的方法。到秦九韶《数书九章》(1247 年)更发展为解高次数字方程，如解方程

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0,\quad x=840。$$

朱世杰是集四元的方法写成《四元玉鉴》三卷(1303 年)，当时还有类似的写作，如元刻本《阴阳备用三元节要》(1306 年)三卷卷下"勾股法"有一题问："草曰：立天元，6，为勾；地元，8，为股，天地相乘，二之为股，二幂相消为勾，二幂相并为弦也。"

如题意说明，令：$x=$勾，$y=$股，

则 $$x^2+y^2=\text{弦}^2。$$

又 $$(y^2-x^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2,$$

就中四元方法流传不广，因在筹算算盘上，多次多元方程列式尚有不便。

在十三、十四世纪民间数学书，还续有写作，但无多发展。如朱世杰著书，《永乐大典》(1407 年)即未有介绍，直到顾应祥(1550 年)方始见及，还不了解。周述学《历宗算会》(1558 年)亦只列《四元玉鉴》书名，至程大位《算法统宗》(1592 年)还未列有《四元玉

鉴》书名。

此时期另有一特点，是注意方程以及数论问题。如吴敬撰《九章算法比类大全》十卷(1450年)，其中第十卷曾述“锁方”，说明二，三次以及多次方程，答案可不限于一个，即某方程求得一个答案后，尚可据而求其他答案，称做“开锁方”。又王文素《古今算学宝鉴》三十卷(1524年)曾说到“剪管术”，即总结同余式理论。

此外古代的筹算，在十四、十五世纪曾演变成珠算。筹算算盘演变成珠算算盘，原是十分自然的。例如筹算除法：实数，法数是列在上下，珠算除法：实数，法数改列在左右，原则是一样的。又筹算，珠算都注意“定位”法则，因单位的地位一经确定，则珠算算盘上在左是十，百，千，万，……的大数，在右是分，厘，毫，丝，忽，……的小数了。

珠算可能发生于十四、十五世纪，到十六、十七世纪方广泛流传。在十六、十七世纪的小说中都提到算盘，是指珠算的算盘，并可以看到算盘在商业上应用的重大意义。当时是资本主义萌芽时期，特别和海内外贸易，商人带着珠算的算盘，兼习歌诀，运算商业各项题问，便十分容易。当时和海内外贸易的，福建、安徽各处居民较多，所以当时珠算用书，如《盘珠算法》二卷(1573年)是福建书店所印行，《数学通轨》(1578年)的作者柯尚迁是福建长乐人，《算法统宗》(1592年)的作者程大位是安徽休宁人。又《铜陵算法》二卷，是安徽铜陵县的刊物。

十五、十六世纪民间算书还相当盛行。现在所知的有五六十种，其中严恭《通原算法》(1372年)，刘仕隆《九章通明算法》(1424年)，夏源泽《指明算法》(1439年)，吴敬《九章算法比类大全》(1450年)，王文素《古今算学宝鉴》(1524年)，程大位《算法统宗》都是有关商业的算书，而《算法统宗》尤切实用，因此到1716年程

光绅还说:“当时风行海内,坊间刻本,无虑数十。”

明代十四、十五世纪阿拉伯算法首先是随历法输入,中国贝琳《七政推步》(1477年)记明洪武十八年(1385年)阿拉伯人献土盘历法,就是一个例子。此外兀忽列的《四擘算法段数》(当即欧几里德《几何原本》)亦经介绍到中国,但此期原书未曾译出。

明代(十五世纪)阿拉伯“写算”法传入中国,在吴敬《九章算法比类大全》(1450年)称做“写算”,《盘珠算法》(1573年)称做“铺地锦”,程大位《算法统宗》(1592年)并说明“写算即铺地锦”。查写算方法,十四、十五世纪在阿拉伯和欧洲流行过,如阿拉伯阿罗弥(Al-Kashi,? ~1447)《算术钥》一书,以及1478年意大利Treviso地方的《算书》,都有记载。输入中国的写算或铺地锦,则无疑系由阿拉伯人随历法输入中国的。

十六世纪中国数学又受外来影响,因十六世纪西洋天主教徒东来活动,希腊数学家著书亦陆续输入中国。最先利玛窦(Matteo, Ricci,1552~1610)和徐光启(1562~1633)共译欧几里得(Euclid)《几何原本》前六卷(1607年),有1611年刻本,是根据丁先生(Clavius, C. 1537~1612)所编《几何原本》(1574年)译出,其余7,9,10,11,12,13,14各卷题问,虽未译出,还散见在《天学初函》(约1630年)和《崇祯历书》(1631~1634)之内。此外:

1. 阿基默德 (Archimedes,前287? ~前212)《圜书》(*Measurement of the Circle*)引见《测量全义》(1631年)。

2. 亚里斯多德(Aristotle,前384~3前22)*De Caelo*书内“无分”(impossible),“可分”(possible)定义,引见《寰有诠》。

3. 多禄某(Ptolemaeus,前90? ~前165?)的《大造书》(*Almagest*),见《大测》(1631年)。又“六宗”内求圆内容3,4,5,6,10,15边形之一边做法亦见《大测》。又求圆内容7,13,19边形之一边

做法，亦在明末输入中国。

4. 默聂老(Menelaus. C. 公元98年)的《球书》(*Sphoeria*)，见《测量全义》。

5. 派帕司(Pappus，340～?)的螺线方法见《测天约说》，派帕司的求方曲线(Quadritrix)方法，见《几何要法》。又希纶(Heron)的三边求积法，见《测量全义》。

又十五、十六世纪西洋的笔算，借根方(代数)，加减代乘除术(Prosthapheraeis)，对数术，三角术，三角函数表，割圜术，圆锥曲线说亦同时输入中国，此项输入的新数学，并由中国数学家分别加以说明和研究。如：

(一)笔算的加减乘除法以及开平方，开立方法见于译本《同文算指》前编、通编(1613～1614)。即《西洋新法历书》(1645年)亦应用当日西洋的帆船法(galley method)作计算。

(二)借根方　清初输入中国的西洋算法，具载《数理精蕴》(1723年)，其中说明假借根数，方数以求实数的方法。如：

$x^3+x^2-20x=33152$，书成：

一立十一平一二0根=三三一五二 方　　方	

此项方式称为"借根方法"即现在的代数学方法。

(三)对数术　1653年穆尼阁(Jean Nicolas Smogolenski，1611～1656)首先介绍比例对数表到中国，此项对数计有小数六位。1723年《数理精蕴》亦介绍对数方法。

(四)三角术　明末清初即十六、十七世纪，徐光启所修《测量全义》(1631年)，和薛凤祚(?～1670)《天学会通》曾介绍平面，球面三角形各项解法，清初数学家王锡阐(1628～1682)《圜解》书内

曾介绍正弦余弦公式。在欧洲1551年黑的黑斯(Rhaeticus G. J.,1514～1576)开始编辑三角函数表,以后*Opus Palatius*一书是四线对数表,每10″有数,有十位小数,由阿特(Valentin Otto或Otho)在1596年续成,前浙江图书馆藏有《四线对数表》,即译此书①。

(五)割圜术　明末曾输入亚奇默德《圜书》,书内记有割圜术,在《测量全义》(1631年)之内。清初杜德美(Pierre Jartoux,1668～1720)输入杜氏三个公式,其中第一式是"圜径求周"。即:

$$\pi d=d\left(3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot 3!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot 7!}+\cdots\cdots\right)。$$

明安图曾应用连比例三角形来证明此式,并演成九个公式。

(六)圆锥曲线说　明末清初由于历法的需要,圆锥曲线学说,亦陆续输入中国。

以上各项算法,输入中国虽未详细说明原理,但梅文鼎(1633～1721)以后中算家,曾详加解析,有所补充,在割圆术,方程论,级数论,数论,成就尤多。

十八世纪中国曾开馆(1773年)编辑《四库全书》,收有十三、十四世纪算书,如秦九韶《数书九章》(1247年),李治《益古演段》(1248年),以后公家、民间对十三、十四世纪旧算书,续有收集,并加校订整理,如张敦仁(1754～1834)著有《求一算术》(1803年),骆腾凤(1770～1841)有《艺游录》(1815年),时曰醇有《求一术指》(1873年),黄宗宪有《求一术通解》(1874年),罗士琳(1789～1853)有《四元玉鉴细草》(1836年),此外焦循(1763～1820)、汪莱(1768～1813)、李锐(1773～1817)、项名达(1789～1850)、戴煦(1805～1860)也各有专著。

---

① 参看《中算史论丛》第三集第191～253页(*见本书第七卷第192～253页。——编者),又《代数术》(1873年)卷二十四。

中国数学史事，在《册府元龟》(1005 年)以及《古今图书集成》(1726 年)各丛书内曾有记述，十八世纪末叶(1794 年)阮元(1764～1849)曾撰有《畴人传》四十六卷，以后 1840、1884、1886、1896 各年罗士琳(1789～1853)、华世芳(1854～1905)，诸可宝(1845～1923)、黄钟骏四人续有修订，仅限于传记。

中国在鸦片战争(1840 年)前后，国外人曾开始在中国设立学校，最先是 1839 年蒲伦(Brown)设学校于澳门，1840 年以后如上海约翰书院(1845 年)、武昌文华书院(1871 年)、登州文会馆(1864 年)、青州广德书院(1866 年)、北京汇文书院(1888 年)等等学校相继设立，并自编有数学教科书。数学部门，广泛应用的是：狄考文(Calvin Wilson Mateer，1836～1908)、邹立文共撰《笔算数学》(1892 年)，24 章，《代数备旨》(1891 年)，13 卷，《形学备旨》(1885 年)，10 卷；潘慎文(A. P. Parker，1850～1924)、谢洪赍(1873～1916)《八线备旨》(1884 年)4 卷、《代形合参》(1893 年)3 卷。

此时西算第二次输入中国。李善兰(1811～1882)曾和伟烈亚力(Alexander Wylie，1815～1887)共译 Elias Loomis (1811～1899)的 *Analytical Geometry and Calculus*，1850 年，成《代微积拾级》(1859 年)18 卷，距今(1959 年)整一百年；又和伟烈亚力译《几何原本》后九卷(1856 年)，译 Angustus De Morgan(1806～1871)的 *Elements of Algebra*(1835 年)即《代数学》(1859 年)13 卷；又和艾约瑟(Joseph Edkins，1825～1905)共译《圆锥曲线说》(1866 年)，3 卷；又华蘅芳(1833～1902)曾和傅兰雅(John Fryer，1839～?)共译《代数术》(1873 年)25 卷，《微积溯源》(1874 年)8 卷，海麻士(John Hymers，1803～1877)《三角数理》(1877 年)12 卷，伦德(Thomas Lund)《代数杂题解法》(1879 年)16 卷，棣么甘(Angustus De Morgan ，1806～1871)《决疑数学》10 卷，《合数术》

(1888年)11卷。这些书已用1,2,3,……,9等阿刺伯字码,和+,-,×,÷;=,>,<,$\sqrt{\ }$等各项符号,惟尚用甲,乙,丙,丁,……代a,b,c,d,…或A,B,C,D,…;并用天,地,人,物代x,y,z,u。

在教育方面,清代自鸦片战争(1840年)失败以后,北京已设同文馆(1862年)、上海设广方言馆(1869年)、光绪四年(1878年)以后又普设学校,光绪二十四年(1898年)开始办小学,中学,高等各级学校。首先配合用李、华所译数学书,以及教会所编译各数学书做数学教本。1900年以后废除科举改革学制,各书局亦试编各项教科书配合应用,至1910年以后商务印书馆所编数学教科书已将算式列成横式。

辛亥革命(1911年)胜利之后,1912年设立共和国,数学教育亦有改进,1912年改京师大学堂成北京大学,各省亦都设有大学。至1933年公立有大学15所,私立大学有18所。各大学大都设立有数学系。研究工作方面,则1928年曾成立有中央研究院,到1947年方成立数学研究所。可是在解放区,即1940年在延安已设立"自然科学研究所"。又于1941年在延安成立"数理学会",到1949年解放之后,进入新的阶段。

1949年中华人民共和国成立以后,中国数学会加强组织,重编《数学学报》(1951年),《数学通报》(1951年),以及《数学进展》(1955年)各数学杂志,其中《数学学报》分解析、代数、几何、应用数学、数学基础、数学史、统计数学各门,分组编辑,1952年又正式成立数学研究所于北京,并于教育方面学习苏联经验,据统计在1952~1958年共译有俄文数学书170册,作为参考。

在教育方面,在1952年高等教育数学教程亦经确定,其中数学系第一至第四年级数学必修课程有:

初等微积分,高等微积分,高等代数,解析几何,复变函数,实

变函数，微分几何，微分方程，数学物理方程，变分法，积分方程，概率论，几何基础。

四五年级数学选修课程，有：

实变函数，黎曼几何，复变函数，非欧几何，变分法，概率论，积分方程，数理统计，富利埃级数，无穷级数，特殊函数，数论，域论，数学基础，群论，数学逻辑，微分几何，几何基础，拓朴学，点集论等。

1958 年教学大革命中，高等学校数学系课程设置又有所变革，这标明我国高等数学教育更为联系实际结合生产。

1949 年解放以后，高等数学专著亦陆续有出版，如：

华罗庚：《堆垒素数论》(1953 年)；

苏步青：《射影曲线概论》(1954 年)；

陈建功：《直交函数级数的和》(1954 年)；

吴新谋等：《数学物理方程》(1955 年)；

华罗庚：《数论导引》(1957 年)；

华罗庚：《多复变函数论中的典型域的调和分析》(1958 年)；

陈建功：《实函数论》(1958 年)；

关肇直：《拓朴空间概论》(1958 年)；

李国平：《半纯函数的聚值线理论》(1958 年)；

秦元勋：《运动稳定性理论》(1958 年)，

就是其中的代表作。在前则 1956 年中国科学院发科学奖金，在自然科学部分内数学方面，有：

华罗庚：《典型域上的多元复变数函数论》(一等奖)，

吴文俊：《示性类及示嵌类的研究》(一等奖)，

苏步青：《K 展空间和一般度量空间的几何学》，《射影空间曲线论》(二等奖)

各论文。又总结 1949 年至 1958 年的全国数学论文目录记有:数论,代数,几何,分析,计算数学,函数论,微分方程,概率论,数学史,数理基础等十项论文,共有 1193 篇。

《算法纂要》的介绍*

前　　言

北京图书馆藏有隆庆 4 年(1570 年)修本《率口程氏续编本宗谱》卷之三称:“程大位字汝思号宾渠,精于古篆,善算数,生嘉靖癸巳(1533 年)四月十日。”又北京中国科学院中国自然科学史研究室图书室藏有万历戊戌(1598 年)刊本程大位《算法纂要》,是书由大位之子子喜校订,卷四末大位自称:“先是万历壬辰(1592 年)余编《统宗算法》金、木、水、火、土五本,后改为元、亨、利、贞四本,有乘除,分九章,每章后有难题,注解详备。明年癸巳(1593 年)书坊射利,将版翻刻,图象字义俱讹,致误后学,买者须识本铺壬辰(1592 年)原版,方不差谬。又万历丁酉编刻七人均济会,十一人平济会,有一年、半年、三月者,至均,至平,先后一例无分,不致偏胜,买者,亦须认本铺原版,毋使鱼目混珠。”

“新安休邑率口宾渠子程大位识　今寓屯溪发行。”

又《算法纂要》书末后面有:

万历戊戌(1598 年)五月

---

* 本文原载《安徽史学》1960 年创刊号第 58~61 页、57 页。

宾渠旅舍梓行

二行，和李俨藏万历壬辰(1592年)刊本《算法统宗》书末后面，印有：

万历壬辰(1592年)五月

宾渠旅舍梓行

二行题字形式都是相似。

总结上面史料以及《算法统宗》、《算法纂要》内，程绢、程时用、吴继绶各人序文知：程大位字汝思，号宾渠，安徽休宁县率口人，后寓屯溪。生嘉靖癸巳(1533年)四月十日，早岁即善算数，壮年在吴楚业商。六十岁退休回乡，曾在率口，于万历壬辰(1592年)自刊《算法统宗》十七卷。又在屯溪，于万历戊戌(1598年)自刊《算法纂要》四卷，由其子子喜较订。

《算法纂要》情形，特为介绍。

一

程大位，明休宁人。曾收集15、16世纪民间算书编成：《新编直指算法统宗》17卷。书前有“万历癸巳(1593年)初夏七日淅江上吴继绶序”。出版后6年，又编成《新编直指算法纂要》4卷。书前亦有万历戊戌(1598年)吴继绶序，和程时用序。其中《算法统宗》17卷流传较广。《算法纂要》4卷则360年来，知者甚少。该书国内各图书馆都未曾藏有，藏书家书目亦未记录，以往惟日本内阁文库藏有一份，最近北京中国科学院中国自然科学史研究室图书室收藏一份，以事关安徽文献，特加介绍。

《算法统宗》(1593年)出版后刻本甚多，且有刊误。万历戊戌(1598年)程时用序言略称：“坊间翻刻诸本，讹舛相乘，豕鱼算辨，

并其津筏而亦失之耶。族子汝思(大位),深为此虑,于化日之暇,将统宗算法中,删其繁芜,揭其要领,直指其乘除损益,区明其奇赢积分,起圣贤格言,终周天间里,凡六十四则,厘为四卷,题曰《算法纂要》。"全书次序,是载目录之内,都系就《算法统宗》"删其繁芜,揭其要领";惟卷之一末有"九归释义",则系新增续编的。曾记明"新增续编九归歌释义"(附一卷后),系就"九归歌"从"一归不须归"至"九归、逢九进一十"逐句加以解释,甚便为学。

此书另有半身之"宾渠(大位)小象"。书前又题"新安 宾渠程大位汝思父 编集,男 仰渠 子喜 文焕 校正"二行,并为《算法统宗》所未记。这说明程大位编纂此书时,曾由其男儿子喜为之校正。

本来《算法纂要》一书比较《算法统宗》还要通俗,程大位以后,民间算家都利用《算法纂要》做资料。但《算法统宗》在万历时期民间多有翻印本(程时用 1598 年语),清初翻印本更多(程世绥 1716 年语),可是《算法纂要》国内流传反更少。其原因可能是因为:《算法纂要》出书(1598 年)后,不及 50 年,明即亡国(1643),而《纂要》内程时用序文曾称程大位编著《算法纂要》于化日之下,是指明代的光天化日,而非清代的光天化日。清初曾广兴文字狱,所以此书在清代无人翻印,亦无人收藏。这又说明以往封建时代专制政府影响科学进步的情形。

