李俨 钱宝琮

科学史全集

第七卷

辽宁教育出版社

李俨 钱宝琮

科学史全集

7

第七卷

辽宁教育出版社

第七卷说明

本卷系在科学出版社1955年版的《中算史论丛》第三集的基础上校定而成，共收入李俨先生自1925年至1952年期间在《清华学报》、《科学》等学术刊物上发表的论文九篇，除首、尾两篇外，其余各篇内容多涉及明、清之际在西方数学知识传入后的直接或间接影响下中国数学家的工作。这次付梓，根据李俨对1955年印本的手校本排印。

目　　录

中国的数理*

中华民族是古代文明民族之一，一切政治学术最初即有相当进展。自然科学，如天文历数，其发达情形初不让其他先进各民族。独惜年代久远，记载不全，事迹无由确知。据古书传说，原始中国的数理可以知道的，是结绳的应用、数字的创作、九九的传说。结绳制度，史书记载详明。数字创作，证以钟鼎甲骨的记载，则远在殷周以前。至九九相乘之说，则周秦之际，诸子论说，时有附记，尚可征信。此外古代建筑，几何图案的应用，以及天象星辰的观测，都需要算数。《世本》有"黄帝使羲和占日，常仪占月，臾区占星气，伶伦造律吕，大挠作甲子，隶首作算数"的传说。到周代，文物制度已经大备。周公制礼，《周官》保氏曾"教国子以六艺：一曰礼，二曰乐，三曰射，四曰御，五曰书，六曰数"。《礼记・内则》称："六年教之数与方名，……十年出就外传，居宿于外，学书计。"由此可证周代亦已注重数学教育，文化远胜前古，亦非偶然。

古算书流传到现在的，首推《算经十书》。其第一部《周髀算经》有周公商高问答之语，所说述天算学说，是不朽名作。第二部《九章算术》，是世界有名之纯粹算术书。《周髀算经》首论正三角形

---

* 本文原载《文化建设》第1卷(1934年)第1号149～153页，1947年收入《中算史论丛》(四)第1～13页，1955年收入《中算史论丛》第三集第1～9页。

(即勾股形)性质,所述勾三,股四,弦五,和毕达哥拉斯定理意义相同;并由此应用到测天量地,于整数之外并有分数的推算,如二十四气以九寸九分又六分之一进为加减,即是其例。《九章算术》以流传长久,叠经删改注释,其分章次序尚无定论。但整数四则、分数四则、比例、差分、开方、以及简单的平面立体几何形体的计算,以至联立方程,皆可于此中求得。《算经十书》现存的,还有《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》、《五经算术》并《海岛算经》、《数术记遗》,和上述的《周髀》、《九章》以及唐代《缉古》,共为十种。《孙子算经》曾论及不定方程。《张丘建算经》并知不定方程,有一问数答之例,次论及二次方程。此外开平、立方不尽,则《孙子算经》、《张丘建算经》及其《细草》,并以"加借算"求得奇零,和方程理论相合。

中国古代计算的工具为算,亦称筹策。《说文》竹部称:"算长六寸,所以计历数者。"《前汉书·律历志》称:"其算法用竹,径一分[①],长六寸,二百七十一枚,而成六觚为一握。"汉朝的尺度,按《汉书·食货志》称:"王莽居摄,变汉制,以周钱有子母相权,于是更造大钱,径寸二分,重十二铢,文曰大钱五十。"所谓"大钱五十",即汉"大泉五十",今粗计得"大泉五十"直径长27毫米,则6寸当为135毫米,长不及半英尺。每枚径1分,当2 1/4毫米,积271枚,仅仅盈握也。此项长半尺的筹策,用它纵横布算,自嫌笨重。所以《隋书·律历志》减其长为三寸,甄鸾注《数术记遗》减其长为四寸。此种用筹计算之方法称筹算,这和笔算的将一切计算经过全记到纸上的方法略有不同。所以计算步骤,亦有差异,其原理则初无

① 此处"径一分",有人认为是"径三分",约0.69厘米,《隋书》减为"径二分",约合0.59厘米。

二致。但筹算是中国的特有算器，则为世所公认的。

圆率的计算，以刘徽、祖冲之为较早，魏刘徽于魏陈留王景元四年(公历 263 年)注《九章算术》，其求圆率以圆内容六边形起算，称："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"刘徽由此算得：圆径一丈，圆周三丈一尺四寸以上。此种学说为后来论割圆的人所崇尚。祖冲之(429～500)字文远，范阳蓟人，宋孝武大明六年(公元 462 年)曾上书论历。《隋书》称："祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周：盈数，三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数，三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈、朒二限之间。密率：圆径一百十三，圆周三百五十五。约率：圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。"其所谓密率，比较德人鄂图的发现，先千一百余年。同时算书，《算经十书》以外，汉隋以来，作者甚多，记入《隋书·经籍志》的仅有半数，而市上流传，私家记载，不入官书，年久失考的，尚居多数。敦煌千佛洞发现的古算书残卷，即是一证。

唐建都在长安，贞观期内，国学内有八千余人，兴盛情形，近古未有。其书、算方面，各置博士，三千二百六十员。算学内，都以《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》为颛业。兼习《记遗》、《三等数》。此时日本亦学习中国方法举行算学考试。所用算经，是《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《六章》、《缀术》、《三开重差》、《周髀》、《九司》。隋唐以来，东西交通频繁，西域历法随佛法输入，执掌中朝历法，一如明末清初西洋人执掌历法之例。唐德宗时夏官正杨景风在广德二年(764 年)注《宿曜经》，称："今有迦叶氏、瞿昙氏、拘摩罗等三家天竺历，并掌在太史阁，然今之用，多瞿昙氏历，与本术相参供奉耳。"云云。瞿昙悉达

所译的《九执历》,并将西域写算方法印度三角函数表传入中国。同时西域的大小数记法等等,在国中亦有相当影响。唐时以善算著称的又有王孝通。孝通在武德九年(公元 626 年)参校历法,所著《缉古算经》,于立体几何形体,详细论到。并论到二次、三次、四次方程,是宋元算家研治方程论的先声。

《算经十书》在唐是《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》、《缉古》。就中《缀术》一书,到宋已经亡失,而以《记遗》代替。古代算经叠经魏刘徽、周甄鸾、唐李淳风注释之后,列入学官,成为中算的权威著作。宋时秘书省又传刻此十书,由朝臣慎重校刊行世。宋元丰七年(1084 年)秘书省和汀州学校所刻《九章》、《周髀》、《五经》、《海岛》、《孙子》、《张丘建》、《五曹》、《缉古》、《夏侯阳》、《记遗》,影写本已经传世。就中《孙子》、《张丘建》、《五曹》、《记遗》和残本的《九章算术》宋刻宋印本,现在尚有流传。大观年兴复算学,注释考正当时见行算经,多至一百八十九卷,兴盛情形也可想见。

宋元中间,算士甚多,其所论述,超过前代,是中算的黄金时代。最著名的是秦九韶、李治、杨辉、郭守敬、朱世杰诸人。他们所著的书现在还十之八九存在。

宋元算学的发达,实在靠着天元术。天元术是设天元一以代替未知数,和代数术方法相同,可是代数术是用笔计算天元术是用筹计算。用筹计算,和用笔计算,将一切计算经过全记在纸上的,略有不同。所以它的计算方位,应当先确定。其初期如楚衍弟子贾宪"立成释锁开立方法"之置"实"、"方法"、"廉法"和"下法"四层即是一例。我们还可以在沈立(1056 年)所著《河防通议》,看到天元演段的最初计算方式。楚衍在天圣元年(1023 年)编成《崇元历》,贾宪是楚衍弟子。杨辉引有贾宪"立成释锁平方法"及立方法。又引

贾宪"开方作法本原图",这和近代所称巴斯噶(Pascal)三角形相同。《四元玉鉴》古法七乘方图(1303年)所记亦和这相同,可是比较欧人早三百余年。其"实、方、廉、隅"方位在多乘方的,则秦九韶、李治、朱世杰列式大体相同。亦有"太在元下",或"元在太下"的,而于乘除进退,则完全相同。李治《敬齐古今黈》称:"予在东平,得一《算经》,大抵多明如积之术。以十九字志其上下层数。曰:仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。此盖以人为太极;而以天,地,各自为元,而陟降之。"当时所设未知数,先是天元,所以称天元术。以后递增为地、人、物,而成四元。平阳李德载,及上所称李治在东平得一《算经》,说到地元,刘大鉴撰《乾坤括囊》末有人元二问。到朱世杰于大德七年(1303年)撰《四元玉鉴》三卷,是按天、地、人、物立成四元。以元气居中,立天元一于下,地元一于左,人元一于右,物元一于上。上升下降,左右进退,互通变化,以成开方之式,说见原书。天元术之演进,至此而极。至其正负开方有多至九乘方(即十次方程),他们所取方法,自秦九韶以后,都与和涅氏法(1819年)一致,而时代实先五百余年。所以在世界数学史上,关于方程论,中华实在是先进。

天元术发展之外,一时数理,如秦九韶的大衍求一术(1247年),杨辉的纵横图说(1275年),郭守敬的弧矢割圆术(1280年),朱世杰的级数论(1303年),都算一时独步。

降及明代,继续筹算兴起的是珠算。它的方法和筹算、笔算,都有差异。现在以乘法为例:在笔算则一切算式可全书于纸上;在筹算则以乘数、被乘数分列上下,而以得数居中;在珠算则左右对列,得数列在中央。因此差异,其计算方式亦有不同。故珠算多列歌诀,以助计算。如除法方面,则有"归除"和"撞归"、"起一"学说。其说起源在元代。元《丁巨算法》(1355年)中所记甚详。其时法式初创,

尚不习用。所以元安止斋《详明算法序》称："夫学者初学因归则口授心会，至于撞归、起一，时有差谬。"明代论述珠算最著的，是程大位于万历二十年（1592 年）所著的《算法统宗》。在前则柯尚迁于万历七年（1578 年）所著《数学通轨》亦已论及。在日本发现之汪讱庵重订《指明算法》二卷，卷上有：算盘定式、九九上法、九九退法、九因合数、九归歌诸目。按夏源泽所著《指明算法》二卷，成于正统二年（1439 年）。汪讱庵所订正者，如是夏氏原书，则珠算之发明，又远在明初吴敬《九章比类算法》（1450 年）之前。

明代算书除《算法统宗》所引外，最近发现之写本汾阳王文素《算学宝鉴》（1524 年）中，除引宋《杨辉算法》、元贾亨《算法全能集》、元安止斋《详明算法》、明吴敬《九章算法》、明夏源泽《指明算法》、许荣、孟仁《九章（详注）算法》之外，又引有《推用算法》、《捷用算法》、《捷奇易明算法》、《精明算法》、《九章袖中锦》、金台金来朋《启蒙算法》、冯敏好学《纵横指南算法》和张伯奇、金陵杜文高算书，都是明人所著。

明末筹算衰退，因是时有西洋笔算的输入，明万历十年（1582 年），意教士利玛窦（1552～1610）航海东来，在澳门登陆，明年入肇庆，十七年（1589 年）到韶州，二十二年到二十七年间（1594～1599）往来南北两京，曾和徐光启（1562～1633）共译《几何原本》前六卷（1606 年），和李之藻（1565～1630）共译《同文算指》、《圜容较义》（1608 年）、《测量法义》。崇祯二年（1629 年）以后，明廷用西洋人和徐光启督修历法，至此西洋算法中的笔算、筹算、几何、三角术、三角函数表和割圆术，都输入中国。

国外笔算输入中国，实始于唐代。如唐《开元占经》"算法字样"有"有问咸记，无由辄错，连算便眼"和《新唐书》卷二十八下"其算皆以字书，不用筹策"的记载。入元虽有引用西域算法之处，但因

藏在秘阁，群众看不到。明末《同文算指前编》卷上称："兹以书代珠，始于一，究于九，随其所得，而书识之。"这是西洋笔算正式输入之始。同时《几何原本》虽是处女译本，而文笔流利，译名精雅，传诵的很多，称为杰作。至弧矢割圆方法，在元郭守敬虽有论及，但所列三角函数表还不完全，到崇祯四年（1631 年），呈进割圆八线表，而《测量全义》（1631 年）又附小表，取用才算便利。上述各法，源源输入，中土人士耳目亦为之一新。

入清而圣祖亦好算数，西教士南怀仁、张诚、安多、白晋、巴多明、杜德美之流，更番入宫教授。汤若望又曾主持历法，虽曾一度中挫，其流风固未少衰。各教士教授所得，叠经译为满汉文，数经增订，乃编成《律历渊源》（1723 年刻）颁行全国。一时西士穆尼阁介绍的对数法，杜德美输入的割圆术，以及"西洋借根法"，都为国中所熟闻。王锡阐（1628～1682），梅文鼎（1633～1721）等，并以新输入之西算译成通俗文字，和旧说相发明。四库开馆，又以《永乐大典》本七算经及王杰家藏本《张丘建》、《缉古》和两江总督采进本《数术记遗》，作为《算经十书》，与同时名作，都收入《四库全书》，分藏七阁。

清初因西洋算学的输入和宋元算书的发现，引起学者治算的兴会，乾嘉以后，作者甚多，多有贡献，王锡阐（1628～1682）、梅文鼎（1633～1721）以外，陈世仁（1676～1722）、孔广森（1752～1786）、焦循（1763～1820）、汪莱（1768～1813）、李锐（1773～1817）、罗士琳（1789～1853）、项名达（1789～1850）、董祐诚（1791～1823）、徐有壬（1800～1860）、戴煦（1805～1860）都有不朽的杰作，留传当世。就中罗士琳创作《四元玉鉴细草》二十四卷，积时十二年（1823～1835），又校正朝鲜重刊本《算学启蒙》三卷（1839年），于研求古算最为致力。其他诸人于几何学、割圆术、曲线论、方

程论、级数论、对数术、纵横图、三角术亦有详细的研究。

清季西洋学说，第二次输入，时适李善兰(1811～1882)[1]、华蘅芳(1833～1902)都以善算著名一时，分任译事，译文亦十分完善。李与伟烈亚力共译《几何原本》后九卷(1856年)，棣么甘《代数学》十三卷(1859年)，罗密士《代微积拾级》十八卷(1859年)等书。华与傅兰雅共译华里司《代数术》二十五卷(1873年)，《微积溯源》八卷(1874年)，海麻士《三角数理》十二卷(1877年)，伦德《代数难题》十六卷(1883年)，棣么甘《决疑数学》十卷等书。

清末各方提倡兴学，基督教会，天主教会迎合时尚，亦多附设学堂传教，作为文化侵略工具。光绪十六年(1890年)，基督教教育会又组织有教科书委员会，编辑各项教科用书，算书亦为其中一事。西士伟烈亚力、狄考文、潘慎文、求德生、傅兰雅所译算书，曾经流传一时。而商务印书馆于光绪二十八年(1902年)始编算学教科图书，其余京师大学堂译书局、江楚编译官书局、科学书局、昌明书局、中国图书公司，都有编撰，而光绪三十二年(1906年)学部组织图书局，所编教科书，反无成就。因以前我国算数发达，多出于民众爱好，官家所主持的，有时成效转微。

1936年12月15日校于西安

1953年10月再校于兰州

① 据李慈铭《越缦堂日记》第三十九册第20～21页：李善兰光绪八年十月二十九日(1882年12月9日)卒，生于嘉庆十五年十二月八日(1811年1月2日)，年七十三。

明清之际西算输入中国年表*

一、通　论

明初因为《授时历》而编造《大统历》。可是行了二百年渐渐和天时不合，邢云路、魏文魁、宋仲福、朱载堉各人都已说过。此时数学十分不发达，就是宋元数学家遗传下来的"天元一"术，都没人通晓。所以即使有人有改订历法的志愿，也无法进行。利玛窦正在这时，即万历九年(1581 年)来到中国广州的香山澳。据说是想在这里传教。住了十余年，还没有人注意他。后来提出历算学说就被人重视，因此进到北京。在民间和徐光启译《几何原本》前六卷(1606 年)，这是西算输入中国的初步。同时还用算术教授徐光启(1562～1633)、李之藻(1565～1630)等人，编译《同文算指》、《圜容较义》、《测量法义》各书。徐光启又自编有《测量异同》、《勾股义》各书，此外还有人传述他的方法。到万历庚戌(1610 年)利玛窦死后，西人来华的较多，如艾儒略、庞迪我、熊三拔、阳玛诺等人，都是通历算的，且各有

* 本文原载《图书馆学季刊》第 2 卷(1927 年)第 1 期第 1～34 页，1931 年收入《中算史论丛》(一)第 149～194 页，1955 年收入《中算史论丛》第三集第 10～68 页。

译述。到万历壬子(1612年)以后，周子愚、李之藻等人都因为旧历不太好，提议设局修改，可是还没有实行。此时来中国的外国传教士也知道这种情形。所以邓玉函写信给他的友人说："华人需要改历。"(1622年)。到崇祯己巳(1629年)开始实行由徐光启督修历法。西洋人入局的有邓玉函、龙华民。次年(1630年)邓玉函死，继续入局的有汤若望，罗雅谷。因此辛未年(1631年)进历书二次，第一次二十四卷，第二次二十卷和一折，壬申年(1632年)第三次进历书三十卷，次年(1633年)徐光启死，由李天经(1579～1659)继续主办。此时历书已大体完成。数学方面的割圆术、三角术和三角函数表、几何画法、积化和差术(Prosthaphaeresis)，以及比例规、筹算，都由历书中附带输入中国。李天经继任以后，在甲戌年(1634年)进历书二次；第四次二十九卷，一架，第五次三十二卷。前后五次共一百三十七卷。自后逐年进《七政经纬新历》。监局官生参与这工作的也有五六十人。而旧派中如冷守中、魏文魁则于徐光启未死之前，已经反对新法，到徐死去后，更加反对。因此以魏文魁为东局，和新法的西局，以及大统，回回共为四家。以后虽然新法测验尚合天时，明朝亦重视新法，可是直到明亡(1644年)，还没有实行改订历法。

明亡以后，汤若望开始和清朝接洽修历。清世祖亦重视此事。直接由汤若望掌管钦天监印信。顺治乙酉(1645年)修补成《西洋新法历书》一百卷。如此前后十五年。公家也十分优待他们。顺治丙戌(1646年)，《西洋对数表》由国外寄到澳门，穆尼阁居南京，用对数学教授薛凤祚，这是对数输入中国的开始。到顺治末年(1659～1661)杨光先极力反对新法。清圣祖初即位，便兴起大狱，废除新法，囚教徒，杀官生五人，用杨光先代替汤若望。康熙丙午(1666年)，汤若望死后，南怀仁又起来劾旧法的错误，因此又行新法。南

怀仁的新法，是由监局官生学习，编造，流行。此时全国都知道应当注重算数，所以杜知耕、李子金、梅文鼎（1633～1721）、陈讦（1650～1722）、黄百家、梅瑴成（1681～1761）等人，都以整理西算为志愿。此时清圣祖也留心学算。而法皇路易第十四，对中国采取积极传教方针，用以对抗葡萄牙，以便扩张法国的势力，因在康熙乙丑（1685年），遣教士洪若翰、白晋、李明、张诚、刘应等人到入中国，又赠地平经纬仪给清帝。此时入清宫教授算数的有南怀仁、安多、白晋、张诚、巴多明、杜德美等人。并编有《律历渊源》一百卷（1723年刻），而代数学以及割圆术中的解析术，都于此时输入中国。以后戴进贤修有《历象考成后编》十卷（1742年成书），此时西方教士也十分注意天文历算的重要。所以刘松龄神甫在他的《书札》（1766年）还称："艺术在朝廷因为人所喜，然天文历算尤有功用，而不可须臾离也。"这是二百余年来西方传教士的惟一方针。可是当时输入中国的西洋天文数学，多语焉不详，中国数学家甚感不便，其中以对数、三角术、三角函数表、割圆术为尤甚。中国数学家因立志深入，自加研究，其中以王锡阐之于历学，梅文鼎之于数学，为最有成绩，已有另文具论，此节不预备多讲。

二、年　表

明万历九年辛巳（1581年）

利玛窦（Matteo Ricci）于明万历九年（1581年）来中国也有称万历十年（1582年）来中国的。

万历九年利玛窦始泛海九万里，抵广州之香山澳（见《明史》卷三二六，"外国七"）。

《不得已辩》、《大西利先生行迹》（附《辩学遗牍》）第一页及《澳

门纪略》卷下第十五页,并称利玛窦于明万历九年(1581年)来中国。

至(一)利玛窦于万历二十八年十二月二十四日(1602年)上疏明廷称:“航海而来,时历三年(1579～1582),淹留肇庆,韶州二府十五年(1582～1597),越(庾)岭由江西至南京又淹留五年(1597～1602)。”(见《增订徐文定公集》卷首下,《行实》第7页)和(二)《格致汇编》第五年(1890年)“利玛窦、汤若望二君传略”,(三)裴化行著《利玛窦与东方科学》都称:利玛窦明万历十年(1582年)来中国。

而《增订徐文定公集》卷首下第九页“利子碑记”又误作万历庚辰(1580年)来中国。

万历十年壬午(1582年)

“利玛窦在1552年生于意大利的安科呐(Ancône)州附近Macerata,在1567～1571年的几年之间,他在罗马学习法律,从此加入了耶稣教会。1572～1578年之间,他在罗马学校(Collegio Romano)里学习神学。”

利玛窦氏在1577年5月离开罗马,去到葡萄牙。在这地方停留到次年3月。其后在1578年9月至1582年4月之间,他停留于印度的卧亚(Goa)和可城(Cochin)从事传教。这时候他的数学已经很有声望,神父罗明坚(Michael Ruggieri)(拉,1579B[①] ～1588)觉得中国应该有这么一个人,而希望他来到中国。于是1582年8月7日,他在澳门上陆了(按上文录自裴化行著,汪宇平译:《利玛窦与东方科学》,《时兴潮副刊》,第一卷第二期,1942年9月号,第

① 字母B表示其前数字为来华年份,下司。

76 页。原文系节译英文本 Henri Bernard, *Matteo Ricci's Scientific Contribution to China*. pp. 22 — 36, 1935, Trans. by Edward Chalmers Werner Henri Vetch, Peiping. 现将所译人名，地名加以更正)。

前北京历史博物馆摹绘本《万国舆图》，利玛窦自序称："壬午(万历十年，1582 年)解缆东粤。粤人请图所过诸国以垂不朽。"

万历十一年癸未(1583 年)

是年利玛窦在肇庆开始传教。

《大西利先生行迹》称："越明年癸未(1583 年)利子(利玛窦)始同罗子(罗明坚)入端州(肇庆)，新制台郭公(郭应聘，福建莆田人，进士，《明史》卷一二一有传，万历十一年以侍郎兼都御史，任广东巡抚。见商务本《广东通志》卷十八，职官表九)并太守王公(王泮，浙江山阴人，甲戌进士，万历八年任肇庆府知府，十一年升岭西道副使，见商务本《广东通志》卷二十四职官表十五)甚喜款留，遂筑室以居利子，间制地图、浑仪、天地球考、时晷、报时具，以赠于当道。"

《天主教十六世纪在华传教志》称："在 1583 年 9 月 10 日，罗明坚和利玛窦很顺利地到肇庆府，官厅对于他们极表示好意。从此便在中国内地建起第一座圣堂及会所。"(见裴化行著，萧濬华译，《天主教十六世纪在华传教志》第 217 页)。

万历十二年甲申(1584 年)

是年利玛窦在肇庆。

《万国舆图》，是年利玛窦作于肇庆(见费赖之著，冯承钧译，《入华耶稣会士列传》第 53 页)。

《万国舆图》即《山海舆地全图》[①]。

万历十七年己丑(1589年)

是年利玛窦由肇庆往韶州,居住南华寺。

《大西利先生行迹》称:"其后司马节斋刘公(刘继文,江南灵壁人,进士,万历十六年,以兵部侍郎兼佥都御史任)开府端州,知利子欲进内地,以广宣其教,遂移文韶州府,命于南华寺居停。"

麦安东(Antoine d'Almeyda)于1589年8月与利玛窦由肇庆偕行赴韶州(见《入华耶稣会士列传》第57页)。

万历二十一年癸巳(1593年)

《大西利先生行迹》称:"利子(利玛窦)此时尝将中国《四书》译以西文寄回本国。"此书是否印行,或还存有写本,还不知道。

万历二十二年甲午(1594年)

明朱仲福撰《折衷历法》十三卷(见《四库全书总目》卷一〇七)。

万历二十三年乙未(1595年)

是年朱载堉进《圣寿万年历》八卷,附《律历融通》四卷,疏称:"《授时》、《大统》二历,考古则岁差三日,推今则时差九刻。"(见《四库全书总目》卷一〇六)。

同年利玛窦由广东到南京,又折回南昌。

---

① 据 Henri Bernard, *Les Adaptations Chinoises d'ourrages Europeens*, p. 315,《华裔学志》, vol. x, 1945.

"利玛窦氏在1595年4月,离开广东,在六月到了江西省的南昌。他的声名很高,求教者相继而来。其中有的想学炼金术,有的想学西洋科学。"(见裴化行著,汪宇平译:《利玛窦与东方科学》,《时与潮副刊》,第一卷第二期,第77页)

是年十月利玛窦在南昌,"Ricci-Riccardi 侯爵在1910年曾将其所藏利玛窦信札三件刊布:两件作于南昌,题年为1595年10月28日及1596年10月12日;一件作于北京,题年为1608年3月6日。"(《入华耶稣会士列传》第56页引)

利玛窦在南昌时,曾撰刻下列各书:

《天主实义》,一名《天学实义》二卷(是书1595年初刻,1600年,1605年重刻)。

《交友论》一卷,Chinois 3371(是书有1595年利玛窦序)。

《西国记法》一卷,Courant 5656(见《入华耶稣会士列传》第50至51页)。

万历二十四年丙申(1596年)

是年利玛窦在南昌。

"1596年9月22日日蚀,这件事情的结果,把利玛窦在南昌的名誉提高了。同年10月神父范礼安(Alexandre Valignani)把丁先生所著的关于观象仪的著作(Astrolabium,1593年)用船带到印度。后来利玛窦氏得到他,利用他授课。"(见裴化行著,汪宇平译:《利玛窦与东方科学》,《时与潮副刊》,第一卷第二期,第77页)

明"神宗,万历二十四年(1596年)按察司签事邢云路奏:《大统历》刻差宜改。钦天监正张应候等疏诋其诬。礼部上言应从云路所请,即令督钦天监事。仍博访通晓历法之士酌定,未果行。"(见《古今图书集成》第五十卷引《明史纪事本末》)。

万历二十五年丁酉(1597 年)

是年龙华民(Nicelas Longobardo,1597B～1654)抵中国,自是以后留居中国,凡五十八年(见《入华耶稣会士列传》第 76 页)。

万历二十六年戊戌(1598 年)

"《万国舆图》:1584 年利玛窦作于肇庆。1598 年在南京重将此图修改,较前更大。用十二版印于绢上,李之藻力也。"(见《入华耶稣会士列传》第 53 页)

是年 6 月 25 日,利玛窦同郭居静(一作加大挠 Lazare Cattaneo,1594B～1640)等由南昌晋京,旋以不准居留南返(见杨振锷,《杨淇園先生年谱》第 16 页)。按此事《大西利先生行迹》谓在二十六年(1598 年),《燕京开教略》谓在二十七年(1599 年)。

是年利玛窦入北京随新补礼部尚书广东南海人,王弘诲(忠铭)同行。

万历二十七年己亥(1599 年)

是年利玛窦在南京传教。

"1599 年 2 月瞿太素(汝夔,? ～1612)又随着他(利玛窦)回到南京,从此至 1600 年 5 月为止,他一直住在南京。研究改历事宜,在南京也声名显著,弟子很多。"(见裴化行著,汪宇平译:《利玛窦与东方科学》,《时与潮副刊》第一卷,第二期第 78 页)

庞迪我(Didace de Pantoja 1599B～1618)于 1599 年抵澳门时,范礼安神甫遣之至南京,与利玛窦神甫共处。玛窦第二次赴北京时,携(庞)迪我同行(见《入华耶稣会士列传》第 86 页)。

《不得已辩》称:"接踵而至者,陕西西安府金尼阁(Nicolas

Trigault 1610B～1628)已亥。"

是年七月王丰肃(后名高一志,Alphonse Vagnoni,1605B～1640)、林裴理(Felicien de Silva)、阳玛诺(Emmanuel Diaz,1610B～1659)同抵华(见《南宫署牍》:"会审王丰肃等犯一案")。

万历二十八年庚子(1600 年)

利玛窦《几何原本序》称:"庚子(1600 年)利玛窦因贡献,侨邸燕台。"

《野获编》称:"利玛窦……入都时,在今上庚子年。"

《正教奉褒》称:"利玛窦万历二十八年十二月二十四日(1601 年 1 月 27 日)上贡表。"

万历二十九年辛丑(1601 年)

"利玛窦……二十九年入京师,中官马堂以其方物进献,自称大西洋人。"(见《明史》卷三二六,"外国七")

"利玛窦……至二十九年入京师,献方物,自称大西洋人。……而帝嘉其远来,假馆授粲,给赐优厚,利玛窦安之,遂留居不去。"(见《澳门记略》下卷,第 16 页)

"(利玛窦)西泰同庞子迪我,号顺阳者……乃越黄河,抵临清。督税宦官马堂,持其贡表恭献阙廷。"(见《增订徐文定公集》卷首下,《行实》,第 10 页,《大西利先生行迹》引同)

李之藻刻《职方外纪序》称:"万历辛丑,利(玛窦)氏来宾,余(李之藻)从寮友数辈访之。其壁间悬有大地全图,画线分度甚悉。利氏曰:此我西来路程也。"

明神宗万历二十八年十二月甲戌(1601 年 1 月 8 日)《实录》卷三五四称:"天津税监马堂奏:远夷利玛窦所贡方物,既随身行

李,译审已明,封记题知。上令方物解进,(利)玛窦伴送入京,仍下部译审。"

又明神宗万历二十九年二月庚午(1601年3月5日)《实录》卷三五六称:"天津河御用监马堂解进大西洋利玛窦进贡土物并行李。"

按利玛窦入京之年,记录不一。《几何原本序》、《野获编》、《正教奉褒》、《燕京开教略》、《大西利先生行迹》、《泰西名人传》、《明史》本纪都作万历二十八年。又《明史·意大里亚传》、《澳门记略》、《职方外纪》、《明神宗实录》(卷三五六)、《教务辑要》(卷四,西教源流条)都作万历二十九年。因《明史》本纪列在二十八年年末是据马堂奏闻年月。《明史·意大里亚传》列在二十九年是据万历二十九年的《实录》。

明《神宗实录》卷三五六"万历二十九年二月庚午朔天津河御用监少监马堂,解进大西洋利玛窦进贡土物并行李。礼部题《会典》止有西洋国及西洋琐里国,而无大西洋,其真伪不可知。又寄住二十年方行进贡,则与远方慕义,特来献珍者不同。其所贡天主,天主母图,既属不经,而随身行李,有神仙骨等物。夫既称神仙,自能飞升,安得有骨。则唐韩愈所谓凶秽之余,不宜令入宫禁者也。况此等方物未经臣部译验径行赉给,则该监混过之非,与臣等溺职之罪,俱有不容辞者。又既奉旨送部乃不赴部译。而私寓僧舍,臣等不知其何意也。但查各夷必有回赐,贡使必有宴贺。利玛窦以久住之夷,自行贡献,虽从无此例,而其跋涉之劳,芹曝之念,似宜加赏赉,以慰远人。乞比照暹罗国存留广东,有进贡者赏例,仍量给所进行李价值,并照例给与利玛窦冠带,回还。勿令潜住两京,与内监交往,以致别生枝节不报。"

万历三十年壬寅(1602 年)

《不得已辩》称:“接踵而至者,闽福州府艾儒略[1](Jules Aleni, 1613B~1649)壬寅。”

万历三十一年癸卯(1603 年)

“癸卯秋徐光启至南京,由罗儒望(Jean do Roche 1598B~1623)为行洗礼,加名保禄。”(见《增订徐文定公集》卷道下《行实》第六页)

“癸卯冬则吴下徐太史(光启)先生来,先生既自精心,长于文笔,与旅人辈交游颇久。私计得对译(《几何原本》)成书,不难于时以计偕至,及春荐南宫,选为广常。然方读中秘书,时得晤言,多咨论天主大道,以修身昭事为急,未遑此土苴之业也。”(见利玛窦,《几何原本序》)

万历三十二年甲辰(1604 年)

是年徐光启考成进士。

万历三十四年丙午(1606 年)

是年秋利玛窦与徐光启共译《几何原本》前六卷,明年春获卒业(见利玛窦《几何原本序》)。

万历三十五年丁未(1607 年)

《乾坤体义》三卷,利玛窦撰,万历三十五年(1607 年)刻于北

① 艾儒略,《明史》卷三二六作《艾如略》。

京，清初列入《四库全书》。明万历间，余永宁曾以此书和《法界标旨》合刻。

是年春利玛窦和徐光启共译《几何原本》前六卷，在北京出版，板留北京。

（见利玛窦《几何原本序》，和徐光启题《几何原本》再校本）。

万历三十六年戊申（1608年）

是年利玛窦在北京。

徐光启题《几何原本》再校本称："戊申春利先生以校正本见寄，令南方有好事者重刻之，累年来竟无有，校本留置家塾。"

利玛窦在《几何原本》译成之前后自著《乾坤体义》二卷，下卷言数："以边线，面积，平圆，椭圆，互相容较。"（见《四库全书总目》卷一〇六，并参看《中国数学大纲》（下）385页）*。其授于李之藻、徐光启等，已记年月的，有以下二书：

《圜容较义》，无卷数，题利玛窦授，李之藻演，有万历四十二年李之藻序，称："戊申（1609年）十一月毕此书。"《同文算指》前编二卷，通编八卷，题利玛窦授，李之藻演，有万历四十一年李之藻序，万历四十二年徐光启序。又有《别编》一卷，未题年月。

又未题记年月的，有以下三书：

《测量法义》，无卷数，利玛窦口译，徐光启笔受。

《测量异同》，无卷数，题徐光启撰。

《勾股义》，无卷数，题徐光启撰。

邢云路[1] 撰《戊申立春考证》一卷（见《四库全书总目》卷一〇

---

* 见本书第三卷第429页——编者。

① 邢云路是万历庚辰（1580年）进士。

七)和《古今律历考》七十二卷(见《四库全书总目》卷一〇六),魏文魁助他编成。

是年孙元化撰《几何用法》一卷,元化号火东。

《明史》称:"(孙)元化字初阳,嘉定人。天启间举于乡,所善西洋炮法,盖得之徐光启云。……及(孔)有德反,朝野由是怨元化之不能讨也。贼纵元化还,诏逮之。首辅周延儒谋脱其死,不得也。则援其师入阁图之,卒不得(崇祯壬申,1632年)。同张焘弃市。"(见《明史》卷二四八徐从治传)又《山东通志》称:"崇祯朝孙元化以嘉定举人,任山东海防巡抚。"(见《山东通志》卷四十九,职官志第四,历代职官表八)

张焘字维炤,浙江钱塘县人,东江前协总兵(见"孙元化手书与王徵交谊始末注译"《真理杂志》第一卷第二期,第226页)。

孙元化所著算学书,有:

《几何体论》一卷,孙元化撰。

《几何用法》一卷,(1608)孙元化撰。

《泰西算要》一卷,孙元化撰。

按丰顺丁氏《持静斋书目》有:《几何体论》一卷,卷后有庆余、心斋诸印。又有《几何用法》一卷,卷后题道光己酉(1849年)乌程庆余校读一遍,又有庆余畴人子弟诸印。

上海东方图书馆藏钞本孙元化《几何用法》一册,共四十八页,前有序,称:"予先师(徐光启)受《几何》于利泰西,自丙午(1608年)始也。……戊申(1608年)纂辑《用法》,别为一编,以便类考。……十余年无有问者,稍示究心,则借钞《用法》止矣。……庚申(1620年)武水钱御冰先生忘年势而下询。当暑孜孜,似欲为此书拂尘蠹者。而余因检箧中,原草已乌有,聊复追而志之。然载于《几何》者固在。若旧纂则多所推广,竟不能尽意。尚冀异日者,幸遇友

人钞本借以补之。”

又按徐光启《勾股义》称：“勾股自相乘，以至容方、容圆、各和各较相求者，旧《九章》中亦有之。第能言其法，不能言其义也。所主诸法，芜陋不堪读，门人孙初阳(元化)氏删为正法十五条，稍简明矣。余因为论撰其义。”这说明孙元化曾立正法十五条，徐光启根据它撰成《勾股义》一书。

万历三十七年己酉(1609 年)

是年龙华民被召赴北京。按龙华民已于万历二十五年(1597年)来华。

《圜容较义》前有万历四十二年(1614 年)李之藻序，称：戊申(1609 年)十一月毕《圜容较义》一书。

万历三十八年庚戌(1610 年)

是年三月(公历 4 月)李之藻由利玛窦受洗于北京，西名 Leo 译名“良”，又称凉庵居士(见《杨淇園先生年谱》第 25 页)。

是年闰三月十九日(公历 5 月 11 日)利玛窦死于北京(1552～1610)。

“查利玛窦优恤原疏系万历三十八年四月二十三日本(礼)部署部事左侍郎吴道南[①] 主客司郎中(福清人)林茂槐等题给葬地。奉旨是随经署府事府丞黄吉士查给阜城门外二里沟[②]，藉没私并佛寺三十八间，地基二十亩，付利(玛窦)茔葬。”〔见《西洋新法历书》“奏疏”第 307 及 308 页(据北京大学图书部藏明刻清修本，下

① 吴道南《明史》卷二一七有传。

② 现在阜城门外马尾沟中国大主教北京市马尾沟堂区革新委员会之内。

同)及《增订徐文定公集》卷首下《行实》第10页〕。

清尤侗(1618～1704)《西堂余集》内《欧逻巴传》亦称:"(利玛窦)久之病卒,赐葬阜城门外二里沟,曰利泰西墓。"又尤侗《外国竹枝词》"欧逻巴"词注称:"利玛窦始入中国,赐葬阜城门外二里沟,曰利泰西墓。"(见《昭代丛书甲集》卷二六本,《外国竹枝词》)。

"京兆玉沙王公(应麟)立石为文记之,有内官言于相国叶公文忠(向高)① 曰:诸远方来宾者从古皆无赐葬,何独厚于利子,文忠公曰:子见从古来宾,其道德学问有一如利子者乎。毋论其他事,即译《几何原本》一书,便宜赐葬地矣。"(见艾儒略《大西利先生行迹》,附《辩学遗牍》后,1919年英敛之复刻本)。

按王应麟字玉沙,福建人,万历十五年任南雄府同知。二十二年由王尚廉继任(见《广东通志》卷十八职官表二十,商务本)。

万历三十九年辛亥(1611年)

是年都中方争论历法,徐光启与庞迪我、熊三拔重阅利玛窦校正本《几何原本》(见徐光启题《几何原本》再校本)。

"是年周子愚言大西洋归化人庞迪我、熊三拔等深明历法,其所携书有中国载籍所未及者,当令译上,以资采择。"(见《明史》卷三二六)

熊三拔(Sabbathin de Ursis,1606B～1620)著《简平仪说》一卷,有1611年北京刻本,前有徐光启序,熊三拔又有《泰西水法》六卷,有1612年北京刻本,《表度说》一卷1614年撰,以上三书,都收入《四库全书》和《天学初函》。