今录记其目录和九歌释义于后。

二 新编直指算法纂要录目

三　新增续编九归歌释义(附一卷后)

九归歌曰

〔一归〕 不须归一者原数,不必归也。其法故不立惟兼归除,左边

为实，右边为法，但法首位，有一数者，是一归也。故用逢一进一起，至逢九进九止。 逢九，即是九次，逢一进一也。

〔二归〕 二 假如：二人右边为法 一 假如：一两左边为实**添作 五** 法实相呼，将一两添四，变作每人合得五钱，二人，二五得一两，以合原数。

逢二进一十法二人，实二两归曰逢二各得一两。

〔三归〕 三 人右为法 一 两左为实 **三十一**法实相呼，将一两，添二，变作每人三钱，三人共除九钱，余一钱，归曰三十一。 一钱又归，每人合得三分，三人共除九分，而剩一分，如此难尽。

三人为法 二 两为实**六十二**法实相呼，将二两，添四，变作每人六钱，三人三六共除一两八钱，余二钱，归曰，六十二，二又再归亦难尽也。

逢三进一十法三人，实三两，归曰，逢三进一于前位，每人各得一两，三人共得三两，以合原数。

〔四归〕 四人为法 一 两为实 **二十二**法实相呼，将一两添一，变作每人二钱，四人，共除八钱，余二钱，归曰二十二。 二钱，又用后归四二添作五，每人又得五分也。

四人为法 二 两为实 **添作五** 法实相呼，将二两，添三，变作每人五钱。四人，四五得二两，合原数。

四人为法 三 两为实 **七十二** 法实相呼，将三两添四，变作每人七钱，四人，四七共除二两入钱，余二钱。归曰七十二。 二钱，又用前四二添作五法，每人又得五分，是也。

逢四进一㊉法四人，实四两。归曰，逢四进一于前位。每人各得一两，四人，共得四两，以合原数。

〔五归〕 五人为法 一 两为实 **倍作二** 法实相呼，将一两添一变作每人二钱，五人，二五得一两，合原。

五人为法 一 两为实**倍作二** 法实相呼，将一两添一，变作每人二钱，五人，二五得一两，合原。

五人为法 二 两为实**倍作四** 法实相呼，将二两添二，变作每人四钱，五人，四五得二两，合原。

五人为法 三 两为实**倍作六** 法实相呼，将三两添三，变作每人六钱，五人，五六得三两，合原。

五人为法 四 两为实**倍作八** 法实相呼，将四两添四，变作每人八钱，五人，五八得四两，合原。

逢五进一十法五人，实五两，归曰，逢五进一于前位，每人各得一两，五人共得五两，以合原数。

〔六归〕 六人为法 一 两为实 **下加四** 法实相呼，一两不动，变作每人一钱，六人共除六钱，余四钱，归曰，下位加四。 四钱，又用后，六四六十四，归法算。

六人为法 二 两为实 **三十二** 法实相呼，将二两添一，变作每人三钱，六人，三六共除一两八钱，余二钱。归曰，三十二钱，又用此归重算。

六人为法 三 两为实 **添作五** 法实相呼，将三两添二，变作每人五钱，六人，五六得三两，合原。

六人为法 四 两为实 **六十四** 法实相呼，将四两添二，变作每人六钱，六人共除三两六钱余四钱。归曰，六十四，四钱，又照此归算。

六人为法 五 两为实 **八十二** 法实相呼，将五两添三，变作每人八钱，六人共除四两八钱，除二钱。归曰，八十二。二钱又用六二，三十二归法算。

逢六进一十法六人，实六两，归曰，逢六进一于前位，每人各得一两，六人，共得六两，以合原数。

〔七归〕 **七人为法 一 两为实下加三**法实相呼，一两不动，变作每人一钱，七人共除七钱，余三钱，归曰，下加三。 三钱又用后七三四十二，归法算。

七人为法 二 两为实 下加六法实相呼，二两不动，变作每人二钱，七人共除一两四钱，余六钱，归曰，下位加六。六钱又用后，七六八十四，归法算。

七人为法 三 两为实 四十二法实相呼，将三两添一，变作每人四钱，七人共除二两八钱，除二钱归曰四十二。 二钱又用前，七二下加六，归法算。

七人为法 四两为实 五十五法实相呼，将四两添一，变作每人五钱，七人共除三两五钱，余五钱，归曰五十五。五钱，又用后七五七十一归法算。

七人为法 五 两为实 七十一法实相呼，将五两添二，变作每人七钱，七人共除四两九钱，余一钱，归曰七十一。一钱，又用前七一下加三，归法算。

七人为法 六 两为实 八十四法实相呼，将六两，添二，变作每人八钱，七人共除五两六钱，余四钱，归曰，八十四。四钱，又用前七四五十五，归法算。

逢七进一十法七人，实七两，归曰逢七进一于前位，每人各得一两，七人共得七两，以合原数。

〔八归〕 **八人为法 一 两为实下加三**法实相呼，一两不动，变作每人一钱，八人共除八钱，余二钱，归曰下加二。 二钱又用后八二下加四，归法算。

八人为法 二 两为实 下加四法实相呼，二两不动，变作每

人二钱，八人共除一两六钱，余四钱归曰下位加四。四钱，又用后，八四添作五，归法算。

八人为法 三 两为实 下加六法实相呼，三两不动，变作每人三钱，八人共除二两四钱，除六钱，归曰下位加六。

六钱，又用后，八六七十四，归法算。

八人为法 四 两为实 添作五法实相呼，将四两添一，变作每人五钱，八人共得四两，合原。

八人为法 五 两为实 六十二法实相呼，将五两添一，变作每人六钱，八人共除四两八钱，余二钱归曰六十二。 二钱，又用前六二三十二，归法算。

八人为法 六 两为实 七十四法实相呼，将六两，添一，变作每人七钱，八人共除五两六钱，余四钱，归曰七十四。

四钱，又用前八四添作五，归法算。

八人为法 七 两为实 八十六法实相呼，将七两添一，变作每人八钱，八人共除六两四钱，余六钱，归曰八十六。

六钱，又用前，八六七十四，归法算。

逢八进一十法八人，实八两，归曰逢八进一，于前位，每人各得一两，八人，共得八两，以合原数。

〔九归〕 总诀随身下

九人为法 一 两为实下加一法实相呼，一两不动，变作每人一钱，九人共除九钱，余一钱，归曰九一随身下加一，如此挨身，加一难尽。

九人为法 二 两为实下加二法实相呼，二两不动，变作每人二钱，九人共除一两八钱，余二钱，归曰下加二。 二钱又用此归法，挨次而算。

九人为法 三 两为实下加三法实相呼，三两不动，变作每

人三钱，九人共除二两七钱，除三钱，归曰下加三。 三钱又用此归挨次而算。

九人为法 四 两为实下加四法实相呼，四两不动，变作每人四钱，九人共除三两六钱，余四钱，归曰下加四。 四钱又用此归，逐次而算。

九人为法 五 两为实下加五法实相呼，五两不动。变作每人五钱，九人，共除四两五钱，余五钱，归曰，下加五。 五钱，又用此归，逐位而算。

九人为法 六 两为实下加六法实相呼，六两不动，变作每人六钱，九人共除五两四钱，余六钱，归曰，下加六。 六钱又用此归，挨次而算。

九人为法 七 两为实下加七法实相呼，七两不动，变作每人七钱，九人共除六两三钱，余七钱，归曰，下加七。 七钱又用此归，挨次而算。

九人为法 八 两为实下加八法实相呼，八两不动，变作每人八钱，九人共除七两二钱，余八钱，归曰，下加八。 八钱又用此归，挨次而算。

逢九进一十法九人实九两，归曰，逢九进一于前位，每人各得一两，九人共得九两，以合原数。

新增续编九归释义(终)

和算家“增约术”应用的说明*

（一）绪　　言

作者在《从中算家的割圆术看和算家的圆理和角术》一文（《科学史集刊》第 2 集，1959 年）之中，曾说日本（和）算家关孝和（1642?～1708）曾与中算家赵友钦（十三世纪）一样，由圆内接四边形算起，按《括要算法》（1709 年）算出圆内容

$2^{13}\times4=2^{15}=32768$ 等边形，得：

周 $p_{15}=3.14159264877698567 08=a$；

$2^{14}\times4=2^{16}=65536$ 等边形，得：

周 $p_{16}=3.14159265238659135 71=b$；

$2^{15}\times4=2^{17}=131072$ 等边形，得：

周 $p_{17}=3.14159265328899277 59=c$；

而后立刻应用“增约术”算出

$$定周=b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}=3.1415926535。$$

因此比较祖冲之（429～500）多算出两位正确。

---

* 本文原载《科学史集刊》第 3 集（1960 年 3 月）第 65～69 页。

本文对于上述“定周”(暂记以 p)之计算方法的获得,作一论证性的说明。

(二) 定周计算

首先,考察由《括要算法》算出圆内容下列各等边形之各周大小的数值规律:

$2^{13}=8192$ 等边形,周$=3.1415\ 9257\ 6584\ 8605\ 168\ =p_{13}$,

$\underline{\underline{57}}753\ 6919\ 632$

$2^{14}=16384$ 等边形,周$=3.1415\ 9263\ 4338\ 55248\ =p_{14}$,

$\underline{\underline{14}}438\ 4331\ 908$

$2^{15}=32768$ 等边形,周$=3.1415\ 9264\ 8776\ 9856\ 708=p_{15}=a$,

$\underline{\underline{3}}609\ 6056\ 863$

$2^{16}=65536$ 等边形,周$=3.1415\ 9265\ 2386\ 5913\ 571=p_{16}=b$,

$\underline{\underline{9}}02\ 4014\ 188$

$2^{17}=131072$ 等边形,周$=3.1415\ 9265\ 3288\ 9927\ 759=p_{17}=c$,

………………………………………………………………

令 $k=15$,考察 P_k,有差商关系

$$\frac{p_k-p_{k-1}}{p_{k-1}-p_{k-2}}\approx\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}}\approx\frac{p_{k+2}-p_{k+1}}{p_{k+1}-p_k}\approx\frac{1}{4}=r。$$

故而假定:

$$r\approx\frac{p_{k+3}-p_{k+2}}{p_{k+2}-p_{k+1}}\approx\frac{p_{k+4}-p_{k+3}}{p_{k+3}-p_{k+2}}\approx\cdots$$

注意到用“增约术”已算出

$$b-a=0.0000000036096056863$$

$$c-b=0.0000000009024014188$$

就中

$$\frac{c-b}{b-a}\approx\frac{1}{4}=r, c>b>a。$$

对于 $>k$ 之后的一切 p_k，利用前述假定，有

$$p_{k+2}=p_{k+1}+(p_{k+2}-p_{k+1}),$$

$$p_{k+3}=p_{k+2}+(p_{k+3}-p_{k+2})\approx p_{k+1}+(p_{k+2}-p_{k+1})$$
$$+r(p_{k+2}-p_{k+1}),$$

$$p_{k+4}=p_{k+3}+(p_{k+4}-p_{k+3})\approx\cdots\approx$$
$$\approx p_{k+1}+(p_{k+2}-p_{k+1})+r(p_{k+2}-p_{k+1})$$
$$+r^2(p_{k+2}-p_{k+1}),$$

…………………………………………………………

$$p_{k+n}=\cdots\approx p_{k+1}+(p_{k+2}-p_{k+1})(1+r+r^3+\cdots$$
$$+r^{n-2})。$$

如此序列 $\{p_{k+n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时，有

$$\pi=\lim_{n\to\infty}p_{k+n}=定周\ p。$$

注意 $r=\dfrac{1}{4}<1$，此时有

$$\lim_{n\to\infty}(1+r+r^2+\cdots+r^{n-2})=\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r},$$

则得

$$定周\ p\approx p_{k+1}+\frac{1}{1-r}(p_{k+2}-p_{k+1})=\frac{p_{k+2}-rp_{k+1}}{1-r}。$$

应用当初 $r\approx\dfrac{p_{k+2}-p_{k+1}}{p_{k+1}-p_k}$，则得

$$p\approx p_{k+1}+\frac{p_{k+2}-p_{k+1}}{1-\dfrac{p_{k+2}-p_{k+1}}{p_{k+1}-p_k}}=p_{k+1}+\frac{(p_{k+1}-p_k)(p_{k+2}-p_{k+1})}{(p_{k+1}-p_k)-(p_{k+2}-p_{k+1})}。$$

选择 $k=15$，则有

$$定周\ p\approx b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}=3.1415926535,$$

此即定周计算公式。

（三）理论问题

众所周知，单位圆内接正 n 边形的周长 p_n 按简单三角计算公式有

$$p_n=2n\sin\frac{\pi}{n},$$

且有 $p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$ 及其极限值定周 p 为：

$$p=\lim_{n\to\infty}p_n=\pi。$$

研究由四边形算起的 $n=4\times 2^k$ 等边形，此时有

$$p_{k+2}=2^{k+3}\sin\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

显然，

$$p_k-p_{k-1}=2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^k}-2^k\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}=2^k\left(2\sin\frac{\pi}{2^k}-\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)=$$

$$=2^k\left(2\sin\frac{\pi}{2^k}-2\sin\frac{\pi}{2^k}\cos\frac{\pi}{2^k}\right)=2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^k}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^k}\right),$$

而注意当 k 充分大时，有 $t=\frac{\pi}{2^k}$ 为甚小之数，有 Taylor 展开式①：

$$\cos t=1+\frac{t^2}{2!}+O(t^4)，当\ t\to 0,$$

此时即有

$$p_k-p_{k-1}=2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^k}\left[\frac{\pi^2}{2^{2k+1}}+O\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)\right]=$$

① 凡写 $f(t)=g(t)+O[h(t)]$的意思是指 $f(t)-g(t)$与 $h(t)$之比为不超过一个正常数者。即存在一常数 $A>0$，使 $\left|\frac{f(t)-g(t)}{h(t)}\right|\leqslant A$。

$$=\frac{\pi^2}{2^n}\sin\frac{\pi}{2^k}+O\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)<\frac{\pi^2}{2^k}\to 0,\text{当 } k\to\infty。$$

当然，记 $p_{-1}=0$，由级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|p_k-p_{k-1}|\leqslant A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2A$$

知原级数(三角级数)：

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}(p_k-p_{k-1})=\sum_{k=0}^{\infty}2^{k+1}\sin\frac{\pi}{2^k}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^k}\right)$$

为绝对收敛的。即定周 p，这是一个非几何(即非等比)的超越级数。但当 k 充分大时，有

$$p_k-p_{k-1}=\frac{\pi^2}{2^k}\sin\frac{\pi}{2^k}+O\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)\sim\frac{\pi^2}{2^k}\cdot\frac{\pi}{2^k}=\frac{\pi^3}{2^{2k}}。$$

因此，连续三数相间：

$$p_k-p_{k-1};p_{k+1}-p_k;p_{k+2}-p_{k+1}。$$

及其相邻有限个数之主阶(Principle of order)——即主项之值，可以下列数列表征：

$$\frac{\pi^3}{2^{2k}};\quad \frac{\pi^3}{2^{2(k+1)}};\quad \frac{\pi^3}{2^{2(k+2)}}。$$

此时此三数间(及相邻有限个数之间皆然)，成为一个等比序列，其比值 r 为

$$r=\frac{\dfrac{\pi^3}{2^{2k}}}{\dfrac{\pi^3}{2^{2(k+1)}}}=\frac{\dfrac{\pi^3}{2^{2(k+1)}}}{\dfrac{\pi^3}{2^{2(k+2)}}}=\frac{1}{4}。$$

这时候，这个按计算“阶”(order)而逼近法则，即由三角级数向等比级数的一个改造过程，可见这个改造级数的过程还是很自然的，这时候，相应地有定周计算即为：

$$\text{定周 } p=\lim_{n\to\infty}p_n=p_k+\sum_{s=k}^{\infty}(p_{s+1}-p_s)$$

$$\sim p_k + \sum_{s=0}^{\infty}(p_{k+1} - p_k)r^s$$

$$= p_k + (p_{k+1} - p_k)\sum_{s=0}^{\infty}r^s = p_k + \frac{p_{k+1} - p_k}{1 - r}。$$

由此可见，前述“假定”下的计算即实由超越级数（三角级数）向几何级数级（等比级数）的改造意义下的主项计算。

（四）结　　论

由圆内接等 4 边形算起之等 2^k 边形的周 p_k 之值，当 k 较大时，已见其前后差之主项关系为：

$$p_k - p_{k-1} \sim \frac{\pi^3}{2^{2k}},$$

此时近似计算可以按

$$p_k - p_{k-1} \approx \frac{\pi^3}{2^{2k}}$$

进行，而可令

$$\frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1} - p_{k-2}} = \frac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}} = \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_{k+1} - p_k} = \cdots = r = \frac{1}{4},$$

而最终得

$$p \approx p_{k+1} + \frac{p_{k+1} - p_k}{1 - r}。$$

即此时得定周近似值为

$$p_{k+1}^* = p_{k-1} + \frac{p_{k+1} - p_k}{1 - r}。$$

令 $k = 15$ 时即前述关于 a, b, c 的定周计算公式得 $p_{16}^* = 3.1415926535$。这时候，p_{k+1}^* 比 p_{k+1} 更接近于 π，其接近的“进步”程度即

$$\Delta_{k+1} = p_{k+1}^{*} - p_{k+1} = \frac{p_{k+2} - rp_{k+1}}{1-r} > 0。$$

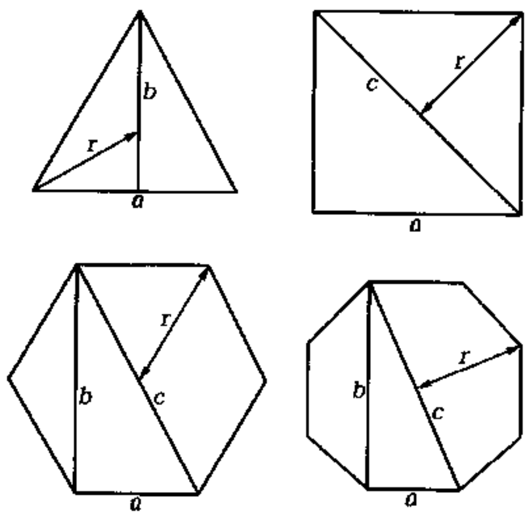
而有

$$p_{k+1}^{*} > \frac{1}{1-r}(p_{k+2} - rp_{k+2}) = p_{k+2},$$

即新序列$\{p_{k+1}^{*}\}$向π靠近时，它不比p_{k+2}的速度为低，而却比p_{k+1}的原来序列是跃进了起码一级(即$>p_{k+2}$)，可见它是一个快速收敛序列。在计算上p_{k+1}^{*}比p_{k+1}为精确的优点就在这里。