是年四月李之藻遭父丧,丁忧回籍,邀郭居静、金尼阁二司铎

① 叶向高,号进卿,福清人,《明史》卷二四〇有传。

入越(见《杨淇園先生年谱》引:丁志麟:《杨淇園先生超性事迹》,及陈垣:明《浙西李之藻传》)。

据《明清史料》乙编第一本第一页所记万历三十九年八月十四日手本:钦天监正为徐浩,监正管监副事为薛承惠,监副为徐江,因是时钦天监尚由华人主持。

是时再校《几何原本》,复刻此书。

徐光启孙尔默(1610~1669)跋《几何原本》三校本称:"昔万历丁未(1607年)泰西利氏口译而授之先文定公,笔受而述之简册,正其讹舛,删其复蔓,而付之剞劂民。越五年辛亥(1611年)再校而复刻之。今此本仍多点窜,又辛亥以后之手笔也。捧读之余,俨然对越。因念吾辈读书如拂尘几,愈拂愈净,不愈其烦也。译本曾转寄西土,彼中学人,谓经先公订正之后,较之原本翻觉屈(?)志发疑。心计成数,以此知公之于数学,出自性成,特籍西文以发皇耳。"〔见《徐氏宗谱》,《圣教杂志》第二十二年第十一期(1933年11月)《徐上海特刊》第61,87,88,93,94各页引〕。

万历四十年壬子(1612年)

万历四十年监正周子愚建议参用西法修历(见《西洋新法历书》,"题疏",第16页)。

"万历四十年十一月朔日食,钦天监推算得未正一刻初亏。而兵部员外郎范守己候得申初一刻,则是先天四刻,礼部于十二月议请改历。"(见《西洋新法历书》,"题疏",第11~12页)。

是年王英明撰《历体略》三卷。"英明字子晦,开州人,万历丙午(1606年)举人,是编成万历壬子。……其上中二卷,所讲中法,亦皆与西法相吻合。盖是时徐光启《新法算书》尚未出,而利玛窦先至中国,业有传其说者,故英明阴用之耳。"(见《四库全书总目》卷一

〇六)

熊三拔《泰西水法》六卷,有 1612 年北京刻本。

万历四十一年癸丑(1613 年)

"万历四十一年正月十五日月食不合,礼部又复请改历。"(见《西洋新法历书》"题疏"第 10 页)

是年李之藻奏上西洋天文学说十四事,又请亟开馆局,翻译西法(见《明史纪事本末》第七十三卷)。即《请译西洋历法等书疏》,见增订《徐文定公集》卷六,附《李之藻文稿》之内(1933 年增订本)。

是年李之藻序《同文算指前编》二卷,《通编》八卷,题利玛窦、李之藻译,有明万历癸丑刻本,藏前故宫图书馆和浙江图书馆。据《郘亭书目》称:"姚若有钞本,后多一卷。"现巴黎图书馆亦藏有钞本《别编》一卷。

在《同文算指》前后有《西镜录》①。

万历四十二年甲寅(1614 年)

是年徐光启序《同文算指》。

是年熊三拔撰《表度说》一卷,题熊三拔口授,慈水周子愚、武林卓尔康笔记,严敦杰藏此书明刊本,有万历甲寅周子愚序,又李之藻序,无年月。此书引《天地仪解》一书,现在还未见到。

是年年末,金尼阁返罗马后,除接洽教会事务外,并由教宗保禄五世(Paul V)颁赐大批书藏。万历四十六年(1618 年)金尼阁和其他教士二十二人返华,四十八年(1620 年)七月二十二日,抵澳门。书虽无恙,人则仅有傅泛际(Furtado ,1621B～1653)等五人

① 见本集第 60 页(*即本卷第 69 页。——编者)。

（参看方豪，《方豪文录》内：《明季西书七千部流入中国考》第 1～13 页，和魏特著，杨丙辰译，《汤若望传》Alfons Väth，S. J. —*Johann Adam Schall von Bell，S. J.*，1947 年商务印本，第一册，第 43 页）。

万历四十三年乙卯（1615 年）

西洋人阳玛诺撰《天问略》一卷（见《四库全书总目》卷一〇六）。是年北京有刻本是介绍伽利略（Galileo）天文学说。

是年五月十二日，枢机主教伯拉明（Bellarmin）自罗马致书于徐光启、李之藻、杨廷筠等人（见《杨淇园先生年谱》第 32 页）。

万历四十四年丙辰（1616 年）

是年礼部郎中徐如珂① 和礼部侍郎沈㴶（？～1624，浙江乌程人，《明史》卷二一八有传）给事中晏文辉合疏请逐天主教徒，至十二月令王丰肃、庞迪我等俱赴广东，令下未行，所司亦不为督发（见《野获编》卷三十，第 35～36 页，并参《明史》卷三二六和《明纪》第四卷）。

“是年五月沈㴶上《参远夷疏》第一疏（见《圣朝破邪集》卷一，《南宫署牍》第 5～10 页）。疏上，数月未复。”

八月沈㴶上《参远夷第二疏》（见《破邪集》第一，《南宫署牍》第 10～14 页），疏上又不报。

十二月沈㴶上《参远夷第三疏》（见《破邪集》卷一，《南宫署牍》第 14～17 页）。

---

① 徐如珂《处西人王丰肃议》，见《徐念阳公集》卷一（第 3～4 页），《乾坤正气集》第二十九辑。

是年十二月二十八日颁禁教令(见《破邪集》卷一,第 26～27 页)。《明史》卷三二六称"至十二月,令(王)丰肃,及(庞)迪我等,俱赴广东",即指此事。

沈漼的疏曾经徐光启、李之藻、杨廷筠、孙元化诸人上疏辩护。光启曾上二疏,其一疏现题《辩学疏稿》(见《入华耶稣会士列传》第 10 页,此案情形亦见该书第 104～107 页)。

《明史》卷二一八称:"沈漼字铭缜,乌程人。……累官南京礼部侍郎,掌部事,西洋人利玛窦入贡,因居南京。与其徒王丰肃等倡天主教,士大夫多宗之。漼奏陪京都会,不宜令异教处此,识者韪其言。然漼素乏时誉。"

是年沈漼《参远夷第三疏》引万历四十四年庞迪我、熊三拔疏揭之文,谓当时在华教士十三人,当即指:

(一)在南京的王丰肃(即高一志)、谢务禄(即曾德昭 Alvarez de Semedo,1613B～1658)[①] (见《南宫署牌》,会审王丰肃等犯一案)。

(二)在北京的庞迪我、熊三拔(见《参远夷第一疏》)。

(三)在杭州的郭居静(见《南宫署牍》,被捕三郎供词)、史惟贞(Pierve van Spiere)(见《天主教传行中国考》)、金尼阁、毕方济(François Sambias,1613B～1649)、龙华民、艾儒略(见《杨淇园公行迹》)。

(四)在南昌的罗如望(见《南宫署牍》,被逮教友游禄供词)。

(五)在南雄的阳玛诺(见《南宫署牍》,会审王丰肃等犯一案)。

(六)在韶州的费奇规(见《南宫署牍》,被捕蔡思命供词)。

但据杨廷锷考据:除已故者外,是时尚有在澳门的阳玛诺

① 曾德昭撰《中国史》共二卷,上卷二十一章,下卷十三章。上卷第十一章论中国数学,下卷第十三章是李之藻传,北堂有法译本和英译本(1655 年)。

(Emmannel Diaz,1610B～1659)、骆入禄(Jérôme Rodvignez)和在内地的黎宁石(Pierre Ribeire)(见杨廷筠,《杨淇园先生年谱》,第36～37页)。

万历四十五年丁巳(1617年)

是年王丰肃、谢务禄、庞迪我、熊三拔等押解广东(见《圣朝破邪集》卷一,第28～34页)。

是年八月《南京都察院咨礼部文》称:"据差官解到夷犯王丰肃、谢务禄二名,俱经案发广东布政司,会同按都二司,将二犯译审。……及将未获阳玛诺严去缉拿。"

万历四十六年戊午(1618年)

德礼贤,《中国天主教传教史》称:"是年四月庞迪我疏请收回禁教令。但沈德符《野获编》则称在"是年十月"。《明史》则未题何月,仅称:"是年庞迪我上表乞宽假不报,怏怏而去,而南都之行教如故。"(见《明史》卷三二六)

同时龙华民亦请收回成命。《燕京开教略》,称:"至万历四十六年……忽下谕旨,令在京之西洋人俱归澳门,又严禁中国人奉天主教。龙华民上疏请收回成命,而未蒙俞允。"(见《燕京开教略》中篇第15页)

万历四十七年己未(1619年)

瞿式耜(1590～1650)上《讲求火器疏》,称:"臣考万历四十七年(十月)奉旨训练遣使购求而得西洋所进大炮四门者,今礼部右侍郎徐光启也。天启元年(1621年)建议征广东取得红夷大炮二十三门者,南京太仆寺少卿今丁忧服阕李之藻也。深明台铳事宜赞画

关门，建台置铳者，今起升兵部武选司员外郎孙元化(?～1632)也。……夫光启学究天人，才兼文武，东事之初，屡陈方略，凿凿可行，料度情形，尤多悬合。……今光启见在讲幄，可备顾用，元化亦升任将到，可备驰驱。"(见张全恭，《瞿式耜》(1590～1650)引《瞿忠宣公集》卷二，刊入《民族杂志》第五卷第七期)

泰昌元年庚申(1620 年)

是年艾儒略著《利玛窦行实》一卷，一作《大西利先生行迹》。有 1929 年北京复刻本，前有陈垣、马良序。

是年金尼阁率邓玉函(Jean Terrenz,1621B～1630)、罗雅谷(Jacques Rho,1624B～1638)、汤若望(Jean Adam von Bell,1622B～1666)、傅泛际(Francois Furtado,1621B～1653)四人，携西书七千部，和枢机主教伯拉明致徐光启、杨廷筠等人书，并特颁教宗遐福，同抵华(见方豪，《明季西书七千部流入中国考》，《文史杂志》第三卷，第一、二期合刊，1944 年 1 月第 47～51 页)。

是年李之藻丁母忧。

天启元年(1620 年)李之藻为《制胜务须西铳乞敕速取疏》，略曰："臣在籍时，少詹事徐光启奉敕练兵，欲以此铳在营教演，托臣与原任副使杨廷筠合议，遣臣门人张焘往购，得大铳四门，此去年十月间事也。"(见《皇明经世文编》，《李我存集》)

是年熊三拔(Sabbatino de Ursis,1575～1620)卒于澳门。

天启元年辛酉(1621 年)

是年孙元化在北京入教，张赓在杭州入教。

是年杨廷筠作《代疑编》，有李之藻序，天启二年北京有刻本。

是年邓玉函在华致书他的欧洲友人 P. Jacques Koller de Munich 称："华人需要改历，而缺乏名师指导，朝廷虽拟授权来华教士改历，因沈漼的反对，及辽东战事，今尚未实现云。"[1]

是年邓玉函自杭州致书法倍耳(Faber)，称："中国人所渴望者，乃更精密之日月蚀推测方法。第谷之方法虽佳，但有时尚可差至十五分钟，此事如蒙楷西亲王从中说项，必能成功。"(见《方豪文录》第 299 页)

天启二年壬戌(1622 年)

《不得已辩》称："先是明季壬戌(1622)年开局开历法。"

熹宗天启二年十月《实录》卷二十七称："太仆寺添注少卿管工部水司郎中事李之藻题以夷攻夷二策，内言西洋大铳，可以制奴，乞招香山澳夷，以资战守。"

是年七月沈漼罢官，逾年死(《汤若望传》第一册第 95 页称："1624 年阳历 4 月 19 日卒。")。

是年龙华民和阳玛诺同到北京，因是时满洲战事已起，明廷要利用西洋人〔参看《入华耶稣会士列传》第 78 页引 Alvaro Semedo, *Histoire*, 1655, p. 348(曾德昭[2]《中国史》法译本)。但同书第 127 页引 Relation de 1621, p. 60，则称阳玛诺于 1621 年被派至北京〕。

天启三年癸亥(1623 年)

熹宗天启三年四月《实录》卷三十三称："李之藻言制胜莫先火

---

① 见 Henri Bernard, —*Le Première Académie des Lincée et la Chine*, Il Marco Polo, Rassegna Italiana Per L'Estreme Oriente, Febbraio 1940—XVIII, Anno II, Numero 3, p. 31, Sciangai.

② 曾德照，原名谢务禄。

器。臣访知香山澳夷所传西洋大铳，为猛烈神器，宜差官往购。……至是两广总督胡应台，遣游击张焘(？～1632)解送夷目七名，通事一名，傔伴十六名，赴京听用。”

按《正教奉褒》第十四页载“天启二年艾儒略、毕方济奉召至京听用”，当即指购铳赴京听用事。但据《入华耶稣会士列传》：艾儒略传，毕方济传，则1623年艾儒略方在常熟开教，毕方济方在上海松江开教，未曾至京。

是年夏杨廷筠与艾儒略作《职方外纪》六卷(按北京图书馆藏明刻本《职方外纪》六卷，三册)。

是年瞿式耜丁忧在籍，由艾儒略领洗入教(见《入华耶稣会士列传》，艾儒略传)。

是年阳历一月二十五日，龙华民和汤若望同抵北京(见《汤若望传》第一册第97页)。

天启五年乙丑(1625年)

王丰肃于万历四十五年(1617年)押回广东后，于天启四年(1624年)再入内地。时已改名高一志，后到山西绛州，时金尼阁在绛州，高到后，金以教务遗高，自往陕西开教。金尼阁著《况义》一卷，于天启五年(1625年)刻于西安，是年金在陕西。又《西儒耳目资》三卷，于天启六年(1626年)刻于杭州(北京图书馆善本室藏有天启刻本一种)。金在西安为王徵及张某受洗(见《入华耶稣会士列传》，第137～138页)。高一志译有《寰宇始末》和《空际格致》二书(参看崇祯二年己巳条)。

王徵(1572～1644)《奇器图说序》称：“余向在里中，得金(尼阁)四表先生为指授西文字母、字父二十五号，刻有《西儒耳目资》一书。”〔见天启七年(1627年)丁卯孟春关中泾邑了一道人王徵序

《奇器图说》〕

按王徵字良甫，号葵心，自号了一道人，陕西泾阳县人，天启壬戌（1622 年）进士。甲申（1644 年）清兵陷关中王死去，时甲申三月。康熙三年（1644 年）泾阳县志有传和墓志铭。

王徵还有《额辣济亚牖造诸器图说》（1640 年）一书。现藏有钞本，无图。

是年徐光启因魏珰私人智铤劾，奉旨"冠带闲住"。

天启六年丙寅（1626 年）

王徵（1572～1644）《奇器图说序》称："丙寅（1626 年）冬余补铨如都，会龙（华民）精华、邓（玉函）函璞、汤（若望）道未三先生，以候旨修历，寓旧邸中，余得朝夕晤请教益，甚欢也。"〔见天启七年（1627 年）丁卯孟春关中泾邑了一道人王徵《奇器图说序》。〕

是年仲秋月汤若望自序《远镜说》一卷（见方豪，《顺治刻本西洋新法历书四种题记》，《东方杂志》第四十卷第八号，第 19 页，1944 年 4 月 30 日）。此书由汤若望和李祖白共译（Courant 5656）。

日后西教士皆随身携带望远镜。崇祯四年（1631 年）四月初八日卢安德，磐石（André Rudomina）在福州出示远镜，崇祯五年（1632 年）五月二十日艾儒略在桃源以望远镜示林太学，崇祯六年（1633 年）三月二日林有杞在清漳求观望镜（见方豪，《康熙前钦天监以外研究天文之西人》，《东方杂志》第三十九卷，第十号，1943 年 7 月 30 日，第 28～29 页）。

天启七年丁卯（1627 年）

《奇器图说》三卷（1627 年），其"录最"称："《奇器图说》乃远西诸儒携来彼中图书，此其七千余部中之一支，就一支中，此特其千

百之什一耳。"因万历四十二年(1614 年)之末,比利时教士金尼阁返抵罗马后,除接洽教会事务外,并由教皇保禄五世颁赐大批书藏,万历四十六年(1618 年),金尼阁和其他教士二十二人返华,四十八年(1620 年)七月二日,人书俱抵澳门[1]。《奇器图说》殆为七千部中之最先译汉者(见方豪,《明季西书七千部流入中国考》,《文史杂志》,第三卷,第一、二期合刊,1944 年 1 月第 47～51 页,互见《方豪文录》)。

是年十二月杨廷筠死,年七十一岁(见《杨廷筠先生年谱》第 53 页)。

是年秋,汤若望被遣派赴西安(见《汤若望传》上卷,第 103 页)。

崇祯元年戊辰(1628 年)

是年七月以钦天监推算日食不准,礼部疏请改修历法(见《古今图书集成》历法典第五十卷引《春明梦余录》)。

是年杭州李之藻和傅泛际译亚里斯多得所撰 *De coelo et mundo* 称为《寰有诠》六卷,在杭州出版。按此书始译于天启三年(1623 年),天启五年(1625 年)译成,天启六年(1626 年)修正,崇祯元年(1628 年)在杭州出版[2]〔参看裴化行,《崇祯历书,及西洋新法历书》,《华裔学志》(*Monumenta Serica*)第三卷,1938 年,北京,第 69 页,注 122〕。

献县耶稣会哲学院(现迁北京,船板胡同,名光启院)藏《寰有诠》,末页题云:"明天启五年初译毕,崇祯元年中秋刻竣。"(见《方

① 见 Abbè Dehaisnes 院长所撰法文金尼阁传(1864 年)。

② 北京图书馆有藏。

豪文录》第 3 页)

崇祯二年己巳(1629 年)

崇祯二年五月初一日日食,礼部于四月二十九日揭三家预算日食,三家者:《大统历》,《回回历》,新法也,至期验之,光启推算为合(见《西洋新法历书》,"阁题"第 5 页,"揭帖"第 4 和 5 页)。

"崇祯二年五月乙酉朔日食,礼部侍郎徐光启依西法推分数,与大统,回回所推互异,已而光启法验,余皆疏。礼部侍郎翁正春因请仿洪武初设回回科之例,令(庞)迪我等同测验,从之。开局于首善书院,以光启督之,光启因举李之藻,西洋人龙华民、邓玉函。"(见《澳门记略》卷下,第 46 页)

崇祯二年七月十一日礼部题疏称四十等年原疏推举五人,为史臣徐光启、臬臣邢云路、部臣范守巳、崔儒秀、李之藻。今徐光启在礼部,李之藻以南京太仆寺少卿丁忧,服满在籍。同月十四日如议修改历法,以徐光启督修一切,并起用李之藻(见《西洋新法历书》,"题疏",第 14 和 19 页)。

是年七月二十一日礼部请颁"督修历法关防"许之(见《西洋新法历书》"题疏",第 20～21 页)。

是年七月二十六日徐光启上书陈修历急要事宜四款,分三十三条,计历法修正十条,修历用人三条,内举龙华民、邓玉函。急用仪象十条,度数旁通十条,以为通数学始可通(一)气象学,(二)统计学,(三)医学,(四)水利工程,(五)营造学,(六)钟表学,(七)音乐,(八)物理学与机械工程,(九)军事学,(十)地理学和制图学(见《西洋新法历书》,"奏疏",第 28～37 页)。

"崇祯二年七月徐光启荐邓玉函同修历法,邓玉函者德国之干司但司(Constance)人也。……由澳门入华,因精医,人皆敬之,既

入局，翻译诸术表草稿八卷。"（见"利玛窦，汤若望二君传略"，《格致汇编》第五年，冬季册，1890 年冬季出版）

《明史纪事本末》："崇祯二年九月癸卯开设历局。"

"崇祯二年九月敕谕徐光启修历法。"（见《西洋新法历书》，"敕谕"，第 2 页）

汤若望，日耳曼人，自言崇祯二年已入北京（见王先谦，《东华录》"顺治二"，及《西洋新法历书》"新法表异"，卷上，第 32 页）。

是年高一志（即王丰肃）译 *Histoire du monde du P. Vagnoni* 成《寰宇始末》二卷，阳玛诺，傅泛际，及罗雅谷曾加校订。又译 *Traité de cosmographie et de météorologie du P. Vagnoni* 成《空际格致》二卷。

是年陈于阶以儒士佐徐光启修历。

陈垣《明末殉国者陈于阶传》称："陈于阶，《明史》附高倬传，《南疆佚史》与南都殉难诸臣列成治等同卷，皆许其死节。而生平事迹不详。吾得其家传，及诸家疏稿，乃参考志乘，为补传如左：

陈于阶字瞻一，号仲台，上海百曲港人。……母徐光启女兄也。于阶性醇笃，嗜书，言笑不苟。幼从徐光启学天算，又受神学于意大利人毕方济。问铳法于日耳曼人汤若望。崇祯二年以儒士佐光启修历。六年十月光启疾笃，疏治历成模，称其思精。推测巧擅绘制，非阿言也。七年八月十六夜月食阴晴难料，先期督修历法李天经，题奏差员携器分诣山海关登州公同抚臣测验。山海关差邬明著、朱光大往。登州差于阶及朱国寿往。十六年九月南京兵部尚书史可法荐授钦天监博士，官虽司天，职实造炮。弘光元年五月十六日从容就义，年五十一。"（见陈垣，《明末殉国者陈于阶传》，《华裔学志》，第十卷，第一、二合期）

《南吴旧话录》卷二忠义："陈（于阶）仲台少耽历法，长游京师，

因用荐授监博士。……都城陷，仲台南奔弘光朝，升钦天监挈壶，乙酉五月初十日，上出奔……从容自经死。"〔严敦杰补录〕

崇祯三年庚午(1630 年)

是年三月十一日徐光启上言论四川得资县生员冷守中论历之误(见《西洋新法历书》"学历小辩"第 25～27 页)。

崇祯三年四月初二日邓玉函死，五月十六日徐光启荐汤若望，七月荐罗雅谷入京修历(见《西洋新法历书》，"题疏"第 45 页)。

"(邓)玉函卒，又徵西洋人汤若望，罗雅谷译著演算。"(见《明史》卷三一"志第七"和《澳门记略》卷下，第 46 页)

按邓玉函以崇祯三年四月初三日死于北京。Sica《名录》亦作 1630 年 5 月 13 日死于北京，与此合。葬阜城门外滕公栅栏利玛窦墓附近。

是年七月初二日罗雅谷由河南开封来京，同月初六日入局(见《西洋新法历书》，"题疏"，第 47 及 317 页)。

是年仲秋罗雅谷自识所著《比例规解》一卷，谓：昔在上海，曾为徐宗伯造其尺，而未暇译书(见《西洋新法历书》，"比例规解")。

是时北京已有观象台二处，本年十一月十八日徐光启曾为推测冬至时刻而跌坠台下(见 1933 年刻《增订徐文定公集》卷四)。

是年十一年李之藻死(见《西洋新法历书》，"题疏"第 57 页，及陈垣：《明浙西李之藻传》。1919 刻本)，年六十五(1565～1630)(见方豪，《李我存研究》)。

是年十二月汤若望以徐光启荐，由陕西西安府来京，同月初二日入局(见《西洋新法历书》，"题疏"第 47 及 317 页)。因汤若望以十二月入京，故《不得已辩》称："先是明季壬戌年(1622 年)开局改历法，阅十年而汤若望自陕西西安府天主堂行教，以崇祯四年辛未

(1631 年)钦取进京。"

是年六月皮岛副将刘兴治为乱。廷议复设登莱巡抚,擢孙元化以右佥都御史任之。

崇祯四年辛未(1631 年)

崇祯四年春正月二十八日徐光启第一次进历书一套,共六卷,内:《历书总目》一卷,《日躔历指》一卷,《测天约说》二卷,《大测》二卷,《历表》一套,共一十八卷,内《日躔表》二卷,《割圆八线表》六卷,《黄道升度表》七卷,《黄赤道距度表》一卷,《通率表》一卷,前后共二十四卷(见《西洋新法历书》,"题疏",第 58 及 59 页,或《四库全书》本《新法算书》卷一,缘起一)。按《明史》卷三十一,及《明史稿》第九册,并作二十四卷,《明史纪事本末》误作二十二卷。

崇祯四年辛未仲春,陆安郑洪猷序《几何要法》(*Compendium Euclidis*)四卷,书题泰西艾儒略口述,海虞瞿式谷笔受,古闽叶益蕃参校,吴淞陈于阶,陆安郑洪猷,山阴陈应登同校梓。

据裴化行考证:《几何要法》一书或录自 *Euclidis Elementorum libri XV*) Jo. Magniensis, Cologne, 1592 年一书(见裴化行"崇祯历书及西洋新法历书"《华裔学志》,第三卷,第 443 页,1938 年)。

是年保定府满城县玉山布衣魏文魁遣子象乾上《历元》,六月初一日又咨礼部陈前事并上《历测》、《历元》二书,辩论历法(见《西洋新法历书》"学历小辩")。

是年八月初一日徐光启第二次进《测量全义》十卷,《恒星历指》三卷,《恒星历表》四卷,《恒星总图》一折,《恒星图像》一卷,《揆日解订讹》一卷,《比例规解》一卷,共二十卷并一折(见《西洋新法历书》,"题疏",第 61～62 页或四库全书本新法算书卷二,缘起二)。按《明史》卷三十一及《续文献通考》第二〇〇卷,都称二十一

卷,因一折亦称卷。

是年八月二十八日冷守中勘四月十五日月食不合(见《西洋新法历书》,"学历小辩",第 28～30 页)。

是年十一月二十二日李笃培死,笃培字汝植,招远人,著《中西数学图说》十二册,多介绍西说。

是年以后朝鲜使臣时到中国,访求新历法(参看朝鲜本,《国朝宝鉴》卷三十五,卷三十八)。

崇祯五年壬申(1632 年)

是年四月初四日徐光启第三次进《月离历指》四卷,《月离历表》六卷(以上系罗雅谷译撰)《交食历指》四卷,《交食历表》二卷(以上系汤若望译撰),《南北高弧表》一十二卷,《诸方半昼分表》一卷,《诸方晨昏分表》一卷(以上系罗雅谷,汤若望指授,监局官生推算),共为三十卷(见《西洋新法历书》,"题疏",第 80～81 页或《四库全书》本《新法算书》卷三,缘起二)。

是年十月十一日徐光启疏荐山东巡抚朱大典,陕西按察使李天经,原任监察御史金声,原任大理寺评事王应遴通历法(见《西洋新法历书》,"题疏",第 98～99 页)。

按李天经,字仁常,一字性参,吴桥定原乡人,万历己卯(1579 年)生,顺治十六年己亥(1659 年)九月死,年八十一。明末以河南布政使司右布政使入觐。徐光启以李学习历法,荐于朝,遂留京师,久之,授光禄寺卿,寇乱还籍。顺治元年(1644 年)求遗老,李以光禄寺卿应召入见,年已六十六。自著(?)《浑天仪说》五卷(见雍正十一年《畿辅通志》卷一七〇,和康熙十二年《吴桥县志》卷六)。

是年七月二十二日孙元化与张焘同弃市。

《明史》卷二十三本纪第二十三:"崇祯五年春正月辛亥,孔有

德陷登州，游击陈良谟战死，总兵官张可大死之，巡抚都御史孙元化，副使宋光兰等被执，寻纵还。”“崇祯五年七月己未孙元化弃市”。

孙元化所著非算法书还有：《西学杂著》，见《江南通志》卷一九二。又《西洋神机》二卷，《嘉定县志》存目于兵家类，提要又称：《大要根于算法》，1937 年上海文献展览会，曾展览此书。又有《水一方人集》十四卷，一作《孙中丞集》，一作《孙初阳中丞遗集》，共有(一)公子和斗手录本，(二)李兆洛校录本，(三)上谷侯氏藏本，(四)毛生甫校订本等四种(见宋伯胤，《孙元化著述略考》，《上智馆刊》三卷二期，第 77 页)。

按《畿辅通志》卷一三五称：“《浑天仪说》五卷，明李天经撰。”注称：“见《河间府志》，天经，吴桥人。《吴桥志》言天经纂《崇祯历书》者。《崇祯历书》凡一百二十六卷，大学士徐光启使王应遴，李之藻等共修者。不独天经为之，惟《仪说》五卷，则其所自为书也。”《明史》卷二十五天文志第一不作李天经《浑天仪说》，而称：“仁和李之藻《浑天仪说》，发明制造施用之法，文多不载。”查《浑天仪说》四卷题汤若望撰，龙华民、罗雅谷订，前有李天经序文。

崇祯六年癸酉(1633 年)

是年二月初七日梅文鼎生。

是年十月初七日徐光启死，距生嘉靖壬戌(1562 年)三月二十一日年七十二(见《增订徐文定公集》卷首上，年谱第 6 页)。

“(崇祯)六年十月(徐)光启死，以山东参政李天经代之”(见《澳门记略》卷下，第 46 页)。

“所纂《历书》将百卷”(见《明史纪事本末》第七十三卷)。

徐光启死后，关于算学译著据徐光启(1562～1633)子徐骥

(1582～1645)于《文定公行实》中称有:《崇祯历书》一百三十二卷(?),《几何原本》,《测量法义》,《勾股义》行于世;《读书算》,《九章算法》藏于家。至光启孙尔默(1610～1669)于康熙癸卯(1663)则称《读书算》一书未刻而佚,而于《九章算法》则未言存佚。

崇祯六年十月初六日光启死前一日犹上疏请嘉勉汤罗二人,有云:"远臣罗雅谷、汤若望等,撰译书表,制造仪器,算测交食躔度,讲教监局官生。数年呕心沥血,几于颖脱唇焦,功应首叙,但远臣辈守素学道,不愿官职,劳无可酬,惟有量给无碍田房,以为安身养赡之地,不惟后学攸资,而异域归忠亦可假此为劝。"(见方豪,《徐光启》,引《文集》卷四)

据崇祯七年汤若望致书 R. P. Busée 称:崇祯六年(1633 年),崇祯帝曾移宫中某佛堂设置天文仪器,当时朝野以为崇祯帝亦曾信教,实非事实(参看裴化行,《崇祯历书及西洋新法历书》,《华裔学志》,第三卷,第 456 页,注 221 及附录一)。至浑天仪一具,则于崇祯九年(1636)由李天经正式呈进。

按以上史料见 1938 年《华裔学志》*Mounmenta Serica* 第五册,裴化行的 *L' Encyclopedia Astronomique de Père Schall*,方豪有节译本,载《方豪文录》第 301～302 页。

崇祯七年甲戌(1634 年)

是年七月十九日李天经第四次进《五纬总论》一卷,《日躔增》一卷,《五星图》一卷,《日躔表》一卷,《火木土二百恒年表》并《周岁时刻表》共三卷(以上系罗雅谷译撰),《交食历指》三卷,《交表诸表用法》二卷,《交食表》四卷(以上系汤若望译撰),《黄平象限表》共七卷,《木土加减表》二卷,《交食简法表》二卷,《方根表》二卷(以上系罗雅谷、汤若望指授,监局官生推算),恒星屏障一架(系汤若望

制），共二十九卷，一架（见《西洋新法历书》，"奏疏"，第126页，或《四库全书》本《新法算书》卷四，缘起三）。按《明史》卷三十一、《明史稿》第九册、《澳门记略》卷下都作二十九卷，《明史纪事本末》第三十七卷误作二十七卷。

是年十二月二日李天经第五次进《五纬历指》共八卷，《五纬用法》一卷，《日躔考》共二卷，《夜中测时》一卷（以上系罗雅谷译撰），《交食蒙求》一卷，《古今交食考》一卷，《恒星出没表》共二卷。（以上系汤若望译撰），《高弧表》五卷，《五纬诸表》共九卷，《甲戌乙亥日躔细行》二卷（以上系罗雅谷，汤若望指授，监局官生推算），共三十二卷（按《明史》卷三十一作三十二卷，《明史稿》第九册误作三十卷）。前后五次所进共一百三十七卷（内有一折、一架亦称卷，所以作一百三十七卷）。《崇祯历书》至是告成（见《西洋新法历书》，"题疏"，第157及158页，或《四库全书》本《新法算书》卷三，缘起四）。

是时并将所修《历书》付梓，现明刻本题有："工部虞衡清吏司郎中杨惟一较梓"字样。

《粤雅堂丛书》本清季振宜《季沧苇书目》内："崇祯历书总目"如下

1. 《治历起缘》 八本，
2. 《新历晓或》 一本，
3. 《测量全义》 十本，
4. 《古今交食考》 一本，
5. 《筹算》 一本，
6. 《新法历引》 一本，
7. 《历法西传》 一本，
8. 《新法表要》 一本，
9. 《筹算指》 一本，

10.《日躔表》	一本，
11.《八线表》	一本，
12.《五纬表》	一本，
13.《远望镜》	一本，
14.《奏疏》	四本，
15.《五纬历指》	九本，
16.《交食表》	九本，
17.《日躔历指》	一本，
18.《大测》	二本，
19.《测天约说》	二本，
20.《测食略》	二本，
21.《日躔表》	又一本，
22.《历小辩》	一本，
23.《五纬表》	又十本，
24.《浑天仪说》	五本，
25.《黄赤正球》	二本，
26.《恒星历指》	四本，
27.《恒星纬表》	二本，
28.《恒星出没》	二本，
29.《又(割圆)八线表》	一本，
30.《几何要法》	四本，
31.《月躔历指》	四本，
32.《月躔表》	四本，
33.《交食历法》	七本。

共三十三种。

崇祯八年乙亥(1635 年)

(崇祯)八年李天经又上历法条议二十六则,是时西法书器俱完(见《明史》卷三十一)。

是年四月李天经进《乙亥丙子七政行度》四册,又参订历法条议二十六则(见《西洋新法历书》"题疏",第 174~185 页)。

崇祯九年丙子(1636 年)

"(崇祯)九年正月十五日辛酉晓望日食,天经及大统,回回,东局,各预推亏,圆,食,甚,分秒时刻,……其日天经与罗雅谷、汤若望、大理评事王应遴、礼臣李焻,及监局魏文魁等赴台测验,惟天经所推独合。"(见《明史》卷三十一,《澳门记略》卷下,第 47 页)

是年四月二十八日李天经进《浑天仪说》四卷一套,《运重图说》一册,浑天仪一具并盏、星球一具并盏,牙晷二具各有盝运重一具(见《西洋新法历书》,"题疏",第 244 页)。

《浑天仪说》四卷,题汤若望撰,龙华民、罗雅谷订,前有李天经序文。

是年李天经序《名理探》十卷。该书题傅泛际(F. Furtado,1621B~1630)译义,李之藻达辞。李天经序文题,"奉命修旧历法,山东布政司右参政李天经序《名理探》(十卷)于修历公署"。此书有 1931 年土山湾重刻本,1941 年商务印书馆印本,和前辅仁大学影印陈援庵(垣)先生藏五卷钞本。

崇祯十年丁丑(1637 年)

"(崇祯)十年正月辛丑朔日食,各局预推如前食时,亦惟(李)天经为密。"(见《澳门记略》卷下第 47 页)

是年十二月进崇祯《戊寅年七政经纬新历》各一册(见《西洋新法历书》,“题疏”,第 293 页)。

崇祯十一年戊寅(1638 年)

“是年正月诏仍行大统历,旁求参考西法,与回回科并存”。

是年三月十三日阳历四月二十六日罗雅谷死(见《西洋新法历书》,“题疏”第 304 页)。墓在阜城门外滕公栅栏。

罗雅谷死后,历法全归汤若望推步。

是年八月进李天经光禄寺卿,仍管历务(见《明史》卷三十一)。

是年十一月监局官生:杨之华,黄宏宪,朱国寿,祝懋元,王应遴,张寀臣,朱光大,朱光燦,周士昌,朱廷枢,王观晓各进叙有差(见《西洋新法历书》,“奏疏”第 322~326 页)。上列诸人除王观晓一人外,都继续参加续修《西洋新法历书》工作(参看顺治元年条)。

是年十二月进《崇祯己卯年七政经纬新历》一套(见《西洋新法历书》,“奏疏”,第 330 页)。

是年王徵著《崇一堂日记随笔》。

崇祯十二年己卯(1639 年)

是年十一月李天经进《黄赤全仪用法》一册(见《西洋新法历书》,“奏疏”第 344 页)。

是年十二月李天经进《庚辰年七政经纬新历》各一册(见《西洋新法历书》,“奏疏”第 347 页)。

是年李次虨(一作彪)序李之藻《名理探》。按方豪撰《李我存研究》称:李次虨系李之藻子,监局官生之李次亏或即李次虨之误。又方豪撰《读逻辑指要别记》又疑二人为昆仲辈(见《东方杂志》第三十九卷第十三号)。

是年阳历七月三十一日李天经曾上书请译述西洋工矿书籍，于同年八月六日奉准(见裴化行,《崇祯历书及西洋新法历书》,《华裔学志》第三卷第462页,及注240)。

崇祯十三年庚辰(1640年)

是年十二月李天经进《辛巳七政经纬新历》各一册(见《西洋新法历书》,"奏疏",第357～359页)。

是年禁西洋人入广东省(参看顺治四年条)。

是年陈荩谟著《度测》三卷,附《开方说》一卷,《度算解》一卷共四册,有钞本。前有崇祯庚辰(1640年)自序称:"国初制科,尚试算数,后寖厌薄焉……泰西来宾,斯学始备,大方家多传之。徐玄扈先生有《测量法义》、《勾股义》,……谟爰撰兹编,首诠算经,次胪诸法,合古今而浅言之,出以己意,发凡绘图,庶几《周髀》大彰,《法义》弥著,以便有志经济之习之者。"

按陈荩谟字献可,嘉兴人,《畴人传》有传。《度测》三卷目录如下:卷上:诠经,诠理,诠器,诠法,诠算,诠原。卷中:平矩以正绳,偃矩以望高,覆矩以测深,弦矩以见广。卷下:卧矩以知远,环矩以为圆,合矩以为方。附卷:《开方说》及《度算解》无目。

是年四月十九日高一志(即王丰肃)卒

是年十一月汤若望曾致书副教区长傅泛际讨论东局、西局、大统、回回四家礼限问题(见裴化行,《崇祯历书及西洋新法历书》,《华裔学志》第三卷,附录第三)。

是年季冬王徵(1572～1644)自序《额辣济亚牖造诸器图说》,说明是继续《奇器图说》的作品。

崇祯十四年辛巳(1641 年)

是年十二月李天经进《壬午七政经纬新历》各一册(见《西洋新法历书》,“奏疏”,第 395～397 页)。

是年李天经上言大统置闰之误(见《明史》卷三十一)。

“崇祯十四年十二月礼部上疏论治历,请敕下另立新法一科。”(见《古今图书集成·历法典》卷五十引《春明梦余录》)

崇祯十五年壬午(1642 年)

是年十二月李天经进《癸未七政经纬新历》各一册(见《西洋新法历书》,“奏疏”,第 399 页)。

是年汤若望制新法地平日晷,题“崇祯十五年岁次壬午,日躔东井吉里,修改历法远西汤若望创制”。原物初藏黄黎洲、全谢山,后归罗振玉(见罗振玉《楚雨楼丛书》第四种《金泥石屑》)。(严敦杰补录)

崇祯十六年癸未(1643 年)

“(崇祯)十六年三月乙丑朔日食,测又独验,八月诏西法果密,即改大统历法,通行天下,未几国变”(见《明史》卷三十一,及《澳门记略》卷下,第 46 页)。

是年十月以礼部奏疏,加给汤若望酒饭卓面半张,并优恤王应遴,其钦天监秋官正刘有庆,中官正贾良琦,历局供事:光禄寺署正黄宏宪,上林苑监丞陈亮采,经历朱光大,博士朱光枢,王观晓,周士昌,朱光显,宋发,各以原官加一级(见《西洋新法历书》,“奏议”第 408～411 页)。

是年焦勖序《火攻挈要》,是书上中下卷作《则克录》三卷。首题

汤若望授，宁国焦勖述，赵仲订。《海山仙馆丛书》有重刻本，上中，二卷别题《火攻挈要》。

明崇祯十七年甲申（1644年）

清顺治元年甲申

是年阴历正月明思宗赐汤若望"旌忠"，"崇义"扁额各一方（见《西洋新法历书》，"奏疏"，第412页）。

是年正月李天经进《甲申七政经纬新历》各一册（见《西洋新法历书》，"奏疏"，第414页）。

是年三月明朝亡。

是年六月汤若望向清朝上书称："修正历法西洋人汤若望启言：臣于明崇祯二年来京，曾用西洋新法厘正旧历。制有测量明晷定时考验诸器，尽进内廷，用以推测，屡屡密合，近闻诸器尽遭贼毁，臣拟另拟进呈。"（见《东华录》"顺治三"，及"格致汇编"（1809年）"利玛窦汤若望二君传略"）但《格致汇编》误作"顺治二年六月"，现据《东华录》校正。

是年七月清廷决自明岁顺治二年为始，即用新历颁行天下（见《东华录》，"顺治三"）。

同月，"汤若望制就浑天星球一座，地平日晷窥远镜各一具，并舆地屏图。"（见《东华录》"顺治三"）

是年"八月丙辰朔，日有食之，令大学士冯铨，同汤若望…测验…惟西洋新法，一一吻合，大统回回两法，俱差时刻云。"（见《东华录》"顺治三"）但《格致汇编》误作"顺治二年八月"，现据《东华录》校正。

汤若望著《新法表异》亦称："本（元）年八月一日验日食时刻分秒方位无差，奉有新法尽善尽美之旨，遂用新法造时宪历颁行天

下。”(见《西洋新法历书》)

是年“十月初颁时宪书。”(见《东华录》“顺治三”)

是年“十一月将钦天监印信着汤若望掌管,所属该监官员,嗣后一切进历占候选择等项,悉听掌印官举行。”(见《东华录》“顺治三”)按日人稻叶君山,《清朝全史》误作“顺治二年”,现据《东华录》校正。

顺治元年十一月三十日“礼部揭帖”称:“朝议以新历告成,钦天监效劳官生着汤若望分别等次开列,汤若望开列者,计有:朱光大、黄宏宪、宋发、朱廷枢、李祖白,及朱光显、刘有庆、贾良琦、宋可成、掌乘、孙有本、徐焕、殷铠、鲍英斋、掌有篆、刘蕴德、焦应旭、宋可立、朱光荫、李华、武之彦,及(监正)戈承科、(监副)贾良栋、(监副)周胤,又李学谟、潘国祥、戈永澄、戈永靖、周晓等二十九人。”

“顺治元年甲申十二月初四日戊午,修政历法远臣汤若望奏:臣于十一月十五日奏为恭报月食一疏,奉有钦天监印信着汤若望掌管之旨,臣切念历象授时,厥任匪轻,臣何人斯,敢叨斯任乎?伏乞皇上别选贤能管理,庶于大典有光。奉圣旨汤若望着遵旨任事不准辞,该(礼)部知道。”〔见《礼曹章奏日录》第1页,《史料丛刻初编》甲子岁(1924年)东方学会印行〕

“同月初七日修政历法远臣汤若望奏:臣奉有钦天监印信着汤若望掌管之旨,随具疏恳辞,奉圣旨汤若望着遵旨任事不准辞,礼部知道钦此。遵臣即当竭蹶料理印务。然臣终有不安于心者,合无请给臣督理钦天监关防壹颗,或复古太史院敕谕一道,暂为料理,而该监印信,缴部收贮,庶治历之责,学道之志,可以并行而不悖矣,奉圣旨汤若望着遵旨率属精修历法,整顿监视。所属有怠玩侵紊的,即行参奏,敕印不必另给,该(礼)部知道”。(见《礼曹章奏日录》第2及3页)

同月二十一日修政历法远臣汤若望奏:"民历,七政二历,从来一时并行,惟今岁适当开国之初,攒造不及,以致民历先颁,七政留后,又因外解历日钱粮不到,今欲布散,纸张缺乏。合无请旨出示。凡民间用历者,悉听该监印刷。每一郡县,许印百余本,俟至次年仍听各省历日钱粮解部之日给付,本监照例同民历一齐颁布,永为定规,奉圣旨七政历着速颁行,礼部知道。"(见《礼曹章奏目录》第8及9页)

同月二十六日修政历法远臣汤若望题:"顺治二年乙酉岁所有御览上吉七政诸种新历,例应随本捧进《满洲七政经纬历》一部,《七政经纬历》一部,《上吉日》十三幅,《月五星凌犯历》一部,《壬遁历》一部,奉旨这历日留览,礼部知道。"(见《礼曹章奏目录》第11页)

同月二十六日修政历法远臣汤若望等题:顺治二年正月初七日立春,例该差官二员,春官正潘国祥,漏刻博士赵应麒前往顺天府,公同该府候验节气,谨具题知,奉圣旨知道了,礼部知道。"(见《礼曹章奏目录》第11页)

"顺治元年蒙皇父摄政王恩旨赐(汤若)望在大城内本庙居住,望以旧例原两人共居,遂约同会教友龙华民同住,在内焚祝圣寿,并无外省教友。"(见《明清史料》甲编第三本第256页"钦天监监正汤若望揭帖")

顺治元年钦天监设时宪、天文、漏刻、回回四科,又谕回回科不许再报交食,以乱新法(见《古今图书集成》,历象汇编历法典第五十卷历法总部汇考五十之二十八引《大清会典》)。

顺治元年设钦天监,分时宪、天文、漏刻、回回四科,下设监正、监副、五官正、灵台郎、保章正、挈壶正、书监候、司晨博士、主簿等官(见《钦定大清会典事例》卷八三〇)。

"顺治元年命用西洋历法,澳中精于推算者,时时檄取入监。"(见《澳门记略》卷下,第16～17页)

是年十一月汤若望改《崇祯历书》为《新法历书》(见《清史稿·时宪》,第1～2页》)。

"岁在甲申(1644年)……仲秋月朔,日有食之,……其时刻分秒,起复方位,独与(汤)若望豫奏者相符合。"(语见御制天主堂碑记,据贺登崧,《北京南堂两碑之译文》,《上智馆刊》三卷五期,1948年五月)

顺治元年用西洋新法二百恒年表,以太宗文皇帝天聪二年戊辰为元,自天正冬至次日子正初刻起算(见钞本《钦天监则例》时宪科下"推步之法"条)。

按北京图书馆现藏钞本《钦天监则例》一册,共二十四页,内记:"本监官生升补","本监官生俸廪",又(一)时宪科下,有:"推步之法","时宪书""七政时宪书","推月五星凌犯时宪书","日月交食","春牛图"。(二)天文科下"测量仪器","测日圭表","测候之法"。(三)漏刻科下有:"选择六十事","朝会庆贺诸大典","星更候时"。可是未记回回科则例。

顺治元年西洋远臣进新法测天等仪,并新法书式,奉旨西洋新法,推验精密,且今造时宪,悉依此法为准,遂令西洋人修政历法(见钞本《钦天监则例》,时宪科下"时宪书"条)。

"顺治初年(钦天监)设汉天文生六十六人。"(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)

顺治二年乙酉(1645年)

是年十一月钦天监监正汤若望,以修补《新历全书》告成,恭呈御览(见《东华录》"顺治五")。

顺治二年《新法历书》告成，颁行天下，面刻钦天监依西洋新法印造时宪历日（见《会典事例》卷八三〇和钞本《钦天监则例》，时宪科下"时宪书"条）。

"顺治元年以西洋新法推算精密，诏用之，二年书成。"（见《澳门记略》卷下，第 49 页）《四库全书》著录作一百卷。因汤若望曾就《崇祯历书》改为《西洋新法历书》，至收入《四库全书》又改为《新法算书》（见裴化行，"崇祯历书及西洋新法历书"，《华裔学志》第三卷 1938 年第 441～442 页及第 135～138 页附图）。

《新法历书》内有《筹算》一卷，题罗雅谷撰，汤若望订。《筹算指》一卷，题汤若望撰，此项筹算，即讷白尔（John Napier，1550～1617）的讷白尔筹（Napier's Rod），不是宋、元的筹算。

此时《西洋新法历书》亦输入朝鲜（参看《入华耶稣会士列传》第 198 页，和裴化行，《崇祯历书及西洋新法历书》，《华裔学志》第三卷第 476 页）。裴化行又称：是年朝鲜金堉 和韩兴一同来中国，向汤若望访问西洋历法，并获有当日新修《历书》（参看朝鲜本《国朝宝鉴》卷三十八）。

"乙酉孟春之望，再验月食，亦纤毫无爽。"（语见北京御制天主堂碑记）

顺治三年丙戌（1646 年）

顺治三年谕回回科凌犯历不必用（见《古今图书集成·历法典》引《大清会典》）。

西洋对数表（*Les Tabulae Rudolphinae*）于本年十二月二日始由国外寄到澳门（参看裴化行，《崇祯历书及西洋新法历书》，《华裔学志》第三卷第 77 页，第 475 页和注 161 及 267。查 Kepler，*Tabulae Rudolphinae*，1627 初版一册，藏今北京北堂图书馆，书上有

……1646 Decemb 2. Macaj. 字样，即为裴化行所据，见北堂图书馆藏《拉丁文图书目录》第559页。现经查明此书并非论对数专书，不过一部分有对数表）。（严敦杰补注）

顺治四年丁亥（1647年）

两广总督佟养甲奏佛郎西人寓居濠镜澳……应仍照明崇祯十三年禁其入省之例，止令商人载货下澳贸易，从之（见《东华录》"顺治九"）。

顺治五年戊子（1648年）

据薛凤祚考验叙：薛从穆尼阁（Jean-Nicolas Smogolenski，1611～1656）学，顺治戊子（1648）著《天步真原》。

顺治六年己丑（1649年）

艾儒略是年五月朔卒于延平，葬福州北门外之十字山（见《西海艾先生行略》，一作《思及艾先生行述》）。

《明清史料》甲编第三本第256页载："顺治六年十月二十九日，加太仆寺卿，仍管钦天监监正事，汤若望揭帖一事，称：是年傅泛际来自山西，卫匡（国）（Martin Martini）来自南方。"

毕方济（Francisco Sambiaso）卒。

顺治九年壬辰（1652年）

是年七月钦天监监正汤若望进浑天星球，地平日晷等仪器，赐朝衣，凉朝帽鞋袜（见《东华录》"顺治一〇"）。

是年谕回回科不必再报夏季天象（见《古今图书集成》引《大清会典》）。

薛凤祚于是年到南京，从穆尼阁求三角法，又求对数，和对数四线表〔见《历学会通》卷二，“中法四线”，康熙壬寅（1662年）薛序〕。

顺治十年癸巳（1653年）

是年三月：“赐太常寺卿，管钦天监事汤若望，号通玄教师，加俸一倍。”（见《东华录》“顺治二〇”）

薛凤祚于是年与穆尼阁共作《三角算法》（见《历学会通》：《三角算法》薛序）。

是年薛凤祚译穆尼阁的《比例对数表》，是为对数输入中国之始。梅文鼎称：“《比例数表》者，西算之别传也。……前此无知者，本朝顺治间，西士穆尼阁以授薛仪甫（凤祚），始有译本。”（见《比例对数表》及梅文鼎，《勿庵历算书目》）

《比例对数表》（1653年）序称：“穆（尼阁）先生出，而改为对数。今有对数表以省乘除，而况开方，立方，三四方等法，皆比原法工力，十省六七，且无舛错之患，此实为穆先生改历立法之第一人。”

是年特命（汤若望）治理历法（见御制天主堂碑记铭）。

“波兰穆尼阁于一六五三年，因为数学知识优异，特奉诏自南京赴北京，穆尼阁为汤若望最忠实朋友之一。”（见杨丙辰译魏特著《汤若望传》，Aflons Văth－*Johann Adam Schall Von Bell*，第二册，第331及340页）

顺治十一年甲午（1654年）

是年阳历十二月十一日龙华民（1559～1654）死。

顺治十二年乙未(1655 年)

《明清史料》丙编第四本第 372 页有:"大西洋耶稣会士利类思(Louis Buglio)等奏本"末题:"顺治十二年二月二十七日大西洋耶稣会士远臣利类思,臣安文思(Gabriel de Magalhaens)。"据其奏本称:"明季东来至蜀,顺治三年(1643 年)清兵入蜀,被送入京,至此已五载。所上各物六件如下:

天主圣像西书一本,

西洋大自鸣钟一架,

西洋万像镜一架,

西洋按刻沙漏一具,

西洋鸟枪一枝,

西洋画谱一套。"

是年七月十二日"吏部题本"称:汤若望考满(朱批)"是汤若望着复职,念其远臣供职有年,勤劳可嘉,应优加恩典,尔部议奏。"(见《明清史料》丙编第四本第 376 页)

是年十月二十六日"管钦天监事汤若望题本"尚题"勅赐通玄教师加二品顶戴,通政使司通政使,管钦天监事臣汤若望"(见《明清史料》丙编第四本第 385 页)。

顺治十三年丙申(1656 年)

汤若望著《历法西传》,新法表异。

顺治十四年丁酉(1657 年)

是年四月,七月革职钦天监回回科秋官正吴明烜疏言汤若望所推天象之谬,并上是年回回历,推算天象之书,请立回回科,以存

绝学。同年十二月经实测，明炟所指皆妄，礼部议其罪，援赦获免（见《东华录》"顺治二八"，"顺治二九"，和清《文献通考》第二五六卷）。

顺治十四年议准回回科推算虚妄，革去不用，止存三科（见《大清会典》，《钦定大清会典事例》卷八三〇。现存钞本《钦天监则例》，即未载回回科）。

北京天主堂碑记，成于此年。因该碑记题顺治十四年岁在丁酉二月朔日。

顺治十六年己亥(1659年)

是年江南徽州府新安卫官生杨光先(1597～1669)作[①]《辟邪论上》，反对天主教，是年五月又作《摘谬十论》，并见《不得已》上卷。

是年九月李天经死，年八十一（见康熙十二年本《吴桥县志》卷之六，人物志第14～15页）。

是年汤若望疏荐同会友苏纳(Bernard Diestel)，白乃心(Jean Gvueber)通历法（见《西洋新法历书》，"奏疏"，清补页）。

利类思、安文思、南怀仁(Ferdinard Verbiest)著《西方要纪》，卷末称："臣南怀仁留心历学，于顺治十六年(1659)以蒙召进京，赐蒙光禄寺，此皆皇上柔远洪恩，不识犬马余生，将何以图报万一也。"（见《昭代丛书》甲集卷二十七）按南怀仁实于顺治十四年(1657年)离欧，顺治十六年(1659年)到华。先至陕西西安府，次年阳历5月9日离西安府，6月9日到北京〔见 Henri Bernard（裴化行）：*Ferdinard Verbiest, Continrateur de L'oeuvre Scientifique*

① 孙星衍《五松园文稿》卷一有《杨光先传》，称"杨光先，字长公，歙县人"。

d'Adam Schall, *Monumenta Serica*, Vol. V, Fasc. 1, p. 107, Note 15, 1940, Henri Vetch. —Peking〕。

顺治十七年庚子(1660 年)

顺治十七年十二月初三日,杨光先呈礼部正国礼,未准(见《不得已》上卷)。

康熙元年壬寅(1662 年)

清帝爱新觉罗·玄烨(1654～1722)是年即位。

是年汤若望受清朝封典(见《汤若望传》第二册,第 318,319 和 320 页)。

康熙二年癸卯(1663 年)

是年李祖白撰《天学初概》。此书卷末称:"癸卯孟冬,(李祖白)公余少暇,客有问天学今昔之概者。谨遵所闻论次之,以代口答。"按次年杨光先反对天主教,就是根据这书为口实(《天学初概》藏罗马梵谛冈图书馆,著录号码为 Racealta generale oriente Ⅱ. 213. 12)。(严敦杰补注)

康熙三年甲辰(1664 年)

是年薛凤祚自序《天学会通》中"旧中法选要"〔见乾隆四十年(1775 年)陆耀自序刻本《切问斋文钞》第二十四卷,第 15～16 页〕。

是年三月二十五日歙人杨光先上书许青翁侍郎反对天主教。七月二十六日杨光先上请诛邪教状于礼部,八月初六日会审汤若望等一日,八月初七日,放杨光先回家(见《不得已》上卷)。

利类思《不得已辩》(1665 年)自序称:“甲辰冬,杨光先著《不得已》等书,余时方羁绁待罪。”

《南先生行述》称:“是年南怀仁入京佐历。”

康熙三年复用旧法。又因旧法不密,用回回法(见《大清会典》,及《会典事例》卷八三〇,及《澳门记略》卷下,第 49 页)。

康熙四年乙巳(1665 年)

是年三月因杨光先叩阍进《摘谬十论》,具言汤若望新法十谬,又《选择议》一篇,摘汤若望选择之误。部拟将汤若望、杜如预、杨宏宪、李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰凌迟处死,刘必远、贾文郁、宋哲、李实、潘尽孝(汤若望义子)斩立决。得旨汤、杜、杨免死。四月李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰处斩,其余议流徙,又赦免(见《东华录》“康熙五”)。

是年四月杨光先授为钦天监右监,辞职,不准。五月到监供事,同月再辞,六月三辞,同月又辞,始终不准。七月又将张其淳降级为左监,杨光先补为监正,李光显为右监。八月又有五叩阍辞疏。九月十三日吏部议得已经奉旨杨光先着为监正,其辞职缘由相应不准。十四日奉旨,杨光先因知天文衙门一切事务,授为监正,着即受职办事,不得渎辞(见《不得已》下卷)。

康熙四年始设满监正(见《通考》卷八十三,职官七)。

是年利类思自序《不得已辩》。此书题极西士利类思著,同会安文思,南怀仁订。

康熙五年丙午(1666 年)

是年二月钦天监监正杨光先奏请采宜阳金门山竹管,上党羊头山秬黍,河内葭莩,备制器测候从之(见《东华录》,“康熙五”)。

是年阴历七月十五日阳历 8 月 15 日汤若望死于北京〔据阜成门外马尾沟“耶稣会士汤公墓”的墓志(Ⅱ)。又见《正教奉褒》,康熙五年条〕。

是年(钦天监)题准增设汉天文生九十四人(见钞本《钦天监则例》,“本监官生升补条”)。

是年复用旧法时宪书面去“依西洋新法”五字(见钞本《钦天监则例》,时宪科,下“时宪书”条)。

康熙七年戊申(1668 年)

是年“二月乙酉诏访求精通天文占候者”(见《东华录》,“康熙八”)。

是年南怀仁又治理历法(见《南先生行述》)。

是年八月礼部奏监副吴明烜之七政历,与天象相近,得旨着吴将康熙八年历日,七政历日,推算进览(见《东华录》,“康熙八”)。

是年十月由江南取到元郭守敬仪器(见《东华录》,“康熙八”)。

是年十二月治理历法南怀仁劾监副吴明烜推算历日种种差误(见《东华录》“康熙八”,并见《熙朝定案》第 1～4 新页)。

康熙七年命大臣传集西洋人与监官质辩,复令礼部堂官,与西洋人至午门,测验正午日影(见《大清会典》钞本《钦天监则例》天文科下“测候之法”条,和《澳门记略》卷下,第 49 页)。时杨光先尚任监正(见《东华录》,“康熙八”;《古今图书集成·历象汇编·历法典》第一百二卷)。

康熙七年十二月以推步弗协,命大臣召欧逻巴人南怀仁与监官质辩,八年正月三日丁酉立春诸大臣同赴观象台测验立春雨水太阴火星木星,怀仁预推度数与所测皆符,大臣等请将康熙九年时宪书交南怀仁推算,上从之。于是复用新法。康熙十三年编定《历

象考成》四十二卷，即用新法（见汪曰桢《长术辑要》附古今推步诸术考，咸丰三年，1853 年，自序）。

康熙八年己酉（1669 年）

是年二月命大臣二十员赴观象台测验，南怀仁所言逐款皆符，吴明烜所言，逐款皆错，监正马祐，监副宜喀喇，胡振钺，李光显亦言杨光先所指摘西法之不当，得旨杨光先革职（见《东华录》，“康熙九”，及《熙朝定案》第 5～7 新页）。

康熙八年遣大臣二十员赴观象台测验，遂令西洋人治历，初书面载：“钦天监依西洋新法”字，及是去之（见《大清会典》，钞本《钦天监则例》，及《澳门记略》卷下第 49 页）。康熙八年去“依西洋新法”五字，改为钦天监奏准印造时宪历日颁行天下（见《会典事例》卷八三〇）。是时复行西洋新法（见清《文献通考》第二五六卷）。

是年“三月授西洋人南怀仁为钦天监监副”（见《东华录》，“康熙九”）。

是年令西洋人治理时宪书法，又以西洋人充汉监正（见《会典事例》卷八三〇）。是年定汉监正用西洋人名曰监修（见清《文献通考》第八十三卷）。

是年六月“令改造观象台仪器，从钦天监监副南怀仁请也”（见《东华录》，“康熙九”，及《清通志》第二十三卷）。

是年六月部拟吴明烜流徙，得旨免流徙（见《东华录》，“康熙九”）。

是年八月钦天监正马祐迁为江苏巡抚，康亲王杰书（《熙朝定案》作杰淑）等议复南怀仁、李光宏等告杨光先援引吴明烜诬告汤若望，致李祖白等正法呈状，拟斩杨光先，妻子流徙宁古塔；复汤若望通微（玄）教师之名，赐恤，还给建堂基地，许瓒曾等复职；西洋人

栗安当(Antoine de st. Marie,亦作利安当,西班牙人)等,由督抚驿送来京;恤李祖白等,流徙子弟取回,有职者复职。李光宏、黄昌、司尔珪、潘尽孝(汤若望义子)复职。得旨以杨(光先)年老并妻子免流徙,栗安当等二十五人,不必来京。天主教则除南怀仁自行外,其余各省禁立堂入教,余依议(见《东华录》,"康熙九"及"康熙九九")。

不久杨光先死(见《不得已》钱琦跋)。按《汤若望传》称:杨光先于(康熙九年)1669年阳历11月3日死去(见杨丙辰译,魏特著《汤若望传》二册,第536页)。

是年八月,"追赐原任掌钦天监事,通政使汤若望祭葬。"(见《东华录》,"康熙九")

以李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰死非其罪,各照原品级给祭银(见《东华录》,"康熙九")。

是年胡亶撰《中星谱》一卷。胡在长安,与监中西洋专家,反复辩论,群皆叹服(见《四库全书总目》卷一〇六)。

此期新旧派斗争的汉文文献,计有:

杨光先:《不得已》二卷,有1929年(饲雀山房原刊本,巴黎Courant 1329.)和中社石印本。

利类思:《不得已辩》(1665年)安文思,南怀仁订,有1847年刊本。

南怀仁:《历法不得已辩》一卷(1669年),巴黎国立图书馆藏,中文本,4990号。

南怀仁:《妄占辩》,有康熙八年(1669年)刻本,北堂图书馆藏中文本1936号,又有粤东大原堂重梓本,巴黎国立图书馆藏中文本,4998号。

南怀仁:《妄择辩》,巴黎国立图书馆藏,中文本,4994号。

南怀仁:《妄推吉凶辩》(1669年)巴黎国立图书馆藏,中文本,4997

号。

何世贞:《崇正必辩》前集四卷,后集三卷(1672 年)有利类思序,巴黎国立图书馆藏,中文本,5002 号。

南怀仁:《熙朝定案》三卷,巴黎国立图书馆藏,中文本,1329,1330,1331 号。

黄伯禄[①]:《正教奉褒》,有 1883 年印本。

按是书系就《熙朝定案》加以删补,已失原来面目。

康熙八年奏制新仪,奉旨旧有仪器(观象台旧设浑仪简,明正统年制造)仍着收存,勿令损坏(见钞本《钦天监则例》天文科下"测量仪器"条)。

康熙九年庚戌(1670 年)

康熙九年十二月部议奏准:康熙四年间杨光先诬陷案内,遣送广东之西士栗安当、潘国光(François Brancati)、刘迪我(Jacques le Frvre)、鲁日满(François de Rougemont)等二十余人,内有通晓历法者起送来京(见《正教奉褒》,康熙九年条)。

康熙十年辛亥(1671 年)

康熙十年九月礼部题称:准两广总督金光祖咨称:看得西洋人栗安当等准部文,查有通晓历法,起送来京,其不晓历法,即令各归本省本堂,除查将通晓历法之恩理格(Chistian Herdtricht)、闵明我(Philippe-Marie Grimaldi)二名送京,不晓历法之汪如望(即汪

① 黄伯禄字裴默,江苏海门人,中西著述俱富,所作拉丁文《中国置产法》,《中国历法》,《中西历合璧》,与法文《中国地震考》。《中国日月蚀考》,俱传诵海外,有声于时(见《方豪文录》第 241 页)。

儒望)(Jean Valat)等十九名送各本堂讫(见《正教奉褒》,康熙十年条)。

康熙十二年癸丑(1673年)

是年定本(钦天)监官由监咨部题补者监正监副随吏部引见(见钞本《钦天监则例》"本监官生升补"条)。

是年新制仪器告成,一为天体仪,一为黄道仪,一为赤道仪,一为地平经仪,一为地平纬仪亦名象限仪,一为纪限仪安设台上,旧仪移置台下别室(见钞本《钦天监则例》天文科下"测量仪器"条)。

以上六仪,现存北京。

各仪的弧背或立柱上,都镌有"康熙癸丑岁日躔寿星之次治理历法臣南怀仁立法"等字。(严敦杰补注)

康熙十三年甲寅(1674年)

"(康熙)十三年新仪成,凡六,曰黄道经纬仪,曰赤道经纬仪,曰地平经仪,曰地平纬仪,曰纪限仪,曰天体仪。"(见《大清会典》,及《澳门记略》卷下,第49和50页)按《会典事例》卷八三〇,和钞本《钦天监则例》都作"康熙十二年新制仪器告成"。

是年"二月丁酉钦监奏:钦造仪象告成,进呈《灵台仪象志》,上留览,加南怀仁太常寺卿衔,仍治理历法(见《东华录》,"康熙一四")。

是年编著《新仪制法用法图说》并《恒星经纬表》十六卷,名曰新制《灵台仪象志》(见钞本《钦天监则例》,天文科下"测量仪器"条)。

是年南怀仁撰《坤舆图说》,不分卷,有刻本,见北堂图书馆藏

中文本 0548 号。

康熙十五年丙辰(1676 年)

是年五月钦天监治理历法南怀仁上书论濛气(见《东华录》,“康熙一七”)。

是年李子金成《算法通义》五卷(1676 年),其后续成《几何易简集》(1679 年),《天弧象限表》(1683 年),又有《解环谱》一卷(钞本)(见《中州艺文录》卷十一)。

“李子金原名之铉,以字行,鹿邑人,柘邑增广生……尤精算数……有《隐山鄙事》十二种。”〔见蒋炳,《归德府志》第二十五卷,第 14~15 页,乾隆甲戌(1754 年)官修刻本〕

康熙十七年戊午(1678 年)

是年南怀仁序《康熙永年历法》三十三册,此书题:宜喀喇率南怀仁立法,闵明我订,前有康熙十七年南怀仁序。

日本宫内省《图书寮汉籍善本书目》卷三有《康熙永年历法》三十三册,系文政中毛利出云守高翰所献幕府之书。

是年八月礼部议钦天监治理历法南怀仁进:《康熙永年历》,系接推汤若望所推历法,应交翰林院,仍著该监官生肄业,永远遵行,从之(见《东华录》,“康熙二十二”)。

因《康熙永年历》成,南怀仁加通政使司通政使衔(见《天主教传行中国考》第 316 页)。

是年梅文鼎自序所著《筹算》二卷。

康熙十七年预推《永年表》告成,共三十二卷(见《古今图书集成》引《大清会典》)。

十七年续修《康熙永年表》三十二卷告成(见钞本《钦天监则

例》时宪科下“推步之法”条)。

康熙二十年辛酉(1681 年)

是年二月增钦天监满监副一(见《东华录》,“康熙二七”)。

是年杜知耕成《数学钥》六卷(1681 年),其后续成《几何论约》七卷(1700 年)。

“杜知耕字瑞甫,柘城人,康熙丁卯(1687 年)举人……好读书,尤精数学,著有《数学钥》六卷,李子金序以传之。”(见何熠,《柘城县志》第十卷,第 10～11 页)

康熙二十一年壬戌(1682 年年)

是年王锡阐死。

康熙二十二年癸亥(1683 年)

是年议准……钦定选择历书,同万年历永远遵行(见钞本《钦天监则例》,时宪科下“推步之法”条)。

康熙二十三年甲子(1684 年)

是年梅文鼎自序《弧三角举要》五卷。

梅文鼎称:“三角之用,其妙于弧度;求弧度之法,亦莫良于三角。故《测量全义》第七、第八、第九卷专明此理,而举例不全,且多错谬;其散见诸历指者,仅存用数,无从得其端倪。《天学会通》圜线三角法,作图草率,往往不与法相应,缺误处竟若残碑断碣,弧三角遂成秘密藏矣。”(见《勿庵历算书目》第 48 页)梅氏整理当日输入的西算陆续撰成各书,以便初学。

康熙二十四年乙丑(1685 年)

康熙二十四年（1685 年）法皇路易第十四，对中国采取积极传教方针，用以对抗葡萄牙以便扩张法国势力。特遣塔沙尔（Guy Tachard）和洪若翰（Jean de Fontaney，1643，1687B～1710）、白晋（Joachim Bouvet，1656，1687B～1730）、李明（Louis de Comte，1655，1687B～1728）、张诚（Jean-François Gerbillon，1654，1687B～1707）、刘应（Claude de Visdelou，1656，1687B～1737）等六人来华，其中除塔沙尔一人留暹罗外，其余都到中国（见《天主教传行中国考》第 221 页）。法皇路易第十四又赠清圣祖以地平经纬仪（图见《科学》第三卷第十期 1917 年 10 月）。

洪若翰等五人亦介绍中国学术到欧洲(见方豪:“十七八世纪中国学术西被之第二时期”《东方杂志》第四十一卷,第一号)。

是年阳历八月七日比人安多来京,以南怀仁等之提携,入宫授清帝以实用算术、几何和仪器用法(见《熙朝定案》中卷 1330 号,第 43～44 页)。

康熙二十六年丁卯(1687 年)

“法皇路易第十四所遣洪若翰、白晋、李明、张诚、刘应五人来华,时在康熙二十六年(1687 年)洪若翰等五人,并通算学,以南怀仁之斡旋,得准入京。次年(1688 年)到达北京,南怀仁已死去,乃由徐日升带领引见,白晋、张诚以善算供奉内廷。”(见《天主教传行中国考》第 322 页)

是年阴历十二月二十六日,阳历 1688 年 1 月 28 日,南怀仁死(1628～1688)〔见徐日升,安多:《南先生行述》(Pereira, Thomas:

Vie du P. Verbiest)〕。[①]

康熙二十七年戊辰(1688年)

“南怀仁死后,继南怀仁的,有张诚。张诚曾襄尼布楚条约之成。约成回京,与教士白晋逐日入宫,将《几何原本》、《应用几何》,并《西方哲学》,译成满文,用以授帝。”(见《熙朝定案》中卷1330号第59～60页)

康熙二十八年己巳(1689年)

是年二月圣祖幸观星台,与李光地谈天文(见《东华录》,“康熙四三”)。

“康熙二十八年十二月二十五日,上召徐日升(Thomas Pereira)、张诚、白进(即白晋)、安多等至内廷。谕以自后每日轮班至养心殿,以清语授量法等西学。上万几之暇,专心学问,好量法、测算、天文、形性、格致诸学,自是即或临幸畅春园(在西直门外十二里)及巡行省方,必谕张诚等随行。或每日,或间日授讲西学,并谕日进内廷,将授讲之学,翻译清文成帙,上派精通清文二员襄助缮稿,并派善书二员誊写。张诚等每住宿畅春园……。张诚等讲授数年,上每劳之。”(见《正教奉褒》康熙二十八年条)。张诚报告亦称:“每朝四时至内廷侍上,直至日没时,还不准归寓。每日午前二时间,及午后二时间,在帝侧讲欧几里《几何学》,或理学及天文学等。并历法、炮术之实地演习的说明,归寓后再准备明日之工作,直至深更入寝,时以为常。”(见刘玉衡译:“张诚与尼布楚条约”,《国

① 北京阜外马尾沟南怀仁墓碑题:“康熙二十七年十二月二十六日死,年六十六岁。”

闻周报》第十三卷，十一期，1936 年 3 月 23 日）

康熙三十年辛未（1691 年）

是年张诚第三次随康熙帝到满州，自记称："某晚，予居长心殿，帝临殿内，问余寒暑表，及风雨表之用法，盖洪若（翰）神父在南京所进呈者。帝状极亲切。"（见 Du Halde 著 *Description de la Chine*，Tome Ⅳ，p. 341，Paris，1735），《方豪文录》第 290，291 页引）

康熙三十一年壬申（1692 年）

是年正月圣祖御乾清门，与群臣论算数（见《东华录》"康熙四九"）。

康熙三十二年癸酉（1693 年）

是年梅文鼎自序《笔算》五卷。

康熙三十八年己卯（1699 年）

是年梅文鼎自序《环中黍尺》五卷。

康熙四十二年癸未（1703）

是时法国教士善算，在清帝左右和留北京的有白晋、张诚、徐日升、安多（Antoine Thomas）、巴多明（Dominique Parrenin，1665，1698B～1741）、杜德美[1]（Patrus Jartoux）诸人，就中西方算

① 杜德美（Patrus Jartoux，1668，1701B～1720），著有《周径密率》一卷，《求正弦正矢捷法》一卷，见徐宗泽《明清间耶稣会士译著提要》，第 407 页，1944 年。

学书，译成中文，和编成讲义，后由清廷加以润色的，计有：

（一）南怀仁满文《几何原本》七卷（1673 年），现藏故宫博物院图书馆，与《数理精蕴》十二卷，体例相符，卷七附图，即《数理精蕴》本《几何原本》卷十二，第十八和“画地理图”二书分卷和条款，还有出入之处。

（二）《几何原本》七卷，附《算法（原本）》一卷，书前有序称：《几何原本》“数原之谓，利玛窦所译，因文法不明，后先难解，故另译。”据《文贞公（李光地）年谱》称：“癸未（1703 年）二月公蒙赐《几何原本》、《算法原本》二书。”则此二书之成，在康熙癸未（1703 年）以前。

（三）《几何原本》七卷一种，无序。

（四）《几何原本》一种，为孔继涵（1739～1783）旧藏本，今藏北京图书馆。此书卷一共十二页，卷二共九页，卷三共十页，卷四共二十一页，卷五共二十二页。以上共一册。卷六缺，卷七共七十一页，一册。有“孔继涵印”，“荭谷”及“安乐堂藏书记”诸印记。

以上三种七卷本《几何原本》，文句互有异同。即以满汉文《几何原本》七卷与《数理精蕴》本《几何原本》十二卷本校，亦有互异之处。如满汉文本之第六卷，即《数理精蕴》本之第六卷至第十卷。可是《数理精蕴》本第六卷至第十卷为六十四条，而满汉文本之第六卷为九十条。又满文本第一卷卷首序论，亦不载《数理精蕴》本中，因其译文已经几次校订过。其同为孔继涵收藏的，还有：

（五）《比例规解》，二十六页，（此书《图书集成》有收录）。

（六）《测量高远仪器用法》，二十三页。

（七）《八线表根》，六页。以上共一册，前有：“安乐堂藏书记”，后有“孔继涵印”印记。又有：

（八）《勾股相求之法》，四十四页，一册。有上述印记。

(九)《借根方算法节要》上下二卷,共一册。有上述印记。

按孔继涵藏本,尚有:

(十)《算法纂要总纲》十五卷。曾引及《算法原本》及《借根方算法》卷中第十节,则:

(十一)《借根方算法》,原书为三卷矣。其中

(十二)《借根方算法》,八卷一种,又《节要》二卷,不著撰人姓氏,藏前故宫博物院图书馆中。此馆中又有:

(十三)《算法纂要总纲》二卷,《数表》一卷,《数表用法》一卷,不著撰人姓氏,清代写本。其同名别出者,又有下列二书:

(十四)《算法纂要总纲》二卷,不著撰人姓氏,袖珍写本二册,李俨藏。

(十五)《算法纂要总纲》十五卷,节本一种为汪喜孙(1786~1847)旧藏书。

按《算法纂要总纲》一书,《八旗经籍文钞》作年希尧撰,见近人金毓黻《辽海书征》。当时流传者,复有:

(十六)《西镜录》一书,梅文鼎(1632~1721),焦循(1763~1820),李锐(1773~1817)曾经见过,现北大图书馆藏有一册。

以上诸书都在《律历渊源》出版(1723 年)之前。

据《入华耶稣会士列传》:白晋曾以《几何原本》(*Elementa geometriae*)译成满汉文,用以教授清圣祖(见第 437 页)。而张诚亦以:

(十七) *Eléments de Géométrie tirés d'Euclide et d' Archiméde*

(十八) *Géométrie pratique et théorique, tirés en partie du P Pardies*

二书译成满汉文。前书于康熙二十八年(1689 年)由清圣祖改编,

后书则于康熙二十九年(1690年)在北京出版(见《入华耶稣会士列传》,第449页)。

康熙四十三年甲申(1704年)

是年常额为钦天监满监正,常以算日食不合请罪(见《东华录》"康熙七二")。

是年杜德美在北京〔见《北京政闻报》第1、2、4、9等页(1926年)引文〕。按割圆术中的杜术,即出于杜德美(见梅瑴成《赤水遗珍》)。

康熙五十年辛卯(1711年)

是年清圣祖和直隶巡抚赵宏燮论算数,称:"算法之理,皆出于《易经》,即西洋算法亦善,原系中国算法,彼称为《阿尔朱巴尔》。'阿尔朱巴尔'者,传自东方之谓也。"(见《东华录》"康熙八九")代数学在此时输入中国。按《阿尔朱巴尔》,《数理精蕴》(1723年刻)内《西洋借根法》作《阿尔热巴拉》。梅瑴成:《赤水遗珍》作《阿尔热八达》。瑴成以康熙五十一年(1712年)在北京由圣祖授以《借根方法》,因作"天元一即借根方解",载于《赤水遗珍》内(见《数理精蕴》,《赤水遗珍》,和李俨《梅文鼎年谱》)。

是年闵明我(Philipus Maria Grimaldi,1640～1712)卒,葬于阜外马尾沟,有墓志。

是年康熙谕和硕诚亲王允祉修律吕算法诸书(见《东华录》)。

康熙五十二年癸巳(1713年)

"圣祖谕和硕诚亲王允祉曰:《律吕》、《算法》诸书应行修辑……尔率庶吉士何国宗等于行宫内立馆修辑。"(《康熙政要》卷十

八引《东华录·圣训》）

是年圣祖始编《律吕》、《算法》等书（见《东华续录》“乾隆一四”）。

是年圣祖命和硕庄亲王（允禄）等率同儒臣于畅春园蒙养斋开局测太阳高度，得黄赤大距为二十三度二十九分三十秒（见《历象考成后编》卷一）。

是年（钦天监）又奏准河南、江南、浙江、陕西、广东、云南各差学习历法一人，及部院衙门官各一人前往，测量日以备修正算书之用（见钞本《钦天监则例》天文科下，“测候之法”条）。