中国古代正多边形的实用做法*

正多边形如正三边形、正四边形、正六边形、正八边形：



其中称　a＝面或边，

b＝垂线或中垂线，

r＝外容圆半径，

$c=2r$＝斜，或外容圆直径。

此项实用做法，是以 a 边为基础，不用圆规来进行的。

---

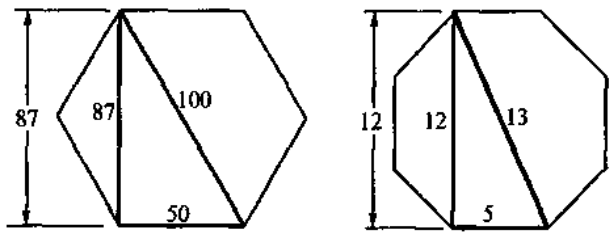
* 本文原载《数学通报》1962 年第 4 期第 18 页、17 页。

中国首先考虑这种正多边形实用做法，是建筑家李诫在他编辑的“营造法式”(1100 年)内做到

正四边形：　$a=100$ 时，　$c=141$；

正六边形：　$a=50$　时，　$b=87$，　$c=100$；

正八边形：　$a=5$　时，　$b=12$，　$c=13$。



李诫是掌握着 $\pi=\frac{22}{7}$，$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.74$ 的数值，所以假定，在

正四边形　$a:c=100:141$；

正六边形　$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$

$\fallingdotseq 50:87:100$；

正八边形　$a:b:c=\sqrt{2-\sqrt{2}}:\sqrt{2+\sqrt{2}}:2$

$\fallingdotseq 25:60:65$

$\fallingdotseq 5:12:13$。

此项建筑家的实用做法，直到十八世纪还是如此。如清代“营造则例”记

正四边形　$a:c=1:1.414$；

正六边形　$a:b=1:\frac{1}{0.578}$；

正八边形　$a:b=1:2.414$。

中算家也说到正多边形的比例值。如王文素《古今算学宝鉴》(1524 年)记

正六边形　$a:b=1:\sqrt{3}$；

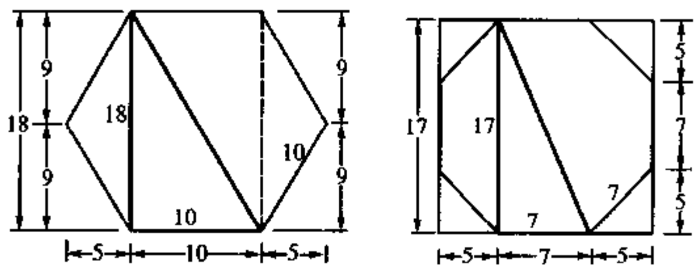
正八边形　$a:b=1:1+\sqrt{2}$。

程大位《算法统宗》(1592年)则以

正六边形　$a:b\doteq 10:18$；

正八边形　$a:b\doteq 7:17$，

其中正六边形是用 $\sqrt{5^2+9^2}\doteq 10$，正八边形是用 $\sqrt{5^2+5^2}\doteq 7$ 的近似值。他的做法如下图：



根据上述数值，程大位还举出由各边算出多边形的面积数值，如

正三边形　$S_3\doteq 0.433a^2$；

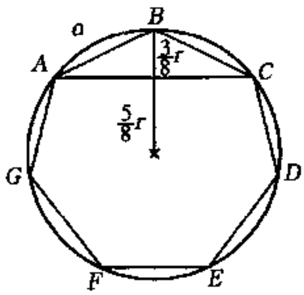
正六边形　$S_6\doteq 2.7a^2$；

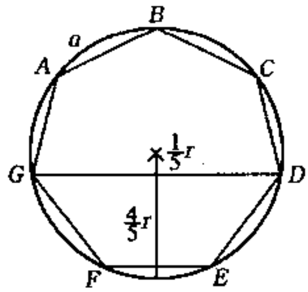
正八边形　$S_8\doteq 4.87a^2$。

十七世纪西洋历算法输入中国，在十七世纪可以看到五边形的几何做法，在十八世纪可以看到其余七、九各正边形的做法，可是在求正多边形，特别是根据圆半径求正七边形的实用做法，中算家亦没有数例。如：陆仲玉在《日月星晷式》(1622年)求出正七边形的实用做法，即是设一圆形

“分上面半圆径为八分，取其三分作弦，交于圆得 A，C 点，则上方有内容正七边形的二边，下方有内容正七边形的五边”。

如下左图，其正确性在千分之二，因此处 $a \doteq \frac{\sqrt{3}}{2}r=$ 0.866025，比正确值约少 0.002。





又李笃培在《中西数学图说》(1631 年)也有类似做法，即是设一圆形

“分下面半圆径为五分，取其一分作弦，交于圆得 G, D 点，则上方有内容正七边形的四边，下方有内容正七边形的三边”。

如上右图，其正确性在千分之四，因此处 $a \doteq \frac{\sqrt{19}}{5}r=0.87178$，比正确值约多 0.004。

附　　录

南北朝算学书志*

余昔蛰居故里，曾草就《南北朝算学书目》，为治南北朝算史之所本。军兴以还，避难来蜀，旅篋之中，仍留此稿，乃复加整理。作南北朝算学书志。——严敦杰识

祖冲之《缀术》六卷

《南齐书》：祖冲之字文远。范阳蓟人也。特善算，注《九章》，造《缀术(述)》数十篇，永元二年卒，年七十二①。

按：《南史》称冲之范阳遒人，予别有文考之。

《隋书·律历志》："古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数，三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数，三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间；密率圆径一百一十三，圆周三百五十五；约率圆径七，周二十二。又设开差幂开差立。兼以正

---

* 本文系严敦杰撰，李俨注，原载《图书季刊》新2卷第2期(1940年)第196～211页。李俨先生的注解仍一并置于文后。

员参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”

《宋书·律历志》祖冲之《大明历议》：“臣少锐愚尚专功数术。搜练古今，博采沉奥，唐篇夏典，莫不揆量，周正汉朔，咸加该验。罄策筹之思，究疏密之辨。至若立员旧误，张衡述而弗改，汉时斛铭，刘歆诡谬其数，此则算氏之剧疵也。《乾象》之弦望定数，《景初》之交度周日，匪谓测候不精。遂乃乘除翻谬，斯又历家之甚失也。及郑玄、阚泽、王蕃、刘徽并综数艺，而每多疏舛。臣昔以暇日，撰正众谬。理据炳然，易可详密，此臣以俯信偏识，不虚推古人者也。”

《隋书·经籍志》：“《缀术》六卷。”

《旧唐书·经籍志》：“《缀术》五卷，祖冲之撰，李淳风注。”

《隋志》作六卷，《唐志》作五卷，《南齐书》作数十篇，今从《隋志》著录为六卷[②]。

祖冲之《九章算术注》九卷，《九章术义注》九卷

《日本国见在书目》：“《九章》九祖中注。《九章术义注》九祖中注。”

按祖中即祖冲之，犹祖暅之之作祖暅也。“中”“仲”“冲”俱形误。

《南齐书》本传：冲之注《九章》。

《九章算术》李淳风注：“周三径一之率，于圆周乃是径多周少。径一周三，理非精密，盖术从简要，举大纲略而言之。刘徽特以为疏，遂乃改张其率。但周径相乘，数难契合。徽虽出斯一法，终不能究其纤毫也。祖冲之以其不精，就中更推其数。今者修撰，捃摭诸家，考其是非，冲之为密，故显之于徽术之下，冀学者之所裁焉。”

《隋书·经籍志》：“《九章术义序》一卷。”

祖冲之《重差注》二卷

《日本国见在书目》:"《海岛》二祖仲注"

刘徽《九章算术序》:"凡望极高,测绝深,而兼知其远者,必用重差,勾股则必以重差为率,故曰重差也。"

"海岛"之名自唐始,《见在书目》乃以通行书籍称之,故若是云云。于南朝时当作《重差》也。诸史志著录《海岛》咸为一卷,此独为二卷。岂足本欤。

祖暅《缀术》二卷

《南史》:祖暅字景烁,冲之之子也。"少传家业,究极精微,亦有巧思,入神之妙,般倕无以过也。当其诣微之时,雷霆不能入。尝行遇仆射徐勉,以头触之,勉呼乃悟。父所改何承天历,时尚未行,梁天监初,暅之更修之。于是始行焉,位至太舟卿。"

《广弘明集》引阮孝绪《七录》:"乃分数术之文,更为一部。使奉朝请祖暅撰其名录。"③

《隋书·天文志》:"梁奉朝请祖暅。天监中受诏集古天官及图纬旧说。撰《天文录》三十卷。"④

《文选》注引刘璠《梁典》:"天监六年,帝以旧漏乖舛,乃敕员外郎祖暅治之,漏刻成,太子中舍人陆倕为文。"⑤

《陈书·沈洙传》:"漏刻赊促,今古不同,《汉书》律历,何承天、祖冲之、祖暅父子漏经,并自关鼓至下鼓。自哺鼓至关鼓,皆十三刻。冬夏四时不异。"

《梁书·康绚传》:"时魏降人王足。陈计求堰淮水,以灌寿阳。""高祖以为然。使水工陈承伯,材官将军祖暅视地形。"

《北史·信都芳传》:"江南人祖暅者,失于边境被获,在延明家。旧明算历,而不为王所待。芳谏王礼遇之,暅后还,留诸法授芳。"⑥

《梁书·江革传》:“时祖暅同被拘执,延明使暅作《欹器漏刻铭》。”革唾骂之。

《颜氏家训·杂艺》:“算术亦是六艺要事,江南此学殊少。惟范阳祖暅精之,位至南康太守。”⑦

《隋书·律历志》“候气”引《毛爽律谱序》:臣先人“学算于祖暅,问律于何承天,沈研三纪,颇达其妙。”

祖暅与何天承同时,殆不得其解。

唐王孝通《缉古算术序》:“其祖暅之《缀术》,时人称之精妙。曾不觉方邑进行之术,全错不通,刍甍方亭之问,于理未尽。”

宋沈括《梦溪笔谈·技艺》:“求星辰之行步气朔消长,谓之缀术。谓不可以形察,但以算数缀之而已。北齐祖暅有《缀术》二卷。”

祖暅之《开立圆术注》

《九章算术》李淳风引祖暅之开立圆术曰:“以二十一乘积,十一而一。开立方除之,即立圆径。其意何也?取立方棋一枚,令立枢于左后之下隅,从规去其右上之廉,又合而横规之,去其前上之廉,于是立方之棋,分而为四,规内棋一,谓之内棋,规外棋三,谓之外棋。更合四棋,复横断之,以勾股言之,令余高为勾,内棋断上方为股,本方之数其弦也。勾股之法,以勾幂减弦幂,则余为股幂。若令余高自乘,减本方之幂,余即内减棋断上方之幂也。本方之幂,即外四棋之断上幂。然则余高自乘,即外三棋之断上幂矣,不问高卑,势皆然也。然固有所归同而途殊者,尔乃控远以演类,借况以析微。按阳马方高数参等者,列而立之,横截去上,则高自乘与断上幂数亦等焉,夫叠幂成立积,缘幂势既同,则积不容异。由此观之,规之外三棋旁蹙为一,即一阳马也。三分立方则阳马居一,内棋居二,可知矣。合八小方成一大方,合八内棋成一合盖。内棋于小方三分之二,则合盖居立方三分之二,较然验矣。置三分之二,以圆幂率三乘

之，如方幂率四而一，约而定之，以为丸率。故曰丸居立方三分之一。等数既密，心亦昭晰。张衡放旧，贻哂于后；刘徽循故，未暇校新，夫岂难哉，抑未之思也。”

此为南北朝算学文献之仅存者，故摘录如右，按此又疑为祖暅《缀术内篇》之一。

祖暅《权衡记》，《称物重率术》二卷

《隋书·经籍志》五行家类著录。

《权衡记》乃述度量衡之制。《称物重率》疑为求重心之法，景烁既善于水利工程，当首先须明乎此。二书属今之应用算学，《隋志》误入五行家，姚振宗已明辨之。

甄鸾《算术》□卷

《隋书·律历志》："甄鸾《算术》云：周朝市尺，得玉尺九分二厘。"又甄鸾《算术》云：玉升一升，得官斗一升三合四勺。

姚振宗《隋书·经籍志考证》："甄鸾《周书》无传。《法范珠林》传记篇云：'《笑道论》一部三卷，周武帝敕前司隶无极伯甄鸾诠衡佛道二教作。'则尝封无极伯。又《隋志》历数家：'《七曜本起》三卷，后魏甄叔遵撰。'唐《艺文志》云：'甄鸾《七曜本起历》五卷。'则叔遵为鸾之字。考魏代有甄叔雍名密，中山无极人，见《魏书·甄琛传》。叔雍，叔遵似昆季行，则鸾亦中山无极人故，西魏封为无极伯，与甄琛、甄密同族。惟鸾仕西魏入北周者也。"⑧

定叔遵为鸾之字，黄钟骏《畴人传》四编亦云之。然考黄氏补传，成于光绪戊戌，而姚氏孝证，于丁酉脱稿。是姚氏较黄氏为先。又《太平广记》三百十八引《幽明录》："甄冲字叔让，中山人，为云社令。"可为姚氏之旁证。按宋算学祀典封甄鸾为无极男。祀典多据各人里贯为之，是鸾为无极人，可无疑矣。

《隋书·律历志》："武帝时甄鸾造《天和历》，上元甲寅至天和

元年丙戌，积八十七万五千七百九十二。”

《夏侯阳算经》：“仓曹云：古者凿地方一尺。深一尺六寸二分。受粟一斛，至梁大同元年，甄鸾校之。用二尺九寸二分。”

《广弘明集》：“《笑道论启》，周天和五年二月十五日前司隶毋极县开国伯臣甄鸾撰。”

清蒋超伯《南漘楛语》：“甄鸾盖北朝博洽多通之士。非庚兰成辈仅工文藻可比。”

甄鸾《周髀算经注》一卷⑨

《隋书·经籍志》：“《周髀》一卷，甄鸾重述。”

《旧唐书·经籍志》：《周髀》一卷，甄鸾注。

宋鲍澣之《周髀算经跋》：“甄鸾之重述，乃是解释君卿之所注。出于宇文周之时。”

《崇文总目》：“《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释。”

按庾仲容子钞录《周髀》为一卷，宋王应麟《玉海》亦谓《周髀》古一卷，后人析而为二。庾仲容于甄鸾同时，是甄注当为一卷本也。鸾注今尚存，随文衍义，无所发明，颇不足观。

甄鸾《九章算术注》

《隋书·经籍志》：“《九章算术》二卷，徐岳甄鸾重述。”“《九章算经》二十九卷，徐岳甄鸾等撰。”

《旧唐书·经籍志》：“《九章算经》九卷，甄鸾撰。”

唐王孝通《缉古算术序》：“昔周公制礼，有九数之名。窃寻九数即《九章》是也，贺循、徐岳之徒，王彪、甄鸾之辈，会通之数，无闻焉耳。”

甄鸾《孙子算经注》三卷 《五曹算经注》五卷

《旧唐书·经籍志》：《五曹算经》五卷，甄鸾撰，《孙子算经》三

卷，甄鸾撰注。

《夏侯阳算经》序："《五曹》、《孙子》，述作滋多。甄鸾、刘徽，为之详释。"

甄鸾《张邱建算经注》一卷

《旧唐书·经籍志》："《张丘建算经》一卷，甄鸾撰。"

《直斋书录解题》："《张丘建算经》三卷，甄鸾注。"

《张丘建算经》百鸡术注："此问若依上术推算，难以通晓，然较之诸本并同，疑其从来脱漏阙文。盖流传既久。无可考证，自汉唐以来，虽甄鸾、李淳风注释，未见详辨。"

参后《张邱建算经》条。

阮元《畴人传》："鸾好学精思，富于论撰，诚数学之大家矣。"

信都芳《器准》三卷

《北史》："信都芳字玉琳，河间人也，少明算术"，为州里所称。"有巧思，每精心研究，或坠坑坎。尝语人云：'算历玄妙，机巧精微，我每一沉思，不闻雷霆之声也。'其用心如此。江南人祖暅，以诸法授芳，由是弥复精密。安丰王延明欲抄集五经算事为五经宗，又聚浑天，欹器，地动，铜乌，漏刻，候风诸巧事，并图画为器准，并令芳算之，会延明南奔。芳乃自撰注。"⑩

《隋书·经籍志》："《器准图》三卷。后魏丞相士曹行参军信都芳撰。"

《隋书·律历志》"候气"："后齐神武霸府田曹参军信都芳深有巧思，能以管候气。"

《新唐书·艺文志》："信都芳《器准》三卷。"

宋李籍《周髀算经音义》："信都芳并如字，善算者也，撰《器准》三卷。"

按《器准》与祖暅之《称物重率术》，当属同类之书。信都芳

著作今存者有《乐书》若干卷，为马国《翰玉函山房辑佚书》之一。又《佚存丛书》本武则天《乐书要录》引信都芳删注《乐书》。为马辑本缺。

信都芳《周髀四术宗》

《四术周髀宗序》曰："汉成帝时学者问盖天，扬雄曰：'盖哉，未几也。'问浑天，曰：'落下闳为之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几乎，莫之息矣。'此言盖差而浑密也。盖器测影而造，用之日久，不同于祖。故云'未几也'。浑器量天而作，乾坤大象，隐见难变，故云'几乎'。是时，太史令尹咸穷研晷盖，易古周法，雄乃见之，以为难也。自昔周公定影王城，至汉朝，盖器一改焉，浑天覆观，以《灵宪》为文；盖天仰观，以《周髀》为法。覆仰虽殊，大归是一。古之人制者，所表天效玄象。芳以浑算精微。术几万首，故约本为之省要。凡述二篇，合六法，名《四术周髀宗》。"(《北史·艺术传》)

疑四术为重差，勾股，旁要，夕桀。六法为：平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。

李淳风《周髀算经注释》引后魏信都芳注《周髀四术》云："按永平元年戊子，是梁天监之七年也，见洛阳测影。"

按《隋书志》亦引有此条。

信都芳《重差勾股注》

《北齐书》本传，《后魏书》本传。

陶弘景《算数艺术杂事》一卷

《南史·隐逸传》："陶弘景字通明，丹阳秣陵人也。""明阴阳、五行、风角、星算、山川、地理、方图、产物、医术、本草、历代年历，以算推知汉熹平三年丁丑冬至，加时在日中，而天实以乙亥冬至，加时在夜半，凡差三十八刻，是汉历后天二日十二刻也。""又尝造浑

天象，高三尺许，地居中央，天转而地不动，以机动之，悉于天相会。”

《云笈七签》卷一百七陶隐居本起录：“陶弘景所著书有《算数艺术杂事》一卷。”[11]

张缵《算经异议》一卷

《隋志》著录。

《梁书·张缅传》附：“缵字伯绪，缅第三弟也。”“缵好学，兄缅有书万余卷，昼夜披读，殆不辍手。”“尝执四部书目曰：若读此毕，乃可言优仕矣。”著《鸿宝》二百卷，《文集》二十卷[12]。

《金楼子·聚书篇》：“张湘州缵经饷书。”[13]

缵固博学之士，梁元帝亦称道之。《算经异议》当为论考各家算书，详其得失，较其互异，属今之书评类。

庾曼倩《算经注》

《南史·隐逸传》：“庾诜字彦宝，新野人也。”“子曼倩字世华，亦早有令誉。”“所著《丧服仪》，《文字体例》，《老子义疏》，《算经》及《七曜历术》，并所制文章凡九十五卷。”[14]

高允《算术》三卷

《北史》本传：“高允字伯恭。渤海蓨人也。”神䴥四年征拜中书博士迁侍郎。以平凉勋赐爵汶阳子。后奉诏领著作郎。司徒崔浩“集诸术士，考校汉元以来，日月薄蚀，五星行度，并讥前史之失，别为魏历以示允。”允论辩之。后拜中书令。著作如故，太和十一年卒，年九十八。“允尤明算法。为《算术》三卷。”

刘祐《九章杂算文》二卷

《隋书·艺术传》：“刘祐荥阳人也，开皇初为大都督，封索庐县公。”“与刘晖、张宾、马显定历。”著《律历术文》一卷[15]。

《旧唐书·经籍志》：“《九章杂算文》二卷。刘祐撰。”

此书江宁顾怀三误收入其所著《补后汉·艺文志》中,盖以后汉《党锢传》中之刘祐同姓名而致误耳。

刘焯《稽极》十卷 《历书》十卷

《隋书·儒林传》:"刘焯字士元,信都昌亭人也。"焯为学不倦。"《九章算术》、《周髀》、《七曜历书》十余部,推步日月之经,量度山海之术,莫不核其根本,穷其秘奥。著《稽极》十卷,《历书》十卷。"行于世[16]。

《稽极》是否为算学著作,余不得而知。然考《隋书》本传,《律历志》、《天文志》所载焯一生事迹,及改历经过,实迈越前古,卓然名家,时人无出其右。阮芸台曰:"焯术推迟疾、朒朓、黄道、日道损益、日月食多少及所在所起,并密于前术。唐《麟德大衍》,号称名术,而皆写《皇极》旧法,以为能究术算之微变。盖自何承天、祖冲之以来,未有能过之。"岂溢美哉,余不欲使其泯灭不传,乃著于录,亦所以景仰而已。

刘炫《算术》一卷

《北史·儒林传》:刘炫字光伯,河间景城人也。名亚于焯,时人称为二刘,"直门下省,以待顾问。又诏与诸术者修天文律历。"后为太学博士,年六十八卒,著《算术》一卷[17]。

赵𢾺《算经》一卷

《宋书·大且渠蒙逊传》:"河西人赵𢾺善历算。"

《畴人传》:"赵𢾺,河西人也。善历算。沮渠蒙逊元始时修《元始术》。上元甲寅至元始元年壬子,积六万一千四百三十八算,上元法四十三万二千,纪法七万二千,蔀法七千二百,章岁六百,章月七千四百二十一,亦曰时法,章闰二百二十一,周天二百六十二万九千七百五十九,亦曰通数,余数三万七千七百五十九,斗分一千七百五十九,日法八万九千五十二,亦曰蔀月,月周九万六千二百五

十二，小周八千二十一，会数一百七十三度，余二万七千百一十九，会虚六万一千三百三十三，交会差一百四十七度，余三千三百一十一，迟疾差六百，余四万一千五百三十，周日二十七日，余四万九千三百八十，周虚三万九千六百七十二。”

《隋书·经籍志》："赵畋《算经》一卷。”

《周髀》一卷

《宋书·大且渠蒙逊传》："十四年茂虔奉表献方物，并献……《周髀》一卷。”

梁庾仲容子钞“《周髀》一卷”。

《隋书·经籍志》天文家："《周髀》一卷，赵婴注。”

“婴”系“爽”之讹，特字形沿误耳，今本题赵君卿注。鲍澣之《周髀跋》曰："赵君卿名爽，君卿其字也。”按君卿撰序，称“爽以暗蔽”，其注中屡称“爽或疑焉”，“爽未之前闻”，“此爽之新术”，“于是爽更为新术”。是君卿名爽，当无异议。阮元系爽于汉代，《四库提要》以注中引有《乾象》、《灵宪》，谓当在张衡、刘洪之后；徐发天《元历理》言赵序文笔极似六朝，定爽为晋人；日畴三上义夫以赵爽引《九章算术》，疑时期略后于刘徽；皆似是而未定之辞也。古代九九薄技，儒者所鄙，畴人史实，类多不考，君卿特其中之一而已。《后魏书·张渊传》："孝文时太史赵樊生并知天文，后太史令胜劳、赵翼、赵洪庆等世业天文。”然则君卿其胜、翼等之先祖欤？

《后魏书·释老志》："寇谦之算七曜，有所不了，惘然自失。成公兴谓谦之曰：‘先生何为不怿？’谦之曰：‘我学算累年。而近算《周髀》不合。’”

《隋书·天文志》："逮梁武帝于长春殿讲义，别拟天体，全同《周髀》之文，盖立新志以排浑天之论而已。”

王度《古镜记》："还履会稽，逢异人张始鸾授勣《周髀》、《九章》及明堂之事。"

梁刘孝标注《世说新语·言语篇》引《周髀》[13]。

南北朝流行之《周髀》，写为一卷本，且亦为赵爽之注，北周甄鸾据而重述之，亦犹为一卷本也。《周髀》古盖天之学，为论天体之必读簿籍，是故自汉传后，之六朝之唐宋，之元明清而之于近代，研者未尝废替，而书终勿归失传也。

《九章算术》九卷

《后魏书·殷绍传》上四序堪舆表："臣以姚氏之世，行学伊川，时遇游遁大儒成公兴，从求《九章》要术。兴字广明，自云胶东人也，山居隐迹，希在人间。兴时将臣南到阳翟九崖岩释昙影间，兴即北还，臣独留住。依止影所，求请《九章》。影复将臣向长广东山见道人法穆，法穆时共影为臣开述《九章》数家杂要，披释章次意况大旨。"

南北朝流行各家《九章》：

刘徽《九章》。《隋志》、《晋书》："魏陈留王景元四年刘徽注《九章》。"

刘洪《九章》。《一切经音义》四九八大般若波罗蜜多经十二京条引袁山松书："刘洪善算，当世无隅。作《七曜术》及述律历记，造《乾象术》。"

徐岳《九章》。《隋志》、《太平御览》引王朗《塞势》："东莱徐先生岳素习《九章》，能为计数。"

阚泽《九章》。《初学记》器物部引。《晋书》："吴中书令阚泽，受刘洪《乾象法》于东莱徐岳。"《九章》亦疑传授之。

贺循《九章》。王孝通《上缉古算术表》。循，《晋书》有传，山阴人也。

孙子《九章》。《一切经音义》引，当为《孙子算经》别本。

祖中《九章》。《见在书目》。见前。

甄鸾《九章》。《隋志》。见前。

王彪《九章》。王孝通《上缉古算术表》。南齐王奂子名彪。未识即此人否。

李遵义《九章》。《隋志》:"《九章算术》一卷。李遵义疏。"李遵义事迹不详。

张峻《九章》。《隋志》:"九章推图经法一卷,张峻撰。"张峻事迹不详。

按唐王孝通缉古注引《九章·均输》,为今本所无,益证南北朝时传本不一。又复有《黄帝九章》云云,盖为好古者托古为之,亦犹《内经素问》之类也。刘徽魏末注《九章》,其卒年当在晋代。余依《宋史》祀典,考得徽系淄川人。杰有《宋史礼志算学祀典考》,未脱稿。李俨以徽在魏曾官仪同,误于读《隋志》之不明也。《齐书·刘休传》,休祖徽,仕于晋,未识即一人否,留诸待考。《周礼》保氏教国子以道,六曰九数,九数之流,则《九章》是矣。方田以御田畴界域,粟米以御交质变易。衰分以御贵贱禀税,少广以御积幂方圆,商功以御功程积实,均输以御远近劳费,盈朒以御隐杂互见,方程以御错糅正负,勾股以御高深广远。或以旁要替勾股,旁要谓旁其要而取之,则旁要亦勾股之类也。今按上列各家《九章》,除祖冲之一人正史有传外,余均事迹无考。时彦流为清静无为之设,龙树马鸣之说,不从事于实事求是之学,可见一般矣。

杨淑《九九算术》二卷

《隋志》著录,杨淑事迹不明。

李籍《九章算术音义》:"《前汉·梅福传》:臣闻齐桓之时,有以九九见者,桓公不逆,欲以致大也。师古曰:《九九算术》,若今《九章》、《五曹》之辈。《隋书·经籍志》:《九九算术》二卷,杨淑撰。"

按九九一语,古籍载者,屡见不鲜。赵君卿曰:"九九者,乘除之原也。"夏侯阳曰:"乘除之法,先明九九。"九九即世传之

小九归也，此书两卷。首卷当为叙述九九之原理，次卷即演绎九九之用法。

《张邱建算经》二卷

《隋志》著录。张邱建清河人。

《张邱建算经》序："《其夏侯阳》之方仓，《孙子》之荡杯，此等之术，皆未得其妙。故更造新术，推尽其理，附之于此。余为后生好学，有无由以至者，故举其大概而为之法。不复烦重，庶其易晓云耳。清河张邱建谨序。"

宋"算学祀典"封邱建为信成男。按《水经注》："清河又北迳信成县故城西。应劭曰：甘陵西北五十里，有信成亭故县也。赵置水东县于此城，故亦曰水东城。清河又东北迳清阳县故城西，汉高祖置清河郡治此。"是邱建为清河信成人。又按钱宝琮曰：书中有户出绢依贫富九等出之，考《魏书·食货志》，显祖即位，因民贫富为租输三等九品之制，是此书亦在此时。《魏书·官氏志》："天赐元年九月，减五等之爵，始分为四，曰：王、公、侯、子，除伯、男二号。"而书中有库金以王、公、侯、子、男分之一题，是作此书时当在五等新旧之交，故有子而复有男也。户调之法，始肇三国。两晋循其制，北魏亦采而为用，故书中杂有户调诸题。则张邱建为北魏初人，似可无疑，惟昧于史实，尚须博考尔。又按《隋志》作二卷，传本作三卷，当为后人分而为之，亦若《周髀》之原为一卷，后人析而为二耳。《唐志》云甄鸾注仅一卷，或疑此一卷并《隋志》二卷，而成三卷本也。今本弧矢术后尚佚去若干题，《孙子》之"荡杯"已见著录。邱建重为立通术以御之。惟《夏侯阳》之方仓，则未见引据，殆脱伪而失传欤？其百鸡术一题，与《孙子》之物不知数题，乃开后世不定方程之先河。

张去斤《算疏》一卷

《隋志》著录。

杰按张去斤即张邱建，“去斤”“邱建”一音之转，疑当时传录时，口授心会以致笔误耳。张去斤《算疏》即疏解《张邱建算经》者。又此为一卷，与甄鸾注本一卷合，则此书或即为鸾所注者也。

《夏侯阳算经》二卷

《隋志》著录。

夏侯阳曰：“夫算之法，约省为善，有分者通之，分不均者同之，位高者下之，可约者约之，耦者半之，五则倍而析之。一、三、七、九，商用所宜。于此不得，乃为之命分。分母入者须出之，然后为定。子可半者半之，不可半者，倍母而入之。此算之要道也。凡除分者，全数易了，奇残难用。心意之劳，正在于此。”

传本《夏侯阳算经》为赝托之书，惟此段所引，前辈言确为原本之一，故亟录之，以传真相。杰疑此文，或乃夏侯阳原本之序文，观其与张邱建序有类似之处。后人以其序冠首，故言夏侯阳曰云云，夏侯阳不知何许人？依张邱建序视之，则夏侯阳当为晋代作家，故宋“算学祀典”列阳于晋也。依“算学祀典”阳为平陆人。传本夏侯阳书为韩延伪造，戴震以延为隋人，钱宝琮以延为唐人，俱可得而闻焉。

《五经算术》一卷　《五经算术录遗》一卷

《隋志》著录。

杰按今本《五经算术》作二卷。《四库提要》以为书中屡有甄鸾按字样，定为鸾所撰。元程端礼《读书分年日程》：“甄氏《五经算术》。”李俨据《北史・信都芳传》，已明辨其非确辞，元延明集五经算事为《五经宗》，则《五经算术》为《算经宗》内篇之一也。

《五经宗》有似后世之类书，李俨以《五经算术》即五经宗，误。《五经宗》唐代尚有传本，书固全帙。信都芳复取其算数者别出之，是有此书单独流行之本。录遗则或出诸甄鸾手，补芳之未逭也。

《三等数》一卷

《唐志》著录，题董泉撰，甄鸾注。

《日本国见在书目》："《三等数》一卷。"

《数术记遗》："数之为用，言重则'变以小兼大，又加循环，循环之理，岂有穷乎。'小兼大者备加，董氏《三等术数》，加更为烦，故略焉。"

《五经算术》："黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉，十等者谓亿，兆，京，垓，秭，壤，沟，涧，正，载。三等者谓上中下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也，中数者万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也，上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。"

甄鸾《笑道论》延年生符二十九："又万万止是一亿，亿亿止是一兆，止言一亿兆年。而云万万亿亿者，盖新学造经者，不知数之大小耳。"

《华严经》卷二十三光明觉品疏："此方黄帝算法，数有三等，谓上中下，下等数法十十变之，中等百百变之。上等倍倍变之。"

《数术记遗》："数不识三，妄谈知十。"

《夏侯阳算经序》："黄帝定三数为十等。"

《唐六典》："录大义本条为问答者。明数造术，辩明术理。然后通，记遗，三等数，读令精熟。"[19]

董泉里贯不详，据史亦无考，《三等数》一书早已佚传，不知其内容，后人遂多猜测之辞。清孔继涵以为《三等数》，一论乘除诸分，二论开平幂，三论开立方。其实何尝为若是也，乘除

诸分，开幂，开立，俱备《九章》，无庸专书以论。即带纵开幂，带纵开立，时人亦已道及，且语涉专门，非若唐明算时之仅为兼习者。观夫内典屡引，时称三等，上中下各以类分，判其所用。尚幸《记遗》引其一则，吾人得度其书之概想焉。余以为三等数乃为一论数之书，其中若干理论，乃近代指数问题之滥觞，《记遗》谓以小兼大，又加循环，以十之某次方，当时不知若何表示。替代某一大数，此所谓以小兼大也。大数以指数表之，而此指数之本数。复参以三等法之变，此所谓又加循环也，循环之理，岂有穷乎。以小兼大者备加，实具近代指数原理，即指数相乘，为指标相加，《夏侯阳算经》引《时务》云："十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等。"可知当时确已有指数之概念，唐李淳风注《海岛》时，亦用其理论，惜《三等数》原书不传，吾人无法究其内容真相也[20]。

黄帝《数术》□卷

《五经算术》引黄帝《数术》，唐慧琳《一切经音义》屡引《黄帝数法》，《黄帝算法》，《黄帝九章算法》，诸如当为一书。

杨辉《详解九章·纂类》引《黄帝九章》古序云："国家尝设科取士，选《九章》以为算法之首，盖犹儒者之六经，医家之难素，兵法之孙子欤！"考明算始乎隋唐，按《后魏书》范绍、殷绍皆为算生博士，则不始隋。是此书亦固为南北朝之遗籍矣。

《算法》一卷

《隋志》著录，不题撰人。

按王砯注《内经·素问·灵兰秘典论》引《算书》曰："似有似无为忽。"

《婆罗门算法》三卷

《婆罗门阴阳算历》一卷

《婆罗门算经》三卷

《隋志》著录。

唐费长房《历代三宝记》云:"周天和四年己丑,《婆罗门天文》二十卷,达摩流支出。"则《隋志》著录之三婆罗门算书,亦当译于此时,纯为南北朝之著作,无庸疑义也。《开元释教录》:"《婆罗门天文》二十卷。今以非三藏教,故不存之。"书遂致失传,吾人不得而知其内容,雪泥鸿爪,徒供惋惜而已。杰按算书之翻译者,当以此数书为嚆矢,《日本国见在书目》尚著录有《婆罗门阴阳算历》一卷,可资考证[21]。

《元嘉算术》一卷

《日本国见在书目》著录。

宋何承天有《元嘉历》,见《宋书·律历志》[22]。

《五行算术》二卷

《日本国见在书目》著录。

《数术记遗》:"五行算,以生兼生,生变无穷。五行之法,水玄生数一,火赤生数二,木青生数三,金白生数四,土黄生数五。今为五行算,色别九枚,以五行色数相配,为算之位。假令九亿八千七百六十五万四千三百二十一者,则以白算配黄算为九亿,以青算配黄算为八千万。以赤算配黄算为七百万,以玄算配黄算为六十万,以一黄算为五万。以一白算为四千,以一青算为三百,以一赤算为二十,以一玄算为一。故曰以生兼生,生变无穷。"