康熙五十三年甲午（1714 年）

是年始拟以《律吕》、《历法》、《算法》三书共为一部，名曰《律历渊源》（见《东华录》“康熙九四”，及《东华续录》“乾隆一四”）。

是年十一月分遣修理历法何国栋等于广东、云南、四川、陕西、河南、江西、浙江，测量北极高度及日晷（见《东华录》“康熙九四”）。

是年戴进贤（1678～1746）来京（据墓志）。

康熙五十四年乙未（1715 年）

是年编定《星历考原》成书（见钞本《钦天监则例》，时宪科下“推步之法”条）。

康熙五十五年丙申（1716 年）

是年题明图为钦天监监正（见《东华录》“康熙九七”）。

是年戴进贤（Ignace Kögler，日耳曼国人）被征进京，佐理历政（见《正教奉褒》，康熙五十五年条）。

康熙五十七年戊戌(1718年)

是年仲秋年希尧自序《测算刀圭》三卷于石城官舍,计分三卷:一曰《三角法摘要》,一曰《八线算数表》,一曰《八线假数表》(见《测算刀圭》)。

是年编定《七政四种万年书》书成(见钞本《钦天监则例》,时宪科下"推步之法"条)。

康熙五十八年己亥(1719年)

"是年(钦天监)议准进士,举人,贡监生员内,有通晓天文算法者,具呈礼部会监考试,果优者进士举人,以博士用,贡监生以天文生用。"(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)

康熙六十一年壬寅(1722年)

是年六月《数理精蕴》,《历象考成》,已经成书(见《东华续录》,"乾隆一四")。

宋君荣(Antoine Gaubil,1689～1759)1722年来华,遍读中土律历之书,尤服膺郭守敬、郑世子、邢云路三家(见章用:《阳历甲子考》)。

康熙六十一年十一月进雍正元年时宪书式,书面止许载"钦天监奉准印造"一段(见钞本《钦天监则例》,时宪科下"时宪书"条)。

雍正元年癸卯(1723年)

是年柏乡魏荔彤刻《兼济堂纂刻梅勿庵先生历算全书》。

是年冬十月《律历渊源》一百卷刻成。分三部:一曰《历象考成》,一曰《律吕正义》,一曰《数理精蕴》(见《东华录》,"雍正三")主

其事者为何国宗、梅瑴成、杨文言字道声。而明安图、顾陈垿(1678～1747)亦在考测之列。《历象考成》上编卷二,卷三,"论弧三角形",《数理精蕴》下编卷十五,割圆篇,以内容外切多边形证《测量全义》所谓:周径相与之率,"今士之法,其差甚微,子母之数,积至二十一位。"

是年(钦天监)议准著内阁九卿詹事翰林将素所知精通相度人员各行保举(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

雍正二年甲辰(1724年)

是年徐懋德(André Pereira 1690～1743,1716B,原籍英吉利,入葡萄牙国籍)补钦天监副(见《正教奉褒》,雍正二年条)。

是年(钦天监)奏准候补天文生及补用天文生之监生生员由监送顺天府入皿字号乡试(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

雍正三年乙巳(1725年)

是年以西洋人实授(钦天)监正(见《会典事例》卷八三〇)。

康熙八年定汉监正用西洋人,名曰监修,至雍正三年实授(西洋人)为监正,去监修名(见《皇朝文献通考》卷八十三)。

雍正三年三月二十日上谕:戴进贤治理历法,着补授监正,加礼部侍郎衔(见《正教奉褒》雍正三年条)。

雍正三年命内阁学士何国宗将"算法馆"行走明白测量人员,带去测量河道(见《东华录》"雍正七")。

本年(钦天监)奏准本监官生举人准应会试监生生员准应乡试(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

是年《律历渊源》一百卷,刊刻告成(钞本《钦天监则例》,时宪

科下"推步之法"条)。

是年《古今图书集成》告成。

雍正五年丁未(1727 年)

是年(钦天监)奏准八旗天文生有阙,由吏部考补(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

雍正八年庚戌(1730 年)

是年钦天监监正:满人为明图,西洋人为戴进贤,监副为西洋人徐懋德。

是年六月明图上书请重修历法,因修得《日躔月离表》,以补《律历渊源》之缺。是表原系戴进贤所作,因无解说并推算之法,当时惟徐懋德、明安图能用此表(见《历象考成后编》,"奏议",第1、2、5、6页)。

雍正十年壬子(1732 年)

是年重修(历象)《考成交食表》一卷。

又奏准…《律历渊源》及《(历象)考成后编》书板均交监收贮,愿刷印者听,颁赐各省听其翻刻,以广流传(见钞本《钦天监则例》时宪科下"推步之法"条)。

雍正十二年甲寅(1734 年)

是年(钦天监)定本监官由监咨部题补者监正监副随吏部引见(见钞本《钦天监则例》"本监官生升补"条)。

雍正十三年乙卯(1735 年)

是年五月年希尧自序《面体比例便览》,此书系录《数理精蕴》中有通率之数,每种一二条,以便初学。

(雍正)十三年十月(钦天监)恭进乾隆元年时宪书式,奉准书前面,改为钦天监钦遵御制《数理精蕴》印造时宪书颁行天下(见钞本《钦天监则例》,时宪科下"时宪书"条)。

是年二月朔,偶斋,年希尧序《视学》称:"视学之造诣无尽也。予曷敢言得其精蕴哉。虽然予究心于此者三十年矣。……近得数与郎先生讳石宁者往复再四研究其源流。……予复苦思力索补绘五十余图,并为图说,以附益之。"(见向达藏影摄本《视学》。此书原本藏 Oxford,Bodlean Library)

乾隆元年丙辰(1736)

顺天府丞梅瑴成请许民间翻刻《律历渊源》,许之(见《历象考成后编》,"奏议",第 3 页)。

乾隆二年丁巳(1737 年)

是年四月顾琮请修《日躔月离表解图说》(见《历象考成后编》,"奏议"第 5~6 页)。

是年敕编《历象考成后编》十卷(见《四库全书总目》卷一〇六)。

是年(钦天监)覆准:国子监专立算学,满洲十二人,蒙古六人,汉军六人,汉十有二人(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

乾隆三年戊午(1738 年)

是年以允禄总理增补《日年交食表图说》,称为《历象考成后编》(见《历象考成后编》,"奏议",第 7～10 页)。

是年……今钦天监《历象考成》一书……海内有精晓天文,明于星象者,直省督抚确访试验,术果精通者,着咨来京(见钞本《钦天监则例》,"本监官生升补"条)。

乾隆四年己未(1739 年)

是年(钦天监)覆准每世业子弟五人,由监选三科官员,人品老成,精通术业者一人为教习,督率课程,每年季考亦令考试分别等第,三年内学有成效,令该教习出具结状方得补用。如世业子弟依恃父兄在监,名为学习,而术业生疏者,即行黜退(见钞本《钦天监则例》"本监官生升补"条)。

是年鲍友管(Antonius Gogeisl,1696～1771)、刘松龄(Augustin von Hallerstein,1703～1774)来京。

是年(钦天监)又覆准国子监算学助教教习五年期满请旨交部议叙,助教照例升用,五官正,教习举人笔帖式充补者以灵台郎补用,贡监生员充补者以挈壶正补用,官学生算学生充补者以博士补用。均与本监官员相间补用(见钞本《钦天监则例》"本监官生升补"条)。

乾隆六年辛酉(1741 年)

《协纪辨方书》三十六卷,《万年书》十二卷告成,书板交(钦天监)收贮,愿刷印者听(见钞本《钦天监则例》时宪科下"推步之法"条)。

乾隆七年壬戌(1742)

是年《历象考成后编》十卷告成,任汇编者为:顾琮、张照、何国宗、梅瑴成,和钦天监满监正进爱、西洋监正戴进贤、西洋监副徐懋德,并食员外郎俸钦天监五官正明安图(见《历象考成后编》,"奏议",第10至13页,并"职名"第一页)。按《历象考成后编》卷一,曾说明椭圆定理,较以前历书详细。

是年刘松龄任钦天监监副。

乾隆九年甲子(1744年)

是年戴震自序所著《策算》。

是年开始编《仪象考成》三十二卷(见《四库全书总目》卷一〇六)。

是年清帝到观象台,将所制玑衡抚辰仪安设台上(见钞本《钦天监则例》天文科下"测量仪器"条)。

乾隆十年乙丑(1745年)

乾隆十年定监副以满,汉,西洋,分用,并特简大臣兼理监务(见《通考》卷八十三)。

是年(钦天监)覆准期满之算学生有举人出身者准以博士补用(见钞本《钦天监则例》"本监官生升补"条)。

乾隆十一年丙寅(1746年)

乾隆十一年戴进贤死(1678～1746)。墓在阜外马尾沟,有墓志。

乾隆十一年刘松龄(Augustin von Hallerstein,1703～1774,

日耳曼国人)补钦天监监正,同年鲍友管(Antoine Gogeisl,1696～1771,日耳曼国人)补钦天监监副。

乾隆十七年壬申(1752年)

是年《仪象考成》三十二卷成书(见《四库全书总目》卷一〇六)。

戴进贤(1680～1746)曾创制"玑衡抚辰仪",自撰《玑衡抚辰记》二卷,冠于《仪象考成》之首(见《清通志》第二十三卷,及常福元:《天文仪器志略》,第32～33页)。

乾隆十八年癸酉(1753年)

是年裁钦天监满汉监副各一人,增西洋监副一人(见《清通志》第二十九卷)。

乾隆十八年以西洋人为左右监副(见《通考》卷八十三)。

乾隆十九年甲戌(1754年)

是年在钦天监任事的有西洋人傅作霖(Félix da Rocha,见《清文献通考》,第二九八卷)。傅作霖是葡萄牙人,即波尔都噶俚亚国人。

是年将《仪说》二卷,《新测恒星经纬度表》三十二卷名《仪象考成》(见钞本《钦天监则例》天文科下"测量仪器"条及乾隆十七年条)。

乾隆二十年乙亥(1755年)

编《钦天监则例》,北京图书馆有钞本一册,最迟记至乾隆二十年。

乾隆三十一年丙戌(1766年)

一七六六年九月二十四日刘松龄《书札》犹称:"艺术在朝廷固为人所喜,然天文历算,尤有功用,而不可须臾离也。"(见冯译《入华耶稣会士列传·汤若望传》,注17)

乾隆三十四年己丑(1769年)

许宗彦父名祖京,乾隆己丑(1769年)由内阁历任广东布政使,宗彦随宦在粤。见许宗彦《鉴止斋集》卷十四,"记荷逻侯星条"称:"曩在粤东有西士弥纳和今在钦天监,改姓南,不知其名云。"(见《鉴止斋集》"家传",及卷十四)

是年索德超(Joseph Bernard D'Almeida,1728～1805)来京。

乾隆三十六年辛卯(1771年)

是年钦天监监副鲍友管死(见墓志)。

是年高慎思(Joseph D'Espinha,葡萄牙国人)补钦天监监副(见《正教奉褒》)。

乾隆三十九年甲子(1774年)

是年刘松龄(Augustin von Hallerstein,173～1774)死(见墓志)。

乾隆四十年乙未(1775年)

是年安国宁(André Rodrigues,1729,1759B～1796),补钦天监监副,旋任监正(见《正教奉褒》)。刘松龄死后由傅作霖任监正。

乾隆四十六年辛丑(1781 年)

是年索德超(Joseph-Bernard D'Almeida,1728~1805)补钦天监监副,五十八年(1793 年)任监正(见《正教奉褒》)。

乾隆五十年乙巳(1785 年)

是年汤士选(葡人)任钦天监监副,旋升监正,兼管国子监算学馆(见《正教奉褒》)。①

嘉庆六年辛酉(1801 年)

是年福文高(Vominieus Joacquimus Ferrera,1749~1824)来京。

嘉庆十年乙丑(1805 年)

是年李拱辰(1767~1826,葡人)任钦天监监副,道光三年(1823 年)任监正,兼管算学馆(见《正教奉褒》)。有拉丁文墓志,

---

① 按清《时宪书》可知汤士选任监正是在嘉庆五年(1800)之后。

乾隆五十五年庚戌(1790 年)

汤士选为钦正监右监副。(清朝《时宪书》)

乾隆六十年乙卯(1795 年)

汤士选为右监副,加一级。(清朝《时宪书》)

嘉庆元年丙辰(1796 年)

汤士选为左监副,加一级。(清朝《时宪书》)

嘉庆二年丁巳(1797 年)

汤士选为左监副,加二级。(清朝《时宪书》)

嘉庆五年庚申(1800 年)

汤士选为左监副,加三级。(清朝《时宪书》)

故《正教奉褒》说汤士选施升监正是在 1800 年以后。

1826 卒,年 59 岁。

嘉庆十三年戊辰(1808 年)

汤士选为监正,记录四次。闰五月十三日,汤士选卒。

是年福文高任钦天监监正,兼理算学馆学务(见《正教奉褒》)。

嘉庆二十四年乙卯(1819 年)

尚称监正福文高。

道光二年壬午(1822 年)

是年毕学源(Cajetanns Pires,葡人)任钦天监监副(见《正教奉褒》)。

道光四年癸未(1824 年)

是年福文高(1749~1824)死。

道光六年丙戌(1826 年)

是年高守谦(葡人)授钦天监监正,十七年(1837 年)因疾告假回西,自后钦天监内,无西士任事者(见《正教奉褒》)。

1953 年 10 月修订于兰州

对数的发明和东来*

目　　次

---

* 本文原载《科学》第12卷(1927年)第2期第109～158页,第3期第285～325页,第6期第689～700页;1933年收入《中算史论丛》(一)第195～348页,1955年收入《中算史论丛》第三集第69～190页。

(一) 对数的发明[①]

一、讷白尔传略

对数之作,远在十七世纪。在这以前,阿基米得(Archimedes,公元前 287 年? ~前 212 年),斯提斐尔(Stifel,1486 或 1487~1567)虽然有这概念,始终没有成功。如十五世纪末德人制有精密三角表,虽亦有功于世,可是计算需时,总不便利。至对数表出,方见便利。拉普拉斯(Laplace,1749~1827)曾说:"对数之发明,不啻

① 参看 Cajori, F.: *A History of Elementary Mathematics*, pp. 153—167, N. Y. 1917 及 D'ocagne, M.: *Some Remarks on Logarithms Apropos to Their Tercentenary*, from the Smithsonian Repor for 1914, Washington, 1915, pp. 175—181. Smith, D. E. *History of Mathematics*, Vol. I. pp. 389—392, 1923, Vol. Ⅱ. pp. 202—203, pp. 513~523, 1925.

因减省天文家之工作，而倍蓰其寿命。"可见对数在科学界有相当的贡献。

对数是苏格兰麦执斯吞(Merchiston)约翰·讷白尔(John Napier)① 所发明。氏于公元1550年生于爱丁堡附近的麦执斯吞，1617年4月4日死，年七十七岁。讷白尔曾就学国外。1608年其父死后，袭其遗业。氏好算数，曾四十年从事此道，最致力于算数简易方法，略习球面三角术的，当知讷氏比例式(Napier's analogies)和球面三角形讷氏记法(Napier's rule of circular part)极便记忆。1617年曾出版《剌布多罗基亚》(*Rabdologia*)一书，述讷白尔筹(Napier's rods or bones)②和其他乘除简算的器具。此书流传到欧洲大陆，比所发明的对数尤为广泛，虽迟到1721年哈顿(E. Hatton)所著算术书，尚以讷白尔筹说明乘除开方算法，所以它输入中国，亦较对数为早。

讷氏对数实在是历久艰辛思索的所得。因近代于 $n=b^x$ 时，可称 x 为 n 之对数，而其底为 b。可是在讷氏当时，指数记法尚未发明，即斯提斐尔或斯提焚(Stevin，1548～1620)的指数概念亦未完成，而赫黎奥替(Harriot，1560～1621)在讷氏死去之后，于其所著作代数书中还没说到指数，直到尤拉(Euler，1707～1783)方始察出对数和指数的关系，讷氏对数可以先指数而发明，实在是科学界的珍闻，现在叙述一下他用甚么方法发现了对数。

---

① 拉丁文作 Neperius，法文作 Neper。此外亦作 Naperus 或 Naper。

② 参看 M. Terquem：*Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathematiques*，"*Neper*"条，pp. 109—110，1855，Paris，或第九版《大英百科全书》，"*Napier, John*"条。《剌布多罗基亚》的各版本和它的译本如原本：*Rabdologiae, Sev. Numerationis Per Virgulas Libri* Dvo，1617，Edinburgh，1626，Leyden，译本，1623，Verona，1623，Berlin.

二、讷白尔对数的计算①

讷白尔死于1617年，其子罗伯(Robert)于1619年再版父书，并附对数计算之说明。它的方法令 AB 直线上有两点 L 及 N，并由 A 点向 B 进行。起始进行速度相同，假令为 $\frac{AB}{n}$，而 n 为任意之数。就中 L 点每次以 $\frac{AB}{n}$ 之速度在 AB 进行，而 N 点每次之速度逐渐减少，因其速度并以"由某点至 B，再以 n 除之距离"为律，N 点愈进行，其速度愈减，如在 t 时间，N 点至 P 处，则其速度为 $\frac{PB}{n}$。因此逐渐减少，到通过 B 点时，它的速度是负数。因此在 t 时间 N 点至 P 处，L 点至 Q 处，讷氏称 LQ 为 NP 的对数。

讷氏的最初目的，原是为简便三角函数计算起见，所以他的对数是照正弦数目，并不照1，2，3，4，……等数逐一计算。其正弦九十度令为 10^7，以后逐渐缩小，现在用代数符号记出，如：

$d=AB=$正弦九十度。

$x=$在 T 时间，L 点进行的路程，其量如等差级数。

$y=$在 T 时间，N 点进行的路程，其量如等比级数。

$md=1=L$，N 二点起始进行的速度。

$d-y=N$ 点于 T 时距 B 终点的距离。

T 时可分为 n 数极多的短时间，每次为 t，则在每时间 $0,t,2t,3t,\cdots\cdots,nt$ 的终点，x 进行的距离各为 $0,md,2md,3md,\cdots\cdots,nmd$。而每次 $d-y$ 之值为：

$d,d(1-m),d(1-m)^2,d(1-m)^3,\cdots\cdots,d(1-m)^n$。

---

① 参看 M. Terquem：*Bull. de biblio d'histoire et de biog. math* 内 *Notice sur la decouverte des logarithmes*，1855，Paris，pp. 40.

于 T 时，$x=nmd$，$y=d-d(1-m)^n=d-d\left(1-\frac{x}{nd}\right)^n$，

$$y=d-d\left[1-\frac{x}{d}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^2d^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{x^3}{n^3d^3}+\cdots\right]$$

如 n 为无穷大，则

$$\begin{aligned}y&=d-d\left(1-\frac{x}{d}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{d^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{d^3}+\cdots\cdots\right)\\&=d-de^{-\frac{x}{d}},\end{aligned}$$

而 e 为自然对数的底，则

$$\frac{d-y}{d}=e^{-\frac{x}{d}},$$

$$-\frac{x}{d}=\text{nat. log}\,\frac{d-y}{d}。$$

$$x=-d\,\text{nat. log}\,\frac{d-y}{d}。$$

但 x 是 $d-y$ 的讷白尔对数，所以：

$$\text{nap. log}(d-y)=-d\,\text{nat. log}\,\frac{d-y}{d}=d\,\text{nat. log}\,\frac{d}{d-y}$$

讷白尔以 $d=10^7$，如 $d-y=z$，则：

$$\text{nap. log}z=10^7.\,\text{nat. log}\,\frac{10^7}{z}。$$

讷白尔以 $d=10^7=\sin 90°$，即 $\frac{d}{2}=5\cdot 10^6=\sin 30°$。在《讷表》中，

$$\log\sin 30°=6931471.808942;$$

因 $\frac{d-y}{d}=\frac{1}{2}$，则 nat. log $\frac{1}{2}=-0.6931471805599$。欲得讷对的值，当以 -10^7 乘之，即得 6931471.805599，故《讷表》的差不过在小数十位下单位的三分之一。

讷白尔实际计算对数，并不用级数，而是直接计算 d，

$d(1-m), d(1-m)^2, d(1-m)^3, \cdots\cdots, d(1-m)^{100}$的值，而以 $d=10^7, m=10^{-7}$，其计算方法，颇为简便。即令第一项 $d=10^7$，次以 $d=10^7$ 除第一项而减之，为二项；又以 $d=10^7$ 除第二项而减之，为第三项，逐次如是其次序如下表：

	d	10000000.0000000
		1.0000000
	$d(1-m)\cdots\cdots$	9999999.0000000
		0.9999999
	$d(1-m)^2\cdots\cdots$	9999998.0000001
		0.9999998
	$d(1-m)^3\cdots\cdots$	9999997.0000003
		$\cdots\cdots\cdots\cdots$
	$d(1-m)^{100}\cdots\cdots$	9999900.0004960
而	$d(1-m)^{100}=$	$10^7(1-10^{-7})^{100}$;

如按二项式定理展开之，算到 10^{-21}，则：

$$d(1-m)^{100}=9999900.000499838300392122。$$

这和讷白尔所得的，相差极微。

为计算精密起见，讷白尔曾用几何证得 $\log(d-y)$系在 y 与 $\frac{dy}{d-y}$两限之间。故每次欲求 $\log(d-y)$的真值，先求 y 与$\frac{dy}{d-y}$，次取其值的中数。现在用解析法说明它。

$$\begin{aligned}\text{nap.}\log(d-y)&=-d\,\text{nat.}\log\left(1-\frac{y}{d}\right)\\&=y+\frac{1}{2d}\cdot y^2+\frac{1}{3d^2}\cdot y^3+\frac{1}{4d^3}\cdot y^4+\cdots,\qquad(1)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{d-y}=\frac{y}{1-\frac{y}{d}}=y+\frac{y^2}{d}+\frac{y^3}{d^2}+\frac{y^4}{d^3}+\cdots\cdots,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d-y}+y\right)=y+\frac{y^2}{2d}+\frac{y^3}{2d^2}+\frac{y^4}{2d^3}+\cdots\cdots, \tag{2}$$

以(1),(2)比较,所差在第三项以后,其值为:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{d^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{d^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{y^3}{d^2}。$$

是以要使在小数十四位以下,即在10^{-14}时,仅差一单位,必须令:$y=\sqrt[3]{6}$,且 y 当在 1 与 2 之间。现用 $y=1$,即 $d-y=9999999$,

$\frac{dy}{d-y}=\frac{10^7}{10^7-1}=1.000000100000001$;

而 y 与$\frac{dy}{d-y}$的中数为 1.00000005　　$(1)_1$

这约略是 $10^7-1=9999999$ 的讷白尔对数,实际

$$\begin{aligned}\text{nap.}\log(10^7-1)&=10^7\text{nat.}\log(1-10^{-7}),\\&=1+\frac{1}{2}\cdot10^{-7}+\frac{1}{3}\cdot10^{-14}+\frac{1}{4}\cdot10^{-21}+\\&=1.0000000500003333; \qquad (2)_1\end{aligned}$$

比较$(1)_1$及$(2)_1$式,知道它仅在小数十四位之下差单位的三分之一。所以 $10^7(1-10^{-7})=9999999$ 的讷对为 1.00000005 就是 $y=1$ 和$\frac{dy}{d-y}=\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}$的平均数,又 $\log10^7(1-10^{-7})^{100}=\log9999900=100.00050$。换言之,凡数在 9999999 与 9999900 中间,真数的等比率为$(1-10^{-7})$,而对数的等差率为 1.00000005,这是第一表。

又因 9999900 的数,讷白尔用以计算第二表,其等比率为$\frac{9999900}{10^7}=\frac{99999}{10^5}=\frac{10^5-1}{10^5}=1-\frac{1}{100000}$;如前例,以 $d=10^7$,逐次以$\frac{1}{10^5}$乘前数,减余约到五十次得 9995001,224804 由是 9995000 之对数

值，可如前例由 y 和$\frac{dy}{d-y}$的平均数而得 5001.25041645。换言之，凡数在 9999900 与 9995000 中间，真数的等比率为$(1-10^{-5})$，而对数的等差率为 100.00050。

又因 9995000 的数，讷白尔用以计算第三表，其等比率为$\frac{9995000}{10^7}=\frac{9995}{10^4}=1-\frac{1}{2000}$；如前例，以 $d=10^7$，逐次以$\frac{1}{2000}$乘前数，减余约到二十次得 9900000，而其对数值为 100503,3585228。

又因 9900000 的数，讷白尔用以计算第四表，是为根表(table radicale)，其等比率为$\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$；如前例，以 $d=10^7$ 为第一项，求至第六十九项得 4998609,4034 约为 10^7 之半数，而其对数为 6934253,4 约与正弦 30 度之对数相等。如求 30 度以下的正弦对数，讷白尔因 $\log(d-y_1)-\log(d-y_2)$在$\frac{y_2-y_1}{d-y_2}d$ 及$\frac{y_2-y_1}{d-y_1}d$ 中间之理而考得的。以上所述，不过是大意，详细情形可看 *journal des savants*(1835，p. 354)中俾奥(M. Biot)的论文。

三、讷白尔《对数表》及其版本

讷白尔 1614 年 6 月在爱丁堡发表所著《对数表》(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*)，其中五十六页是说明，九十页是表。篇末说："此表的制作，必需多数人的工力，现在用独力制定，错误在所不免。"可是这表除极少数外，实际还没有大错误①。第一版的讷白尔《对数表》，现在藏法国通儒院藏书楼(La bibliothèque de L'Institut)，是 1834 年由佛兰生(J. F. Français)处购到。原书是

① 见 *Napier's Construction* (Macdonald's Ed.)，pp. 87，90～96。

阿波给斯(Arbogast)旧藏,1810 年死时遗赠给佛兰生兄弟的[1]。至 1619 年讷子伯罗重印父书,并附说明,其计算方法,始为世所通晓。此外还有 1616 年;1889 年(Edinburgh);1620 年(Leyden);1616 年,1618 年(London)的各种版本。

《讷白尔表》在 1895 年用拉丁文在巴黎复印,1889 年由马克多那尔(W. R. Macdonald)用英文在爱丁堡复印。讷白尔著书输入法国,由翁里奥(Henrion)开始,他在 1620 年将讷书在里昂(Lyon)复印。至于自然对数表,则由英人温盖(Wingate)输入法国。近三百年各国印行对数表之数,是在五百种以上[2]。其小数位较少的要算 1770 年伽地纳(Gardiner)在亚威农(Avignon)所印之小数七位之对数表。可是卷帙颇大,不便取携。至 1785 年卡勒(Callet)制成小本,由当时名手第多(Ambroise Didot)印行,其子 Firmin Didot 发明铅版,改良印刷,群众方称便利。

现在列 1614 年的讷白尔对数表样张如下:

Gr. 0	0		+	−		
	sinus	logarithmi	differentiae	logarithmi	sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60′
1′	2909	81425681	81425680	1	10000000	59′
2′	5818	74494213	74494211	2	9999998	58′
3′	8727	70439564	70439560	4	9999996	57′
4′	11636	67562746	67562739	7	9999993	56′
5′	14544	65331315	65331304	11	9999989	55′

① 见 M. Terquem:*Notice sur la découverte des logarithmes*,p. 40.

② 参观法文《数学丛书》(Gauthier-Villars,1909). 及 Knott,C. G. ,*The Napier Tercentenary Memorial Volume*,Messrs. Longmans,Green,& Co. ,1915 London.

表内首页下右边书“89”以志八十九度。在“sinus”行内样张内曾举正弦 0 度 0 分至 5 分，或正弦 89 度 55 分至 60 分的数值。在“logarithmi”行内志上述正弦的对数，正“differentiae”行内，是这行内之对数较。因 $\sin x=\cos(90^\circ-x)$，则此表实际已具余弦及其对数的值。如 $\log\cos 0°5'=11$，则 $\log\cos 89°55'=65331315$。且因 $\log\tan x=-\log\cot x=\log\sin x-\log\cos x$，则“differentiae”行内如作“＋”即系正切的对数，如作“－”即系余切的对数。

四、巴理知传略

与讷白尔同时代的恩利格·巴理知（Henry Briggs，1556～1630）[①]，他是伦敦格勒善学校（Gresham College）教授，以后是牛津大学教授，来见讷白尔[②]，告诉讷白尔拟用零为全正弦的对数，而用 10^7 做 $5°\ 44'\ 22''$ 正弦的对数。讷白尔亦以为此项修正是对的，并如巴氏意以 0 做 1 的对数，10^7 做全正弦的对数，又以指标为正。自此巴氏即着意以 10 做底制成新表。1617 年讷白尔逝世，就藉巴氏力量，成就他未完的事业。巴理知在 1624 年完成巴理知《对数表》（arithmetica logarithmica），真数由一至二万，又由九万至十万，对数的小数算至十四位[③]。1628 年荷兰国高达（Gouda）地方的佛拉哥（Adriaen Vlacq. 约生于 1600 年，死于 1655 年）复刻巴理

① The Dict. of National Biography 以为生于 1561 年。Fink《数学史》谓 1560 年 2 月生于 Yorkshire 的 Halifax 附近的 Warley Wood。Smith《数学史》谓据教区纪录，应作 1560/61. 又 Henry Briggs，《律历渊源》（1723 年）译作巴理知斯，《数学启蒙》译作巴理知。

② 见 *Mark Napier's Memoir of John Napier*，p. 409，1834.

③ W. W. R. Ball：*A Short Account of the History of Mathematics*，pp. 202～203，1901.

知《对数表》,计由一至十万,就中二万至九万的对数,为佛拉哥补成。

五、自然对数

讷氏对数与以 $e=2.718\cdots\cdots$ 为底的自然对数(natural logarithms)绝不相同。普通代数教科书谓自然对数是讷氏所发明,实在大误。读者要注意到①,在 1618 年来特(Edward Wright)译本的讷白尔《对数表》不记名之附卷中开始说自然对数。附卷中又言内插法(interpolation)疑是吴德(William Oughtred,1574～1660)手笔。所述内插法以七十二个正弦之对数,求其余的对数。又在表中以 $\log 10=2.302584$,可是在近世则书 $\log_e 10=2.302584$。

自然对数的制度由《新对数表》(new logarithms)开始。这本书在 1619 年由伦敦数学教授斯坡得尔(John Speidell)在伦敦印行。实际上斯坡得尔对数还不是自然对数。如讷白尔说 $\sin 30'=87265$,半径 $\doteq 10^7$,所以实际 $\sin 30'=0.0087265$,而此数的自然对数为 5.25861 加 10 得 15.25861。斯坡得尔则称 $\log\sin 30'=525861$。用公式表明,应作

$$\mathrm{sp.}\log x=10^5\left(10+\log_e\frac{x}{10^5}\right)^{②}。$$

1622 年的《新对数表》是由一到千的自然对数表,可是这表不记小数点。其前在 1618 年又有一小表仅有七十二对数。斯坡得尔

① 十九世纪末叶德人首正其误,见 Dr. S. Günther:*Vermischte Untersuchungen*, Chap. V.

② 其详参看 *Quarterly Journal of Pure and Appl. Math.* Vol. 46,1915,pp. 174～178。第九版《大英百科全书》"Tables"条,*Report of the British Association for the Advancement of Science for* 1873,"Table"条,pp. 1～175.

为最初发表自然对数表的人。其更精善的要算乌弗兰(Wolfram)的自然对数表。其数由一到万,而小数算到四十位,在1778年公布。他是荷兰炮队副队长,计算这表,费时六年。最完善的自然对数表,要推德人达士(Zacharias Dase)1850年在维也纳所印的。至1819年有一人名里(Ree),在所编《百科全书》"双曲线对数"条,亦有一表。

至于多位小数之对数,则乌弗兰之外,沙普(Sharp)算至61位,亚当斯(Adams)算至260位。可是这二人所算的,仅2,3,5,7,10各数的自然对数,和对数根而已①。

六、柏格对数及其他

此外还有一故事,就是与讷白尔同时有瑞士人柏格(Justus Byrgius,Jobst Bürgi,1552～1632)在讷白尔《对数表》出版后六年,亦出版一粗糙的对数表。柏格少年时是钟表匠,后来到加塞尔(Kassel)天文台,又在布拉格(Prague)和开卜勒(Kepler,1571～1630)共事,所说对数可能早于讷白尔,可是发表的时间稍迟②。

对数的计算,在讷白尔、巴理知、开卜勒、佛拉哥都是由等比级数、等差级数对列之义求出。可是在对数表大致编辑完成之后,芬遏特(Gregory St. Vincent,1584～1667)、牛顿(Newton,1642～1727)、麦揆忒(Nicolaus Mercator,1620?～1687)诸人,又发现对数可以用无限级数表示。麦揆忒发明log $(1+x)$的级数。芬遏特在1647年算割圆术时,称双曲线和渐近线中间的积,就是双曲线对数积。麦揆忒于1668年称对数级数的值,可由双曲线间各积的总

① 六十位的对数根,见华蘅芳、傅兰雅译《代数术》第十八卷。

② 参考 Gerhardt:*Gesch. d. Math. in Deutschland*,p. 75,p. 119,1877.

和求得[①]。

（二）对数的东来（上）

七、对数输入中国的经过

对数首先由西人穆尼阁（Jean Nicolas Smogolenski 1611～1656）[②] 输入中国，稍次则有《数理精蕴》的著作，惟穆尼阁说“解此别有专书”，而《数理精蕴》亦不言其理。直到同光间李善兰、华蘅芳始由西人译出《代数学》、《代数术》诸书，由此近世对于对数的说明，始为世所通晓。前此戴煦（1805～1860）、李善兰（1811～1882）、邹伯奇（1819～1869）、顾观光（1799～1862）、徐有壬（1800～1860）都有详细的论述。在《代数学》、《代数术》译书之前，故事尤十分珍贵，中文论列对数的，有下列各种：

（1）《比例对数表》十二卷　穆尼阁著，薛凤祚纂（1653 年）。

（2）《比例数解》四卷　清梅文鼎撰。

（3）《数理精蕴》（1723 年）《面体比例便览》　清年希尧撰（1735 年）。

（4）《算法大成》上篇　清陈杰撰（1844 年）。

（5）《对数简法》二卷（1845 年）《续对数简法》一卷（1846）《假数测圆》二卷（1852 年）　清戴煦撰。

（6）《方圆阐幽》，《弧矢启秘》，《对数探源》　清李善兰撰（1846? 年）。

---

① 其详参看第九版《大英百科全书》“logarithms”条。

② 参看本集第 497 页注 1（＊见本卷第 470 页注①。——编者）。

(7)《圆锥曲线》三卷　李善兰译;《级数回求》　李善兰撰。

(8)《数学启蒙》二卷　英国伟烈亚力(A. Wylie)撰(1853 年)。

(9)《乘方捷术》三卷　清邹伯奇撰。

(10)《算胜续编》　清顾观光撰(1854 年)。

(11)《造各表简法》　清徐有壬撰。

(12)《代数学》十三卷　英国棣么甘(Aug. De Morgan)撰,英国伟烈亚力口译,海宁李善兰笔受(1859 年)。

(13)《万象一原》　夏鸾翔撰(1862 年)。

(14)《代数术》二十五卷　英国华里司辑,傅兰雅(J. Fryer)口译,金匮华蘅芳笔述(1873 年)。

(15)《对数详解》五卷　清丁取忠、曾纪鸿同撰(1874 年)。

(16)《微积溯源》八卷　英国华里司辑,傅兰雅口译,金匮华蘅芳笔述(1874 年)。

(17)《对数表》四卷四册　清贾步纬校,江南制造局印。

(18)《对数表》一册　附《八线对数表》,《八线表》。英国路密司(Loomis)撰,赫士译,高密朱葆琛笔述。

(19)《对数述》四卷　清陈其晋撰(1877 年)。

(20)《三角数理》十二卷　英国海麻士辑,傅兰雅口译,金匮华蘅芳笔述(1877 年)。

(21)《对数表引说》一卷　《用对数表诀》一卷、《造对数表法》一卷　清朱湘澄,未刊。

(22)《代数术补式》二十二卷　解崇辉撰(1899 年)。

(23)《算式解法》十四卷　美国好敦司开奈利同撰,英国傅兰雅口译,金匮华蘅芳笔述(1899 年)。

(24)《有不为斋算学》二种四卷　傅九渊撰。

(25)《对数旁通》一卷　蒋士栋撰(1897? 年)。

(26)《对数较表》一卷　廖家绶(1860～1890)撰。

(27)《对数捷法》一卷　陆采撰,见《杭州艺文志》。

(28)《对数浅释》一卷　江衡撰,《溉斋算草》之一。

(29)《对数四问》　刘彝程撰,《经世文续编》本。

八、《比例对数表》、《比例数解》

(1)《比例对数表》　有人疑出于 *Les Tabulae Rudolphinae*,是顺治三年(1646 年)由国外寄到澳门,今查非是①。薛凤祚《比例对数表》(1653 年)《序》则称:"穆(尼阁)先生出,而改为对数,今有对数表,以省乘除,而况开方立方三四方等法,皆比原法工力,十省六七,且无舛错之患,此实为穆先生改历立法第一功。予执笔以受,时以重译,于戊辰(1628 年)历元后二十五稔(1653 年),岁在寿星,历春既夏而秋,方盛暑则烈阳薰灼,挥汗浃背,劳诚劳矣,功于何有!"

穆尼阁解释对数的大意称:"愚今授以新法,变乘除为加减,……解此别有专书,今特略明其理,如下二表,二同余算,不论从一,二,三,四起,或从五,七,九,十一起,但同余之内,中三相连度数,可取第四。"

---

① 此书为开卜勒(Johann Kepler,1571～1630)所著,今北京北堂图书馆藏有1627 年初版本一册,题

Tabvlae Rudolphinae, qvibvs astronomicae scientiae, temporum longinquitate collapsae Restauratio continetur;…

此书并非论对数专书,但其中一部分包括对数表。又北堂藏本上有…1646, Decemb 2. Macaj. 字样,知为波兰人卜弥格(Michael Petrus Boym,1612～1659),而书是在 1646 年 12 月 2 日澳门所记(严敦杰补注)。又参看 *Note on Kepler's Tabulae Rudolphinae* in the Library of Pei-t'ang in Pekin, by B. Szzesniak, ISIS, vol. 40, pt. 4, No. 122, 1949, pp. 341～346.