杰按北周卫元嵩《元包经》述及五行算。

《黄钟算法》三十八卷 《算律吕法》一卷

《隋志》著录。

按《唐志》有《黄钟算法》四十卷,疑并此二书,益以目录一卷为之。今本《五经算术》卷下引黄钟术曰云云,未悉是否即为此书。

《九章六曹算经》一卷

《隋志》著录。

此书待考，《四库提要》称《隋书·经籍志》有《九章六曹算经》一卷，而无《五曹》之目，其《六曹》篇题亦不传。余疑今本《五曹》乃唐人所纂辑，已非甄鸾所注之旧，《五曹算经》今有钱二百三十八贯五百七十二文足，欲为九十二陌，问得几何？陌者陌钱也，谓不足以百，而当百数。《抱朴子》微旨，取人长钱，还人矩陌，即此之谓。考《旧唐书·食货志》："长庆元年九月，敕泉货之义，所贵流通。如闻比来用钱所在，除陌不一，与其禁人之必犯，未若从俗之所宜，交易往来，务令可守其内外。公私给用钱，从今以后，宜每贯一例，除垫八十，以九百二十文成贯，不得更有加除，及陌内欠少。"《五曹》之九十二陌与此制适合，显为唐人所窜入。又《夏侯阳算经》引田曹仓曹者二，引金曹者一，皆为今本所无，可见传本非全帙也。

《孙子算经》二卷

《隋志》著录。

余别有《孙子算经研究》一文，见《学艺》十六卷三期[23]。

附　注

《图书季刊》编辑部寄来严敦杰君《南北朝算学书志》，嘱为校补，兹就所知，另加附注，胪列于后，以备读者观览。

李俨识

① 参看严敦杰《中国算学家祖冲之及其圆周率之研究》，《学艺杂志》，二十五年六月，第十五卷第五号第三七至五零页，上海。

② 祖冲之造《缀术》，其子继之，其见于记载者，有下开各条。

《缀术》数十篇，祖冲之造。	（《南史》）
《缀术》六卷，□□撰。	（《隋书·经籍志》）
《缀术》六卷，□□撰。	（《日本国见在书目》）

《缀术》五卷，祖冲之撰，李淳风注。　（《旧唐书·经籍志》）
《缀术》五卷，祖冲之撰，李淳风释。　（《新唐书》）
《缀术》六卷，祖冲之撰。　（《通志略》）
《缀术》五卷，祖冲之撰。　（宋李籍《周髀算经音义》）
《缀术》□□，祖暅之。　（王孝通《上辑古算经表》）
《缀术》二卷，祖暅。　（沈括《梦溪笔谈》）

见李俨，《中算史论丛》(二)，第二七至二八页

（＊又见《中算史论丛》第二集第 22 页，本书第六卷。——编者）

③ 见唐释道宣《广私明集》卷之三，引梁孝绪，《七录》序，《四部丛刊》本《广弘明集》

《隋书》卷三十二《经籍志》序称："梁有秘书监任昉、殷钧《四部目录》，又《文德殿目录》。其术数之书，更为一部使奉朝请祖暅撰其名。故梁有五部目录。"事在梁武帝天监四年(公元 505 年)。参看刘汝霖，《东晋南北朝学术编年》，第三二二页，(上海，商务)"梁任昉，殷钧校秘书"条引：《梁书·任昉传》，《梁书·殷钧传》，《隋书·经籍志》，及阮孝绪《七录序》。

④ 《隋书·经籍志》称："《天文录》三十卷，梁奉朝请祖暅撰。""《漏刻经》一卷，祖暅撰。"而《旧唐书·经籍下》称："《天文录》三十卷，祖暅之撰。"此可为祖暅，祖暅之同属一人之证。

李淳风《乙巳占》卷一，天占第三，引："祖暅《天文录》占。"

⑤ 见《文选李善注》五十六引刘璠《梁典》。

陆倕字佐公，吴郡吴人。卒于普通七年(公元 526 年)，《梁书》有传。

⑥ 参看李俨《中国数学大纲》上册，第 43 页引文及注(＊见本书第三卷。——编者)。

⑦ 见北齐颜之推《颜氏家训》，卷下，《杂艺篇》第十九，光绪元年湖北崇文书局本卷下，第二十六页。

⑧ 《历代三宝记》，作："司隶大夫甄鸾。"

⑨ 甄鸾撰注《算经》，各书所载，互有详略，参看李俨，《印度历算与中国历算之关系》文内"5 甄鸾撰注《算经》"条，《学艺》杂志十，二十三年十二月，第十三卷第十号：第 535～555 页(＊见本书本卷第 112～146 页。——编者)。

⑩ 参看李俨《中国数学大纲》上册，第 51 页引文及注(＊1958 年版为第 74～75

页；又见本书第三卷第 83～84 页。——编者）。

⑪ 见《云笈七签》卷之一百七华阳隐居先生《本起录》，并参看《南史》七十六隐逸下《陶弘景传》，及《梁书·处士陶弘景传》。

陶弘景著书关于历算者尚有：

《天仪说要》一卷见《隋志》，及《七曜新旧术》二卷见《本起录》。

⑫ 《南史》称："张缵子伯绪，范阳方城人。尚（梁）武帝第四女富阳公主，太清二年（公元 548 年）徙授领军，俄改刺史，卒。"见《南史》卷五六，列传第四六，张弘策子缵。

⑬ 《东晋南北朝学术编年》，第四三六页记："梁主撰《金楼子》"在承圣二年癸酉（公元 553 年）。

《梁书·元帝纪》及《南史》之帝纪称："（梁主）与裴子野，刘显、萧子云，张缵，及当时才秀为布衣交。"

⑭ "庾曼倩字世华，新野人也。梁世祖在荆州，辟为主簿，迁中录事，转谘议参军。疏注《算经》，及《七曜历术》。"见唐姚思廉《梁书》卷五一列传第四五处士……庾诜。

⑮ 参载《隋书·律历志》中，"隋张宾上新历"条。

⑯ 又见《北史》卷八二列传第七〇儒林下，……刘焯。

⑰ 又见《隋书》卷七五列传第四〇，儒林……刘炫。

⑱ 关于东晋南北朝隋唐引述《周髀》，尚有下开数事。

（一） 虞喜，《安天论》引《周髀》。晋虞喜专心经传，兼览纤纬，因宣夜之说，著《安天论》，以难浑、盖。其说云："《周髀》之术，多是盖天。盖天虽与浑异，而星辰有常数。今陈氏见髀上冠周，因言周浑周髀宣夜，或人姓名，犹星家有甘石也。盖天之体转四方，地卑不动，天周其上，故云周髀。"《据东晋南北朝学术编年》引《晋书》卷九十一《儒林·虞喜传》，《宋书》二十三《天文志》一，《隋书》卷十九《天文》上，与《御览》二。

按明帝永昌三年（公元 325 年）征虞喜为博士，不至，成帝咸康元年（公元 325 年）喜与翟汤、郭翻，同被征，又不至。

（二） 周庐辩注《大戴礼记》引《周髀》。周庐辩注《大戴礼记》卷五引"《周髀》曰：方属地，圆属天，天圆地方也。"见《四部丛刊》影明刊本《大戴礼记》卷五第七页。据《周书·文帝纪》下及《薛寘传》：初宇文泰以汉魏官繁，思革前弊。大

统中，乃命苏绰、庐辩依《周礼》改创其事，又命薛寘共详定之，至是（太平元年，公元556年）撰次方毕，乃行之。”

（三） 隋虞世南《北堂书钞》引《周髀》。隋虞世南《北堂书钞》卷一百四十九天一“天象盖覆”条引《周髀》称：“天圆地方，盖以写天，天青黑为表，丹黄为里，故天象盖覆，中高四旁下也。”

（四） 唐李善注《文选》引《周髀》：“夫天不可阶而升。”

（五） 《华严经音义》四引《周髀》：“日益南晷益长”。

⑲ 又据《唐六典》卷二十一，广雅书局本第七页本文。

《旧唐书》卷四十四职官三志第二十四作：“其《记遗》、《三等》亦兼习之。”“三等”下遗一“数”字。《新唐书》卷四十八志第三十八百官志则于《周髀》下，多（五经算）三字。

关于三等之说，唐费长房《历代三宝记》（五九七）卷第十二，及《大唐内典录》卷五引隋刘凭《外内傍通比较数法序》称：“……华（一作东）夏数法，自有三等之差。”按刘凭，《法苑珠林》卷一百作刘凭同，《续高僧传》作刘冯。

是时以三等为华夏数法，四等为西方数法。四等者，据唐窥基《瑜伽师地论略纂》卷第二称：“西方有四种亿：一，十万为亿；二，百万为亿；三，千万为亿；四，万万为亿。”又：

南宋法云《翻译名义集》卷三数量篇第三十六称：“亿分四等，一以十万为亿，二以百万为亿，三以千万为亿，四以万万为亿。”见《四部丛刊》影宋刊本《翻译名义》集“梵语第三”第四八九页。

⑳ 《宋书·氐胡传》，北凉王沮渠茂虔奉献方物中有：《时务论》十二卷，时在宋武帝永初十四年（公元437年）。《夏侯阳算经》所引《时务》当即此《时务论》。

㉑ 参看李俨《中国算学史》第60页“婆罗门算法及聿斯经”条（＊见本书第一卷第412～413页。——编者）。

㉒ 何承天历算著作有：《宋元嘉历》二卷，《历术》一卷，《验日食法》三卷，《漏刻经》一卷。

㉓ 见严敦杰《孙子算经研究》，《学艺》杂志，二十六年七月，第十六卷第三号，第十五至三二页。

附 录

先父二三事

李柄权　李炳章

先父李俨从事中国数学史研究四十余年，不仅收集了大量珍贵的中国古算书，且著述甚丰。其中《中算史论丛》第一至第五集、《中国古代数学史料》以及《十三、十四世纪中国民间数学》、《中算家的内插法研究》等，都有很高的学术价值。

1963 年先父去世之后，由于历史条件限制，三十多年，这些著作未能再版。近几年来，中国科学院自然科学史研究所郭书春、刘钝先生和辽宁教育出版社俞晓群、王越男先生做了大量工作，先父的中算史著作终于得以再版，实为学术界的幸事，反映了我国的国运昌盛，百业兴旺，前景光明。

先父早年就读于唐山路矿学堂，因家境贫寒，1913 年未毕业即考入陇海铁路，半工半读，1919 年获得美国函授学校土木工程学位证书。在陇海铁路工作四十余年期间，为修筑我国第一条横亘东西的铁路干线，东起连云港，西至兰州、新疆，足迹遍及陇海及兰新铁路全线，难得有固定住所。在这种条件下，挤出时间，业余从事中算史研究，其困难可想而知。尤其是抗日战争结束前后，通货膨胀，工薪阶层难得温饱，学术著作乏人问津，稿酬之低，难以想象。

然而先父的中算史的研究工作并未因此而稍辍。

为追忆先父在公务最繁忙，生活最艰苦时期学术活动情景，摘录先父自1944年(日本投降前夕)至1950年(建国前后)部分笔记如下，以资纪念。

1944年

一月一日在吐鲁番，三日到鄯善，四日到哈密，九日到猩猩峡，十一日到玉门，十二日到酒泉，十七日到张掖，二十一日到武威，二十三日到兰州。

二月，由兰州回西安。

八月六日由西安沿西兰公路经乾县到邠县，七日到平凉，十二日到兰州，二十四日开始任西北公路管理局专员。

九月，整理《中算史论丛》第一、二辑寄渝独立出版社。

本月整理《中国算学史》。

十月，整理《中算史论丛》第三辑完毕。

十一月十日离兰州回西安。

本月抄毕《明清之际西算输入中国年表》修订稿上册。

十二月，《科学》廿七卷九、十二期发表《上古中算史》。

重庆《图书季刊》新五卷四期发表《抗战以来中算家论文目录，附二十八年来中算史论文目录补遗》。此文系与严敦杰合作。

1945年

一月，在西安整理中算史料二箱。

三月，离西安到邠县、平凉、华家岭。

四月，校毕《中算史论丛》(二)初次修订本稿。

重写《明清之际西算输入中国年表》初次修订本稿。

五月，抄完《中算家之圆锥曲线说》初稿。

1946年

一月，在郑州开始中牟工程。

二月，往来中牟、黑石关。

五月，往返洛阳、陕州、郑州。

七月，在郑州写梅文鼎、李善兰年谱补录。

八月，到潼关、西安。

八月二十日及二十七日南京《中央日报》《文史周刊》发表《梅文鼎年谱补录》一文。

1947年

一月二十三日交通部因抢修中牟、黑石关两便桥如期完成，颁发奖章。

本月往返西安、宝鸡、葡萄园。

四月，《科学》二十九卷四期发表《三十年来之中国算学史》及《中算家之圆锥曲线说》二文。

六月，《学艺》十七卷六期发表《李善兰年谱补录》一文。

本月，商务印书馆寄到今年二月出版之《中算史论丛》(四)二册。

往返西安、宝鸡、拓石各地，二十八日到郑州，本月写好《日算累圆术》。

七月，写完《日本算学史》初稿。

十月，《学艺》十七卷十号发表《日算累圆术》一文。

本月二十四日西北工学院聘为土木工程学系名誉讲座。

十一月，寄出《日算傍斜术》。

十二月，交通部派为陇海铁路管理局副总工程师，中国科学社聘为西安特约编辑。

1948年

二月，《学艺》十八卷二号发表《华衡芳年谱》。

五月，开始编《中算史论丛》(五)。

六月，编完《中算史论丛》(五)初稿。

本月十五日《学艺通讯》十五卷二期发表《最近十年来中算史论文目录》。

七月，在西安，开始编《平方零约术》。

八月，再校《近代中算著述记》。

九月，寄《元代回回历》一文与北平研究院。

1949 年

一月，写完《近代中算著述记校补》。

四月，开始整理《近代中算著述记》。

五月，在西安，十一日至十五日整理中算书籍。

五月二十日解放军入西安城。

十月，《科学》三十一卷十期发表《日算椭圆周术》一文。

1950 年

一月，到北京，铁道部联席会议。到北京图书馆，北大图书馆看书。

九月，西安国立西北大学数学系聘为兼任教授。

十月，被选为《中国数学学报》数学史编委。

十一月，《中国科学》一卷 2～4 期发表《中算家之平方零约术》。

十二月，抄完《西镜录》。

先父生活俭朴，不嗜烟酒，平易近人，毕生献身铁路建设和中算史料的收集、研究。从下面几件事可见一斑：

一、据先父记载："1929 年 11 月 1 日，在灵宝十号 *B* 洞测量被匪架去，幸下午放回。"当时家中得知这个消息后，全家惶惶。听说必须交巨额赎金，否则就要"撕票"，不知如何是好。但是晚上先父自己回家了。问起事情经过，先父说，为首的人检查了他随身携带

的物品和干粮，看到他腿上打的绑腿（便于长途跋涉和预防蛇咬），告诉先父：你不是有钱人，回家吧。于是"绑票"事件化为一场虚惊。1929 年前后，河南、陕西一带军阀混战，盗匪横行。先父长期从事野外工作，从未遭抢劫。上述惟一的一次，也是有惊无险，这和先父一贯生活俭朴，能够吃苦耐劳是分不开的。

二、先父早年从事野外工作，曾发现大量出土文物，一概无偿移交给当地有关部门。为此 1934 年被国立北平研究院和陕西省政府组成的陕西考古会聘为名誉顾问，1937 年被河南博物馆聘为特约专门委员。对于散落民间的中算史料，则不遗余力，不惜代价，多方搜求，精心收藏。从 1917 年到 1942 年，25 年内共收集中算史料十二箱，其中残本四十五册赠与浙大。1949 年 5 月 20 日西安解放。解放前夕，西安已是无政府状态，十分混乱。然而根据先父记载："五月在西安，十一日至十五日整理中算书箱。"可见中算史料的保管，对先父来说，任何时候都是至关重要的大事。先父去世后，我们已把他的珍贵藏书全部捐赠给国家，成为公众的文化财富。

三、先父不善交际，但在学术研究方面和海内外学人书信往返，过从甚密。如抗日战争以前和日本的小仓金之助先生，1939 年以前和年轻的中算史研究家章用先生（可惜英年早逝，先父曾于 1940 年写"章用君修治中算史遗事"一文，以作纪念），1944 年前后和严敦杰先生（直到 1949 年才在上海与严敦杰会面，1955 年以后经先父推荐，调到中国自然科学史研究室），都是虽未谋面，却有大量书信往返，可算是君子之交。对一些有志进取的年轻人，也是关怀备至。记得 1940 年前后我看到一些寄给先父的信中称先父为恩师，我问为何如此称呼。先父说："这是李仪祉（陕西省的著名水利专家）介绍给我的。他家境贫寒，上不起学，我帮他上大学。"以后此人西北大学数学系毕业，在兰州某大学任教，后来已是教授了。

父亲永远活在我们心中

钱克仁　钱　炜　钱　熙
钱　煦　钱　燕　钱　燧　钱　灿

《李钱全集》将行世，
往事如烟记尚亲。
将母教儿生计累，
育才为学入诗新。
扬长移席专攻史，
汲古传薪总率真。
头白而今温父训：
“衰年未许作闲人。”

在敬爱的父亲钱宝琮先生105周年诞辰即将到来之际，中国科学院自然科学史研究所的郭书春先生以《李俨钱宝琮科学史全集》即将编竣的好消息见告，作为子女的我们既喜且感。父亲虽然离开我们已有23年了，但在我们脑海中，他老人家的形象，依然那么高大；音容笑貌，依然那样亲切。他的一生，爱国、正直、光明磊落，对事业执著追求，对困难积极乐观，待人接物谦逊真诚。他几十年如一日，学而不厌，诲人不倦。所有这些，永远是我们学习的榜样。

最近重读《钱宝琮诗词》及父亲生前友好、学生等收到诗集的一些来信，想到他一生的所言所行，我们心潮起伏，思绪万端，难能自已，乃将有关材料，整理成篇，聊寄对父亲思念之情。

父亲早年在浙大教过的学生、现在的中国科学院院士北京大学程民德教授信中说："令尊诗集收到，阅后觉得非常珍贵，不仅在科学、文艺、历史上有极为珍贵的价值，而且钱师一生豁达开阔的胸怀和爱憎分明、忧国忧民的情操跃然纸上。钱师的道德文章，足为后世仰慕学习的典范。这方面的深远影响，更是难以估量的了。"

1952 年浙大化工系毕业的抚顺师院汪家华教授说："钱老的诗集我已读了一部分，引起我对作诗、为人、处世以及学文、学理诸多问题的思索。每当开卷都肃然起敬。这本书可说是我度过余年的指导书之一。"