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同余算(*a*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同余算(*b*)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

如"同余算(*a*)"内的 6,7,8,9 有 $9=(7+8)-6$ 的关系;又"同余算(*b*)"内的 5,7,9,11 有 $11=(7+9)-5$ 的关系。

而对"同余算"内的"比例算"四率成比例,有 $32:64=128:256$,又有 $1:2=4:8$ 之关系。故按上表"比例算"内 $4:32=128:x$ 或 $x=\frac{32\times128}{4}$。此式本应乘除,现在仅用加减,因对 32 为 6,对 128 为 8,对 4 为 3,则对 x 为 $(6+8)-3=11$,检表知 11 之对为 1024,即 $x=1024$。《比例对数表》十二卷,题南海穆尼阁著,北海薛凤祚纂。表中原数,比例数并列比例数有小数六位。书称:"原数当用十万,其表久成,迩西来不戒,失之于途,今止一万,……原数一万之外,取比例法。"

例求 $\log 160232=?$

$$\log 1602 =3.204662,\ \log 160200=5.204662,$$

$$\log 1603 =3.204933,\ \log 1603-\log1602=0.000271$$

$$\frac{32}{100}\times0.000271=0.000086$$

$$\log 160200=5.204662$$

$$\therefore\quad \log 160232=5.204748$$

(2)《比例数解》 清梅文鼎(1633~1721)《勿庵历算书目》(1702 年自序)[①] 称:

《比例数解》四卷。

比例数表者,西算之别传也。其法自一至万,并设有他数

① 见《知不足斋丛书》本,第 39~41 页。

相当，谓之对数，假令有所求数或乘或除但于本表间两对数相加减，即得相求。乘者两对数相加得总，除者两对数相减即较。总较各以入表，取其所对本数，即各所求之乘得数，除得数。

前此无知者，本朝顺治间西士穆尼阁以授薛（凤祚）仪甫，始有译本。……又有《四线比例数》，亦穆所授也。八线割圆，西历旧法，今只用正弦，余弦，正切，余切，故曰四线……。

穆先生曰：表有十万，西来不戒于途，仅存一万，万以上，以法通之。……尝见薛刻别本，数有二万。

仪甫又有《四线新比例》，用四线同，惟度析百分，从古率也。穆有《天步真原》，薛有《天学会通》，并依此立算，不知此，则二书不可得以读，故稍为诠次，为初编之第四书。

九、《数理精蕴》、《算法大成》

(3)《数理精蕴》 清康熙癸巳（1713 年）始编律吕算法等书[①]。康熙甲午（1714 年）始拟以律吕历法算法三书共为一部，名为《律历渊源》[②]。康熙壬寅（1722 年）六月《数理精蕴》，《历象考成》都告成[③]。雍正癸卯（1723 年）冬十月《律历渊源》一百卷刻成，分三部，即《历象考成》，《律吕正义》，和《数理精蕴》，雍正帝制序[④]。《数理精蕴》下编卷三十八末部八有："对数比例"。其目次是：对数比例，明对数之原之一、二、三；明对数之纲之一、二；明对数之目，用中比例求假数法之一、二；明对数之目，用递次自乘求假数法之一、二；明对数之目，用递次开方求假数法之一、……七；明对数之目，用前

① 见《东华续录》"乾隆一四"。

② 见《东华录》"康熙九四"。

③ 见《东华续录》"乾隆一四"。

④ 见《东华录》"雍正三"。

所得九十九数求他假数法之一、二、三；求八线对数；对数用法等。

在“对数比例”内称：“对数比例，乃西士若往·讷白尔（John Napier）所作，以借数与真数对列成表，故名《对数表》。又有恩利格·巴理知（斯）（Henry Briggs）[①]者，复加增修，行之数十年，始至中国。其法以加代乘；以减代除；以加倍代自乘，故折半即开平方；以三因代再乘，故三归即开立方。推之至于诸乘方，莫不皆以假数相求，而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。其立数之原，起于连比例，盖比例四率：二率与三率相乘，一率除之，得四率。以递加递减之四数：第二数第三数相加，减第一数，则得第四数。作者有见于此，故设假数以加减代乘除之用，此表之所以立也。”所说比例四率，和递加递减的四数，和穆尼阁解析对数的大意相同。

在“明对数之原”和“明对数之纲”，则设下列各表，如(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，以见“假数可随意而定”，由便利起见，用(5)，(6)，(7)的假数。因：“乘除之数始于一，故一不用乘，亦不用除；而加减之数始于 0，故 0 无可加，亦无可减也。”“故 1 之假数，必定为 0”，如 $\log 1=0$。“而一与十，十与百，百与千，……皆为加十倍之相连比例率。然其数皆为一，但递进一位”，如(5)。因此，“真数不同，而位数同者，其假数虽不同，而首位必同”。如(6)，首位都是 0，又“真数相同，而递进几位者，其假数首位必递加几数，而次位以后却相同”。如(7)之例。

---

① Henry Briggs，《律历渊源》(1722 年)译作巴理知斯，《数学启蒙》译作巴理知。

真数	假数
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8

(1)

真数	假数
2	3
4	5
8	7
16	9

(2)

真数	假数
1	4
3	5
9	6

(3)

真数	假数
1	8
3	5
9	2

(4)

真数	假数
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8

(5)

真数	假数
2	0.3010299957
3	0.4771212547
4	0.6020599913
5	0.6989700043
6	0.7781512504

(6)

真数	假数
11	1.0413926852
110	2.0413926852
1100	3.0413926852
11000	4.0413926852
110000	5.0413926852

(7)

其"明对数之目"有(1)"用中比例求假数法"。则因"凡连比例率，以首率末率两真数相乘开方，即得中率之真数；以首率末率两假数相加折半，即得：中率之假数。"

如

真数　$1:x=x:10$，　　则　$x=\sqrt{1\times10}=3.1622777$，

假数　$0-y=y-1$，　　又　$y=\frac{0+1}{2}=0.500$，

故　　　　log 3.1622777＝0.500 是第一次。

如求 log 9，则如表所列，第五次以前，都用逐次所得的中率做首率，以旧末率 10 做末率，五次以后，则因要和所求 9 迫近之故，用逐次所得的中率做首率，或做末率；而用旧末率或首率和它相配。到二十六次，可得 log 9＝0.9542425125。然而实际上，log 9＝0.95424250944。所以表中 9，“七空位之后，尚有奇零，故所得之假数，犹为稍大”。

次	真	假	次	真	假
第一次	10000000	00000000000	第六次	86596432	09375000000
	31622777	05000000000		89768713	09531250000
	100000000	10000000000		93057204	09687500000
第二次	31622777	05000000000	第七次	89768713	09531250000
	56234132	07500000000		91398170	09609375000
	100000000	10000000000		93057204	09687500000
第三次	56324132	07500000000	第八次	89768713	09531250000
	74989421	08750000000		90179777	09570312500
	100000000	10000000000		91398170	09609375000
第四次	74989421	08750000000	第九次	89768713	09531250000
	86596432	09375000000		90173333	09550781250
	100000000	10000000000		90179777	09570312500
第五次	86596432	09375000000	第十次	89768713	09531250000
	93057204	09687500000		89970796	09541015625
	100000000	10000000000		90173333	09550781250

次	真	假	次	真	假
第十一次	89970796 90072008 90173333	09541015625 09545898437 09550781250	第十九次	89999250 89999650 90000041	09542338915 09542407989 09542427062
第十二次	89970796 90021388 90072008	09541015625 09543457031 09545898437	第二十次	89999650 89999854 90000041	09542407989 09542417526 09542427062
第十三次	89970796 89996088 90021388	09541015625 09542236328 09543457031	第二十一次	89999845 89999943 90000041	09542417526 09542422294 09542427062
第十四次	89996088 90008737 90021388	09542236328 09542846679 09543457031	第二十二次	89999943 89999992 90000041	09542422294 09542424678 09542427062
第十五次	89996088 90002412 90008737	09542236328 09542541503 09542846679	第二十三次	89999992 90000016 90000041	09542424678 09542425870 09542427062
第十六次	89996088 89999250 90002412	09542236328 09542388915 09542541503	第二十四次	89999992 90000004 90000016	09542424678 09542425274 09542425870
第十七次	89999250 90000821 90002412	09542388915 09542465209 09542541503	第二十五次	89999992 89999998 90000004	09542424678 09542424976 09542425274
第十八次	89999250 90000041 90000821	09542388915 09542427062 09542465209	第二十六次	89999998 90000000 90000004	09542424976 09542425125 09542425274
$\log 9 = 0.9542425125$					

又(2)"用递次自乘求假数法"。

首引　$\log 2^1=\log 2=0.3010299957$,

$\log 2^2=\log 4=0.6020599913=2\times 0.3010299957$,

$\log 2^4=\log 16=1.2041199826=4\times 0.3010299957$,

……………………………………………………

$\log 2^n=\cdots\cdots\cdots\cdots=n\times 0.3010299957=N$,

以证 $\log a^n=n\log a=N$, $\log a=\frac{N}{n}$。就中 a 是所求真数,n 是率(即指数),N 是假数。如欲求 log 2,先记 2 的假数首位 0,$2^2=4$ 的假数首位 0,$2^4=16$ 的假数首位 1,$2^8=216$ 的假数首位 2,$2^{16}=65536$ 的假数首位 4,逐次如此,知 2^{16384} 的假数首位是 4932。则如前定义,得 $\log 2=\frac{4932}{16384}=0.3010$,再进求 $2^{137446953472}$ 的假数首位是 41375653307,则 $\log 2=\frac{41375653307}{137446953472}=0.3010299959$。

率	真	假
1	2	0
2	4	0
4	16	1
8	256	2
16	65536	4
32	4294967296	9
……	……	……
16384	……	4932
137446953472	……	41375653307

又(3)"用递次开方求假数法"。

(i)前证 $\log a^n=n\log a=N$,则 $\log a=\frac{N}{n}$。

也可证 $\log a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log a=N_1$,则 $\log a=nN_1$,

如下表:

率	真	假
1	256	24082399653
2	16	12041199826
4	4	6020599913

故 $\log 256 = 2.4082399653$,

则 $\log 16 = \log 256^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{2} \times 2.4082399653$

$= 1.2041199826$。

又 $\log 4 = \log 256^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \times 2.4082399653$

$= 0.6020599913$。

换言之,即 $\log 256 = 2 \times 1.2041199826$ 或 4×0.6020599913

$= 2.4082399653$。

(ii)"凡递次开方,率皆用二倍。"如自乘一次为2,自乘二次为4,自乘三次为8,每增乘一次多一倍,如下表:"凡有真数求假数,皆以所求之数为一率,真数开方几次,则假数必折半几次。"在前"用中比例求假数法",已见其例。

真数 $1 : x = x : 10$,则 $x = \sqrt{1 \times 10} = 3.1622777$

假数 $0 - y = y - 1$ $y = \frac{0+1}{2} = 0.50$

$\therefore \log 3.1622777 = 0.50$

"今虽无第一率之假数,而苟得其折半第几次之假数,则加倍几次,必得第一率之假数。故以加倍第几次之率数,与折半第几次之假数相乘,即得第一率之假数也。"

累次乘数	率　数	累次乘数	率　数
1	2	26	67108864
2	4	27	134217726
3	8	28	268435456

累次乘数	率　数	累次乘数	率　数
4	16	29	536870912
5	32	30	1073741824
6	64	31	2147483648
7	128	32	4294967296
8	256	33	8589934592
9	512	34	17179869184
10	1024	35	34359738368
11	2048	36	68719476736
12	4096	37	137438953472
13	8192	38	274877906944
14	16384	39	549755813888
15	32768	40	1099511627776
16	65536	41	2199023255552
17	131072	42	4398046511104
18	262144	43	8796093022208
19	524288	44	17592186044416
20	1048576	45	35184372088832
21	2097152	46	70368744177664
22	4194304	47	140737488355328
23	8388608	48	281474976710656
24	16777216	49	562949953421312
25	33554432	50	1125899906842624

(iii)“凡真数不可与假数为比例者，因真数开方假数折半，其相比之分数不同，若开方至于数十次，则开方之数，即与折半之数相同。”如前“用中比例求假数法”，参看(第 106～110 页)下表知 10 在第二十一次以下，开方之数，已与折半之数相同。

或
$$10^{1/2(n+1)}=\sqrt{1+E_n}=1+\frac{1}{2}E_n$$

时， 则
$$\log 10^{1/2(n+1)}=\log(1+E_n)^{1/2}=\log\left(1+\frac{1}{2}E_n\right)$$
$$=\frac{1}{2^{n+1}}。$$

又因 $$10^{1/2(n+1)}=1+E_{n+1},$$

则 $$\frac{1}{2}E_n:\frac{1}{2^{n+1}}=E_{n+1}:\frac{1}{2^{n+1}}=1:\mu。$$

如[①] $$10^{\frac{1}{2^{54}}}=\sqrt{1+0.\overset{15}{0}25563829864006470}$$

$$=1+0.\overset{15}{0}12781914932003235,$$

$$\frac{1}{2^{54}}=0.\overset{16}{0}55511151231257827 0,$$

则 $$\frac{12781914932003235}{55511151231257827 0}=\frac{10000000000000000}{\mu=434294481903251804},$$

即 $$\log 10^{\frac{1}{2^{54}}}=\log\left(1+0.\overset{15}{0}1\right)=0.\overset{16}{0}\mu$$

$$=0.\overset{16}{0}434294481903251804。$$

而 $\mu=434294481903251804$ 是为对数根(或模数)[②]。

故"凡求假数者,皆以真数开方至几十次,首位第一,又得空十五位,则以其后之零数,与此所得之假数为比例,即得其开方第几十次之假数。按前率数乘之,即得第一率之假数也"。

真数递次开方表	
	10
1	3.16227766016837933199889354
2	1.77827941003892280119730413
3	1.33352143216332402566653893 08
4	1.15478198468945817966191821 3

① 兹为便利起见,应用新符号,如 $0.\overset{15}{0}$ 谓小数点下有十五空位,他仿此,如 $0.\overset{4}{0}58=0.000058$。

② 李善兰译《代微积拾级》称为"中国对数表根"。

真数递次开方表	
5	1.0746078283213174972138176538
6	1.0366329284376979972906273131
7	1.0181517217181818414737238144
8	1.0090350448414474377590051301
9	1.0045073642344625156646706112
10	1.0022511482929129154656117367
11	1.00112494139987987588539551805
12	1.00056231260220863661849591839
13	1.00028111678778013239924964325
14	1.00014054851694725816276732715
15	1.00007027128941143553881170845
16	1.00003513527746185660858130777
17	1.00001756748442267383384678274
18	1.00000878370363461214657407431
19	1.00000439184217316723628188083
20	1.00000219591867555420331707719
21	1.00000109795873502040975472940
22	1.000000548979216821114626602504
23	1.000000274489570738295091254499
24	1.000000137244775951083282695723
25	1.000000068622385621025737187482
26	1.000000034311192221882912750208
27	1.000000017155596378471993879 1
28	1.000000008577797945103051175888
29	1.000000004288888963354198429013
30	1.000000002144449479377767429704
31	1.000000001072224739114050769268

	真　数　递　次　开　方　表
32	1.000000000536112369413317148314
33	1.000000000268056184670731515087
34	1.000000000134028092326383992777
35	1.000000000067014046160946555196
36	1.000000000033507023079911917300
37	1.000000000016753511539815618576
38	1.000000000008376755769872724269
39	1.000000000004188377884927590879
40	1.000000000002094188942461602625
41	1.000000000001047094471230253110
42	1.000000000000523547235614989504
43	1.000000000000261773617807460489
44	1.000000000000130886808903721678
45	1.0000000000000654434044518586975
46	1.00000000000003272170222592881337
47	1.00000000000001636085111296427283
48	1.00000000000000818042555648210295
49	1.00000000000000409021277824104311
50	1.00000000000000204510638912051946
51	1.00000000000000102255319456025921
52	1.00000000000000051127659728012947
53	1.00000000000000025563829864006470
54	1.00000000000000012781914932003235

	真　数　递　次　开　方　表
	1
1	0.5
2	0.25

真数递次开方表	
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.0078125
8	0.00390625
9	0.001953125
10	0.0009765625
11	0.00048828125
12	0.000244140625
13	0.0001220703125
14	0.00006103515625
15	0.000030517578125
16	0.0000152587890625
17	0.00000762939453125
18	0.000003814697265625
19	0.0000019073486328125
20	0.00000095367431640625
21	0.000000476837158203125
22	0.0000002384185791015625
23	0.00000011920928955078125
24	0.000000059604644775390625
25	0.0000000298023223876953125
26	0.00000001490116119384765625
27	0.000000007450580596923828125
28	0.0000000037252902984619140625
29	0.00000000186264514923095703125
30	0.000000000931322574615478515625

真数递次开方表	
31	0.0000000004656612873077392578125
32	0.00000000023283064365386962890625
33	0.000000000116415321826934814453125
34	0.0000000000582076609134674072265625
35	0.0000000000291038304567337036132812
36	0.0000000000145519152283668518066406
37	0.0000000000072759576141834259033203
38	0.0000000000036379788070917129516601
39	0.0000000000018189894035458564758300
40	0.0000000000009094947017729282379150
41	0.0000000000004547473508864641189575
42	0.0000000000002273736754432320594787
43	0.0000000000001136868377216160297393
44	0.0000000000000568434188608080148696
45	0.0000000000000284217094304040074348
46	0.0000000000000142108547152020037174
47	0.0000000000000071054273576010018587
48	0.0000000000000035527136788005009293
49	0.0000000000000017763568394002504646
50	0.0000000000000008881784197001252323
51	0.0000000000000004440892098500626161
52	0.0000000000000002220446049250313080
53	0.0000000000000001110223024625156540
54	0.0000000000000000555111512312578270

(iv) 如求 log 2,先令 $2^{10}=1024$。又令 10^3 除之得 1.024。此时首位已为 1,乃如前例开平方四十七次,即得 1 下有十五空位之数。

$$1.024^{\frac{1}{2^{47}}}=1.{}^{15}_{0}16851605705394977。$$

如前比例，反求之，$1:\mu=16851605705394977:x$。

$$\therefore \qquad x=7318559369062392\text{68},$$

或 $$\log(1.024)^{\frac{1}{2^{47}}}=0.{}^{16}_{0}731855936906239268。$$

如前率数表，

$$\log(1.024)^{\frac{1}{2^{47}}}=\log 1.024^{\frac{1}{2^{47}}}$$
$$=\log 1.024^{\frac{1}{140737488355328}},$$

$$\therefore \quad \log 1.024=140737488355328\times 0.{}^{16}_{0}731855936906239268$$
$$=0.010299956639811952 65^{①};$$

而 $$\log 1024=3.01029995663981195265=\log 2^{10},$$

$$\log 2=\frac{1}{10}\times\log 1024=0.30102999566398119526 5。$$

(v) “凡求假数，真数开方之次数愈多，则所得之假数愈密。然用假数不过至十二位，……故真数开方至二十七次，即可以立率。”

因 $$\log 10^{\frac{1}{2^{34}}}=0.{}^{9}_{0}134028092326383992777,$$

$$\frac{1}{2^{34}}=0.{}^{10}_{0}582076609134674072 26565;$$

而 $$\frac{134028092326383992777}{582076609134674072265}=\frac{1000000000000000000000}{\beta=434294481874147997206955},$$

① 证明详见李善兰译《代数学》卷十二，即：

$$\log_e a=\frac{a^x-1}{x}, \text{或} \log_e z=\left(z^{\frac{1}{2^{47}}}-1\right)\times 2^{47}。$$

又 $\log(1.024)^{\frac{1}{2^{27}}}=0.\overset{9}{\underset{0}{}}167018930501419482 62$。

$$1:\beta=167018\cdots\cdots8262:x,$$

$$x=767406570913770890701439;$$

$$\log(1.024)^{\frac{1}{2^{27}}}=0.\overset{10}{\underset{0}{}}767406570913770890701439$$

$$\therefore \qquad \log 2=0.3010299956640。$$

“此法较之前法，开方省二十次，而所得之数同，故求假数者，用此法亦便也”。

(vi) “凡开方之数，与折半之数虽不同，然而不同之较，递次渐少。故又相较之法。至开方第十次以后，则以较数相减，即得开方之数。”

如求 log 6，如前(iv)例，先令 $6^9=10077696$，又令 10^7 除之，得 1.0077696，此时首位已经是 1。逐次开方十一次，其每次之商以 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\cdots,a_{11}$表之，其值如下：

		1.0077696
$a_1=1+E_1$	1	1.003877283336962456638465 51
$a_2=1+E_2$	2	1.001936766136946616758702 29
$a_3=1+E_3$	3	1.000967914639099017288907 20
$a_4=1+E_4$	4	1.000483840268846629854925 35
$a_5=1+E_5$	5	1.000241890878824685638087 27
$a_6=1+E_6$	6	1.000120938126397134594391 94
$a_7=1+E_7$	7	1.000060467235055309680160 05
$a_8=1+E_8$	8	1.000030233160505657759647 94
$a_9=1+E_9$	9	1.000015111646599056729504 88
$a_{10}=1+E_{10}$	10	1.000007558204436301214290 76
$a_{11}=1+E_{11}$	11	1.000003779095077370805241 25

其“第五次开方”，1 下空位 E_5，“与第四次开方所得(E_4)折半之数渐近”，故令：

$$第5次的较=\frac{E_4}{2}-E_5=d_5,$$

$$\begin{cases}第6次的一较=\dfrac{E_5}{2}-E_6=d_{6,1},\\ 第6次的二较=\dfrac{d_5}{4}-d_{6,1}=d_{6,2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}第7次的一较=\dfrac{E_6}{2}-E_7=d_{7,1},\\ 第7次的二较=\dfrac{d_{6,1}}{4}-d_{7,1}=d_{7,2},\\ 第7次的三较=\dfrac{d_{6,2}}{8}-d_{7,2}=d_{7,3},\end{cases}$$

$$\begin{cases}第8次的一较=\dfrac{E_7}{2}-E_8=d_{8,1},\\ 第8次的二较=\dfrac{d_{7,1}}{4}-d_{8,1}=d_{8,2},\\ 第8次的三较=\dfrac{d_{7,2}}{8}-d_{8,2}=d_{8,3},\\ 第8次的四较=\dfrac{d_{7,3}}{16}-d_{8,3}=d_{8,4},\end{cases}$$

$$\begin{cases}第9次的一较=\dfrac{E_8}{2}-E_9=d_{9,1},\\ 第9次的二较=\dfrac{d_{8,1}}{4}-d_{9,1}=d_{9,2},\\ 第9次的三较=\dfrac{d_{8,2}}{8}-d_{9,2}=d_{9,3},\\ 第9次的四较=\dfrac{d_{8,3}}{16}-d_{9,3}=d_{9,4},\\ 第9次的五较=\dfrac{d_{8,4}}{32}-d_{9,4}=d_{9,5};\end{cases}$$ [①]

① 说明见傅九渊《有不为斋算学》卷三“对数表开方用较省算法解”。

此时 $d_{9,5}=0$，故$\frac{d_{8,4}}{32}=d_{9,4}$，“故自第十次以后，则不用开方”，令第10次之四较$=\frac{d_{9,4}}{32}=d_{10,4}$，由此逆推，得：

$$\begin{cases}\text{第 10 次的四较}=\frac{d_{9,4}}{32}=d_{10,4},\\ \text{第 10 次的三较}=\frac{d_{9,3}}{16}-d_{10,4}=d_{10,3},\\ \text{第 10 次的二较}=\frac{d_{9,2}}{8}-d_{10,3}=d_{10,2},\\ \text{第 10 次的一较}=\frac{d_{9,1}}{4}-d_{10,2}=d_{10,1}。\end{cases}$$

同理：

$$\begin{cases}\text{第 11 次的四较}=\frac{d_{10,4}}{32}=d_{11,4},\\ \text{第 11 次的三较}=\frac{d_{10,3}}{16}-d_{11,4}=d_{11,3},\\ \text{第 11 次的二较}=\frac{d_{10,2}}{8}-d_{11,3}=d_{11,2},\\ \text{第 11 次的一较}=\frac{d_{10,1}}{4}-d_{11,2}=d_{11,1}。\end{cases}$$

而　　$E_{11}=\frac{E_{10}}{2}-d_{11,1}$，又 $a_{11}=1+E_{11}$，

逐次如是，得：　$a_{23}=1.\overset{9}{0}92262889104307667=1.0077696^{\frac{1}{2^{23}}}$。

如前(v)例，　$1:\beta=922628\cdots\cdots7667:x$，

$$x=400692636197652,$$

$$\log(1.0077696)^{\frac{1}{2^{23}}}=0.\overset{10}{0}400692636197652,$$

$$\log10077696=7+2^{23}\times0.\overset{10}{0}400692636197652=\log6^{9}。$$

$\therefore\quad \log 6=0.77815125038$。

(vii) 凡求假数，先求得 1－9，11－19，101－109，1001－1009，10001－10009，……。10000000001－10000000009 九十九数的假数，他数都由此算出。可是这九十九数内，有以两数相乘除得的，则以两假数相加减。《数理精蕴表》卷三……六，有《对数阐微》，即示某数的相乘因子。就中无他数为因子的，称为数根。如 1－9 中的 2，3，7 可按前“用递次开方求假数法”求之。至 1000001 以后，则又可用前递次开方表内相近之数，比例而得之。

如求 $\log 1.000001$，

因 $10^{\frac{1}{2^{21}}}=1+0.\overset{5}{0}1097958735,\ \frac{1}{2^{21}}=0.\overset{6}{0}4768371582\cdots\cdots$

$\therefore\quad 109758735:476837158=1:x,\ x=4342943\cdots\cdots$

则 $\log 1.000001=0.\overset{6}{0}4342943$

$\log 1.000002=2x=0.\overset{6}{0}86859$

$\log 1.000003=3x=0.\overset{5}{0}130286$。

次如前说，因：

$$10^{\frac{1}{2^{19}}}=1+0.\overset{5}{0}4391842173,\ \frac{1}{2^{19}}=0.\overset{5}{0}1907348632$$

$\therefore\quad 4391842173:1907348632=1:x,\ x=17371740$，

则 $\log 1.000004=0.\overset{5}{0}17371740$，

$\log 1.000005=\frac{5}{4}x=0.\overset{5}{0}217147$，

$\log 1.000006=\frac{6}{4}x=0.\overset{5}{0}260576$。

同理 log1.000007 如前求得 x，则 $\log 1000008=\frac{8}{7}x$，$\log 1000009=\frac{9}{7}x$，至于 1.0000001 以后之假数，并不用比例，因 $\left(1+0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{6}{0}4342943$，

又由(iii)知 $\quad \log\left(1-0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{16}{0}4342944$，

则其间可用归纳法，得

$$\log\left(1+0.\overset{6}{0}1\right)=0.\overset{7}{0}434294,$$

$$\log\left(1+0.\overset{7}{0}1\right)=0.\overset{8}{0}434294,$$

……………………………………

就中九十九数之真数，假数如下表：

真　数	假　数	真　数	假　数
1	0	17	023044892138
2	030102999566	18	025527250510
3	047712125472	19	027875360095
4	060205999133	101	000432137380
5	069897000434	102	000860017176
6	077815125038	103	001283722471
7	084509804001	104	001703333930
8	090308998699	105	002118929907
9	095424250944	106	002530586526
11	004139268516	107	002938377769
12	007918124605	108	003342375549
13	011394335231	109	003742649794
14	014612803568	1001	000043407748
15	017609125906	1002	000086772153
16	020411998266	1003	000130093302

真　数	假　数	真　数	假　数
1004	000173371281	1000004	000000173717
1005	000216606176	1000005	000000217147
1006	000259798072	1000006	000000260576
1007	000302947055	1000007	000000304005
1008	000346053211	1000008	000000347434
1009	000389116624	1000009	000000390863
10001	000004342728	10000001	000000004343
10002	000008685021	10000002	000000008686
10003	000013026881	10000003	000000013029
10004	000017368306	10000004	000000017372
10005	000021709297	10000005	000000021715
10006	000026049855	10000006	000000026058
10007	000030389978	10000007	000000030401
10008	000034729669	10000008	000000034744
10009	000039068925	10000009	000000039086
100001	000000434292	100000001	000000000434
100002	000000868580	100000002	000000000869
100003	000001302864	100000003	000000001203
100004	000001737143	100000004	000000001737
100005	000002171418	100000005	000000002171
100006	000002605689	100000006	000000002606
100007	000003039955	100000007	000000003040
100008	000003474217	100000008	000000003474
100009	000003908474	100000009	000000003909
1000001	000000043429	1000000001	000000000043
1000002	000000086859	1000000002	000000000087
1000003	000000130288	1000000003	000000000130

真 数	假 数	真 数	假 数
1000000004	000000000174	10000000003	000000000013
1000000005	000000000217	10000000004	000000000017
1000000006	000000000261	10000000005	000000000022
1000000007	000000000304	10000000006	000000000026
1000000008	000000000347	10000000007	000000000030
1000000009	000000000391	10000000008	000000000035
10000000001	000000000004	10000000009	000000000039
10000000002	000000000009		

又(4)"用九十九求他假数法。"

如下各例之数，为 a,b,c 各数所组成，则其假数可以加减乘得之，如

$$\log N=\log 10^n\times a=10^n\log a,$$

$$\log N=\log a\times b=\log a+\log b,$$

$$\log N=\log\frac{a}{b}=\log a-\log b。$$

又 $\log N=\log abc=\log a+\log b+\log c$，而 $a>b>c$。

$$\log 20703=\log 20000\times 1.005\times 1.03=\log 20000+\log 1.005$$
$$+\log 1.03=4.31603328213。$$

反求之，则

$$4.31603328213-\log 20000-\log 1.005-\log 1.03=0,$$

$$\therefore\qquad 4.31603328213=\log 20703。$$

此义更扩张之，以求任意数，如求 log23，"则以所知前位之整数累除之。除得累乘之真数，则以其假数累加之，即得所求之假数"。现在举例说明如下：

如求 log5689：

$\frac{\text{原实 } 5689}{\text{一法 } 5600}=1.01$（一商）余 33 $5689-33=5656$（二法） $=5600\times1.01$	令 N 为原实， 则 $\frac{N}{r}=q_1+\frac{d_1}{r}$ $N-d_1=rq_1$
$\frac{\text{原实 } 5689}{\text{二法 } 5656}=1.005$（二商）余 4.72 $5689-4.72=5684.28$（三法） $=5656\times1.005$	$\frac{N}{N-d_1}=q_2-\frac{d_2}{N-d_1}$ $N-d_2=(N-d_1)q_2$ $=rq_1q_2$
$\frac{\text{原实 } 5689}{\text{三法 } 5684.28}=1.0008$（三商）余 0.172576 $5689-0.172576=5688.827424$（四法） $=5684.28\times1.0008$	$\frac{N}{N-d_2}=q_3-\frac{d_3}{N-d_2}$ $N-d_3=(N-d_2)\times q_3$ $=rq_1q_2q_3$
$\frac{\text{原实 } 5689}{\text{四法 } 5688.827424}=1.00003$（四商）余 0.00191117728 $5689-0.00191117728$ $=5688.998089$（五法）	$\frac{N}{N-d_3}=q_4-\frac{d_4}{N-d_3}$ $N-d_4=(N-d_3)\times q_4$ $=rq_1q_2q_3q_4$
逐次如是，至余数儿等于零，即 八法＝5688.999995 八商＝1.0000000008 八余＝0000000000	……………………… $\frac{N}{N-d_7}=q_8-\frac{d_8}{N-d_7}$ $N-d_8=(N-d_7)\times q_8$ $=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8$
log5689 $=\log5600\times1.01\times1.005\times1.0008$ $\times1.00003\times1.0000003\times1.0000003$ $\times1.000000003\times1.0000000003$ $=3.75503593371$	因 $d_8=0$ $\therefore\ N=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8$， $\log N=\log r+\log q_1+\log q_2$ $+\cdots\cdots+\log q_8$

最后说："求八线对数"和"对数用法"。它的《对数表》有小数十位。《数理精蕴》内对数表亦有单行本题"《对数阐微》"共十卷五册。

清年希尧《面体比例便览》(雍正十三年，1735 年自序)称："夫假数者乃数学家之超法也，其详见《数理精蕴》中。但其数加之则代乘，减之则代除，两分之则开平方，三分之则开立方，四分之则开三乘方，等而推之，皆可为也，不亦超法乎？"

(4)陈杰《算法大成上编》(道光二十四年，1844 年金望欣序，光绪戊戌(1898 年)浙江官书局重刊)卷四，也说"对数"，不过传述《数理精蕴》的旧说。

十、《对数简法》、《续对数简法》、《假数测圆》

(5)《粤雅堂丛书》刻本戴煦(1805～1860)《求表捷术》咸丰壬子(1852 年)自序称："自道光乙巳(1845 年)至今岁，凡八易寒暑，演录始竣。"其中《对数简法》二卷，前有道光乙巳(1845 年)项名达序和戴煦自识。《续对数简法》一卷，前有道光丁未(1847 年)项名达序和丙午(1846 年)戴煦自识。《假数测圆》二卷，前有咸丰壬子(1852 年)戴煦自序，和咸丰丙辰(1856 年)夏鸾翔序。以上三书都说到对数。

《对数简法》(1845 年)卷上"开方七术"，"求开方表"，因旧法开方，比较繁重，因用二项式求之。

如 $N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}\mp\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\pm\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots,$$

$$N^{m}=(P+Q)^{m}$$

$$=(P+1)^{m}-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots,$$

$$
\begin{aligned}
N^m &= (P+Q)^m \\
&= (P+1)^m - m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{2} \\
&\qquad -\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

又 $N^{1/2}=(P-Q)^{1/2}$

$$
\begin{aligned}
&= P^{1/2}-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P} \\
&\qquad -\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

所设开方表也由此算得。开方表中右行做真数，左行做假数的分子，而 2099152 做公分母，如

$$\log 3.1622\cdots\cdots1684=\frac{1048576}{2099152},$$

$$\log 1.0001\cdots\cdots5169=\frac{128}{2099152}。$$

率	次	真　　数
2099152		10.
1048576	1	3.1622776601684
524288	2	1.7782794100389
262144	3	1.3335214321633
131072	4	1.1547819846895
65536	5	1.0746078283213
32768	6	1.0366329284377
16384	7	1.0181517217182
8192	8	1.0090350448414
4096	9	1.0045073642545
2048	10	1.0022511482929
1024	11	1.0011249413999
512	12	1.0005623126022
256	13	1.0002811167878

率	次	真 数
128	14	1.0001405485169
64	15	1.0000702717894
32	16	1.0000351352775
16	17	1.0000175674844
8	18	1.0000087837036
4	19	1.0000043618422
2	20	1.0000021959187
1	21	1.0000010979587

又(1)"有开方表径求诸对数。"

$$\log 2 = \log 1.7782\cdots\cdots 389\times\frac{2}{1.7782\cdots 389}$$
$$=\log 1.7782\cdots\cdots 389\times 1.1246826503807$$
$$=\log 1.7782\cdots\cdots 389\times 1.0746\cdots\cdots 213\times\frac{1.1246826503807}{1.0746\cdots\cdots 213}$$
$$=\log 1.7782\cdots\cdots 389\times 1.0746\cdots\cdots 213\times 1.0465982293630$$
$$=\log 1.7782\cdots\cdots 389\times 1.0746\cdots\cdots 213\times 1.0366\cdots\cdots 377\times\frac{1.0465982293630}{1.0366\cdots\cdots 377}$$
$$=\log 1.7782\cdots\cdots 389\times 1.0746\cdots\cdots 213\times 1.0366\cdots\cdots 377\times 1.0096131433335$$
$$=\log 1.778\cdots 89\times 1.074\cdots 13\times 1.036\cdots 377\times 1.0090\cdots 414。\times\frac{1.0096131433335}{1.0090\cdots\cdots 414},$$

逐次如是,得:

$$\log 2 = \log 1.778\cdots 89\times 1.074\cdots 13\times 1.036\cdots 77\times 1.0090\cdots 414\times 1.0005623126022\times 1.0000087837036\times 1.0000010979589\times\frac{1.0000018198300}{1.0000010979587}(=1.000000721870)$$

$$=\frac{1}{2097152}\Big[524288+65536+32768+8192+512-8+1$$
$$+\frac{721870}{10979587}(=0.6574660)\Big]$$
$$=0.301029995663。$$

其末位因在 1 以下，所以用比例求得。

又(2)“不用开方表求诸对数。”

《数理精蕴》用九十九求他假数，戴氏则主张用 1--9，至 10000001—10000009 的七十二数，已经足用。其求七十二数，也不用《数理精蕴》的“用中比例”，“用递次自乘”，“用递次开方”各法，不过用假设对数之法所假设对数就是自然对数。

先假设(i) $\log_e 1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1=1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1$，

则 $$\log_e 1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}2=\log_e\left(1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1\times\frac{1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}2}{1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1}\right)$$
$$=\log_e\left(1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1\times 1.\overset{7}{\underset{0}{\,}}9999999\right)$$
$$=1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1999999999;$$

又 $$\log_e 1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}3=\log_e\left(1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1999999999\times\frac{1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}3}{1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1999999999}\right)$$
$$=\log_e\left(1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}1999999999\times 1.\overset{7}{\underset{0}{\,}}9999997\right)$$
$$=2.\overset{6}{\underset{0}{\,}}29999997;$$

逐次如是，至于 $\log_e 1.\overset{6}{\underset{0}{\,}}9$。

(ii) 次求 $\log_e 1.{}^{5}_{0}1$，则如上例，得

$$\log_e 1.{}^{5}_{0}1 = 1.{}^{6}_{0}99999955,$$

其 $\log_e 1.{}^{5}_{0}2$ 以下，则用二次除法，如：

$$\log_e 1.{}^{5}_{0}2 = \log_e\left[1.{}^{5}_{0}1 \times \frac{1.{}^{5}_{0}2}{1.{}^{5}_{0}1}\left(=1.{}^{6}_{0}99999900\right)\right]$$

$$= \log_e\left[1.{}^{5}_{0}1 \times 1.{}^{6}_{0}9 \times \frac{1.{}^{6}_{0}99999900}{1.{}^{6}_{0}9}\left(=1.{}^{7}_{0}9999891\right)\right]$$

$$= 1.{}^{5}_{0}199999810。$$

逐次如是，至于 $\log 1.{}^{5}_{0}9$ 都用二次除法；$1.{}^{4}_{0}2$ 以下，用三除法；$1.{}^{3}_{0}2$ 以下，用四除法；$1.{}^{2}_{0}1$ 以下，用五除法；$1.{}^{1}_{0}2$ 至 $1.{}^{1}_{0}9$ 以及 1.1，用六除法；1.2 至 1.9 用七除法。因得

假设对数 $\log_e 2 = 0.69314721517968$。

假设对数 $\log_e 10 = 2.30258520799943$。

以 $\log_e 10$ 为除法，除逐数的假设对数，即得它的定率对数。如

$$\log 2 = \frac{1}{\log_e 10} \times \log_e 2 = 0.301029995664。$$

又(3)“有七十二对数，求诸对数。”

如

$$\log 5689 = \log(10^3 \times 5.689) = \log\left[10^3 \times 5 \times \frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$$

$$= \log\left[10^3 \times 5 \times \frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times5\times1.1\times\frac{1.1378}{1.1}(=1.0343636363636)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times5\times1.1\times1.03\times\frac{1.0343636363636}{1.03}\right.$$

$$\left.(=1.0042365401589)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times5\times1.1\times1.03\times1004\times\frac{1.0042365401589}{1.004}\right.$$

$$\left.(=1.0002355977678)\right]$$

……………………………

$$=\log\left[10^3\times5\times1.1\times1.03\times1.004\times1.\overset{3}{0}2\times1.\overset{4}{0}3\times1.\overset{5}{0}5\right.$$

$$\left.\times1.\overset{6}{0}5\times\frac{1.\overset{6}{0}5904790}{1.\overset{6}{0}5}\left(=1.\overset{7}{0}904790\right)\right],$$

其末项$\log1.\overset{7}{0}904790$由$\log1.\overset{6}{0}1=0.\overset{7}{0}43429$比例而得$0.\overset{3}{0}39294$。

故 $\log5689=\log10^3+\log1.1+\cdots\cdots+\log1.\overset{6}{0}5+0.\overset{3}{0}39294$

$$=3.755035933768。$$

戴氏并因此义，以求 $\log(n+1)$，其 $\log n$ 为已知，如已知 $\log36$ 求 $\log37$，因 $\log\dfrac{n+1}{n}=\log\dfrac{37}{36}=\log37-\log36$。

故 $\log37=\log36+\log\left(1.02\times1.007\times1.\overset{3}{0}6\times1.\overset{4}{0}2\right.$

$$\left.\times1.\overset{6}{0}9\times1.\overset{7}{0}132839\right)$$

$$=\log36+\log1.02+\log1.007+\cdots\cdots+\log1.\overset{6}{0}9+0.\overset{8}{0}5769$$

$=1.568201724068$。

《续对数简法》(1846年)卷首列“以本数为积,求折小各率四术”和“以本数为根,求倍大各率四术”。

其“求对数根”,因对数根即 $\log 1.\overset{n}{\underset{0}{\,}}1$。《数理精蕴》旧法由五十四次开方比例求得。现因

$$10^{\frac{1}{32}}=1.074607828321317497=1+m \text{ 称为用数},$$

$$\frac{1+m}{m}=14.4034192188686539=n \text{ 称为除法},$$

$$\begin{aligned}\mu &=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)\\ &=1\div 2.30258509299404577\\ &=0.434294481903251811\text{。}\end{aligned}$$

因戴煦本项名达“以本数为积,求折小各率,第一术”,

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}\mp\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}\mp\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots\text{。}$$

其中 A 为第一数,B 为第二数,C 为第三数,以下类推,n 为率分。戴氏谓 n 为极大时,则 $n+1$ 与 n 约略相等,$2n+1$ 与 $2n$;与 $3n+1$ 与 $3n$ 亦约略相等,故上式可化为:

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}\mp\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}\mp\frac{3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots\text{。}$$

如上例,

$$(1+m)^{\frac{1}{32}}=1+\frac{1}{32n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\right),$$

此处, $n=\dfrac{1+m}{m}$。

又 $\log 10^{\frac{1}{32\times 32}}=\frac{1}{32\times 32}\log 10=\frac{1}{32\times 32}$。

故求对数根 μ 时，如《数理精蕴》(3)(iii)得：

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$
$$=0.434294481903251811。$$

其“论用数”谓欲求某数(如 N)的对数，当先已知对数的若干数乘之，或除之，或屡乘之，或开之，再以 10^r 除之，使成用数 $1+y$ 的形状，而 y 为小数。

即 $$\frac{nN}{10^r}=1+y,\quad 或\quad N=10^r(1+y)\times\frac{1}{n},$$
$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N}{n(10^r)}=1+y,\ 或\quad N=10^r(1+y)\times n,$$
$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N^n}{10^r}=1+y,\quad 或\quad N=[10^r(1+y)]^{\frac{1}{n}},$$
$$\log_{10}N=\frac{1}{n}[r+\log_{10}(1+y)];$$

又 $$\frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y,\quad 或\quad N=[10^r(1+y)]^{\frac{1}{n}},$$
$$\log_{10}N=n[r+\log_{10}(1+y)]。$$

故求 $\log_{10}N$，先求它的用数 $1+y$ 的对数，因

$$\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)\qquad (y=小数)$$
$$=\mu\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\},$$

这和顾观光第四术和《代数学》(1859 年)卷十三第(1)式，《微积溯源》(1874 年)第四十二款所载的相同。就中括弧所记，是用他的“以本数为积，求折小各率，第二术”，

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$
$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\cdots\cdots$$

如前例 n 为极大时，则 $n-1$ 和 n，$2n-1$ 和 $2n$，……等等都约略相等，故可化成：

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$
$$+\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\cdots\cdots,$$

又　　$P=1$，

故　$(1+y)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$。

如上例去其首位 1，与 μ 为比例即得。或因

$$\log(1+y)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log(1+y),$$

故求对数根 μ 时，如《数理精蕴》(3)(c)得：

$$\mu=1\div\frac{n}{\log(1+y)}\cdot\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\frac{\log(1+y)}{\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}-\cdots\cdots\right)},$$

$$\therefore\quad \log(1+y)=\mu\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)。$$

戴氏称："所求之用数，均位少而无畸零(如 7 用数 1+0.008 之 0.008)，不惟乘法止一二位，抑且用第二术，则除法即单一($P=1$)，可以省除，故虽降法稍难，而终以第二术为便也。"

他的"附对数还原"内"论借用本数"，以

$$\log 1.000001=0.\overset{6}{\underset{0}{}}4342942647\dot{5}62,$$

做借用本数的对数。

他"论借用率数"，如：

$$\log N=1.361727836017592878 4,$$

求借用率数。则

$$\log N=\log 10+\log 2+\log 1.1+\log 1.04+\log 1.005$$
$$+\log 1.0002+\log 1.00004+\log 1.000003$$
$$+0.\overset{6}{\underset{0}{}}2296151084564(=z)。$$

就中最后的 $0.\overset{6}{\underset{0}{}}2296151084564$ 未见于以下 1－9，1.1－1.9，……1.000001－1.000009 表内，称为 z，则

$$t=\frac{z}{\log_{10}1.000001}。$$

上式，按定义，称为借用率数 $z=t\cdot\log_{10}1.000001$
$$=\log_{10}1.000001^{t}。$$

而 $\log N=\log 10+\log 2+\cdots\cdots+\log 1.000003$
$$+\log_{10}1.000001^{t}。$$

现按"以本数为根，求倍大各率，第二术"，

$$N^{m}=(P+Q)^{m}=P^{m}+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots。$$

因　$P=1,Q=0.000001>1,$

故 $$(1.00001)^{t}=1+(0.000001)^{t}-\frac{1}{2}(0.000001)^{2}t(1-t)$$
$$-\frac{1}{3}(0.000001)^{3}t(1-t)(2-t)-\cdots\cdots$$
$$=1.\overset{6}{\underset{0}{}}5287084656192。$$

故 $$N=10\times 2\times 1.1\times 1.04\times 1.005\times 1.0002\times 1.00004$$
$$\times 1.000003\times 1.\overset{6}{\underset{0}{}}5287084656192$$
$$=23。$$

真数	假数	小余
2	0.30102999566398119	49
3	0.47712125471966243	71
4	0.60205999132796238	98
5	0.69897000433601880	51
6	0.77815125038364363	20
7	0.84509804001425688	22
8	0.90308998699194358	47
9	0.95424250943932487	42
1.1	0.04139268515822504	17
1.2	0.07918124604762482	69
1.3	0.11394335230683676	96
1.4	0.14612803567824802	71
1.5	0.17609125905568124	22
1.6	0.20411998265592477	96
1.7	0.23044892137827392	78
1.8	0.25527250510330606	91
1.9	0.27875360095282896	19
1.01	0.00432137378264256	65
1.02	0.00860017176191755	98
1.03	0.01283722470517220	46
1.04	0.0170333392987805	43
1.05	0.02118929906993807	44
1.06	0.02530586526668412	64
1.07	0.02938377768510964	02
1.08	0.03342375548694970	12
1.09	0.03742649794062363	38
1.001	0.00043407747931864	07
1.002	0.00086772153122691	25
1.003	0.00130093302041811	86
1.004	0.00173371280900052	97
1.005	0.00216606175650767	62
1.006	0.00259798071990561	22
1.007	0.00302947055361800	70
1.008	0.00346053210950648	60

真数	假数	小余
1.009	0.00389116623691052	16
1.0001	0.00004342727686266	96
1.0002	0.00008685021164895	72
1.0003	0.00013026880522706	09
1.0004	0.00017368305846491	87
1.0005	0.00021709297223020	82
1.0006	0.00026049854739034	69
1.0007	0.00030389978481249	19
1.0008	0.00034729668536354	08
1.0009	0.00039068924991013	10
1.00001	0.00000434292310430	84
1.00002	0.00000868580278062	63
1.00003	0.00001202863902848	93
1.00004	0.00001737143184980	92
1.00005	0.00002171418124515	51
1.00006	0.00002605688721539	69
1.00007	0.00003039954976139	86
1.00008	0.00003474216888403	33
1.00009	0.00003908474458416	75
1.000001	0.00000043429426475	62
1.000002	0.00000086858809521	87
1.000003	0.00000130288149138	85
1.000004	0.00000173717445326	64
1.000005	0.00000217146698085	33
1.000006	0.00000260575907415	01
1.000007	0.00000304005073315	77
1.000008	0.00000347434195687	67
1.000009	0.00000390863274830	83

《假数测圆》卷之上有“求负算对数”二术，是求不满单一的真数。

如(1)，$\log_{10}0.98=\log_{10}(1-0.02)=\mu\log_e(1-0.02)$

$$=\mu\left[-0.02-\frac{(0.02)^2}{2}-\frac{(0.02)^3}{3}-\frac{(0.02)^4}{4}-\cdots\cdots\right]$$
$$=-0.00877392431,$$

而 $$\log 98=2+\log 0.98=1.99122607569。$$

就中括弧内所记，是用《续对数简法》内“以本数为积，求折小各率，第三术。”

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$
$$-\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots。$$

又 $$P=1,\qquad Q=0.02,$$

如前例去其首位 1，与 μ 为比例，即得。

上式和《代数学》卷十三第(2)式相同。

又如(2)，$\log_{10}0.98=\log_{10}(1-0.02)=\mu\log_e(1-0.02)$

$$=\mu\left[-\left(\frac{0.02}{0.98}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^4-\cdots\cdots\right]$$
$$=-0.00877392431。$$

就中括弧内所记，是用《续对数简法》内“以本数为积，求折小各率，第四术”：

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$
$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots。$$

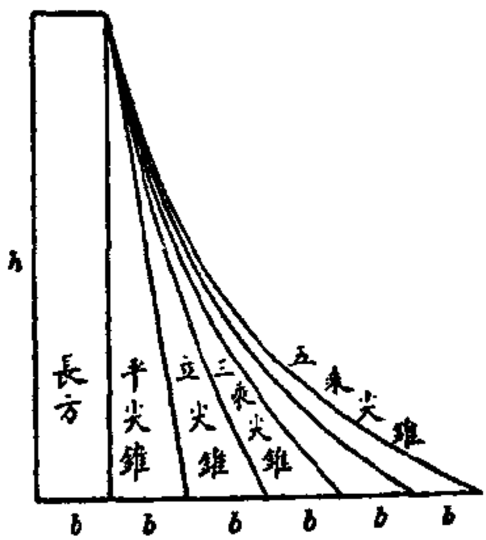
又 $$P=1,\qquad Q=0.02,$$

如前例去其首位 1 与 μ 为比例即得。

十一、《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》

(6)李善兰著《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》三书，未题著作时代。道光丙午(1846 年)顾观光序《四元解》、《对数探源》。于《四元解》序称李君又有《弧矢启秘》。似此诸书约成于道光丙午(1846 年)。

《方圆阐幽》第七条、第八条称："平尖锥第一层一，第二层二，第三层三；立尖锥第一层一，第二层四，第三层九，由平方叠之；三乘尖锥第一层一，第二层八，第三层二十七，由立方叠之；四乘尖锥第一层一，第二层十六，第三层八十一，由三乘方叠之，……，而以高乘底为实，本乘方数加一为法除之，得尖锥积。"原书没写出理由现在补证如下：



如　长方，　$S_h^0=hb$，

平尖锥，　$S_h^1=\frac{1}{2}hb$，

观图自明。

又　立尖锥，　$S_h^2=\frac{1}{3}hb$，

因
$$
\begin{aligned}
S_h^2=&\frac{1}{2}\left\{\left[b\left(1-\frac{h}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2\right]\right.\\
&+\left[b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{h-2}{h}\right)^2\right]\\
&+\cdots\cdots+\left[b\left(1-\frac{2}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2\right]\\
&\left.+\left[b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2+b\left(1-\frac{0}{h}\right)^2\right]\right\}\\
=&\frac{1}{2}\left[\frac{b}{h^2}(0^2+1^2+1^2+2^2+\cdots\cdots+(h-2)^2\right.\\
&\left.+(h-1)^2+(h-1)^2+h^2)\right]\\
=&\frac{b}{2h^2}\left[2(1^2+2^2+\cdots\cdots+h^2)-h^2\right]\\
=&\frac{b}{2h^2}\left(\frac{2h^3+h}{3}\right)\\
=&\frac{hb}{3}+\frac{b}{6h}。
\end{aligned}
$$

若 h 为极大，b 为极小，则此式第二项可去之。得

$$S_{h=\infty}^2=\frac{1}{3}hb。$$

又、三乘尖锥　　$S_h^3=\frac{1}{4}hb$。

同理
$$
\begin{aligned}
S_h^3&=\frac{b}{2h^2}\left[2(1^3+2^3+\cdots\cdots+h^3)-h^3\right]\\
&=\frac{b}{2h^3}\left(\frac{2h^4+2h^2}{4}\right)\\
&=\frac{hb}{4}+\frac{b}{4h}。
\end{aligned}
$$

得
$$S_{h=\infty}^3=\frac{1}{4}hb。$$

又，四乘尖锥 $S_{h}^{4}=\frac{1}{5}hb$。

同理 $S_{h}^{4}=\frac{b}{2h^{4}}[2(1^{4}+2^{4}+\cdots\cdots+h^{4})-h^{4}]$

$$=\frac{b}{2h^{4}}\left(\frac{2h^{5}}{5}+\frac{2h^{3}}{3}-\frac{h}{15}\right)=\frac{hb}{5}+\frac{b}{3h}-\frac{b}{30h^{3}}。$$

若 h 为极大，b 为极小，则此式第二项以下可去之，得

$$S_{h=\infty}^{4}=\frac{1}{5}hb。$$

又，五乘尖锥 $S_{h}^{5}=\frac{1}{6}hb$。

同理 $S_{h}^{5}=\frac{b}{2h^{5}}[2(1^{5}+2^{5}+\cdots\cdots+h^{5})-h^{5}]$

$$=\frac{b}{2h^{5}}\left(\frac{2h^{6}}{6}+\frac{5h^{4}}{6}-\frac{h^{2}}{6}\right)=\frac{hb}{6}+\frac{5b}{12h}-\frac{b}{12h^{3}}。$$

得 $S_{h=\infty}^{5}=\frac{hb}{6}$。

按归纳法， $S_{h=\infty}^{m}=\frac{hb}{m+1}$。

原书因无证法，所以有人怀疑它。吴起潜称："李壬叔……浸淫于尖锥，其所著《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》，……所据之理论，颇有阙而未完者。"①

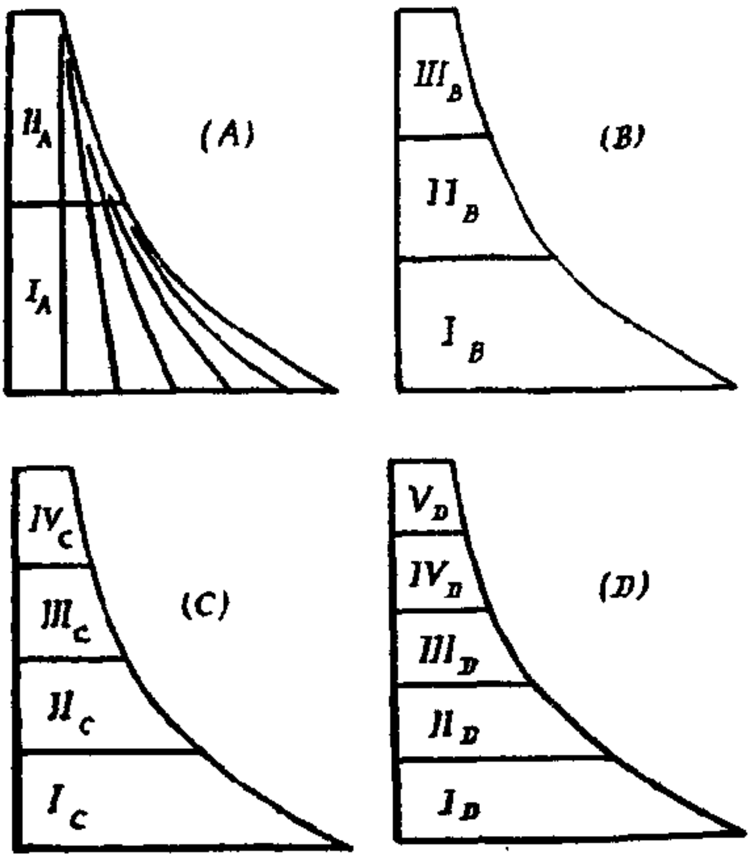
龚铭凤称："或问李壬叔先生，子独不信其尖锥之理，余颇疑之，请闻其说。曰：级数有合于尖锥，而尖锥不可以释级数，盖已有级数，可强以尖锥解之，未有级数，终难以尖锥得之，故李氏之说不足凭信也。"②

李善兰在《对数探源》卷一称："此尖锥合积，无论截为几段，自最下第二段以上，其积皆同。"如截图 A 为二段，B 为三段，C 为四

① 见吴起潜：《李氏方圆阐幽拾遗》，光绪丙午（1906 年）文明书局印本。

② 见龚铭凤：《杂学答问》，光绪二十四年（1898 年）上海书局印本。

段，D 为五段，则 $II_A=II_B=II_C=II_D$，$III_B=III_C=III_D$，$IV_C=IV_D$。



因如(D)，则

$$S^{\frac{4}{5}}=S^{\frac{m-1}{m}}=II_D+III_D+IV_D+V_D$$

$$=hb\left[1\cdot\frac{m-1}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right] \tag{1}$$

又如(C)，则

$$S^{\frac{3}{5}}=S^{\frac{m-2}{m}}=II_C+III_C+IV_C$$

$$=hb\left[1\cdot\frac{m-2}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-2}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-2}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right] \tag{2}$$

如 $hb=1$，则(1)式为

$$\log_e\frac{m}{1}=\log_e m-\log_e 1,$$

(2)式为

$$\log_e\frac{m}{2}=\log_e m-\log_e 2。$$

两式相减得 $\log_e\frac{m}{1}-\log_e\frac{m}{2}=\log_e 2-\log_e 1=II_D$，

而 $\log_e 1=0$， 故 $II_D=\log_e 2$。

就中 m 为任何数，$II=\log_e 2$ 并为真，即 $II_A=II_B=II_C=II_D$ 也，余仿此。

《对数探源》卷二"详法"，先求二十尖锥泛积，令 $hb=1$，其 $\frac{1}{2}hb$，$\frac{1}{3}hb$ 等，列于泛积表。

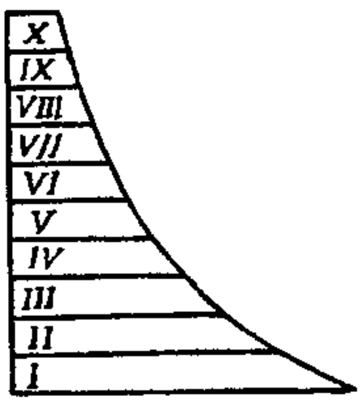
	二十尖锥泛积表
hb	100000000 长 方
$1/2\ hb$	050000000 平 方
$1/3\ hb$	033333333 立 方
$1/4\ hb$	025000000 三 乘
$1/5\ hb$	020000000 四 乘
$1/6\ hb$	016666666 五 乘
$1/7\ hb$	014285714 六 乘
$1/8\ hb$	012500000 七 乘
$1/9\ hb$	011111111 八 乘
$1/10\ hb$	010000000 九 乘
$1/11\ hb$	009090909 十 乘

	二十尖锥泛积表
1/12 hb	008333333 十一乘
1/13 hb	007692307 十二乘
1/14 hb	007142857 十三乘
1/15 hb	006666666 十四乘
1/16 hb	006250000 十五乘
1/17 hb	005682353 十六乘
1/18 hb	005555555 十七乘
1/19 hb	005263157 十八乘
1/20 hb	005000000 十九乘

乃分此泛积为十段，如 I 至 X。求其 II 至 X 之积。因如前 $II_A=II_D$ 之例，故

$$II=III+IV=VI+VII+VIII+IX+X。$$

故 $$II+III+\cdots\cdots+X=3II+V。$$



次求第二段积，

$$II=hb(=1)\times\Big[(((((((((((((((((((\Big(\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{19}\Big)\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{18}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{17}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\Big)\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{13}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\Big)\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{8}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{3}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2}+1\Big)\frac{1}{2}\Big]。$$

$$=hb(=1)\times\left[1.\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$$

$$=0.69314713=\log_e\frac{2}{1}=\log_e 2。$$

又求第五段积，

$$V=hb(=1)\times\left[1.\ \frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\right]$$

$$=0.22314353=\log_e\frac{5}{4}=\log_e 5-\log_e 4。$$

第二段至第十段共积$=II+\cdots\cdots+X=\log_e 5+3\log_e 2$

$$=\log_e 10=2.30258492。$$

$$\mu=1\div 2.3025492=0.43429451。$$

由是得定积表。

	二十尖锥定积表
μ	0.43429451 长 方
1/2 μ	0.21714725 平 方
1/3 μ	0.14476483 立 方
1/4 μ	0.10857362 三 乘
1/5 μ	0.08685890 四 乘
1/6 μ	0.07238241 五 乘
1/7 μ	0.06204207 六 乘

	二十尖锥定积表
$1/8\ \mu$	0.05428681 七　乘
$1/9\ \mu$	0.04825494 八　乘
$1/10\ \mu$	0.04342945 九　乘
$1/11\ \mu$	0.03948131 十　乘
$1/12\ \mu$	0.03619120 十一乘
$1/13\ \mu$	0.03340727 十二乘
$1/14\ \mu$	0.03102103 十三乘
$1/15\ \mu$	0.02895296 十四乘
$1/16\ \mu$	0.02714340 十五乘
$1/17\ \mu$	0.02554673 十六乘
$1/18\ \mu$	0.02412747 十七乘
$1/19\ \mu$	0.02285760 十八乘
$1/20\ \mu$	0.02171472 十九乘

“既得二十尖锥定积，便可依此造表。一之对数，即尖锥合积中之最下一段，其数无尽，不可求，故命为 0 也。”

求 2 的对数，

$$\log_{10}2=\mu\left[1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$$
$$=0.30103000。$$

其求 $\log_{10}3$，因

$$3^{14}=4782969,\quad \frac{1}{14}\mu=0.03102103,$$

而
$$\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)<0.00000001。$$

故十四乘尖锥$\left(即\frac{1}{15}\mu\right)$以下，俱去不用。因此处仅用小数八位，今 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)$ 已小于 $0.\,{}_{0}^{7}1$，故于所求，已不生影响，其次项可以俱去

不用。

$$\log_{10}3=\log_{10}2+\mu\left[1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\right]=0.47712126。$$

同理，求 $\log_{10}7$，因 $7^8=5764801$，$\frac{1}{8}\mu=0.05428681$，

而$\frac{1}{8}\mu\left(\frac{1}{7^8}\right)<0.00000001$，故八乘锥，$\left(\text{即}\frac{1}{9}\mu\right)$以下，俱去不用。

$$\log_{10}7=\log_{10}6+\mu\left[1\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}\right)^8\right]=0.8450980。$$

李善兰是以 $\log_e\frac{m}{n}=\log_e m-\log_e n$

$$=\left[\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\cdots\cdots\right]。$$

与邹伯奇《乘方捷术》同，并且是顾观光的第五术。

正　数	对　　数
1	0.00000000
2	0.30103000
3	0.47712126
4	0.60206000
5	0.69897000
6	0.77815126
7	0.84509805
8	0.90309000
9	0.95424252
10	1.00000000

李善兰对数学说亦可以微积分解析之，见周明群《李邹顾戴徐

诸家对于对数的研究》(《清华学报》第三卷第二期,1926 年 12 月)。

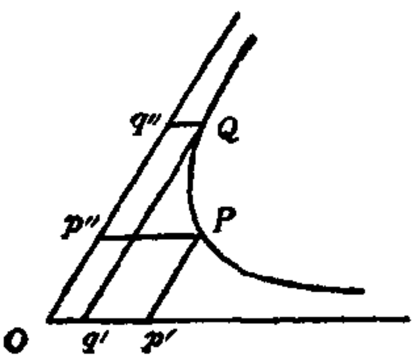
十二、《圆锥曲线》、《级数回求》

(7)《圆锥曲线》三卷,英国艾约瑟口译,海宁李善兰笔述。

译书年代未详,书中注称:"详《代微积拾级》。"——此割线,《代微积拾级》(1859 年刻)名次切线——则是书当刻于 1859 年之后。

就中卷二:

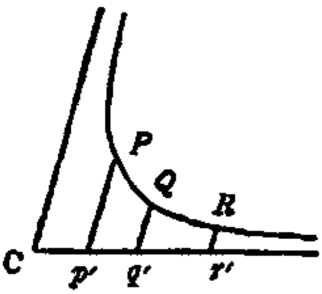
"第十二款(双)曲线上任取一点(P 或 Q),作二线(Pp',Pp''或 Qq',Qq'')至二渐近线亦与渐近线平行,成四边形(PC 或 QC)其积恒等"。



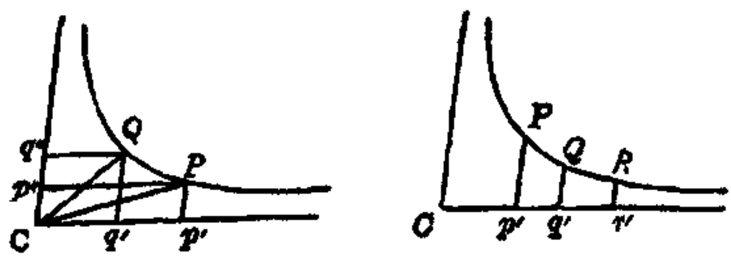
"一系。$Qq'\times Qq''=Pp'\times Pp''$,故 $Cq'':Cp''=Cp':Cq'$。Cq'愈大,则 Cq' 愈小。然 Cq' 虽极小,终不能至于无。而渐近线与曲线,虽渐长渐近,亦终不能相遇,中间总隔一 Cq' 也。故渐近线一若为曲线无尽界外之切线。然渐近线长至无穷,Cq' 小至无穷,亦终不能与曲线相切也"。

"二系。于渐近线上截取诸分,(如 CP',Cq',Cr')令成渐大连比例,又自诸截点与余一渐近线平行作诸线,至曲线界(如 Pp',

Qq', Rr')，必成渐小连比例，因诸线与诸截分，两两相乘，俱等积故也”。



“第十三款。CQP 二直一曲三边形，$q''QPp''$三直一曲四边形，$q'QPp'$ 三直一曲四边形，俱等积”。



“一系。Cp', Cq', Cr' 诸连比例数，设命 $Cp'=1$，$Cq'Cr'$ 任为若干，$Pp'Qq'$, $Pp'Rr'$ 二段积必与 Cq', Cr' 之对数相符。盖 Cp', Cq', Cr' 既成连比例，则所截各段面积，必成递加比例。若 C 为直角，Cp'，Pp' 俱为 1，Cq' 为 10，Cr' 为 100，则 $Pp'Qq'$ 面积必为 2.30258509，$Pp'Rr'$ 面积必为 4.60517018，此即讷白尔表 10 与 100 之对数也”。

“二系。设于 Cr', PR 二线之间，另作一双曲线，则所得对数根又变，盖一曲线一根数也”。

“三系。C 角变，对数之根亦变。C 为直角，正弦为 1，则为讷白尔之对数根。设 C 为 $25°44'27''\frac{15''}{60}$ 之角，正弦为 0.43429448，则为巴理知(Briggs)表之率，即今所用对数表之根也”。

李善兰《级数回求》称：“今有真数求对数讷白尔对数之级数，问对数求真数之级数若何？”，

因 $$\log_e x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots,$$

或 $$y=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots。\qquad (A)$$

(A)自乘之，得：

$$\begin{aligned}y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}&+\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\ \frac{(x-1)^3}{2x^3}&+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots\\ &\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{2(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots \qquad (B)$$

(A)×(B)得：

$$y^3=\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{3(x-1)^4}{2x^4}+\cdots\cdots。\qquad (C)$$

(A)×(C)得：

$$y^4=\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots。\qquad (D)$$

乃取(B)式，2 约之，得：

$$\frac{y^2}{2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots。\qquad (1)$$

(1)+(A),得

$$y+\frac{y^2}{2}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^3}+\frac{17(x-1)^3}{24x^4}+\cdots。\qquad(2)$$

又取(C)式,6 约之得

$$\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)^3}{6x^3}+\frac{3(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots。\qquad(2a)$$

(2a)+(2),得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{23(x-1)^4}{24x^4}+\cdots。\qquad(3)$$

又取(D)24 约之得

$$\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots。\qquad(3a)$$

(3a)+(3),得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots\qquad(4)$$
$$=(x-1)$$

李善兰称:

考(4)式左边三级之分母为 2,3 相乘,四级之分母为 2,3,4 连乘,然则五级必为 2,3,4,5 连乘,六级必为 2,3,4,5,6 连乘,其理已显,无庸再求。右边各母之系数消尽,其总数必与 $x-1$ 等。乃左右各加一,即得对数,求真数之级数,……。

$$x=1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

十三、《数学启蒙》

(8)《数学启蒙》 二卷,英国伟烈亚力撰,咸丰癸丑(1853 年)

自序。其卷二"对数"条,注称:

对数乃大英讷白尔(Napier)创作,明万历时,播扬于世,凡西士之历数家,莫不心悦诚服,是则是效焉。同时巴理知(Briggs)者,精纯数理,亦英人也。特来讷白尔处参互考订。以旧表浩繁,拟另立新表,归于便宜敏捷。未几讷白尔卒,惟巴理知自行改易。其真数由一万至二万,又由九万至十万,对数以十四位止。崇祯十年(1624年)付之剞劂,后四载(1628年),又有荷兰佛拉哥(Vlacq)出,将巴理知未及之二万后以至九万,均逐数补齐。凡一至十万一千,毫无缺陷。因对数十四位尚繁,是以删去四位存十位,即在荷兰复行刊刻,现中华通行之本,乃佛拉哥手订之书也。

其"造对数法之一"条和《数理精蕴》"用中比例求假数法"相同。又"造对数法之二"置定数$(2\mu)=0.868588964$。又设真数3,求假数问得几何。

因 $\log 2=0.301029995$,

又 $$\log\frac{N}{2}=0.868588964\left[\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{(2N-1)^3}+\frac{1}{(2N-1)^5}+\cdots\cdots\right],$$

如 $N=3$,

$\therefore$ $$\log\frac{3}{2}=0.176091260$$

$$\log 2=0.301029995$$

$\therefore$ $$\log 3=0.477121255。$$

就与《三角数理》(1877年)卷六第三十四款之法相同。

十四、《乘方捷术》

(9)邹伯奇(1819～1869)《乘方捷术》共三卷,其卷二称:

对数者,设假数与真数相对立为表,以备加减代乘除之用,故名对数表。创自西人讷白尔,其初为表也,以真数开九乘方极多次所得方根零数,即为对数,故名自然对数。今西书称为讷表对数。即戴氏所谓假设对数。后有佛拉哥(Vlacq)以讷表对数十之对数是 2.302585,不便进位,乃改十之对数为一,百之对数为二,……是为十进对数,始刻于荷兰,乃流入中国,即今《数理精蕴》之十万对数表是也。即戴氏所称定率对数。

按此节所记,虽于对数发明的历史,未曾深通,可是所说佛拉哥当出于伟烈亚力的《数学启蒙》。《乘方捷术》未题著作年月。凭这记事,可以知道是在咸丰癸丑(1853 年)以后。

《乘方捷术》卷一,举四例,都以开方句股解析,如:

(1),(2), $$N^{m/n}=(P\pm Q)^{m/n}$$
$$=P^{m/n}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$
$$\mp\frac{m-2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots。$$

(3),(4), $$N^{m/n}=(P\pm Q)^{m/n}$$
$$=P^{m/n}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m+n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$
$$\pm\frac{m+2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots。$$

例(1), $$(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}$$
$$+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}+\cdots\cdots。$$

(2), $$(b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}-\cdots\cdots。$$

$$(3),(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}+\cdots\cdots。$$

$$(4),(b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}-\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}-\cdots\cdots。$$

又“以二为实，开无量数乘方之根”。

从第一术，$m=1$，n 为极大时，则 $n+1$，与 n，约略相等，$2n+1$ 与 $2n$，$3n+1$ 与 $3n$ 等，亦约略相等，故

$$2^{1/n}=(1+1)^{1/n}=1+1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots\cdots。$$

如 $n=2$，则 $\log_e 2=0.693147180559946\,38$。

卷二记。“有大小两真数，求对数较法”，先具三术，如：

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}=\mu\left[\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right], \qquad (1)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}=\mu\left[\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right], \qquad (2)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$
$$=2\mu\left[\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\cdots\right];\tag{3}$$

在求对数较第四术注称："此又于前三术，连求三数之较。"

设 $$\frac{m+n}{2}=t,\text{而}\quad m>t>n,$$

则 $$\log_e\frac{t}{n}=\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\right],$$

$$\log_e\frac{m}{t}=\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\right],$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\cdots\right],$$

$$\log_e\frac{t^2}{mn}=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\cdots\right]。$$

又如"有对数较，求大小两真数之比例"：

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots。$$

所求自然对数，常对数，具列如下：

自然对数表

真数	假数
1	0.00000000000
2	0.69314718056
3	1.09861228866
4	1.38629436112
5	1.60943791242
6	1.79175946922
7	1.94591014904
8	2.07944154168
9	2.19722457732
10	2.30258509299

常对数表

真数	假数
1	0.000000000
2	0.301029996
3	0.477121255
4	0.602059991
5	0.698970004
6	0.778151250
7	0.845098040
8	0.903089987
9	0.954242509
10	1.000000000

十五、《算賸续编》、《造各表简法》

(10)顾观光　(1799～1862)《算賸续编》有(1)用屡乘屡除求对数法(1854 年),(2)对数还原(1854 年),(3)对数衍(1854 年)。

先求定率对数;

$$(a)\quad 2\mu=1\div 2\left[\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^7+\cdots\cdots\right]$$

$=0.86858896380$ 为定率对数,而 $\mu=$对数根

$$(b)\quad 2\mu=1^2\div 10\left[\left(1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\frac{1}{7\times 9^3}+\frac{1}{9\times 9^4}+\frac{1}{11\times 9^5}+\frac{1}{13\times 9^6}+\frac{1}{15\times 9^7}+\frac{1}{17\times 9^8}+\frac{1}{19\times 9^9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\times 9^3}+\frac{1}{5\times 9^5}+\frac{1}{7\times 9^9}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=0.86858896380。$$

既得定率对数，即可求二至九之八对数。

因 $$\frac{1}{\log_e 10}=0.43429448,$$

∴ $$\log_e n=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e n=0.43429448\times\log_e n。$$

已知 $\log 10=1$，

又 $$\mu\log_e 10=\mu\log_e 9+2\mu\left[\frac{1}{2\times 9+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\times 9+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2\times 9+1}\right)^5+\cdots\right]。$$

则 $$\log 10=\log 9+0.04575749056,$$

∴ $$\log 9=0.95424250944。$$

同理可求八至二之各数对数。既得二至九之八对数，则余可类推。

“顾观光第一术”和夏鸾翔《万象一原》(1862 年)第一术，和《代数术》(1873 年)第一七一款，所说相同。

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left[\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

或 $$\log(n+x)=\log n+2\mu\left[\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

$$=\log n+r。$$

例 $$\log 23=\log(20+3)$$

$$=\log 20+2\mu\left[\frac{3}{43}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{43}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{43}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

$$=1.36172783601。$$

“顾观光第二术”和徐有壬《造各表简法》(1859?年)和《代微积拾级》(1859 年)相同。顾氏自己说是本《数学启蒙》(1853 年)之术，而小变之。

$$\log_e \frac{m}{n}=2\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

$$\text{或}\log \frac{m}{n}=2\mu\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right]=P\text{。}$$

例　$\log 23=\log 30-2\mu\left[\frac{7}{53}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{53}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{7}{53}\right)^5+\cdots\cdots\right]$

$=1.36172783601$。

“顾观光第三术”似本着戴煦《续对数简法》(1846 年),“以本数为积,求折小各率,第一术”,也可由邹伯奇《乘方捷术》(1)式化得。

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left[\frac{x}{n+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n+x}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n+x}\right)^4+\cdots\cdots\right]$$

$$=\log n+r\text{。}$$

例　$\log 23=\log 20+\mu\left[\frac{3}{23}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{23}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{23}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{23}\right)^4+\cdots\cdots\right]$

$=1.361727\cdots\cdots$。

“顾观光第四术”似本着戴煦《续对数简法》(1846 年),“以本数为积,求折小各率,第二术”。也可由邹伯奇《乘方捷术》(2)式化得,又和《微积溯源》第四十二款相同。

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left[\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3\right.$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots\cdots\Big]$$

$$=\log n+r,$$

“顾观光第五术”和李善兰《对数探源》及邹伯奇《乘方捷术》(1)式相同。

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left[\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\cdots\cdots\right]=p。$$

“顾观光第六术”和邹伯奇《乘方捷术》(2)式相同。

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left[\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right]=p。$$

就中“对数还原”,因令 1=正数,$10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$,

$\log_{10} 1.25892541=\frac{1}{10}$,又 $10^{\frac{1}{10}}=1.25892541=1+t$,

$\frac{t}{1+t}=0.205671776$ 为正数根。

设 $\log s=1.36172783602$,求其正数。

“第一术” 如前第一术,$r=0.060697840\frac{36}{}$,又 $s=n+x$,

$$s=n\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)r+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{t}{t+1}\right)^2\cdot r\cdot(r+1)\right.$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3\cdot r\cdot(r+1)(r+2)$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4\cdot r\cdot(r+1)(r+2)(r+3)+\cdots\right];$$

“第二术”

$$s=n\left[1+tr-\frac{1}{2!}\cdot t^2\cdot r(1-r)+\frac{1}{3!}\cdot t^3\cdot r(1-r)(2-r)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4!}\cdot t^4\cdot r(1-r)(2-r)(3-r)+\cdots\cdots\right];$$

“第三术” 又令 $s=m-n$,如前第二术,$p=0.115393418\frac{70}{}$

$$s=m\div\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)p+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2p\cdot(p+1)\right.$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3\cdot p\cdot(p+1)(p+2)$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4\cdot p\cdot(p+1)(p+2)(p+3)+\cdots\cdots\right];$$

"第四术"

$$s=m\div\left[1+10t\cdot p+\frac{1}{2!}\cdot p^2\cdot 10t(1-10t)\right.$$
$$+\frac{1}{3!}p^3\cdot 10t(1-10t)(2-10t)$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\cdot p^4\cdot 10t(1-10t)(2-10t)(3-10t)+\cdots\cdots\right];$$

又"对数术"则示各对数互求之例。

(i) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$，求 $\log 19=\log n=?$ 如前第二术，得 $\log n=1.278753601$。

(ii) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$，求 $\log 23=\log m=?$ 如前第二术，得 $\log m=1.361727836$。

(iii) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$，求 $\log n=1.27875601=?$

$$\log m-\log n=d,$$

$$n=m\div\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2d(d+1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3d(d+1)(d+2)+\cdots\cdots\right]$$

或 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$。

(iv) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$；求 $\log m=1.361727836=?$

如前 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$，故 $m=n\gamma$。

(v) 有 $\log m=1.568201724$，$\log n=1.361727836$，又 $m+n=w$，求 n。

由前两式，得 $n=\frac{w}{1+\gamma}$。

$$故\quad n=m\div\left\{1+\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 d(d+1)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 d(d+1)(d+2)+\cdots\cdots\right]\right\}$$

(vi) 有 $\log m=1.568201724$，$\log n=1.361727836$，又 $m-n=V$，求 n。

由(3)，(4)两式，得 $n=\frac{V}{\gamma-1}$。

(vii) 有 $\log 37=\log m=p$，$\log 23=\log n=Q$，$T=P+Q=2.92992956$，求 P。

如前第一术，

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left[\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right]。$$

$\therefore\quad \log 37=2-0.43179828$，$\qquad \log 23=T-\log 37$。

(viii) 有 P，Q，及 $U=P-Q$，求 P

如前第一术，

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left[\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right]。$$