北师大数学系赵慈庚教授说："玩味几篇，觉得这位治学严谨的科学家，胸怀十分豁达，让人景仰。这书是给'向钱看'的雪原送的红炭。星星之火，纵不能化尽坚冰，终归是浇灌社会的春风。我正在读《算经十书》中的《周髀》，钱先生的校勘，俱见他精通群籍，功力深厚，不是泛泛的操觚之作。可惜我年老力衰，且切磋无人，殊以为苦，读先生诗，给自己增加了不少勇气。"

浙师大中文系张叶家教授说："尊父为中国数学史大家，今拜读诗集，始知亦为卓然特出之诗人。其诗之特色，缪师论之已详，我何敢再赞一辞。古代天文历律算数考工之学，能通其一者，足可为名家，今不仅通其全，竟吟咏发为歌诗，非大才大智大手笔者谁敢为之，谁能为之！"

业余天文研究者 82 岁高龄的天津唐如川先生说："承惠琢老诗词专集，令我感慨万千。先生诗词造诣精深，特为天文历算所掩

耳。斯集肇始乙亥(1935年),讫至庚子(1960年),当系先生所自定。集中包涵之26年,正炎黄子孙由危亡转为复兴最为险峨之时。先生当山河破碎之际,发‘义不帝秦’之决心,奉母携眷,流离迁徙,历尽艰辛,掬其所学,播教后世,为百年建国、培育英才,草屋白饭,不改其乐。于授业著书之余,发为吟咏,意气风发,盖对民族前途有十足之信心也。”

就是这位唐如川老先生,早在1957年为他论文事就和我们父亲有过几次书信来往。他在1991年出版的金祖孟著的《中国古宇宙论》一书的代序《缅怀钱宝琮先生》中详细追叙了他的两篇和钱先生观点截然相反的文稿终获发表的经过,深深表达了他的钦仰之情。他在代序的后半部说,二文之所以被采用“主要是由于有钱先生这样一位学识宏博、胸怀宽广而又能坚持百家争鸣的前辈”的肯定。“他既没有把自己的观点看成不容讨论的禁区,也决不会把观点不同于己的文章看成是‘翻案文章’。”

父亲一生光明磊落、坚持实事求是,从不看风使舵,说违心话,总是根据实际发表自己的意见,即使冒犯领导,自己大倒其霉,也从不“悔改”。而事后证明,他的许多看法常常是正确的。

那是五十年代初期,全国上下一边倒,倒向苏联,教育界几乎全盘苏化。对此,父亲思想是不通的。他当时尚在浙大教微积分课。一次,领导让他参加一个谈苏联教材优越性的座谈会。会议开始不久,主席请他谈谈。父亲显得有些激动,把平日的一些想法,如实倒了出来。他说:“正和欧美教材有其优点和缺点一样,苏联教材也有它的优缺点。现在把苏联教材捧上了天,似乎好得不能再好,把欧美教材踩下了地,坏得一无是处。这种不加分析的态度,我就不赞成。”然后,他列举了苏联一本微积分教材的几个缺点,接着说:“该书作者教龄不过15年,而我教了30年,为什么我就没资格批评

他？为什么我的30年就一定不如他的15年？”这个发言完全出乎会议主持者意料之外，一时竟无辞以对。1952年，在思想改造运动中，父亲因此受到了批判。直到几年后，苏联国内也批评了那本教材的问题，是非方得判明。父亲为人正直，有胆有识，于此可见一斑。

为学习苏联，当时教育部还明文规定，从中学到大学，每节课从原来的50分钟改为45分钟。校领导传达时，还讲上课少说些废话不会影响教学质量等等。父亲听了也很反感，他说：“我上课从来不讲废话，改为45分钟，就是打了9折，学生受损失太大！”“没有废话”固然说得有些绝对，但那种一律照搬的盲目做法，委实不得人心。党的十一届三中全会以后，把每节课又改回到50分钟。事情虽小，也体现了从根本上“拨乱反正”的一个侧面。

1970年，林彪一号通令之后，驻哲学社会科学部的宣传队领导动员所有研究人员去河南信阳五七干校改造。当时，无论思想通与不通，都得报名，以示拥护，唯独父亲纹丝不动。尽管有些同志怕他再次挨批，劝他报名，父亲感谢他们的好意，名却始终未报。他说：“我年近八十，生活尚难自理，报名岂非徒具形式，还是讲一点实际好。”父亲遇事就是这样耿直，无所畏惧。

父亲热爱祖国，年轻时就爱读史书，很为我国历史上有许多伟大的科学家而自豪。虽然在英国学的是土木工程，回国后教的是数学，但在业余时间却多半从事科学史的研究。早在二十年代初至三十年代，就发表了20多篇论文。1956年，经中国科学院副院长竺可桢先生推荐，从浙大调至北京中国科学院中国自然科学史研究室（现改为自然科学史研究所），专攻数学史，更是如鱼得水，全力以赴，成绩卓著。

父亲热爱他的专业，事业心极强，即使在被作为“反动学术权

威”批斗之后，犹念念不忘数学史的研究。当时天天上班受“审查”，写“交代”、“请罪”，没完没了。他忧心忡忡，在家不止一次地说：“我个人被批斗是小事，大家整天搞运动，不搞研究，长此下去，怎么得了？”

1970 年元旦，父亲被“疏散”至苏州长子处。他为没有图书资料，无法从事研究而苦闷万分，经常叹息说：“不能研究学问，活着有什么意思！”1971 年 5 月卧床不起后，我们住在外地的姐妹每次去苏州看望他时，他在谈话中流露出最关心的问题仍然不是个人的得失，而是数学史研究的被迫中断。他痛惜时间的流逝，更为祖国科学史料得不到发掘和客观论证而忧心如焚。记得有一次，父亲说，想来想去，还有关于《墨经》的 9 个题目要写，不能再等回北京了，只要能起床，就要设法动笔。写出来哪怕供批判，只采用其中一两条，也是高兴的。当学中文的老四夫妇向父亲建议代为笔录时，他连连摇头说：“做学问不亲自动手，怎么行呢？”

父亲一向乐观，像十年浩劫中那样的忧虑是少有的。记得抗日战争时期，我们一家十口，随浙大辗转西迁，全赖父亲一人工资（只拿战前的 6 折）度日，生活十分拮据。但父亲从不叫苦，坚信抗战必胜，前途光明，总是乐呵呵地教育我们向前看。那时我家粗菜淡饭，仅能充饥，而父亲仍然努力教学、潜心学问，以苦为乐。我们以红薯当早饭，因有父亲带头，吃得很香。父亲去离湄潭 20 公里的永兴场一年级分部任教后每两周回家一次。因无交通工具，只能靠两条腿走路。人家抱怨走路既累又费时，已 50 开外的父亲却说：“走路，特别是走山路，是运动，是意志锻炼，更是一种乐趣。”还写下了好几首诗。这是多么崇高的精神境界啊！在艰苦的环境中，父亲不忘学术研究，不忘写诗。1942 年，物理学会举办牛顿诞生三百周年纪念会时，他发表了新作《牛顿天体力学赞》。1945 年写了《论二十八宿

的来历》,脱稿后又写了一首五言古诗。1943年,苏步青教授写《水调歌头》祝贺父亲在浙大教学15周年,其中"何物伴公久?布履读书灯"两句,正是他艰苦教学生活的写照。

父亲教学认真,给理工学院一年级学生讲授微积分课程,效果显著。正如程民德院士所说,"钱师积累了丰富的经验,他的讲课受到普遍的欢迎。"(见《浙大校友》93上)

现定居美国的张粲先生(1944年化工系毕业)在《青岩怀旧录》中说:"钱师第一课先在黑板上写出自己姓名,自行介绍,继而写'疑'、'难'两字,中间空一些,再在两字前分别填上'质'、'问'二字,四字并读,即为'质疑问难',开宗明义说了大学教学之本质,使我辈后生小子了解大学之'大',与中学截然不同之处。"(见《天涯赤子情》)

上海的严昫先生(1947电机系毕业)在《缅怀敬爱的钱宝琮老师》中说:"钱师给我们上的第一堂课就给我留下深刻难忘的印象。他详尽地为我们讲述了我国古代数学的光辉成就,鼓励我们勤奋学习。他说古人把知识叫做学问,意在强调学习课程中要不断地'问'。因为一个问题的提出,就是新进步的开始;一个问题的解决,就在求知的道路上前进了一步。"(见《浙大校友》92上)

40年代浙大工学院毕业的陶作民先生在《峥嵘生活回忆》中说:"在加强基础教育方面,记得在浙大一年级时任课的老师大多是第一流的教授或拔尖的讲师。例如我们工学院的微积分是知名的数学史家钱宝琮教授讲的。当时一年级每隔三五天有一次考试,都是从难从严的。"(见《浙江大学在遵义》)

因为父亲教学有方,对学生又很关心,所以学生时隔几十年还常惦记着他老人家。现在台湾的1943年土木系毕业的沈紫峰先生深情地回忆道:"我们到贵州青岩后,上课时已是1940年2月9

日，领略到钱师讲解清晰，条理分明，见解透彻。如遇同学提出问题，钱师立刻说出在教本某页某题，比著书者还要熟悉。当年7月间校方选张刚学长(1943级机械系，在台)及我参加全国大学微积分组学业竞试。因开学迟，课程尚未教完，钱师就替我们两人作恶性补习，将所有的本领全都授其徒弟。事隔年余，忽然有一天会计组通知我去领款，我奇怪了，原来是学生竞试获名次，教育部颁发的奖金，这不是钱师所赐的吗?”(见《天涯赤子情·终生难忘的老师》)这次浙大百年校庆期间，一位四川泸州来的1946级化工系毕业的校友龚炯照高工在团聚会上走过来看我，说父亲曾教过他，并说他们那里不少70多岁的老高工都说他们对钱师很有感情，很怀念这位德高望重的老师。

父亲对学生有表扬有批评，毫不含糊，批评时偶尔措词比较尖锐。“但学生们都能体会他的良苦用心，他的严厉决不是为了自己，而正是为了学生的将来。”(引自《钱宝琮科学史论文选集》苏步青教授“序”)

父亲育才意识很强。尽管各种条件所限，和我们下面五个姐妹接触较少，但他始终把教育我们成才挂在心上。一有机会，就给予教育和帮助。记得1937年初冬，全家跟浙大刚从杭州到达建德，住在两间破旧民房里。一天清晨，我们被冻醒，只觉眼前很亮，原来夜里下大雪，父亲正在窗前吟诗。他忽然向我们发问：“谁能用少量的词句描绘出眼前的雪景?”老五脱口而出：“四顾茫然，不辨东西。”父亲问她从哪儿学来的，她说从小学第6册语文课本上背下来的。父亲微笑着点了点头，表示赞许。这对她后来的语文学习起了很大的推动作用。

不久，浙大迁江西吉安，我家因人口过多，行动不便，跟苏步青教授家属迁到建德农村暂住。开春后，老大从江西来接全家去长

沙。父亲让他带来一作文题《从建德到长沙》，要我们写好寄给他批改，这对我们是一次有益的作文训练。到长沙后，因为无条件升学，父亲叫我们边学做家务边复习。暑假，父亲回家探亲，看到我们都认真照他话做了，进步不小，非常高兴。特地上街买汗衫分给我们每人一件作为奖励。我们的衣着和学习用品，一向由母亲操办，这次父亲亲自购买，亲手赠送汗衫，足见他对我们学习成长的重视。

父亲一向提倡动脑筋，反对思想懒汉。他说，我最不爱听"伤脑筋"三字。"脑筋"生来就是要"伤"的，难道能饱食终日、无所用心吗?所以不论学习、娱乐，只要发现我们有不动脑筋、华而不实的倾向，就会及时严肃指出，教育改正。

1940年，老四读浙大附中高一时，由于学习尚可，班主任对她有些偏爱，操行评语每多溢美之词。当她拿到"大智若愚"的评语相当得意地拿给父亲看时，父亲不动声色，自言自语道："'若愚'不见得，'大智'更不见得!"这对不肯刻苦钻研、专爱卖弄小聪明的老四，不啻当头一棒。她从此清醒起来，逐渐去掉了一些盲目性。

1945年，老三在湄潭读浙大生物系时，曾因家务负担过重导致学习成绩下降而气馁，甚至丧失了继续学习的信心。父亲知道后，竟破例给她写了封信，鼓励她重整旗鼓，坚持学习，争取学好，使她深为感动。经过艰苦努力，终于圆满完成了大学学习任务，学到了真本领。后来，她常常和人谈起这事，说幸有父亲及时教育，使她增强了战胜困难的意志和毅力，受用一生。

老五在读初中时，曾因数学题太多太难困惑，父亲在家时看到了，就和蔼地为她分析讲解，使她豁然贯通。后来父亲把她和两个姐姐的晚自习情况写进了诗。老五说，父亲诗集中，《煨红薯》中的最后一首她倍感亲切。每次读后，当年在桐油灯盏下的苦读情景又清晰地浮现在眼前，又好像看到了父亲慈祥的目光，感到无比幸

福。

父亲的教诲是深刻的。他总是站得高，看得远。如向考入浙大理工科的老三和老七就曾提出过非常重要的学习指导意见。特别是老七，是在 1949 年解放不久考入浙大药物系的。当时一律废英语学俄语。父亲对她说：英美帝国主义应该打倒，但英语却决不能丢，它是将来搞工作、科研的必要工具，必须好好自学。老七照父亲的话做了，后来她在抚顺煤炭科学研究所有所建树，全靠父亲当年的指点。最小的妹妹老八是解放后进入浙大附中高一的。1950 年时正读高二，她积极响应高中学生参加土改的号召到衢州农村工作。临行，父亲对她说，参加土改是对的，但国家百废待兴，将需要大量建设人才，今后你还是可能上大学的，工作之余，功课可不能丢。果然，1953 年，中国人民大学办起来了。她服从分配，作为调干生进了人民大学贸易统计系。因为学习好，后来工作也较出色。这些事例都充分说明父亲的远见卓识，非同一般。

1963 年秋，老三出差北京，特回家探亲。当时双亲已届 71 高龄，虽尚清健，但毕竟老了，很为他们年迈无晚辈照顾而担忧。父亲却安慰她说："中科院领导曾主动问我要不要从外地调一个子女来身边，我说组织上已对我的工作、生活很多照顾，虽然 7 个子女都不在身边*，但五个大的在南京、苏州和杭州大中学校任教，都是老教师，不便调动，两个小的各在哈尔滨和抚顺，东北建设需要人，也不必调她们来京。你们只管放心好了。"她听了极为感动，后来，在哈尔滨的老八有调京的机会，商调单位也已落实，只需父亲写个书面申请，签个字，办个手续，就可调成。父亲就是不愿写，还婉言劝老八安心在东北工作。他老人家这种识大体、顾大局，小我服从

* 钱先生育 8 个子女，其中一子夭折。——编者。

大我的精神，也是感人至深的。

父亲学识渊博，作风平易近人，深受广大师生爱戴。即使已成了我国知名的数学史专家，也毫无架子；相反，变得更加谦虚了。

十年动乱时期，老四一家下放到淮安农村，不久，分到公社中学任教。有一位数学老师是1963年江苏师院（今苏州大学）毕业生，当他从校长处知道老四父亲就是钱宝琮教授时，就给她讲了毕业前夕聆听钱老数学史讲座的感受。他说："那次讲座内容丰富生动，闻所未闻，大开眼界。没想到钱老先生结尾却讲了'草草不恭，敬请批评'八个字，顿时掌声雷动，听者无不肃然起敬。这就是虚怀若谷的真正学者的风度！"事隔10多年了，这位老师还牢记父亲当时的话语，说明父亲对他教育的深刻。

现在，我们兄姐妹7人都已步入晚年（老八退休已近10年，老大则已82岁高龄），尽管精力都远不如前，但当我们回忆起父亲光辉的一生和对我们的教导时，总是激动不已。我们一致认为，只有用自己的特长，为社会主义精神文明建设贡献余热，才是对父亲在天之灵的最好安慰。

最后，《李钱全集》的出版，还得感谢中国科学院自然科学史研究所和辽宁教育出版社的无私奉献精神。《李钱全集》的出版对我国乃至世界科技史的研究，其学术价值是难以估计的。当今出版界普遍遵循经济效益第一的原则，为了钱，争着出畅销书，学术著作出版之难已成痼疾。像《李钱全集》这样大部头的著作，读者面比一般科学著作还要窄，印数必然有限，而排版的困难却超过一般书籍多少倍。印这种书，出版社必然大赔其本。但辽宁教育出版社的俞晓群先生毅然拍板承印，如果没有远见卓识和为了科学事业敢为天下先的勇气是决不可能的。王越男同志担任具体编务，任劳任

怨，精益求精，这种执著的敬业精神正是今天需要大力发扬的。应该说，在金钱至上的浊流中，辽宁教育出版社这一创举，无疑是一股喷涌的清泉。出版界如能起而仿效，上述的流行病就清除有望了。再说，《李钱全集》的跨度足有半个世纪，而材料散见各种书刊，搜集之难，也远非一般编集工作可比。而中国科学院自然科学史研究所的杜石然、郭书春和刘钝三位先生，不辞辛劳组织有关同志搜辑材料，辨证整理，又多方联系出版事宜，使功德圆满，这种为学术著作而默默奉献的精神也是我们学习的榜样。让我们再次向上述两个单位的有关同志表示深切的谢意，并衷心希望这种精神能在学术界发扬光大。行文至此，我们不禁高呼：敬业精神万岁！

（钱煦执笔　脱稿之日适为父亲105周年诞辰）

李俨先生传(1882～1963)

杜　石　然

李俨，福建省福州市人。他早年曾就读于唐山路矿学堂，1913年考入陇海铁路局工作，历任工务员、测量员、工程师、副总工程师等职务，前后长达40余年，为中国的铁路建设、特别是陇海铁路的建设作出了重大贡献。从本世纪一十年代起，李俨即利用他在铁路工作之余，开展了中国数学史的研究工作，数十年如一日，共发表论文百余篇，专著20余种。他是中国数学史研究领域内的学科奠基人之一、一级研究员，1955年当选为中国科学院哲学社会科学部学部委员，1957年中国科学院中国自然科学史研究室成立，李俨出任为研究室主任，直至逝世。他还是全国人民代表大会代表。

一、青少年时代和铁路工程师工作

李俨(原名禄骥，改名后则曾以禄骥为字，后又改字为乐知)，原籍福建闽侯，清光绪十八年七月一日(1892年8月22日)诞生于福州城内旗下街。据李俨自传所述："旗下街原系满清时代八旗旗民驻居之地，满清末叶旗民将其租与当地贫民，所以旗下街是当时贫民居住的地方。"李俨的父亲，1890年曾考中过科举考试制度