$\therefore\quad \log 37=2-0.43179828$，$\qquad \log 23=\log 37-U$。

(11)《造各表简法》

徐有壬(1800～1860)《造各表简法》,又名《垛积招差》。其"第五术造对数全表"称:

先求对数根,设长三阔一之长方积,取十分之一为第一小长方,长折半,阔十分之二。其长阔和一除之为第一数。十分小长方之一为第二小长方,长又折半,阔又十分之二。其长阔和二除之,为第二数,……顺是以下,皆如是递求,至若干位,乃相并为除法,以除单一得对数根。

$$\mu=1\div\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2^2}+\frac{2^2}{10^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{2^3}{10^3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^4}+\frac{2^4}{10^4}\right)+\cdots\cdots\right]$$

$$=1\div\left\{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)+\frac{2}{10}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^3+\cdots\cdots\right]\right\}$$

$$=1\div2.30258509299404577=0.4342944819032518\frac{11}{},$$

求全表术则因下列公式:

$$\log\frac{m}{n}=2\mu\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

求 $\log n$,或 $\log m$。

查伟烈亚力于咸丰己未(1859年)《代微积拾级》序称:"观当代天算家,如董方立氏,项梅侣氏,徐君青氏,戴鄂士氏,顾尚之氏,暨李君秋纫所著各书,其理有甚近于微分者……,"此大约指各人用级数记圆周率数和对数,徐死于庚申(1860年),《造各表简法》当成于己未以前。

十六、《代数学》、《万象一原》

(12)《代数学》十三卷　题英国棣么甘撰，英国伟烈亚力口译。海宁李善兰笔受。前有伟烈咸丰己未(1859年)自序。卷第十二"论指数对数之级数"称：$a^x=y$，则 $\log_a y=x$，而 a 为底，x 为 a^x 之对数。又称：

(i)　无论何底，1之对数恒为0，如 $a^0=1$，则 $\log_a 1=0$。

(ii)　凡底之对数为1，$a^1=a$，则 $\log_a a=1$。

(iii)　凡 y 与 $\frac{1}{y}$ 之对数，号异而数同。

如　　$y=a^x$，则 $\log_a y=x$。

又　　$\frac{1}{y}=a^{-x}$，则 $\log_a \frac{1}{y}=-x$。

故　　$\log_a \frac{1}{y}=-\log_a y$。

次论"对数之级数理"，因从卷十一，依"合名法"(binomial theorem)。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots$$
$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{r!}$$

设 $x=1$，则

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots,$$

惟　　$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x},$$

则 $$\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots\right)^x$$
$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots。$$
若 n 为极大，则上式变为：
$$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$
即 $$(2.71828182\cdots\cdots)^x=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots。$$
若以 e 为底，则对数 x 之真数为
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots。$$
这里所称自然的对数，亦称双曲线的对数。

上式既合理，则
$$e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\cdots\cdots。$$
令　$e^k=a$，则　　$k=\log_e a$，

即 $$a^x=1+x\log_e a+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\frac{(x\log_e a)^3}{3!}+\cdots\cdots。$$
若 x 为极小，则　$\log_e a=\dfrac{a^x-1}{x}$。

但从卷十一，知
$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha+\frac{x-1}{2!}\cdot\alpha^2+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}\cdot\alpha^3+\cdots\cdots。$$
若 x 为极小，则
$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\cdots\cdots。$$
令　　$\alpha=a-1$，

则 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots。$$

从此知，

$$\log_e a=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots。$$

由此得

$$\log_e(1+m)=\left(m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right), \tag{1}$$

$$\log_e(1-m)=\left(-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right), \tag{2}$$

$$\log_e\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=2\left(m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\cdots\cdots\right), \tag{3}$$

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right]。 \tag{4}$$

按前二式和《续对数简法》相同，第(1)式又和顾观光第四术相同，四式又见《对数详解》(1824 年)第四条(1)、(2)、(3)和第五条(1)$_C$。依此造对数表小数八位。

再从卷十一，知

$$\frac{(1+\alpha)^x-1}{x}=\alpha+\frac{x+1}{2!}\cdot\alpha^2+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}\cdot\alpha^3+\cdots\cdots,$$

又 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots。$$

又令 $$a^m=a,$$

则 $$\frac{a^{mx}-1}{x}=m\cdot\frac{a^{mx}-1}{mn}。$$

设 m 为定数，n 为极小，则 mx 更当极小。故若 x 为极小，而 x 之函数之极限为 N，则 mx 函数之极限亦必为 N。所不同的，可取 x 之小，令 x 之函数，任近于所设之限 N，命其较为 k，而取 m 分 x 同

数之一，则可令 mx 之函数同近于 N。所以

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^{mx}-1}{mx}\text{，即 } f(a)=\frac{1}{m}f(a^m)\text{，}$$

即 $(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{m}\left[(a^m-1)-\frac{1}{2}(a^m-1)^2+\cdots\right]$，

即
$$\log_e a=\frac{1}{m}\log_e a^m\text{。}$$

观此更明 $\frac{a^x-1}{x}$ 之限，等于 $\log_e a=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots$ 即 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$，古人用此理，递开 a 之方数，以造对数表。如 $a=1.204$，$x=\frac{1}{2^{47}}$，则

$$\log_e 1.024=(1.024^{\frac{1}{2^{47}}}-1)\times 2^{47}\text{①。}$$

卷十三，论以 10 为底的对数，称：

$$\log_{10}x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}=\frac{\log_e x}{2.30258509}=0.4342944819\times\log_e x\text{。}$$

这对数表名为常对数，亦名为表对数，亦名为十进对数，亦名为巴理知对数。以 0.43429……为根率。凡 $\frac{1}{\log_e a}$ 即 $\log_a e$ 名为 a 底对数的根率。

同卷论对数较的原则。从前(4)式

$$\log_{10}(x+1)=\log_{10}x+2\mu\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x+1)^3}+\cdots\cdots\right\}\text{，}$$

如 x 愈大，则 $\log_{10}(x+1)$，$\log_{10}x$ 之较愈小。又检表知

$\log_{10}(51520+1)=\log_{10}51520+0.0000084$，

$\log_{10}(51520+2)=\log_{10}51520+0.0000084\times 2$；

① 见前《数理精蕴》(3)(iv)。

即 $h<10$，则

$$\log_{10}(51520+h)=\log_{10}51520$$
$$+0.0000084\times h \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

从前(1)式，

$$\log_{10}\left(1+\frac{h}{x}\right)=\mu\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

若$\frac{h}{x}$甚小，则　$\log(x+h)=\log x+\mu\frac{h}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (b)$

(b)式与(a)式比较，$0.0000084=\mu\cdot\frac{1}{x}0.4342945\times\frac{1}{51520}$。

(13)《万象一原》　同治元年壬戌(1862 年)钱塘夏鸾翔演《万象一原》。其第一卷末有“求真数之讷氏对数”注称：“本徐氏(有壬)中国对数术变通之。”现按其公式术语且有误记。所载二式：

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left[\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(2n+x)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right],$$

$$\log_e(n-x)=\log_e n+2\left[-\frac{x}{2n+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(2n+x)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{(2n+x)^5}-\cdots\cdots\right],$$

和顾观光有正数求对数第一术(1854 年)相同。

又有“求真数之讷氏负对数”，其术语亦有误记。查戴煦《假数测圆》卷上有“求负对数二术”，是求不满单一之真数，如 $\log 0.98$；夏氏所取，亦是此义。现取小于真数$(n+x)$的借真数为 t，大于真数$(n+x)$的借真数常为 1，故应书为：

$$\log_e(n+x)=\log(1-t)$$
$$=\log_e 1+2\left[-\frac{t}{2-t}-\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2-t}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{2-t}\right)^5-\cdots\cdots\right]。$$

十七、《代数术》、《对数详解》

(14)《代数术》二十五卷　英国华里司辑，傅兰雅口译，金匮华蘅芳笔述，第十八卷第一六八款至一七八款，论对数。前有同治十二年(1873 年)华蘅芳序。书刻于同治十三年(1874 年)[①]。

(15)《对数详解》五卷　长沙丁取忠、湘乡曾纪鸿同撰，同治甲戌(1874 年)丁取忠序。是书即《代数术》第十八卷的详解。

卷二，第三条，称：　$c^x=y$，已知 c,y，求 x。　$x=\log_c y$。

设　$$c=1+a \tag{1}$$

$$y=1+b \tag{2}$$

则 $c^x=y$ 之式变为　$$(1+a)^x=(1+b) \tag{3}$$

两边各乘至 n 方　$$(1+a)^{nx}=(1+b)^n \tag{4}$$

以二项式展开之：

$$\begin{aligned}1&+\frac{nx}{1}\cdot a+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot a^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot a^3\\&+\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{4!}\cdot a^4+\cdots\cdots\\&=1+\frac{n}{1}\cdot b+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3\\&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot b^4+\cdots\cdots,\end{aligned} \tag{5}$$

两边减 1 又除 n，得

$$\begin{aligned}x\cdot a&+\frac{x(nx-1)}{2}\cdot a^2+\frac{x(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot a^3\\&+\frac{x(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{4!}\cdot a^4+\cdots\cdots\end{aligned}$$

① 见《江南制造局记》，卷二，第 19 页。

$$=b+\frac{(n-1)}{2!}\cdot b^2+\frac{(n-1)(n-2)}{3!}\cdot b^3$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot b^4+\cdots\cdots。\tag{6}$$

化之得：

$$x\cdot a+\left(Pn-\frac{x}{2}\right)a^2+\left(P'n+Qn^2+\frac{x}{3}\right)a^3$$
$$+\left(P'^1n+Q'n^2+Rn^3-\frac{x}{4}\right)a^4+\cdots\cdots$$
$$=b+\left(pn-\frac{1}{2}\right)b^2+\left(p'n+qn^2+\frac{1}{3}\right)b^3$$
$$+\left(p''n+q'n^2+rn^3-\frac{1}{4}\right)b^4+\cdots\cdots\tag{7}$$

变之得：

$$\left(x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}a^3-\frac{x}{4}a^4+\cdots\cdots\right)$$
$$+[Pna^2+(P'n+Qn^2)a^3+(P''n+Q'n^2$$
$$+Rn^3)a^4+\cdots\cdots]=\left(b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right)+[pnb^2+(p'n+qn^2)b^3+(p''n+q'n^2$$
$$+rn^3)b^4+\cdots\cdots]。\tag{8}$$

前(3)式以乘 n 方者，为借用以展开级数，现在已经展开。

试令　$n=0$，则

$$x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}\cdot a^3-\frac{x}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots$$
$$=b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots,\tag{9}$$

变之得

$$x\left(a-\frac{1}{2}\cdot a^2+\frac{1}{3}\cdot a^3+\frac{1}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots\right)$$
$$=b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots。\tag{10}$$

两边各以$\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)$除之，得

$$x=\log_c y=\left(b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots\right)$$

$$\times\frac{1}{\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)}。\tag{11}$$

因 $c=1+a$，故 $a=c-1$。(10)式左边变为

$$x\left[(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right]。$$

以前说 c 是对数的底，总不变，故

$$\left[(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right]$$

亦不变，是为常数，以 A 代之，故(10)式左边变为 Ax。但因 $y=1+b$，故 $b=y-1$，所以(10)左右边变为：

$$(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots。$$

故 $$Ax=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3$$

$$-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots,\tag{12}$$

或 $$x=\frac{1}{A}\left[(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots\right]$$

$$=\log_c y。\tag{13}$$

用(13)式亦可求真数之对数，惟其真数 y 必大于 1，而小于 2 方可求。若 $y<2$，则级数之收敛甚缓，兹另变其式，令敛得较速。

第四条。 (13)式变之得

$$\log(1+m)=\frac{1}{A}\left(m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4+\cdots\cdots\right)。\tag{1}$$

若令 $-m=m$，(1)式变为

$$\log(1-m)=\frac{1}{A}\left(-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4-\cdots\cdots\right)。\qquad(2)$$

惟 $\log(1+m)-\log(1-m)=\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)$，

故(1)−(2)，又简之得

$$\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=\frac{2}{A}\left(m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\frac{m^7}{7}+\cdots\cdots\right)。\qquad(3)$$

令 $\frac{1+m}{1-m}=y$， 则 $m=\frac{y-1}{y+1}$，

故
$$\log y=\frac{1}{A}\left[\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^7+\cdots\cdots\right]。\qquad(4)$$

此式无论 y 之同数如何，必为敛级数，凡对数皆可求，故此为公式。

第五条。 若已知 $\log n$，求 $\log(n+x)$。

因 $\log(n+x)-\log n=\log\frac{n+x}{n}$，

以 $\frac{n+x}{n}=y$ 代入上条(4)式，则

$$\frac{y-1}{y+1}=\frac{x}{2n+x}。$$

故
$$\log\frac{n+x}{n}=\log(n+x)-\log n=\frac{1}{A}\left(\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right)，$$

即
$$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left(\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right)。\qquad(1)$$

合前第三条(13)式，第四条(4)式，第五条(1)式观之，其右边皆有

$\frac{1}{A}$。是知$\frac{1}{A}$为对数底 c 之所生，底不变，$\frac{1}{A}$亦不变，是为常数，称为对数之根。

卷三，第六条，谓 $A=1$，即$\frac{1}{A}=1$，则此对数为讷对。

卷四，第九条，谓 $c^x=y$，已知 c，x 求 y。

令
$$c=1+a\quad, \tag{1}$$
则
$$y=(1+a)^x \tag{2}$$
$$=[(1+a)^n]^{x/n}。 \tag{3}$$
因
$$(1+a)^n=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot a^2+\frac{n(n-1)(n+2)}{3!}\cdot a^3+\cdots, \tag{4}$$
$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n^2-n}{2!}\cdot a^2+\frac{n^3-3n^2+2n}{2!}\cdot a^3+\cdots, \tag{5}$$
$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\left(\frac{n^2}{2!}\cdot a^2-\frac{n}{2!}\cdot a^2\right)$$
$$+\left(\frac{n^3}{3!}\cdot a^3-\frac{3n^2}{3!}\cdot a^3+\frac{2n}{3!}\cdot a^3\right)+\cdots, \tag{6}$$
$$=1+\frac{a}{1}\cdot n+\left(\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n^2-\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n\right)$$
$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot n^3-\frac{a^3}{1\cdot 2}\cdot n^2+\frac{a^3}{1\cdot 3}n\right)+\cdots, \tag{7}$$
$$=1+a\cdot n+\left(\frac{a^2}{2}\right)n^2-\left(\frac{a^2}{2}\right)n+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right)n^3$$
$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2}\right)n^2+\left(\frac{a^3}{1\cdot 3}\right)n+\cdots, \tag{8}$$
$$=1+\left(a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots\right)n+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2}+\cdots\cdots\right)n^2$$
$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots\cdots\right)n^3+\cdots, \tag{9}$$
$$=1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots, \tag{10}$$
而
$$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots, \tag{11}$$

故 $$y=(1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^{x/n} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)\\&+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}{1\cdot 2}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots\\&+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\left(\frac{x}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)\\&+\cdots\cdots。\end{aligned} \tag{13}$$

即 $$\begin{aligned}y&=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)\\&+\frac{x(x-n)}{1\cdot 2\cdot n^2}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^2\\&+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^3\\&+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&=1+\frac{x}{1}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)\\&+\frac{x(x-n)}{1\cdot 2}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^2\\&+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot 2\cdot 3}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^3\\&+\cdots\cdots。\end{aligned} \tag{15}$$

令 $n=0$，则

$$y=c^x=1+\frac{x}{1}A+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}A^3+\cdots\cdots, \tag{16}$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}\cdots\cdots \tag{17}$$

$$=(c-1)-\frac{(c-1)^2}{2}+\frac{(c-1)^3}{3}-\frac{(c-1)^4}{4}+\cdots\cdots。$$

既已明了 A 的同数为底的讷对。又知 x 为对数(即底 c 的指数)若干。用(16)式右边级数求之，可识 y(即真数)的同数。如 $c^x=y$ 中

$x=1$，则

$$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot2}+\frac{A^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots。\tag{18}$$

如令 $x=\frac{1}{A}$ 则 $c^x=y$ 为 $y=c^{\frac{1}{A}}$，而(16)式变为

$$\begin{aligned}c^{\frac{1}{A}}&=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots\\&=2.718281828459045235360288\cdots\cdots\\&=e。\end{aligned}\tag{19}$$

即　$$c^{\frac{1}{A}}=e，或\ c=e^A。$$

惟因 A 为 c 的讷对，故知 e 为讷对数的底，与常对数以 10 为底不同。

卷四第十条，$x=\log_c y$，则 $c^x=y$，变为 $c^{\log y}=y$，

或　$$c^{n\log y}=y^n。\tag{1}$$

今有 $c^{\frac{1}{A}}=e$ 之式则

$$\log c^{\frac{1}{A}}=\log e\tag{2}$$

从(1)式，　$$(c)^{\frac{1}{A}\log c}=c^{\frac{1}{A}},\tag{3}$$

$$\frac{1}{A}\log c=\log c^{\frac{1}{A}};\tag{4}$$

又从(2)式，　$$\frac{1}{A}\log c=\log e,\tag{5}$$

两边乘 A，得　$$\log c=A\log e,\tag{6}$$

两边除 $\log e$，　$$A=\frac{\log c}{\log e}\tag{7}$$

代入第九条之(16)式，则

$$\begin{aligned}c^x=y=1&+\frac{x}{1}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)+\frac{x^2}{1\cdot2}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^2\\&+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^3+\cdots\cdots。\end{aligned}\tag{8}$$

设 $c=e$，则

$$e^{x}=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{1\cdot 2}+\frac{x^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots。\qquad (9)$$

如已知 $\log_{10} y=x$ 之数，求 y。

于(8)，因 $\log c=\log 10=1$，

又 $$\log c=\frac{1}{A}=0.43429\cdots\cdots11289。$$

代入得之。由是得下开常对数表各数：

常对数表	
真数	对数
1	0.0000000000000000000000
2	0.3010299956639811952112l
3	0.4771212547196524417769l
4	0.6020599913279623904224 2
5	0.6989700043360188047887 9
6	0.7781512503836336369881 2
7	0.8450980400142468351802 8
…	……………………………
9	0.9542425094393048835538 2
10	1.0000000000000000000000
…	……………………………

十八、《微积溯源》、《对数表》、《对数述》

(16)《微积溯源》八卷　英国华里司辑，英国傅兰雅口译，金匮华蘅芳笔述。同治十三年(1874 年)刻[①]。其第三十五款至第四十二款证得

① 见《江南制造局记》。

$$y=c^x=1+\frac{x}{1}\cdot A+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot A^3+\cdots\cdots,$$

又　$$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot 2}+\frac{A^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots,$$

及　$$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots=e,$$

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots,$$

并　$$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left[\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right]。$$

(17)《对数表》四卷四册　贾步纬校，江南制造局印。

(18)《对数表》一册　附八线对数表，八线表。　美国路密司撰，赫士译，高密朱葆琛笔述。

(19)《对数述》四卷　陈其晋撰(1877年)，其卷一卷二引徐有壬、李善兰、顾观光、及西人《代数学》、《代微积拾级》论对数之说。

十九、《三角数理》、《对数表引说》、《用对数表诀》、《造对数法》

(20)《三角数理》十二卷　英国海麻士辑，傅兰雅口译，金匮华蘅芳笔述，第六卷专论对数[①]，光绪三年(1877年)刻[②]。书中第二十五款至三十四款"论指数及指数之对数"。

第二十五款，因 $x=0$，则 $a^x=1$，

又因　$a=1+(a-1)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad a^x&=[1+(a-1)]^x\\&=1+x(a-1)+x(x-1)\frac{(a-1)^2}{1\cdot 2}\\&\quad+x(x-1)(x-2)\frac{(a-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

---

① 见翻译馆编《江南制造局译书提要》卷二，第33，34页。

② 见《江南制造局记》卷二，第29页。

$$=1+\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots\right\}x+\cdots\cdots。$$

令 $$a^x=1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots,$$

而 $p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots$为 x 之倍数，p_2，p_3，……为 x 他方之倍数，x 无论为何值均合。

又因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，于上级数中，一令 $x=y$，一令 $x=x+y$，

则得 $$a^y=1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots,$$

又 $$a^{x+y}=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots,$$

因 $$a^x\cdot a^y=a^{x+y},$$

则 $$(1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots)(1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots)$$

$$=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots。$$

展开之，消去 y，得

$$p_1+p_1^2x+p_1p_2x^2+p_1p_3x^3+\cdots\cdots$$

$$=p_1+2p_2x+3p_3x^2+4p_4x^3+\cdots\cdots,$$

故 $$2p_2=p_1^2,3p_3=p_1p_2,4p_4=p_1p_3,\cdots\cdots,$$

∴ $$p_2=\frac{p_1^2}{1\cdot2},p_3=\frac{p_1^3}{1\cdot2\cdot3},p_4=\frac{p_1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\cdots\cdots,$$

代入得 $$a^x=1+p_1x+\frac{p_1^2}{1\cdot2}x^2+\frac{p_1^3}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{p_1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\cdots,$$

而 $$p_1-(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots。$$

第二十六款，于上式，令 $p_1x=1$，即 $x=\frac{1}{p_1}$，

则 $$a^{\frac{1}{p_1}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots。$$

令 $a^{\frac{1}{p_1}}=e$，则 $a=e_1^p$，而 $\log_e a=p_1$，

$$\therefore \quad a^x=1+x(\log_e a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log_e a)^3+\cdots\cdots。$$

上式令 $a=e$，因 $\log_e a=\log_e e=1$，

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots。\tag{1}$$

又 $$\log_e a=p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots。\tag{2}$$

以 n 代 a，则

$$\log_e n=(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots。$$

又从第六款知有 e 底的对数表，欲变之为 a 底的对数表，只须以常乘数 $\frac{1}{\log_e a}$ 乘之即得，故

$$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\log_e n,$$

则 $$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\left[(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots\right]$$

上式如 $n>2$，则为发级数，惟有数种巧法，能变其形，使为敛级数。

第二十七款，证 $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ 为无尽之数。

因 $$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots<1,$$

则 $$3>e>2。$$

设 e 等于可通约之数 $\frac{m}{n}$，则

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\cdots$$

两边以 $n!$ 乘之，则 $m(n-1)!=N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$，

而 N 为整数，惟

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$$

$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots<\frac{1}{n}。$$

可知若将小于$\frac{1}{n}$的分数和 N 相加，说其和必可为整数，则于理不合。所以知 e 必为无尽之数。

$e=2+0.5+0.199999+0.041666+0.008333+0.001388+\cdots\cdots$

$=2.7182818$。

第二十八款，“求对数级数 $\log_a(1+x)$之值”。

$\log_a x$ 不能化为有 $A+Bx+Cx^2+\cdots\cdots$之形。因令 $x=0$，则 $\log_a x$ 变为无穷。惟 $\log_a(1+x)$则能变得此形的级数，因 $x=0$ 时，其式亦能为 0，所以其式中不能有不与 x 相关之项，又不能有 x 的负方之项，则得(1)式如下：

$$\log_a(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots。$$

若令 $x=x+y$，则得

$$\log_a(1+x+y)=A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\cdots\cdots,$$

此为 $\log_a(1+x+y)$的第一式，惟因

$$1+x+y=(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right),$$

故

$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\log_a\left(1+\frac{y}{1+x}\right)。$$

若于(1)式中令 $x=\frac{y}{1+x}$，则得

$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\frac{Cy^2}{(1+x)^3}+\cdots,$$

此为 $\log_a(1+x+y)$的第二式。因两式中 y 之系数必相等，即

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots\cdots=\frac{A}{1+x}。$$

两边各乘$(1+x)$，又化之得

$$(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+\cdots\cdots=0。$$

因 x 为未定之数，故可令

$$A+2B=0,2B+3C=0,3C+4D=0,\cdots\cdots$$

则 $$B=-\frac{1}{2}A,\quad C=\frac{1}{3}A,\quad D=-\frac{1}{4}A,\cdots\cdots,$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)。$$

如令 $1+x=a$，则

$$\log_a a=1=A\left[(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\cdots\right]$$
$$=A\log_e a,$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=\frac{1}{\log_e a}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)。$$

第二十九款。“又法证上款之结果”。

因 $$\frac{\log_a(1+x)}{x}=A\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\cdots\right),如\ x=0,$$

则 $$A=\frac{\log_a(1+x)}{x}。$$

若令 $x=\dfrac{1}{n}$，则

$$\frac{\log_a(1+x)}{x}=n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)。$$

惟因 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$
$$=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3n}\right)+\cdots$$

若令 $n=\infty$，则 $x=0$，而式之右边为 e 之同数。

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots,由第六款知\ A=\log_a e=\frac{1}{\log_e a}。$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=\frac{1}{\log_e a}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)。$$

又若令 $a=e$，即得 $\log_e a=\log_e e=1$；

则　$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$。

第三十款，“对数较之原则”。

如　$\log_{10}(n+d)-\log_{10} n=\log_{10}\left(1+\frac{d}{n}\right)$

$$=\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}+\frac{d^2}{3n^2}-\cdots\cdots\right)=\mu\frac{d}{n}。$$

此因 n 为大数，d 为小数，则括弧内的乘数，可弃之不用。若 $d=1$，则

$$\log_{10}(1+n)-\log_{10} n=\mu\frac{1}{n}。$$

惟因 $\log_{10}(1+n)-\log_{10} n$ 为表中相连两对数之较，如令此表中的较数为 S，则

$$\log_{10}(1+n)-\log_{10} n=dS。$$

即　$$\log_{10}(n+d)=\log_{10} n=dS。$$

依此式可从本数的上下两数，而得本数的对数。反之，$\log_{10}(n+x)-\log_{10} n$ 为已知之数，而等于 S'，则 $d=\frac{S'}{S}$，将此分数加于 n，即成 n 与 $n+1$ 间两对数之中相配的真数内分数。

第三十一款，“求前所差之限”。

因 $\log(n+d)-\log n$ 在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}\right)$ 与 $\mu\frac{d}{n}$ 之间，则所差者必在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ 与 $\mu\frac{d}{n}$ 之内，所以此二式，即可为其差之限。又易知其略近的同数 dS，必在极大极小的限内。若令 $dS=\log(n+d)-\log n$，则所有之差，必小于 $\frac{\mu d}{2n^2}$ 若 $n>100000$，而 $d<1$，则其分数必小于 $\frac{0.43}{200000000}$，即小于第八位小数之 $\frac{1}{4}$，可见其差必不能入所求对数之七位小数以内。

又令 $d=\frac{S'}{S}$，则所差为 $\frac{dS-S'}{S}$，则依前理，其所差必小于 $\frac{\mu d}{2n^2S}$，惟因 $S>\frac{\mu}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$，换言之 $d-\frac{S'}{S}<\frac{d}{2n-1}$，$d-\frac{S'}{S}<\frac{1}{2000}$ 惟此因 $n>10000$ 方能得此，若 $\frac{S'}{S}$ 为 d 之同数，其差与所求得的首四位小数，可不相关。

第三十二款，"对数之计算"。

$$\log_e(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

以 $-x$ 代 x 得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

而 $$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\}。$$

又令 $$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{m}{n},$$

则 $$x=\frac{m}{2m+n}。$$

惟因 $\log_e\left(1+\frac{m}{n}\right)=\log_e\left(\frac{m+n}{n}\right)=\log_e(m+n)-\log_e n$，

$$\therefore\quad \log_e(n+m)=\log_e n+2\left[\frac{m}{2n+m}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^5+\cdots\cdots\right]。$$

如令 $m=1$，则

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\cdots\right]。\qquad(1)$$

第三十三款，设 $\frac{m}{n}=\frac{1+x}{1-x}$，$\therefore\quad x=\frac{m-n}{m+n}$。

则 $\log_e \frac{m}{n}=2\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right]$。 (2)

如 $m=x^2, n=x^2-1$,

则 $\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2x^2-1}$,

而 $\log_e\left(\frac{m}{n}\right)=2\log_e x-\log_e(x-1)-\log_e(x+1)$,

∴ $\log_e(x-1)=2\log_e x-\log_e(x-1)-2\left[\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3-\cdots\cdots\right]$。 (3)

用此式若已有相连之两数 $x-1$,与 x 的讷对,则可求相连第三数 $x+1$ 之讷对。

(21)《对数表引说》一卷 《用对数表诀》一卷,《造对数表法》一卷,朱湘澄撰,未刊[①]。

二十、《代数学补式》、《算式解法》、《有不为斋算学》、《对数旁通》、《对数较表》、《对数捷法》、《对数浅释》、《对数四问》

(22)《代数术补式》二十二卷 解崇辉撰(1899 年),为解析《代数术》而作。

(23)《算式解法》十四卷 美国好敦司开奈利同撰,英国傅兰雅口译,金匮华蘅芳笔述,第八卷论对数[②]。光绪二十五年(1899年)刻[③]。

(24)傅九渊《有不为斋算学》卷三"对数表开方较省算法解"称:"作对数法递次开方,以求假数,用前后各次所得数相较见《数理

① 见刘铎《古今算学书录》"象数第三"第 15 页,光绪戊戌(1898)印本。

② 见《江南制造局译书提要》卷二,第 36~37 页。

③ 见《江南制造局记》卷二,第 19 页。

精蕴》最为简妙”。

“盖各次开方首位之数并为 1，首位以下空位渐多，则后次开方数(E_{n+1})，与前次开方数(E_n)，略近$\frac{1}{2}$。于是以前次开方数二归之$\left(\frac{1}{2}E_n\right)$，与后次开方数($E_{n+1}$)相课，则后一次开方数内，必少本次开方所减之隅幂半段。”

求第一较：因 $\left(1+0.\overset{n}{0}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+0.\overset{m}{0}\beta\right)$，

或 $$1+0.\overset{n}{0}\alpha=1+2\times 0.\overset{m}{0}\beta+\left(0.\overset{m}{0}\beta,\right)^2$$

即 $$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}=0.\overset{m}{0}\beta+\frac{\left(0.\overset{m}{0}\beta\right)^2}{2}$$

或 $$\frac{0.\overset{n}{0}\alpha}{2}-0.\overset{m}{0}\beta=\frac{\left(0.\overset{m}{0}\beta\right)^2}{2},$$

即 $$\frac{E_{n-1}}{2}-E_n=d_{n\cdot 1}。\qquad(1)$$

其中 E_{n-1}为前次开方数，开方数俱不用首位；E_n 为本次开方数；$d_{n\cdot 1}$为本次第一较。

求第二较：

因 $$\frac{E_{n-1}}{2}=E_n+d_{n\cdot 1},\qquad(1)$$

自乘之得 $$\frac{E^2_{n-1}}{4}=E^2_n+2E_n\cdot d_{n\cdot 1}+d^2_{n\cdot 1},$$

即 $$\frac{1}{4}\cdot\frac{E^2_{n-1}}{2}-\frac{E^2_n}{2}=E_n\cdot d_{n\cdot 1}+\frac{d^2_{n\cdot 1}}{2},$$

或 $$\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1}-d_{n\cdot 1}=d_{n\cdot 2}。\qquad(2)$$

其中 $d_{(n-1)\cdot 1}$为前次第一较，$d_{n\cdot 1}$为本次第一较，$d_{n\cdot 2}$为本次第二较。

求第三较：

因
$$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2}, \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1}, \tag{2}$$

则从(1)及(2)相乘得

$$\frac{1}{8}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}-E_n\cdot d_{n\cdot 1}=E_n d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 1}^2+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}, \tag{A}$$

又从(2)自乘得

$$\frac{\frac{1}{8}d_{(n-1)\cdot 1}{}^2}{2}-\frac{1}{2}d_{n\cdot 1}{}^2=\frac{1}{2}d_{n\cdot 1}{}^2+2d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 2}{}^2; \tag{B}$$

(A)+(B)得

$$\frac{d_{(n-1)\cdot 2}}{8}-d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 2}+1\ \frac{1}{2}d_{n\cdot 1}{}^2+3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 2}^2=d_{n\cdot 3}。 \tag{3}$$

其中 $d_{(n-1)\cdot 2}$为前次第二较，$d_{n\cdot 2}$为本次第二较，$d_{n\cdot 3}$为本次第三较。

求第四较：

因
$$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2}, \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 3}=\frac{1}{8}d_{(n-1)\cdot 2}, \tag{3}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1}; \tag{2}$$

则从(1),(3)相乘得

$$\frac{1}{16}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 2}-E_n\cdot d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 3}+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}。 \tag{C}$$

又从(2)自乘，又各乘 1.5 得

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{2}d_{(n-1)\cdot 1}{}^{2}-\frac{3}{2}d_{n\cdot 1}{}^{2}=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\frac{3}{2}d_{n\cdot 2}{}^{2} \tag{D}$$

又从(2),(3)相乘,又各乘6得

$$\begin{aligned}&\frac{3}{16}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}-3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}\\&=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+6d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+6d_{n\cdot 2}{}^{2}+6d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3},\end{aligned} \tag{E}$$

又从(3)自乘,又各乘4得

$$\frac{1}{16}d_{(n-1)\cdot 2}{}^{2}-d_{n\cdot 2}{}^{2}=3d_{n\cdot 2}{}^{2}+8d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}+4d_{n\cdot 3}{}^{2}, \tag{F}$$

(C)+(D)+(E)+(F)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16}\left(E_{n-1}d_{(n-1)\cdot 2}+\frac{3}{2}d_{(n-1)\cdot 1}{}^{2}+3d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}+d_{(n-1)\cdot 2}{}^{2}\right)\\&\quad-\left(E_{n}d_{n\cdot 2}+1\frac{1}{2}d_{n\cdot 1}{}^{2}+3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 2}{}^{2}\right)\\&=E_{n}d_{n\cdot 3}+7d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+7d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+10\frac{1}{2}d_{n\cdot 2}{}^{2}\\&\quad+14d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}+4d_{n\cdot 3};\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{16}d_{(n-1)\cdot 3}-d_{n\cdot 3}=d_{n\cdot 4}。 \tag{4}$$

其中 $d_{(n-1)\cdot 3}$ 为前次第三较,$d_{n\cdot 3}$ 为本次第三较,$d_{n\cdot 4}$ 为本次第四较。

(25)《对数旁通》一卷　为《思枣室算学新编》四种之一,无锡蒋士栋撰,前有华世芳光绪丁酉(1897年)序文一篇。书中称:$10^{\frac{1}{2}(n+1)}=1+E_{n+1}$,$E_{n+1}:\frac{1}{2^{n+1}}=1:\mu$。就中10为常对数之底。《数理精蕴》(3)"用递次开方求假数法"(c)即用此法对数根 μ。如已知 μ 亦可反求得 E_{n+1} 及10。

(26—29)廖家绶(1860～1890)撰《对数较表》一卷存于家。陆采撰《对数捷法》一卷,见《杭州艺文志》。江衡撰《对数浅释》一卷为《溉斋算草》之一。刘彝程撰《对数四问》,见《经世文续编》。

（三）对数的东来（下）[①]

二十一、对数输入日本的经过

日本林鹤一以为对数由中国《数理精蕴》输入日本约在享保六年（1721 年），因此时德川吉宗亦注重历算。惟上文考出《数理精蕴》实成于雍正癸卯（1723 年），则输入日本当稍后于享保六年。其后又由荷兰直接输入。现在日本国中所藏论著对数之书，计有：

(1)《数理精蕴》(印本，钞本)。

(2)《不朽算法》(钞本)，安岛直圆著，日下诚编。

(3)《真假数表》(钞本)，安岛直圆著。

(4)《真假数表术解》(钞本)。

(5)《对数表起源》(钞本)与(3)内容略同，又与(6)全异。

(6)《对数表起源》(钞本)，会田安明著。

(7)《对数表》(钞本)，堀田泉尹著(1814 年)。

(8)《作对数表法》(钞本)，篠原善富著(1823 年)。

(9)《加减代乘除表》(印本)，阪部广胖著，马场正督订(1824 年)。

(10)《对数表制法》(钞本)，石黑信由著(1829 年)。

(11)《算法对数表》(印本)，小出修喜编，福田理轩校(1844 年)。

(12)《对数表精解》(钞本，印本)，因田恭著，竹村好博编(1854 年)。

(13)《(算法捷径)乘除对数表》(印本)，惠川景之著(1857 年)。

(14)《对数表》(钞本)，著作人及时代未详。

(15)《(新编)加减表》，一名《对数表》(钞本)，阿部有清著(1860 年)。

---

① 参看林鹤一"和算ニ于クル对数"，《东北数学杂志》第二十一卷，第一，二号，第 148～190 页。1922 年，日本，仙台。
又林鹤一《和算研究集录》上卷，第 671～707 页。1937 年，日本，东京。

(16)《对数表》(印本),关口开著,时代未详。

(17)《数率六线率》表(印本)。

(18)《乘除对数表》(钞本),又《(大测)加减代乘除表》,《大测表》卷之三,或称大村一秀著。

二十二、《不朽算法》、《真假数表》和《对数表起源》

关流正统第四传安岛直圆(1739~1798,或 1733~1800)之第五传日下诚(1764~1839)于其师安岛去世之翌年(1799 年),编集其师遗著,成《不朽算法》上下卷。上卷论圆理,下卷论对数之起源、角术等,并述留岛义太(? ~1757)的平方零约术。上卷第十二问载与对数相关之题。因此问为三角形自顶作 n 斜线,则内容 n 等圆之直径为

$$d=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{D}{h}}\right),$$

而 h=自顶至底线之垂线,D=内容圆直径。

其卷下称:

或曰,第十二问,三斜,内容等圆术,界斜数十,则开方乘数,亦数十乘方,得商数不容易,可谓无用之术乎。答曰,予有新案,如下文。

术曰:真数一者配数空,真数一十者,十分者。各配数一。真数一百者一厘者。各配数二。真数一千者,一毛者各配数三。如此真数上下每进退一位,配数增一。依比例得所求配数。其术曰:置一十,九乘方开之,得商为配数一分之真数名法,置一十以法除之,为配数九分之真数。以法除之,为配数八分之真数。以法除之,为配数七分之真数。次第如此以法累除之,而求到配数二分之真数而止。

置配数一分之真数，九乘方开之，为配数一厘之真数名法，置配数一分之真数。以法除之，为配数九厘之真数。以法除之，为配数八厘之真数。以法除之，为配数七厘之真数。如前法以法累除之。求到配数二厘之真数而止。

置配数一厘之真数，九乘方开之，为配数一毛之真数。依前术求到，超于配数九毛之真数。至二毛之真数而止。余仿此。

以上所称配数即是对数，如：

真数		配数
1		0
10	0.1	1
100	0.01	2
1000	0.001	3
……	……	……

而配数的正负，不复计及。

求配数之法，如：

$$\sqrt[10]{10}=\log^{-1}0.1\text{（以配数一分的真数为法），}$$

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10}}=\log^{-1}0.9\text{（配数九分的真数），}$$

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}}=\log^{-1}0.8\text{（配数八分的真数）。}$$

……………………………………

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}\sqrt[10]{10}}\text{（配数二分的真数）。}$$

其次，

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}=\log^{-1}0.01\text{（以配数一厘的真数为法），}$$

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.09\text{（配数九厘的真数），}$$

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{(\sqrt[10]{10})}\cdot\sqrt[10]{(\sqrt[10]{10})}}=\log^{-1}0.08\text{(配数八厘的真数)。}$$

……………………………

由此得：

真　　数	配　　数
7.9423823472428	0.9
6.3095734448019	0.8
5.0118723362727	0.7
3.9810717055350	0.6
3.1622776601684	0.5
……………………	……
1.2589254117942	0.1
1.2302687708124	0.09
……………………	……
1.0002072541335	0.00009
……………………	………
1.0000000000046	0.000000000000002
1.0000000000023	0.000000000000001