下的举人，后被分发至江苏吴县长期候补而从未补实。李俨自幼和母亲一起，留在原籍，生活比较清苦。

自1904年起，李俨进入福州三牧坊学堂读书，并于1912年考入唐山路矿学堂土木工程科学习，与后来著名的桥梁学专家茅以升同班。此学堂即为后来的唐山工学院、唐山铁道学院，迁校至四川后，又改名为西南交通大学。关于自己的青少年时代，李俨曾自述道：当时是“时在鸦片战争（1840年）之后，又是日清战争（1892～1894）、义和团战争（1900年）的前夜，中国的政治经济以及国际地位都起了剧烈的变化。同时，鸦片战争虽然失败了，主持人林则徐却是福州闽侯人，所以当地民众无论老幼都首先感到帝国主义国家对于中国压迫之严重。我个人家庭是无田无地，我父亲1890年在科举制度时期中了‘举人’，因为家贫提早分发到江苏苏州（吴县）去作候补知县，一直作了十余年。所谓候补知县，是没有实缺，仅仅一年半载靠着出一、两次差，得些差费来维持生活。我父亲流浪在外，我小时随母亲在原籍过穷苦的生活。当时深切感到中国旧封建制度的没落和西洋资本主义的隆兴。只觉得每人需要学习新知识，方可生存。同时义和团之后，满清政府亦感到不变法无以自存，决定废科举兴学校。我个人则于1904～1906年和1906～1910年在福州城内三牧坊读完当时的初高级中学校，再考到唐山路矿学堂学习土木工程。”

1913年，因父亲突然病故，家境更加困苦，已无力再继续在唐山路矿学堂学习。这一年的秋天（10月21日），李俨考入当时的陇秦豫海铁路局（即陇海铁路局前身）作工务员。虽然离开了学校，但是他仍以惊人的毅力长年自学不辍。通过自修，不断地提高他自己各方面的能力。据李俨自述，在陇海铁路，他一面工作，一面“自修过法文以及英美函授学校的土木工程和建筑学”。

自1913年起，直至1955年，李俨连续在陇海铁路局工作长达四十余年。开始时，是在郑州(1913～1919)、徐州、海州(1919～1921)等地作工务员、测量员。当陇海铁路进行开凿硖石驿1760米大隧道工程时，李俨参考了英、法、德、日等各国的技术资料，精心测量，如期完成了工程任务，受到路局的表扬和施工员工的爱戴。多年以后，他还不止一次地谈到这项工程。此隧道在当时是采取两端同时开凿，最后在洞中接通的方法来施工的。在数十年后的今天，这或许算不上困难。但在施工当时，就我国已有的技术水平而言，应该说仍是一项技术要求较高的项目。在施工过程中，最忌"插不上袖子"。在我国北方，人们在冬季天寒时常将左手插入右袖管、同时将右手也插入左袖管，从而使两袖接通成为一体。而"插不上袖子"是指因测量失误，使两端同时开凿的隧道不是凿通，而是错位而过。由于李俨的精心测量，使两端开凿的隧道方向准确无误，避免了"插不上袖子"的情况。当1760米的隧道顺利地在山中地下凿通时，施工现场的人员兴奋异常，把李俨高高举起，抛向空中。一位当时尚属年青的的工程技术人员，在顺利完成如此艰巨的工程之后的欣喜心情，是可以理解的。1921年李俨晋升为工程副段长(1921～1924年，观音堂、陕石)、工程段长(1924～1932年，灵宝、阕乡)、工程总段长(1932～1933年，韶关[粤汉铁路]；1933～1935年，潼关、西安)、正工程师工程总段长(1935年，西安)、副总工程师工务科长、工程处副处长(1935～1955年，西安、宝鸡、天水、兰州)等职务。李俨为中国的铁道建设，尤其是陇海铁路的建设，贡献出大半生的心血。

二、中国数学史的研究工作

除铁路建设之外，另一项李俨毕生所从事的研究工作乃是关于中国数学史的研究。他开始从事这项研究的时间，大约是和他考入陇海铁路的时间相近。关于开展中算史研究的动机以及前前后后的经过，李俨曾自述说："1912 年全国革命，我父亲退休回家，于 1913 年卒去。母老家贫，无款供我读书，此时陇海铁路招工务员，我即考入。这时是借法国款兴筑铁路，一切都由法国资本家掌握，中国人无由过问。可是我个人第一以为我家贫失学谋生，以后总得多方充实学业；第二，我看过一篇日本人说述中国算学的论文，我十分感动和惭愧。以为现在中国人如此不肖，本国科学(特别是算学)的成就，自己都不知道，还让他们去说，因立志同时要修治中算史。……个人只想为上述'第一''第二'两事而努力。我在陇海路曾以较短时间自修过法文以及英美函授学校的土木工程和建筑学；一面为着中算史多读些中外古今的书籍。"

大约也正是在这一时期，即当李俨开始他的中国数学史研究后不久，便发生了他曾多次与著名的数学史家 D. E. 史密斯(David Eugene Smith，1860～1944，美国)相互通信的事。现在美国哥伦比亚大学珍本与手稿本图书馆的"史密斯文库"中，仍然保存有"李一史密斯通信"共 11 封。通信的中心内容，是协商共同编写一部"中国数学史"并用英文发表的事。但是经过多次讨论，此事似乎进行的并不顺利。然而各方面的资料都表明，李俨曾为此进行了许多工作，并为此提供了最初的书稿或者是书稿的纲要。

1919～1920 年李俨所发表的《中国数学源流考略》(载《北大月刊》第 1 卷 4 号、5 号[1919 年]、6 号[1920 年])一文，正是为上

述合作而提供的书稿。这一书稿的最初命名，正是"中国数学史"，完稿时间大概是1916年12月。第二年又加修定改名为"中国数学大势"，最后发表时又改为"源流考略"。

"源流考略"要算是李俨发表的第二篇论文。他的第一篇论文《中国算学史余录》，发表于1917年(载《科学》杂志，第3卷第2期)。《考略》和《余录》，不仅是李俨个人的，同时也是本世纪中国数学史研究的最早期的论著之一。自这时起，直至逝世，他数十年如一日，持续不断地进行了中国数学史方面的研究。在逝世前不久，他曾自编了生平著述目录。按此统计，李俨一生共发表了论文百余篇，专著二十余部。他以自己毕生的研究工作证明了：他是我国中国数学史研究领域内当之无愧的学科奠基人。

本世纪20年代至30年代，是李俨进行中国数学史研究的高峰时期，曾发表研究论文多种。这些论文，经多次修订，由李俨自编为《中算史论丛》(一)～(四)集，由商务印书馆出版，其出版时间分别为1933年、1935年、1935年、1947年。到了50年代，李俨又对《论丛》进行了增删和调整，重新编成《中算史论丛》1～5集，由科学出版社出版(1954～1955)。

《中算史论丛》比较集中地反映了李俨在中国数学史研究工作中的各方面成果。各集的主要内容如下(以下的叙述主要是参考了李俨自编的著作目录)。

第一集的内容为：中国古代数学家各项成就的集录。其中包括中国古代数学中的分数论、毕达哥拉斯定理(勾股定理)研究、平方零约术(开方不尽根的表示方法)、大衍术一术(同余式研究)、纵横图(幻方)、巴斯加三角(贾宪三角，二项展开式系数表)、方程论、级数论各篇。此集书前，列有《中国数学史绪言)一篇，则是对中国古代数学的综述。

第二集的内容为：就中国各时代的算书加以集录和整理，论述了至50年代为止所发现的数学史资料，还有明代算书志、清代中算著述集录等等。

第三集的内容为：明清时期传入的西方数学以及中国数学家关于对数、三角术、割圆术、圆锥曲线等方面的研究。此集书前还有《中国的数理》一文，也是对中国数学的综合叙述。第三集末尾还附有《梅文鼎年谱》一文。梅文鼎是清代初期的数学家。

第四集的内容为：筹算和珠算，对唐、宋、元、明、清历代的数学教育史，作有系统的研究和论述。对金元时代数学家李冶所著《测圆海镜》(1248年)一书，作了详细的注释。此集末尾附有清末数学家李善兰、华蘅芳二人的年谱。

第五集内容为：上古数学史及唐代数学史的综述，对中国与印度、阿拉伯、朝鲜、日本等国家和地区的数学文化的相互交流等有较集中的叙述。内容还包括了中国数学史研究的历史、清代数学论著目录、三十七年来中算史论文目录(至1948年10月止)等等。

如上所述，《中算史论丛》1—5集集中了李俨毕生所发表的论文，代表性的论文大都经他自编，收入《论丛》。

李俨所著关于中国数学史方面的专门性著作，可以《中国算学史》(商务印书馆，1937年)、《中国数学大纲》为代表。《中国数学大纲》一书的上册，是商务印书馆于1931年出版的；1958年，除对上册进行了修订外，还出版了下册，使全书出齐(科学出版社)。《中国算学史》和《中国数学大纲》二书，都是按时代先后顺序编写的编年体的中国数学史著作。特别是《中国算学史》一书，在国内(包括港台地区)曾经多次印刷，流传颇广，影响较大。此书在40年代还被译成日文出版(东京生活社，1940年)，译者为岛本一男、薮内清。

三、学术思想和学术活动

李俨的学术思想和学术活动，有着他自己所独具的一些特点。首先，对自己已发表的著作不断进行修改和补充，就是颇具特色的。例如《近代中算著述记》一文，1928年初稿，1937年再编，1940年再校，1953年三校，直至逝世前不久他仍念念不忘地进行四校。从发表的单篇论文，到编入《论丛》，再对《论丛》进行增补调整，一般说来每篇文章大都要进行反复加工增订达四、五次之多。如果把这许多次的重复均仅作为一次来进行统计，他毕生发表出版的文字当在二、三百万字之间。如果把反复增改的工作都重复计算在内，则总的工作量可能超过千万字。而且还应考虑到：他的这些研究工作又大都是在千里铁路建筑工地上，在繁忙的施工之余，利用业余的时间，一点一滴完成的。这种锲而不舍数十年如一日的精神，实在令人敬佩。李俨在生前经常谈起，他曾随身携带几十箱古算书，来往奔波于陇海路各建筑工地，许多论著大多是在如豆大的油灯下写作完成的。他经常以此来激励后生学子。

其次，李俨以他所掌握的现代数学知识为基础，对中国古代的数学成就进行研究和整理，从而开创了中国数学史研究的新局面。同时他又承继了中国古代史学研究，尤其是清代乾嘉学派严密考证的学风和方法，言必有征，无征不信。李俨主张“研治学术，首重图书”、“编录史事，首重资料”、“中算史料，汗牛充栋，势须分类集中整理考订”。他的论著总是以资料的翔实丰富著称。至于对各种问题的论断，则多是引而不发，引导读者去作出自己的判断，从而使这些论著形成了他自己的另一特色。

此外，李俨还以毕生精力搜求中国古代数学典籍。时常利用工

余假期外出访书，还利用在报刊上刊登征购启事等方法征求书籍。利用各种机会，从国内外著名图书馆和各种藏书机构拍摄、抄写各种古算书和有关资料。李俨藏书中，有为数不少的稀世珍本。自1920年起，曾多次将自己的藏书目录公之于众。并于1934年（在陕西省立第一图书馆）、1956年（在北京师范大学）举办个人藏书展览。在本世纪前半叶，国际、国内战乱频仍情况下，搜集并保存了一批珍贵典籍，而且尽可能地供献给其他人共同使用，这确实是十分难得的。在当初，和李俨几乎同时，还曾有几家同时收藏古算书者，但逃过战火劫难并坚持到底的，只剩李俨一家。因此其藏书弥足珍贵。李俨逝世后，经家属捐赠，全部藏书现收藏于中国科学院自然科学史研究所，为国内外专家所利用。

在中国数学史的研究工作中，李俨与国内外的同行、学者有许多联系，李俨学术活动的影响是世界性的。

前此已述，李俨和史密斯的通信表明，自从他开始进行中国数学史研究之日起，他就十分重视国际间的学术交流活动。李俨与日本数学家的联系，开始于20年代；他与三上义夫（1875～1950）的交往大约开始于1920年。1928年第三次泛太平洋学术会议上，三上义夫在报告中曾对李俨的研究成果进行评价。与小仓金之助（1885～1962）的交往则开始于1930年。1962年，当小仓金之助逝世时，李俨曾去函悼念，称小仓为老友。李俨所著《中国算学史》的日译本译者之一薮内清（1906～ ），在50年代，二人通过通信，互赠资料，进行交流，薮内清是当今世界上著名的中国科学史家，与李约瑟（J. Needham，英，1900～1995）齐名。

李俨以他在中国数学史研究方面的杰出贡献，曾获前苏联科学院颁发的欧拉纪念奖牌。他与俄罗斯数学史家尤什凯维奇（A. П. Юшкевич）亦有多次交往。

1956年9月，李俨随以当时中国科学院副院长竺可桢为团长的中国科学史代表团出席在意大利召开的第八届国际科学史学术会议。在会上，他与英国著名的科学史家李约瑟相识，合影照片现仍珍藏于家属手中。

李俨对国内外的后学，也是尽其所能给予鼓励和提携的。1958年，本文作者（当时是他指导的研究生）曾与李俨一道，接待过当时还十分年青的俄罗斯女学者别廖兹金娜（Э. И. Березкина）。那时别廖兹金娜刚刚把《九章算术》（中国古代数学名著）译成俄文，刚刚完成她的学位论文。多年以后，1992年，当别廖兹金娜再次访问北京时，她曾多次重复地说：她是李俨的学生。李俨也曾经通过李约瑟在1961年寄资料给新加坡大学的兰丽蓉。那时兰丽蓉正在写作自己关于宋代数学家杨辉的学位论文。现在，别廖兹金娜和兰丽蓉都已是知名学者、专门研究中国数学史的教授。

对国内后学的提携就更是有口皆碑。举凡现在的知名数学史专家，几乎没有一个人没有受到过李俨直接或间接的指导和帮助。

李俨是1955年由陇海铁路调到中国科学院工作的。1957年，中国科学院中国自然科学史研究室成立，李俨被任命为首任室主任（此研究室即是自然科学史研究所的前身）。李俨还被选为中国科学院哲学社会科学部的学部委员。1961年李俨因长年劳累，积劳成疾，不幸患心脏病，时时住院治疗。但他仍是初衷不改，披简搜牍，力疾笔耕不辍，并在病床上指导本文作者进行《中国古代数学简史》的写作（上下册，1963～1964年出版，中华书局）。

李俨还与钱宝琮（1892～1974年）一道开创了中国科学院自然科学史研究所的数学史研究室。

1963年1月14日凌晨，李俨因心脏病不治，逝世于北京医院，终年71岁。1月17日中国科学院主持公祭，同日，葬于北京市

西郊八宝山革命公墓(三区六排)。

参 考 文 献

1.《李俨自传》,系李俨自笔所写,写作时间约为1957~1958年,现存中国科学院自然科学史研究所。

2.《李俨自编论著目录》,油印本,编制时间约为1962年夏,中国科学院自然科学史研究所印刷。

3. 严敦杰《李俨与数学史——纪念李俨先生诞辰九十周年》,载《科学史集刊》第11集,1984年。

4. 杜石然《纪念李俨先生》,载《中国科学史料》第13卷(1992年)第4期。

钱宝琮先生传

何　绍　庚

钱宝琮(1892～1974),字琢如,浙江嘉兴人。清光绪十八年壬辰五月初四日(1892 年 5 月 29 日)生于浙江省嘉兴府嘉兴县(今嘉兴市)南门外一个地主家庭。祖父钱笙巢原是小商人,后经商致富,购置了五百多亩田产,并在嘉兴南门外开设了米行、油行等。1894 年,钱宝琮两岁时,祖父病故,享年 73 岁。父辈兄弟五人,姊妹一人。父亲钱迪祥行六,幼年读过私塾,成年后未参加科举考试,亦不从事生产经营,依靠所分田产田租为生,生活并不富裕。后来供养钱宝琮及弟妹上学,还要靠向亲友借贷方能维持。他虽从未参加工作,但思想比较开通,相信“维新”之学,经常阅读上海《新闻报》、《浙江潮》和一些革命报刊,借以了解国家大事和世界潮流。他希望自己的孩子长大后,要学习新知识,学习科学,熟悉“洋务”,最好是做一名工程师,为国家振兴实业,这样对公对私都有好处。因此,他送钱宝琮及弟妹到新式学校去读书,这对钱宝琮的思想发展和后来的事业都产生了一定的影响。1918 年,钱迪祥在苏州病故,享年 48 岁。母亲陈兰徵,枫泾人,略识文字,虽是家庭妇女,但比较关心时事,没有迷信偏见,且为人淳朴,待人宽厚,对后生晚辈非常关心和爱护,有时还为钱宝琮的学生缝补衣衫,学生们都尊称她为

太师母，1958 年在北京去世，享年 88 岁。钱宝琮有一弟一妹，皆不幸英年早逝。

钱宝琮幼年聪颖过人，6 岁（1898 年）私塾开蒙，学过《论语》、《孟子》等古代典籍，也学过算术、地理、历史、英语等新课程。1903 年春进嘉兴府秀水县学堂，至 1906 年冬所学各门课程相当于旧制中学毕业程度。1907 年春考入苏州苏省铁路学堂土木科，学习成绩优异，在历次月考屡屡获奖。次年曾参加抗议清政府丧权辱国借款筑路的运动。1908 年夏，浙江省第一次招考 20 名官费留学欧美的学生，钱宝琮报考后因数学成绩突出而被录取，是其中年纪最小的一位。因而，他在苏省铁路学堂肄业，并于是年 9 月，由上海启程与翁文灏等同船赴欧，10 月进入英国伯明翰大学土木工程系二年级学习。1911 年 6 月毕业，获理科学士（B. Sc.）学位。随后又就读于曼彻斯特工学院建筑系。

辛亥革命后，钱宝琮于 1912 年 2 月回国，先在杭州浙江省民政司工程课任职，办理有关拆除旗营、开辟马路、修建海塘等官办工程的例行公事，并想谋取一个工程师职位。但由于他的做工程师的愿望未能实现，且因年纪轻，性格耿直，不善官场应酬，也不想做官，所以工作不到一月就自行离职，旋为上海南洋大学（现上海交通大学前身）附属中学数学教员。同年 8 月，经唐在贤介绍到苏州的江苏省立第二工业学校（后改组为省立苏州工业专门学校）任教，讲授土木工程兼代土木工科主任，一年后辞去代主任职务。大约在 1916 年，学校增加数学课程，他自告奋勇兼教初等代数。此后他对于数学教学产生了愈来愈浓厚的兴趣，到 1920 年时，在学校里每周 20 小时的课程就完全是教数学了，同时还担任该校附属高中部教务主任兼教高中数学。

在苏州工业学校期间，钱宝琮开始致力于中国数学史研究。他

曾谈到："1919年的五四运动大大启发了我。我到书店去买新出的杂志看，并且买全部再版的《新青年》，准备前进。但我那时忽略了陈独秀、李大钊等的文章，而喜欢看胡适、钱玄同等的文章。……我得到了'新思想'后，推翻以前的'保存国粹'的想头，渐渐知道'整理国故'、'发扬国学'的必要，努力学习清代汉学家的考证工作，准备研究中国古代数学的发展历史。"他在《古算考源》序中也提到："宝琮年二十，略知西算。任教苏州工业学校时，偶由旧书肆购得中国算学书数种。阅之，颇有兴趣，遂以整理中国算学史为己任。"为实现自己的宏愿，他着意搜求中算古籍，在授课之余，日披夜览，刻苦研读，并陆续有研究论文问世。1921年，钱宝琮在《学艺》杂志三卷各期接连发表了《九章问题分类考》、《方程算法源流考》、《百鸡术源流考》、《求一术源流考》、《记数法源流考》等，这是现已知道的他最早的一批文章。他在《古算考源》序中还指出了从事中国数学史研究的基本途径："顾头绪纷繁，会通匪易。乃先就分科探讨，稍有心得，辄复著书。"经过几年的准备，并在一系列专题研究的基础上，钱宝琮于1924年着手撰写中国数学史专著。

1925年8月，经姜立夫介绍，钱宝琮北上天津任南开大学数学系教授，主讲微积分和微分方程等课程。在南开任教期间，每周最多9小时课，时间比较充裕，于是编写出《中国算学史讲义》并出版了油印本，还专门开设了中国数学史课，发表了《印度算学与中国算学之关系》、《九章算术盈不足术传入欧洲考》等涉及中外数学交流的重要论文。这一时期他还进行了有关天文历法的研究，其成果在三、四十年代相继问世。1927年9月，钱宝琮与竺可桢、汤用彤等同去南京第四中山大学（后改为中央大学）工作，任数学系副教授。后因对于中央大学里的派系斗争感到厌倦，又经姜立夫介绍，于1928年8月转任杭州浙江大学文理学院数学系副教授，后

升任教授。其间于 1928 年秋起曾任浙江大学数学系主任，为浙大数学系的创建和发展做出了重要贡献，但仅任职一年即行辞去这一职务。

1930 年，钱宝琮的一些探讨和考证数学源流的文章由中华学艺社汇刊为《古算考源》一书，由商务印书馆刊行。1932 年，在钱宝琮 40 岁的时候，中央研究院历史语言研究所出版了他的专著《中国算学史》(上卷)，以之作为该所学术专著丛刊单刊甲种之六。这部著作的编纂“始于甲子(1924 年)之秋”，“其后涉猎较广，时有增减”。

书中论述了从上古历法，先秦数学，一直到明代万历年间西方数学传入之前中国数学的发展情形和主要成就，并且包含有关天文历法和中外数学交流等方面的丰富内容，这是钱宝琮前一阶段中国数学史研究工作的总结。

抗战时期，钱宝琮一家于 1937 年冬随浙江大学西迁，辗转浙江建德，江西吉安、泰和，广西宜山，贵州遵义、青岩、湄潭、永兴等地，他在生活困窘、资料缺乏的艰苦条件下继续进行教学和研究，还曾兼任浙大永兴分部一年级主任，湖南蓝田师范学院数学系代理主任等职。抗战胜利后，浙江大学师生员工陆续返回杭州，钱宝琮也于 1946 年夏回到杭州浙大，在数学教学之余仍在中国数学史和中国天文学史领域做了大量的工作。1949 年以前，钱宝琮共发表中国数学史和中国天文学史方面的重要论文三十余篇。

从二十年代到四十年代，钱宝琮先后参加了中华学艺社(周昌寿介绍，1921 年)、中国科学社(茅以升介绍，1923 年)和中国天文学会(何鲁介绍，1927 年)等重要学术团体，并于 1936 年参与发起在上海创建的中国数学会。此外，他还曾担任国民政府教育部数学名词审订委员会委员、中国数学会评议会评议、《科学》杂志编辑和

《数学杂志》编辑等职。

中国传统数学和天文学博大精深，源远流长，科学遗产极为丰富。五十年代初，随着对中国数学史和天文学史研究的深入和拓展，钱宝琮萌发了从事专业研究的想法。时隔不久，中国科学院为创建自然科学史研究机构，北京师范大学为教学需要，争调钱宝琮，而对于一位有丰富教学经验的老教师，浙江大学也自然不愿放行。后来经中国科学院竺可桢副院长直接请示周恩来总理并与教育部协商，这个问题方获圆满解决。1956 年，钱宝琮奉调进京，历任中国科学院中国自然科学史研究室(自然科学史研究所前身，时属历史二所)一级研究员，中国科学史研究委员会委员，《科学史集刊》主编等职，终于实现了自己的愿望，并从此开始专心致志和全力以赴地从事科学史研究。此后，他陆续撰写出一系列关于中国数学史和中国天文学史的重要论文。其中如《授时历法略论》、《盖天说源流考》、《增乘开方法的历史发展》。《从春秋到明末的历法沿革》、《〈墨经〉力学今释》、《秦九韶〈数书九章〉研究》、《宋元时期数学与道学的关系》等，都是在这一时期完成的，深受学术界的重视和好评。他的几部重要专著，如《中国数学史》(主编，1964)和《宋元数学史论文集》(主编，1966)，也都是在这一时期完成和发表的。1961 年在《中国数学史》完稿时，他曾很高兴地写了一首诗：

积人积智几番新，算术流传世界真。
微数无名前进路，明源活法后来薪。
存真去伪重评价，博古通今孰主宾。
合志共谋疑义析，衰年未许作闲人。

当时他虽年事已高，但雄心未减，还想做实际上也做了更多的工作。按照他的想法，在《中国数学史》出版以后，要对各个断代的数学发展情形，继续作深入研究，以便在三、四年后，根据读者的意

见，再进行一次增订和修改，1966 年出版的《宋元数学史论文集》就是这个研究计划的一部分。但由于发生了“文化大革命”，这个计划未能继续实行。此外，他还计划编写中国天文学史和世界数学史，还要撰写更多的论文，然而由于“文革”，这些愿望也都未能实现。1966 年 10 月 15 日，钱宝琮被选为设在巴黎的国际科学史研究院通讯院士。当时正值“文革”，这一喜讯是否转达给他，现已不得而知。

钱宝琮是中国数学史和中国天文学史研究领域的奠基人和开拓者之一，是数学教育界倍受尊崇的老前辈，也是率先在大专院校开展数学史教育的先驱。早在南开任教时，他就开设了数学史课程。抗战前和浙大西迁时，在杭州、贵阳、衡山等地，他又多次参加中学教员讲习班讲授数学史。在五十年代初期和中期，为了配合当时的爱国主义教育和适应向科学进军的需要，他除在报刊上发表一系列宣传中国古代数学成就的文章以外，还定期从杭州浙江大学到上海华东师范大学去讲数学史，并为杭州市中学数学教学研究班开设了数学史课。到北京以后，又为北京师范大学开设中国数学史讲座。1957 年中国青年出版社出版的《中国数学史话》，主要就是根据他在北京师大的讲稿整理而成的。

“文化大革命”期间，钱宝琮被当作“资产阶级反动学术权威”而受到批判和迫害。但对于政治上的打击和种种诬蔑不实之词，甚至肉体上的折磨，他并未放在心上，他最关心的是研究工作的停顿，最苦恼的是被剥夺了进行科学史研究的权利。他不只一次地说：“我个人被批斗是小事，大家整天搞运动，不搞研究，怎么得了！”1969 年底，钱宝琮被“疏散”到苏州长子处，尽管政治气氛紧张，缺乏研究条件，他还一再表示要撰写七八篇论文，甚至说：“我迫切要写点东西，倒不是要用自己的名义发表，写出来哪怕供批

判，只采用其中一两条，也是高兴的。我别无他求，只愿在有生之年，能对数学史研究，多做一点贡献。”作为一位学识渊博的学者，拥有知识而无法奉献，那是常人所难以理解的痛苦。1971 年春，钱宝琮不幸中风，卧床不起，他念念不忘的仍然是他为之奋斗终生的事业。他说：“想来想去，还有九个题目要写，不能再等回北京了，只要能起床，就要设法动笔。”然而，世事难遂人愿，1974 年 1 月 5 日上午 7 时，他带着深深的遗憾在苏州医学院第一附属医院与世长辞了，享年 82 岁。

钱宝琮夫人朱慧真(1892～1968)，上海人，毕业于上海务本女学，又曾在徐家汇启明女学专修英语，曾任英语教师。两人于 1914 年结婚。钱夫人是一位有文化、有见识、和蔼可亲、温柔贤慧的女性。她后来退职还家，料理家务，把一个上有老下有小的大家庭的日常生活，安排得井井有条，使钱宝琮免去后顾之忧，得以专心从事科学与教育事业。她对于学生也给予慈母般的关怀，赢得了学生们永远的敬爱与怀念。“文革”期间，钱宝琮横遭折磨，夫人忧虑成疾，于 1968 年不幸逝世，享年 76 岁。钱宝琮有一子六女，哲嗣钱克仁 1940 年毕业于浙江大学数学系，曾在南京师范学院、苏州大学等院校执教，著有《数学史选讲》等。钱炜、钱熙、钱煦、钱燕、钱燧、钱灿六姊妹，也大都毕业于浙江大学，分别攻修史地、生物、中文、英语、药学和外贸统计，各有专长与建树。

《钱宝琮科学史论文选集》序

华　罗　庚

在中国古代的科学发展史中，数学有着十分重要的地位。自从有文字记载以来，我国的数学工作者就以超人的智慧和创造性的劳动，写下了一部完整的中国数学史，为人类的知识大厦增添了不少光辉。

数学，在我国古代称作算学，包含算术、几何、代数、初等数论等内容，主要以算为主，许多几何问题，也是偏重于几何量的计算，很少讨论几何图形的性质。如果说古代希腊数学是以几何学闻名于世，那末中国古代数学则是以计算见长，完全可以和古希腊数学相媲美。

在原始社会，我们的祖先就已经突破了其他民族中最大的数字是 5 的认识，在奴隶社会初期的甲骨文中又创造了一套十进制的方块数字，到春秋战国之际筹算出现以后，记数法就完全遵循十进位值制。这种优越的方法决定了中国古代数学的成就主要是在计算方面。例如一世纪的分数四则运算、比例算法、开平方与开立方、盈不足术、线性方程组解法、正负数运算法则；五世纪的孙子剩余定理、不定方程问题、圆周率的计算；七至八世纪的三次方程数值解法、内插法；十一至十四世纪的高次方程数值解法、贾宪三角、

高次方程组解法、高阶等差级数求和；十四世纪的珠算等等。其中大多数项目在世界数学发展史上处于遥遥领先的地位，有些项目直接促进了世界数学的发展。

已知勾股形的三边、任二边和、任二边差和勾股积中的任意二项求解勾股形；已知勾股形三边，求勾股形容方的边长和容圆的直径；已知勾的平方加股的平方等于弦的平方，求勾股数等，这些问题与面积、体积问题一起，形成了中国古代一种独特的几何学。这种几何学，从一世纪的《九章算术》开始，直到西方近代数学传入之前，从没有中断过，它提出了许多定理和公式需要加以证明和推导，这便促进了中国古代数学理论的研究。例如赵爽证明勾股定理和有关公式使用的"勾股圆方图"；刘徽证明《九章算术》的面积、体积公式使用的"出入相补原理"、棋验法、证明圆面积公式使用的极限方法、证明阳马（一棱与底面垂直的方锥体）体积公式使用的无穷分割方法以及验证弓形面积的近似公式使用的举反例的方法；祖冲之父子在推导球体积公式使用的著名公理（现在称为祖暅公理）等等。这些数学理论的研究促进了中国古代数学的发展。

但是，应该指出，我国古代数学理论在系统性、一般性与严谨性方面是有不足之处。明末以后，中国数学开始落后了，这是中国长期停留在生产力落后的封建社会所决定的，但数学理论方面存在的弱点也是其中一个原因。我们在继承发扬中国古代数学优良传统的同时，也应该重视这方面的历史教训。

钱宝琮先生约与李俨先生同时于本世纪的二十年代便开始从事中国古代数学与天文学的研究，数十年来写出了大量论文，1932年曾出版了《中国算学史》（上卷），1964年在他主编下出版了《中国数学史》。我们今天得以弄清中国古代数学发展的面貌，主要是依靠李俨先生与钱宝琮先生的著作。李约瑟博士指出："在中国数

学史家中，李俨和钱宝琮是特别突出的。钱宝琮的著作虽然比李俨少，但质量旗鼓相当。"钱宝琮先生的专著虽然不多，但他的论文质量确实是很有水平的。这些论文散见于中华人民共和国成立以前和以后的各种报刊杂志，有些保存在个人手中，有个别的没有出版。为了纪念钱宝琮先生对中国数学史研究的贡献，为了满足国内外学者的要求，科学出版社决定出版《钱宝琮科学史论文选集》，这是一件很有意义的工作。我相信，这一论文集的出版，将会进一步促进中国数学史的研究，进一步激发现在的数学工作者继承和发扬祖国数学的优良传统，在数学研究中创造新的更加辉煌灿烂的历史。

《钱宝琮科学史论文选集》序

苏　步　青

近悉故友钱宝琮先生之科学史论文，汇集成册，即将付梓，不胜欣慰。文章千古事，风雨百年人。鸿篇巨制，播慧流芳，绝学有继，薪火相传，可说是对一位学者最有意义的纪念。

宝琮先生早年留学英国，攻读土木工程。归国后，一贯献身于科学教育界，1927 年参加筹建第四中山大学（浙江大学前身）文理学院，并担任首届数学系主任。继又长期执教浙大，与我共事二十余年。他那爽朗的性格，爱国的热忱，渊博的学识，严谨的学风，以及认真负责、孜孜不倦致力于科学教育事业的精神，至今犹历历在目，难以忘怀。

宝琮先生擅长中国古代文学，造诣很深，每于教学余暇流览古籍，包括数学、天文、历法等著作。早在二十年代的初期，就写出一批很有价值的中国古代数学史的论文，其中，对祖率（即圆周率）的研究最为突出。先生也经常以吟咏为乐，尤擅五古，尝著诗集一册。

在豺狼当道，军阀误国，帝国主义列强劫掠中华的苦难岁月里，宝琮先生经常在课堂上用生动的语言，典型的事例，满腔热情地宣讲中华民族的悠久历史和灿烂文明，介绍中国古代光辉的数学成就，教育学生正确认识我们的伟大祖国，珍视中华民族优秀文

化传统，鼓励学生奋发图强，争取成为对祖国繁荣昌盛有所贡献的有用之材。既教书又教人，结合教学培养学生的爱国主义思想，正是他教学工作的一大特色。

宝琮先生数学教学工作的另一特色是重视实际，重视计算。他讲授微分方程，不仅教给学生复杂的数学理论，而且也阐述微分方程怎样来自实际，它的解又有什么物理意义，使学生获得比较全面的知识。一般教师谈到求代数方程的近似根问题，经常取整系数方程作示例。而宝琮先生认为实际问题很少恰恰有系数为整数的情形，因而喜欢采用系数为小数的题目，借以提高学生的实际计算能力。在当时风气是偏重理论的情况下，这种理论联系实际培养基本技巧的想法和作法，是非常难能可贵的，并对浙大数学教学产生了积极的影响。

在教学活动中，宝琮先生十分注意调动学生学习的自觉性和主动性，善于启发学生自己的思路。他讲起课来，深入浅出，通俗易懂，旁征博引，左右逢源，把比较枯燥抽象的数学内容，讲得非常透彻，而且生动活泼，饶有风趣。这往往给学生留下深刻的印象、取得较好的效果。

有时候，学生们觉得宝琮先生在课堂上有一种严厉感。因为他对学生要求非常严格，对好的学生、好的学习方法，以至好的解题方法，必在课堂上予以表扬；而对学习敷衍，作业马虎，甚至文字不顺，写错别字等，也决不留情，予以纠正，甚而用尖锐的措词，当众进行批评。但学生们都能体会他的良苦用心。他的严厉决不是为了自己，而正是为了学生的将来。在平常与学生接触时，宝琮先生却又平易近人，有说有笑，谈古论今，妙趣横生，使学生对他怀有浓郁的亲切感。这种十分融洽的师生关系，是搞好教学工作的重要基础。

在学校里，教师的作用和影响无可估量。教师是学生们几乎天天接触的榜样，他们的一举一动，所作所为，对于树立怎样的校风和学风，培养出怎样的人材，是至关紧要的。一个学校办得好不好，与教师们，特别是与教授、副教授的关系十分密切。如果我们的学校能有一批既善于教书又善于教人，对学生能热情关怀，严格要求，正确引导，在青年学生中享有较高信誉的教师，那么这个学校就一定会办得成功，卓有成效地培养出一批又一批的优秀人材。

往事悠悠，书不尽言，抚今追昔，感慨万端。每当清晨漫步黄浦滩头，看渡口云烟，江边春色，眼前闪过往来上工的匆匆行旅，耳畔响彻刻苦攻读的琅琅书声，脑际里不由展现出我们伟大祖国欣欣向荣的图景，内心里真切感到无尽的喜悦。想当年浙大旧友，多已谢世，健在者屈指可数。面对这一幅生机勃勃的祖国新貌，遐想中华民族的锦绣前程，谢世者足可安息，健在者尤感重任在肩，更寄厚望于青年一代，要有理想、有抱负，勤奋学习，努力工作，在老一辈科学家辛勤开拓的科学园地里，在奔向四个现代化的万里征途上，扬鞭策马，奋勇前行。

ISBN 7-5382-4807-2

9 787538 248074 >

ISBN 7-5382-4807-2/N·11

定价：600.00 元（全十卷）