如求 log 2，因原表真数之值十分复杂，而其配数之值反简单，然亦可求整数的配数。其意义和戴煦《对数简法》(1845 年)(1)"有开方表径求诸对数"之法相同，例如：

$$\begin{aligned}\log 2 &= \log 1.9952623149698\times\frac{2}{1.995\cdots698}\\ &= \log 1.9952623149698\times 1.002374467254529\\ &= \log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023052380779\\ &\qquad\times\frac{1.002374467254529}{1.0023052380779}\end{aligned}$$

$=\log 1.9952\cdots 9698\times\log 1.0023\cdots 0779$

$\times 1.00006906595294$。

$=0.3+0.001+0.0001+\cdots\cdots$

$=0.3010295663$。

至有配数求真数，如已知配数 2.56 求真数。已因知配数 2 的真数 $=100=a$，配数 0.5 的真数 $=3.1622776601684=b$，配数 0.06 的真数 $=1.1481536214969=c$，则所求的真数为 $a\cdot b\cdot c$。

《真假数表》亦是安岛所编，未详年代。《对数表起源》有和安岛《真假数表》内容相同的。

二十三、《对数表起源》、《作对数表法》、《加减代乘除表》

(1) 会田安明(1747～1817)的《对数表起源》，和安岛直圆的《对数表起源》书名相同，可是内容全不同。书中说真数 2 的假数 1，真数 4 的假数 2，真数 8 的假数 3，并称：

真数相乘者假数相加而相对。 $\log ab=\log a+\log b$。

真数相除者假数相减而相对。 $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$。

真数开平方者假数二除而相对。 $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$。

真数开立方者假数三除而相对。 $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a$。

真数开四乘方者假数四除而相对。 $\log\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}\log a$。

又立小表如

真　数	2	4	8	16	32	64	128	……
假　数	1	2	3	4	5	6	7	……

因会田先求 2 为底之对数，其术一如《数理精蕴》内“用中比例求假

数法”。如求 log 3，先由 log 2=1，log 4=2 起数。

$$\sqrt{2\times4}=2.82842+[\text{第一真数，少率(1)}]^{①}。$$

则 $\log 2.82842+=\frac{1}{2}(\log 2+\log 4)=1.5$[第一假数]。

次因 $\sqrt{\text{第一真数}\times4}=3.36358+$[第二真数，多率(1)]。

则 $\log 3.36358+=\frac{1}{2}(\log 4+\log 1.5)=1.75$[第二假数]。

复次

$$\sqrt{\text{少率(1)}\times\text{多率(1)}}=3.084421+[\text{第三真数，多率(2)}]。$$

则 $\log 3.084421+=\frac{1}{2}(\text{第一假数}+\text{第二假数})=1.625$

[第三假数]。

复次

$$\sqrt{\text{少率(1)}\times\text{多率(2)}}=2.9536+[\text{第四真数，少率(2)}]。$$

则 $\log 2.9536+=\frac{1}{2}(\text{第一假数}+\text{第三假数})=1.5625$

[第四假数]。

逐次如是，至第十次得：

第十真数=2.9999967198(少率)

第十假数=1.5849609375

故 $\log_2 3=1.584961$。

同理 $\log_2 5=2.321920$，　$\log_2 7=2.80735$，

$\log_2 11=3.459426$，　$\log_2 10=3.32192$。

如欲得 10 为底之对数，可以下式得之。

---

① 关于多少率之说，详见《东北数学杂志》第六卷内林鹤一“零约术ト我国ニ于ケル连分数论发达”论文。

又林鹤一，《和算研究集录》，上卷，第 590～645 页。1937 年，日本，东京。

$$\log_{10} 2=\frac{1}{\log_2 10}\cdot\log_2 2=0.30103。$$

(2) 《作对数表法》为筱原善富,文政六年(1823 年)所著。筱原善读中算,文化十三年(1816 年)著《三角法举要》。文政二年(1819 年)著《周髀算经国字解》。他的《作对数表法》盖完全传述《数理精蕴》的方法,和陈杰的《算法大成》相同。

(3) 《加减代乘除表》是阪部广胖(?~1824)所著。附于文化七年(1810 年)所著《算法点窜指南录》第十二卷内。为一至三百之对数小表。佐久间光豹复为补成三百至千二百的对数小表。

二十四、《对数表制法》、《对数表精解》

(1) 《对数表制法》是石黑信由(1760~1836),文政十二年(1829 年)所著。其法先求真数的四位假数,次及六位,复次为八位,逐次逼近,得到真值。

(甲) 先求四位之表。

真　　数	7	10	100	……
假　　数	0000	1000	2000	……

又

真　　数	2	4	8	5	……
假　　数	0300	0600	0900	0700	……

上表盖设真数 2 的假数为 0300。所以真数 4 的假数为 0600,亦为真数 2 的假数 2 倍;又真数 8 的假数为 0900,亦为真数 2 的假数和 4 的假数的和;又真数 5 的假数为 0700,亦为真数 2 的假数和 10 的假数的较。

次以 3 为 2 与 4 中间的数，乃以 2 的假数，和 4 的假数相加折半为 3 的假数即 0450。由是 9 的泛假数为 0900。但上表明言 8 的假数亦为 0900，由是 9 之假数当以 8 的假数，和 10 的假数相加折半得为 0950，今倍之，得 1900 为 81 的假数。又以 8 的假数，和 10 的假数相和得 80 的假数，亦为 1900。但在理此两数不应相同，由是加不定加数(irregular additor)于 9 的泛假数，是为① 0.952。既得 9 的假数，可推得 3 与 6 的假数，如：

真　　数	9	3	6	……
假　　数	0952	0476	0776	……

复次求 7 的假数，由 6 的假数和 8 的假数相加折半得为 0838。今倍之得 1676 为 49 的泛假数，又以 6 的假数和 8 的假数相加得 48 的假数，亦为 1676。但在理两数不应相同，是知两者均不合，因另以 5 的假数和 10 的假数相加得 1700，又以 48 的假数和 50 的假数相加折半得 1688 为 49 的泛假数。另加不定加数 0002，是为 49 的假数，如：

真　　数	49	7	
假　　数	1690	0845	

同理得下列的表，就中差为连续二假数的差，不定加数(即前后平均而外的不定加数)为连续三假数内，前后两假数相加折半，与中央假数之差。表中除有附尾的 5 外，其不定加数皆渐次细小。如设 2 之假数为 0301 则不定加数之渐次细小，更为有序。

① 石黑信由以何理由得不定加数，至今尚无确解。

真　　数	假　　数	差	不定加数
1	0000	0300	0000
2	0300	176	62
3	0476	124	26
4	0600	100	12
5	0700	76	12
6	0776	69	$03^{\underline{5}}$
7	0845	55	07
8	0900	52	$1^{\underline{5}}$
9	0952	48	2
10	1000	39	$4^{\underline{5}}$
11	1039	37	1
12	1076	35	1
13	1111	34	$0^{\underline{5}}$
14	1145	31	$1^{\underline{5}}$
15	1176	24	$3^{\underline{5}}$
16	1200	27	$1^{\underline{5}}$负
17	1227	25	1
18	1252	25	0
19	1277	23	1
20	1300	21	1

次求六位的表,以下二小表为基础,即:

真　　数	1	10	100	1000	
假　　数	000000	100000	200000	300000	

真　　数	2	4	8	5	
假　　数	030103	060206	090309	069897	

最后求八位的表，以下二小表为基础，即：

真　　数	0	10	100	1000	
假　　数	00000000	10000000	20000000	30000000	

真　　数	2	4	8	5	
假　　数	03010300	06020600	09030900	06989700	

(2)《对数表精解》为关流正统第六传内田恭(1805～1882)所著，其弟子竹村好博，安政元年(1854年)所增修。书中以《数理精蕴》累乘比例，义颇繁杂，因如《不朽算法》，先设：

真　数	假　数
1	0
10	1
100	2
1000	3
……	……

次以

真　数	假　数
$\sqrt[10]{10}$	0.1
$(\sqrt[10]{10})^2$	0.2
$(\sqrt[10]{10})^3$	0.3
………	……
$(\sqrt[10]{10})^{10}$	1.0
$\sqrt[10]{(\sqrt[10]{10})}$	0.01

$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)^2$ 0.02

……… ……

$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}$ 0.001

$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}\right)^2$ 0.002

……………… ……

其进行的方法,又和《不朽算法》稍有不同。

二十五、《算法对数表》、《乘除对数表》、《对数表》

(1)《算法对数表》为小出修喜(1797～1865)所编,福田理轩校。小出为德岛藩士,是书于弘化元年(1844年)刊行。对数初入日本,群相珍秘,自此书出,对数法流传始广。其书疑是荷兰人所输入,因卷中信田贞秀志语曾题荷兰的对数表译名。

(2)《乘除对数表》为安政四年(1857年)惠川景之所著,是钞录1831年毗辣儿(J. C. Pilaar)航海书中的一万以下四位对数表:并列差数表。毗辣儿是荷兰人。

(3)《对数表》由关口开(1842～1884)署签,作书年代未详,大约采自英、美书。具小数六位。明治初期,日人多用六、七位对数表,此书疑出于此时。

1926年11月20日,记于灵宝

1953年10月,校于兰州。

三角术和三角函数表的东来*

目　次

---

* 本文原载《科学》第 12 卷(1927 年)第 10 期,第 1345～1393 页,1935 年收入《中算史论丛》(三)第 323～400 页,1955 年收入《中算史论丛》第三集,第 191～253 页。

(一) 集 目

一、平面三角术集目

(1) 《大测》二卷,专论平面、球面三角形,徐光启修(1631 年)。

(2) 《测量全义》第一卷,"测直线三角形",徐光启修,(1631 年)。

(3) 《五纬历指》三卷《崇祯历书》本。

(4) 《三角算法》前半卷,《天学会通》本,南海穆尼阁著,北海薛凤祚纂。

(5) 《角度衍》,《惺斋杂著》第二十三种,王元启撰,未刊。

(6) 《平三角举要》五卷,《梅勿庵历算全书》本,梅文鼎撰。

(7) 《三角法会编》二册,锡山《历算全书》本,杨作枚撰。

(8) 《三角法摘要》一卷,《测算刀圭》本,年希尧撰(1718 年)。

(9) 《数理精蕴》下编卷十七(1723 年印本)。

(10) 《勾股引蒙》十卷,陈讦撰(1722 年)。

(11) 《勾股割圜记》三卷,戴震撰(1755 年)。

(12) 《数学精详》十三卷,屈曾发撰(1772 年)。

(13) 《释弧》卷上,《里堂学算记》本,焦循撰(1795~1798)。

(14) 《矩线原本》卷二,《数学五书》本,安清翘撰(1818 年)。

(15) 《三角和较算例》一卷,《观我生室汇编》本,罗士琳撰(1840 年)。

(16) 《勾股六术》一卷,《下学庵算术》之一,项名达撰。

(17) 《三角和较术》一卷,项名达撰。

(18) 《算法大成》上编卷五,卷六,陈杰撰(1844 年)。

(19) 《求表捷术》共四种九卷,戴煦撰。

(20) 《平三角记》,《九数外录》之内,《武陵山人遗书》本,顾观光撰。

(21) 《平三角术》,《算学二十一种》本,吴嘉善撰(1863 年)。

(22) 《学强恕斋笔算》卷五,卷六,梅启照撰(1870 年)。

(23) 《代数术》卷二十四,卷二十五,(英)华里司撰,(英)傅兰雅、(清)华

蘅芳共译(1873年)。

(24)《圜率考真图解》一卷,《白芙堂丛书》本,左潜、曾纪鸿、黄宗宪共撰(1874年)。

(25)《三角数理》卷二,(英)海麻士撰,(英)傅兰雅、(清)华蘅芳共译(1877年)。

(26)《三角须知》一册,《格致须知》本,(英)傅兰雅撰。

(27)《平三角测量法》,《算草丛存》本,华蘅芳撰。

(28)《三角和较算例演草》一卷,王鉴撰,未刻。

(29)《释勾股形边角相求法》,《一得斋算草》本,崔朝庆撰(1891年)。

(30)《弧矢启秘图解》一卷,李善兰撰,汪远焜绘图,《国学杂志》第二、三、四期印本。

(31)《八线备旨》卷一、卷二、卷三,(美)罗密士撰,(美)潘慎文、谢洪赉共译(1894年本)。

(32)《算学答问》一卷,龚铭凤撰(1897年)。

(33)《勾股边角图说》一册,胡炳文撰(1898年)。

(34)《勾股边角相求图解举隅》一卷,吴和翱撰(1898年)。

(35)《三角和较术解》四卷,周达撰(1899年)。

(36)《平三角和较术图解》二卷,张毓瑗撰(1902年)。

(37)《三角新理》三卷,《求一得斋算学》本,陈志坚撰(1904年)。

(38)《八线拾级》一册,美,温德鄂撰,刘光照译(1904年印)。

(39)《勾股形边角相求术图解》一卷,石振埏撰(1906年)。

二、球面三角术集目

(1)《大测》二卷,"论球上三角形"凡七二十条,徐光启修(1631年)。

(2)《测量全义》第七卷,"测曲线三角形",徐光启修(1631年)。

(3)《三角算法》后半卷,《天学会通》本,南海穆尼阁著,北海薛凤祚纂。

(4)《浑天仪说》四卷,内卷二"依浑仪解圆线三角形",卷三"依比例原法复解圆线三角形"等,汤若望撰,李天经序(1636年)。

(5)《弧三角举要》五卷，梅文鼎撰(1684 年)。

(6)《环中黍尺》五卷，梅文鼎撰(1700 年)。

(7)《堑堵测量》二卷，《梅勿庵历算全书》本，梅文鼎撰。

(8)《三角法摘要》一卷，《测算刀圭》本，年希尧撰(1718 年)。

(9)《正弧三角疏义》一卷、《正弧三角会通》一卷，《翼梅》本，江永撰。

(10)《历象考成》上编，卷二，卷三，"弧三角"上下二卷(1723 年刻)。

(11)《割圜密率捷法》卷二："弧线三角形边角相求"，明安图撰(1736～1774)。

(12)《勾股割圜记》三卷，戴震撰(1755 年)。

(13)《弧三角形三边求角用开方得半角正弦解》，在《赤水遗珍》之内，《梅氏丛书辑要》本，梅瑴成撰(1761 年)。

(14)《衡斋算学》第一册，汪莱撰(1796 年)。

(15)《释弧》卷中，卷下，《里堂学算记》本，焦循撰(1795～1798)。

(16)《衡斋算学》第四册，汪莱撰(1799 年)。

(17)《一线表用》卷一，《数学五书》本，安清翘撰(1817 年)。

(18)《矩线原本》卷三，《数学五书》本，安清翘撰(1818 年)。

(19)《弧角设如》三卷，《翠微山房数学》本，张作楠撰(1822 年)。

(20)《弧三角举隅》一卷，《翠微山房数学》本，张作楠撰(1822 年)。

(21)《斜弧三边求角补术》一卷，《董方立遗书》本，董祐诚撰(1821 年)。

(22)《弧三角和较算例》，附《勾股六术》之后，项名达撰(1843 年)。

(23)《算法大成上编》，卷七，至卷十"弧三角"陈杰撰(1844 年)。

(24)《切线分外角法》，在《天算或问》卷一，《则古昔斋算学》十三种本，李善兰撰。

(25) 正弧形边角比例法，斜弧三角形用垂弧法，斜弧三角形用次形法，在《算賸余稿》之内，《武陵山人遗书》本，顾观光撰(1851 年)。

(26) 解斜弧形切线分角法，在《算賸续编》之内，《武陵山人遗书》本，顾观光撰(1851 年)。

(27) 弧三角记，在《九数外录》之内，《武陵山人遗书》本，顾观光撰。

(28)《弧三角平视法》一卷,《东塾遗书本》陈澧撰(1857年)。

(29)《弧三角拾遗》一卷,《务民义斋算学》本,徐有壬撰。

(30)《学强恕斋笔算》卷八,卷九,"弧三角",梅启照撰(1870年)。

(31)《弧三角术》一卷,《算学二十一种》本,吴嘉善撰(1872年)。

(32)《三角数理》卷九至十二,(英)海麻士撰,(英)傅兰雅、(清)华蘅芳共译(1877年)。

(33)《八线备旨》卷四,(美)罗密士撰,(美)潘慎文、(清)谢洪赉共译(1894年印)。

(34)《弧三角图解》十卷,盛钟圣、钟彬撰(1894年)。

(35)《弧三角释术》一册,吴兴让撰(1901年)。

(36)《弧三角题解》□卷,方恺撰。

(37)《弧三角阐微》五册,欧礼斐编。

(附录)《测天约术》一卷,陈昌斋(乾隆辛卯,1771年翰林)撰。正弧三角形取利玛窦的省除法,斜弧三角形取穆尼阁的不分线法。

三、三角函数表集目

(1)《测圆八线小表》,在《测量全义》卷三之内,徐光启修(1631年)。

(2)《割圜八线表》六卷,《崇祯历书》本,汤若望、徐光启共译。

(3)《割圜八线立成长表》四卷,《崇祯历书》本,徐光启撰。

(4)《割圜勾股八线表》,附《代勾股开方法》一卷,《新法历书》本,汤若望撰。

(5)《比例四线新表》一卷,《历学会通》本,薛凤祚、穆尼阁共译。

(6)《四线对数表》一册,明末清初套印本。

(7)《天弧象限表》,李子金撰(1683年)。

(8)《八线真数表》一卷,《测算刀圭》本,年希尧校(1718年)。

(9)《八线假数表》一卷,《测算刀圭》本,年希尧校(1718年)。

(10)《对数广运》一卷,年希尧撰。

(11)《数表》一卷。

(12)《三角割圜八线小表》,在《勾股引蒙》之内,陈讦撰(1722年)。

(13)《八线表》上下卷,《数理精蕴》卷一,卷二(1723 年印本)。

(14)《八线对数表》上下卷,《数理精蕴》卷七,卷八(1723 年印本)。

(15)《八线表》上下,附《数学精详》之后,屈曾发撰(1772 年)。

(16)《一线表》,在《一线表用》之内,《数学五书》本,安清翘撰(1817 年)。

(17)《切线表》,在《学算存略》之内,《数学五书》本,安清翘撰。

(18)《八线类编》三卷,《翠薇山房数学》本,张作楠校。

(19)《八线对数类编》二卷,《翠薇山房数学》本,张作楠校。

(20)《三角割圜八线小表》,在《学强恕斋笔算》卷十之内,梅启照撰(1870 年)。

(21)《八线对数类编》二卷,张作楠原辑,黄宗宪校正,丁取忠重刻(1874 年)。

(22)《弦切对数表》八卷,贾步纬校。

(23)《八线简表》一卷,贾步纬校(1874 年)。

(24)《八线对数简表》一卷,贾步纬校。

(25)《八线简表》,《中西算学大成》第九十九卷本,陈维祺辑(1889 年)。

(26)《八线对数简表》,《中西算学大成》第一百卷本。

(二) 平面三角术的东来

四、平面三角术第一次输入中国

平面三角的输入,实始于明崇祯辛未(1631 年)。是年徐光启和耶稣会士所修《测量全义》,其卷一"测直线三角形",即论平面三角术。当时三角术在欧洲还没有善本[①],因仅输入以下各公式:

① 见本编第 6 节"平面三角术第二次输入中国"内所述。

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\cdots,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\cdots。$$

$$2s=a+b+c。$$

清初薛凤祚(字仪甫,淄川人)从穆尼阁受对数和三角术。是时称平面三角形为正线三角形。因以对数立算,故有下列各式:

$$\log b=\log a+\log\sin\beta-\log\sin\alpha,$$

$$\log\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\log\frac{a-b}{2}+\log\tan\frac{180^\circ-\gamma}{2}-\log\frac{a+b}{2},$$

$$\log\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{[\log(s-b)+\log(s-c)]-[\log s+\log(s-a)]\}。$$

是时三角术初入中国,知道的人甚少,除梅文鼎(字勿庵,宣城人 1633～1721)外,其余多引用旧说。梅文鼎《平三角举要》曾以几何法证上列各公式,应用于九九加减术。年希尧(字允恭,广宁人)的《测算刀圭》中《三角法摘要》(1718 年),陈订(字言扬,海宁人)的《勾股引蒙》,则仅引梅说,没有发明。

康熙壬寅(1722 年)《数理精蕴》告成,翌年刻行。就中,下编卷十七"面部七""三角形边线角度相求",即解正、斜三角形。此卷曾以几何法,证:

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2},$$

卷十八“面部八”、“测量、勾股测量、三角测量”所引的和梅文鼎《三角法举要》相同。此外又有 $\sin\frac{\alpha}{3}$求法，即三分取一用益实归除之法，则为前此所未论，称为“新增”。自有梅文鼎《三角法举要》和《数理精蕴》，此学知道的渐多。屈曾发(字省园，虞山人)《数学精详》，卷十一“三角形边线角度相求法”，和安清翘(号翼圣，垣曲人 1759～1830)《矩线原本》卷二(1818 年)“测量篇上”都本以上所列二书旧说。

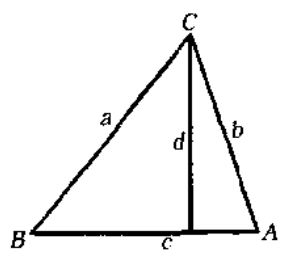
时则戴震(字东原，休宁人 1724～1777)十分好古，曾改同时输入之筹算(Napier's rod)为“策算”；乾隆二十年(1755 年)又取梅文鼎所著《三角法举要》、《堑堵测量》、《环中黍尺》三书，易以新名，饰以古义，作《勾股割圜记》三篇，凡三卷，称角为觚，称正弦为次内矩分，余弦为内矩分，正切为次矩分，余切为矩分，正割为次引数，余割为径引数，相似形为同限。而务为简奥，虽以焦循(字理堂，江都人，1763～1820)的好古，《释弧》卷上亦说戴氏变易旧名，恒不易了。故戴氏此种作法，在学术界影响至微。

五、三角形边角和较相求法的应用

古未有边角和较相求之例，自三角术输入，中算家乃知角度的应用。而说述此义最精的，当数罗士琳(字次璆号茗香，甘泉人 1789～1853)，项名达(一名万准，字步来，号梅侣，仁和人 1789～1850)。

罗士琳著《三角和较算例》一卷(1840 年)，其自序称：陈杰(字静菴，乌程人)因道光七年(1827 年)考取之算学生张某，曾设有一角及大小腰各与底边和一题，未知何自而来，特无常法可驭，乃损

书下询。士琳因为成此书，并以天元一术演算得九十六问。计第一例，已知$\angle A$；及$a+b,c+d$；$a-b,c+d$；$a+b,c-d$；$a-b,c-d$；$a+d,c+d$；$a+c,c+d$；$a+c,a+d$；$a-d,c-d$；求a,b,c,d八题。第二例，已知$\angle A$及$a+d,b+c$；$a-d,b+c$；$a+d,b-c$；$a-d,b-c$；$a+b,a+c$；$a+b,b+c$；$a+c,b+c$；$a-b,a-c$；求a,b,c,d八题。第三例，已知$\angle A$及$b+d,c+d$；$b+d,b+c$；$c+d,b+c$；$b-d,c-d$；$b+d,a+c$；$b+d,a-c$；$b-d,a+c$；$b-d,a-c$；求a,b,c,d八题。罗氏原书，有术无草。王鉴有《三角和较算例演草》一卷，也未印行，现录第一例第一题算例于下，以备考核。



第一例正余弦相加减为衍母。加为并，减为差，余弦大反减正弦，则衍母即为负差。[①]

第一例第一题。锐角衍母用并，钝角衍母用差。有一角，而角在两边之中，有大腰与底边和，有小腰与垂线和，求三边及垂线。士琳案：凡言大小腰者，即角旁之两边，亦名大边小边，其底边即对角之边，亦名对边。

第一术　求对边　术曰：衍母乘大和于上，半径乘小和于下，上下相减，衍母为负，差则相加。为初数。下位大，反减上位，则为负初数。正弦乘大和为次数，初次两数，各自乘，相并为正实。衍母

① 本篇凡补注用（…）号。

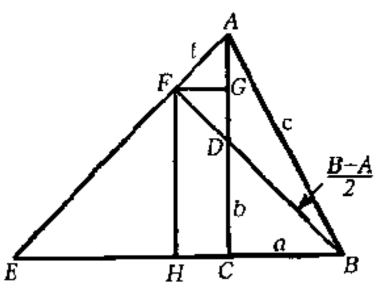
乘初数于上，正弦乘次数于下，上下相并，负初数则相减。倍之为负从。余弦与衍母相加减，锐角加，钝角减，如衍母为负差则相加。又以正弦乘之为正隅。衍母为负差，或余弦大，反减衍母，则为负隅。平方开之，得对边。

* * * *

陈杰称："项名达专意于平弧三角"，项氏所著《平三角和较术》（道光癸卯，1843 年自序），分平面三角形为勾股形，平三角两部。其勾股形第十七题称：

> 有勾股较($b-a$)，有弦和较($a+b-c$)，求两角(A,B)。
>
> 法以勾股较为一率，弦和较倍之为二率，半直角正弦为三率，求得四率为较。又以勾股较为一率，弦和较倍之为二率，半径为三率，求得四率，自乘，转加半径自乘之倍，开方得数，与较相加，为半较角余割，既得半较角，乃与半直角相加减，得两角。

如图 ABC 勾股形，作 $CE=AC$，作 $BF\perp AE$，及 FG，FH 两平行线。则



$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{B-A}{2}}{\sin\dfrac{90^\circ}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (a)$$

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}-\sin\frac{90^\circ}{2}}{\sin\frac{90^\circ}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (b)$$

因 $$\sin\frac{B-A}{2}=\frac{t}{c},\ \sin\frac{90^\circ}{2}=\frac{b-a}{2t},$$

得 $$c=\frac{b-a}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{B-A}{2}},$$

代入(b)得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{\sin\frac{90^\circ}{2}}{\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}(=S_1)} \quad \cdots \quad (c)$$

此即第一段所谓："以勾股较为一率，弦和较倍之为二率，半直角正弦为三率，求得四率为较(S_1)。"

由(c)得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{1(=r)}{\cot\frac{B-A}{2}\csc^2\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}(=T_1)},$$

此第二段所谓："以勾股较为一率，弦和较倍之为二率，半径($r=1$)为三率，求得四率(T_1)。"

$$\csc\frac{B-A}{2}=\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1。$$

然$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}$何故可以开方得数，和$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1$何以必等于$\csc\frac{B-A}{2}$？则

(i) 因 $2^2(a+b-c)^2=8(c-a)(c-b)=T^2=8xy$，

$$2\{(c-a)-(c-b)\}^2=2(c-a)^2+2(c-b)^2-4(c-a)(c-b)$$
$$=2(1)^2=2(x-y)^2$$

两式相加，　　　　$T^2+2(1)^2=2(x+y)^2$，

故 $\sqrt{T^2+2(1)^2}$ 可以开方得数。

(ii) $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}=$

$$=\sqrt{4\cot^2\frac{B-A}{2}+2\csc^2\frac{B-A}{2}-4\sqrt{2}\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{B-A}{2}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{2\cos^2\frac{B-A}{2}+1-2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{B-A}{2}+1-\cos^2\frac{B-A}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\sqrt{\left(\sqrt{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right)^2},$$

故 $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}=2\csc\frac{B-A}{2}-\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}$，

即 $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1=\csc\frac{B-A}{2}$。

故第三段谓："四率(T_1)自乘，转加半径($r=1$)自乘之倍，开方得数，与较(S_1)相加，为半较角余割。"

其平三角第五题称：

有一角(A)，有对边(a)，与余两边(b,c)之两较($b-a$,$c-a$)，求两角(B,C)。

法以两较边相加为一率，相减为二率，半角余切为三率，求得四率，为借角正切。

$$\left(\frac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D}\right)。$$

又以半径为一率，半角正弦倍之为二率，借角正弦为三

率，求得四率，为加减度正弦。

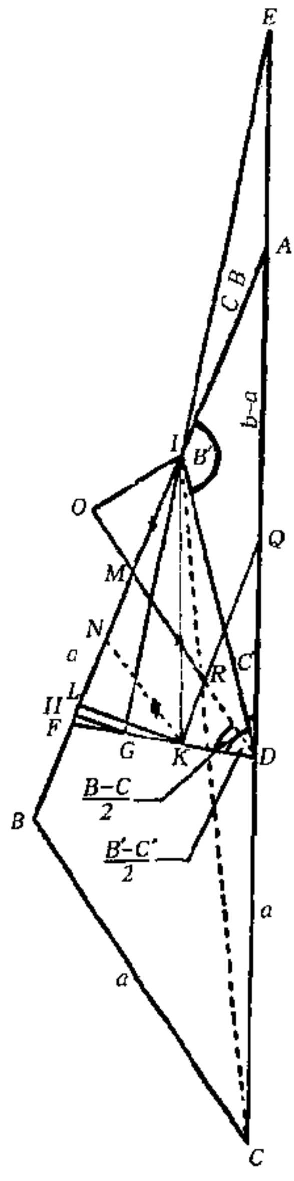
$$\left(\frac{1}{2\sin\dfrac{A}{2}}=\frac{\sin\dfrac{B'-C'}{2}}{\sin\left(\dfrac{B'-C'}{2}-\dfrac{B-C}{2}\right)}\right)。$$

减借角得半数角。

$$\left[\frac{B'-C'}{2}-\left(\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right)=\frac{B-C}{2}\right]。$$

乃以半较角，与半角余度相加减，得两角。

$$\left(B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}\right)。$$



如图原$\triangle ABC$之三边a,b,c所设$\triangle AID$有$\angle A,b-a,c-a$，由D作等腰$\triangle ADF$，又作BC之平行线DM，则

$$\angle MDF=\frac{B-C}{2};$$

因令 $\angle AID=\angle B',\angle ADI=\angle C'$，

而 $\angle B+\angle C=\angle B'+\angle C'$，

则 $\angle IDF=\dfrac{B'-C'}{2}$。

又自I作AD之平行IK，作DF之直垂IG。自G，自K作IB之直垂GH,KL。自K作BC之平行KN，又作AB之平行KQ与DM相遇于R。自I作DM延长线之直垂IO。

因 $IM=MR=NK$，

故 $\triangle IOM=\angle KLN,IO=KL$。

如图 $\dfrac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}$

$$=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D},$$

又 $IF=(b-a)-(c-a)=(b-c)$,

则 $IO=KL=2(b-c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$;

又 $$\angle IDO=\left(\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right),$$

故 $\sin\left(\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right)=\frac{2(b-c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{ID}$;

因 $$\frac{IG}{b-c}=\cos\frac{A}{2};IG=(b-c)\cos\frac{A}{2};$$

又 $$\frac{IG}{ID}=\sin\frac{B'-C'}{2},$$

$$ID=(b-c)\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{B'-C'}{2}},$$

故 $\sin\left(\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B'-C'}{2}$。证讫。

其第六题，称：

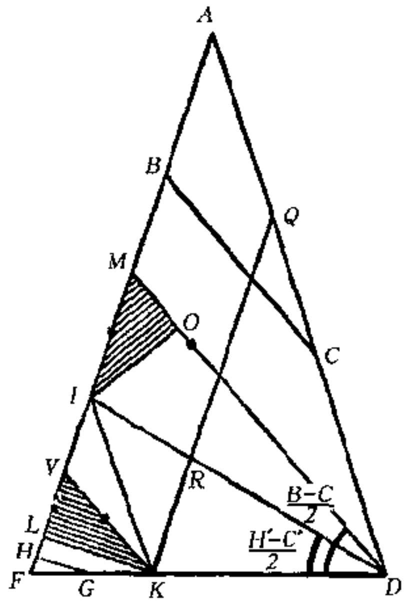
"有一角(A)，有对边(a)，与余两边(b,c)之两和($b+a,c+a$)，求两角(B,C)。"

如图并上例得 B,C。

$$\frac{(b+a)+(c+a)}{(b+a)-(c+a)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D},$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B'-C'}{2}}{\sin\left(\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right)},$$

$$\frac{B'-C'}{2}+\left(\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right)=\frac{B-C}{2}。$$



戴煦(字鄂士,钱塘人,1805～1860)作《求表捷术》三种,前有咸丰壬子(1852年)自序。其《外切密率》卷三,卷四,以几何法证:

本距弧$(45°-\alpha)$切线, $\tan(45°-\alpha)=\frac{r-\tan\alpha}{r+\tan\alpha}\div r$,

余距弧$(\alpha-45°)$切线, $\tan(\alpha-45°)=\frac{\tan\alpha-r}{\tan\alpha+r}\div r$,

半弧切线三率, $\frac{\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)^2}{r}=\frac{\sec\alpha-r}{\sec\alpha+r}\div r$,

本弧切线三率, $\frac{\tan^2\alpha}{r}=[(\sec\alpha+r)(\sec\alpha-r)]\div r$。

及 $\frac{2r^2-\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}=\frac{r}{\sec^2\alpha}$。

其《假数测圆》(1852年),又以几何法证:

$$\frac{\sec(90°-\alpha)}{2}:\sec(2\alpha-90°)=r:\sec\alpha。$$

$\sec(90°-\alpha):r=\sin 2\alpha:2\sin\alpha$。

此外陈杰《算法大成》上编(道光二十四年,1844年金望欣序)卷五,卷六论"平三角",吴嘉善(字子登,江西南丰人)著《平三角术》(1863年),梅启照(字小岩,南昌人)著《学强恕斋笔算》十卷(前有同治九年,1870年自序),其卷五,六,七论平三角,用平浅议论,尚便利初学。

六、平面三角术第二次输入中国

同治十二年(1873年)华蘅芳(字若汀,金匮人,1833～1902)与英傅兰雅(John Fryer,1839～?)共译英华里司《代数术》二十五卷;光绪三年(1877年)又共译英海麻士(John Hymers,1803～1877)《三角数理》十二卷,这是平面三角术第二次输入中国。

《代数术》卷二十四,卷二十五,第二一五款,至二八一款论八线数理。就中第二一五款说平弧三角术的历史,称:

> 八线之理,古时已有人知之,其理之根源,乃从平圆中所容之正方形,其两对角线所成之矩形,等于其两边所成之矩形之倍。此理始见于特里密(多禄某,Ptolemy,约87～165)之书,而为希腊国人解三角各理之本。近时(1551年)有里的里斯(Georg Joachim of Feldkirch in Tyrol, generally called Rhaeticus, 1514～1567)者,著一种论三角形之书;阿特(Valentine Otho,约1550～1605)在1596年续成而印行之。又毕的斯克斯(Pitiscus),1599年所印之书,亦有此论,则八线之由来,盖已久矣。

尝考满得剌(Montucla)所著《算学传》(*Histoire des Mathematiques*, 1ère ed, 1758)中,言1700年以前,尚未有考求弦切等线之式,惟因弦切各线,为算学家必用之数,爰有俄罗

斯京中博学会内之人，名美耶(?)者，其所印之书，初论此理。然观美耶之说，知其未曾读过毕的斯克斯之书，因毕的斯克斯所著之书，其第二卷，第八，与第九题，已有求两弧正余弦和校之法，此乃 1612 年所印之本也。

迨 1723 年，有卜奴里(Jean Bernoulli，1667～1748)者，著书论弧切线之和，其式俱以本弧之切线明之。以上二书，皆先于美耶之书，而美耶之书，乃于 1727 年间始印行；惟其书初以代数之法解三角，则为前所未有。

又有尤拉(Euler)者，于 1754～1755 年中，著书论八线之理，比前人更明；而弧三角之法，亦为尤拉于 1779 年所成之书，初以代数驭之。

1783 年，有第国华(?)者，亦著书论弧三角之理；又有法兰西人拉果兰诸(Lagrange，1736～1813)亦论之，至此时三角之法，盖已精矣。

同书于证普通三角公式外，又于第二五〇款以后，以归纳法证：

$$\cos nA=2^{n-1}\cos^n A-\frac{n}{1}\cdot 2^{n-3}\cos^{n-2}A+\frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}A-\cdots, \tag{1}$$

$$\frac{\sin nA}{\sin A}=2^{n-1}\cos^{n-1}A-\frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}A+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-5}A-\cdots, \tag{2}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos nA=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\cos^3 A+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 为奇数，(3)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n}\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\cos^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 A$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 为偶数， (4)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 A$$
$$+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4 A-\cdots\cdots,$$

而 n 为奇数， (5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\cos^3 A$$
$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 为偶数， (6)

$$\frac{\cos nA}{\cos A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 A+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 A$$
$$-\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 为奇数， (7)

$$\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 A$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 为偶数， (8)

$$\sin nA=\frac{n}{1}\sin A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 A$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 为奇数， (9)

$$\frac{\sin nA}{\cos A}=\frac{n}{1}\sin^3 A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 为偶数，　(10)

以前(1)、(2)、(8)、(9)四式是费依达(Vieta)所定。1701年卜奴里(Bernoulli)设为弧背的通弦式，和(2)式相同，当时无人证明。1702年卜奴里又设二式与(8)、(9)相同，惟(9)式牛顿(Newton)已早有其法，尤拉(Euler)曾辑(1)、(2)、(9)、(10)四式。拉果兰诸(Lagrange)书中，曾自称用他自己的算法，证各式为不误。1722年卜奴里有式，如：

$$\tan nA=\frac{\phi_1 t-\phi_3 t^3+\phi_5 t^5-\cdots}{1-\phi_2 t^2+\phi_4 t^4-\cdots},$$

而　$t=\tan A, \phi_1=\frac{n}{1}, \phi_2=\frac{n(n-1)}{2!}$,

$$\phi_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$\phi_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!},$$

$$\phi_5=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!};\qquad (11)$$

同书，举：$2^{n-1}\cos^n A=\cos nA+\frac{n}{1}\cos(n-2)A$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A-\cdots,\qquad (12)$$

惟其级数，必作一负号之弧为止。如 n 为偶数，则必取末项倍数之半，其末项者，弧等于 A 之项也。

若 n 为奇数，则

$$\pm 2^{n-1}\sin^n A=\sin nA-\frac{n}{1}\sin(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\sin(n-4)A$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin(n-6)A+\cdots \quad (13)$$

此式若 $n=4m+1$,则用正号;若 $n=4m+3$,则用负号。不然,则级数之末项,必为 $\sin A$ 之倍数。

若 n 为偶数,则

$$\mp 2^{n-1}\sin^n A=\cos nA-\frac{n}{1}\cdot\cos(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A+\cdots(14)$$

此式若 $n=4m+2$,则用负号;若 $n=4m$,则用正号。惟其级数必作至得一项能有 $\cos(oA)$即等于 1 之项,则其倍数,必以 2 约之。

《代数术》卷二十五,第二六一款,称:

前于开方各式中,曾论及有用虚式之根号 $\sqrt{-1}$者,此式在考八线数理中,实有大用处。…令 $i(=\sqrt{-1})$为一个泛数,现在未定,将来可定之数也,…。

证得:

$$\cos nA\pm i\sin nA=(\cos A\pm i\sin A)^n, i=\sqrt{-1}。$$

同书第二六二款,称:

前款之式,为算学士棣美弗(De Moivre)于 1730 年间,考平圆及双曲线之算式时所得,惟代数几何之书中,谓是欧拉(一作尤拉,Euler)所设之法。

由上式之和与较变之,则可得:

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i},$$

此两式，虽未能径为算学中之用，然依代数几何之法求之，即可得几何中最奥妙之理，其理极深。

同书第二六八，第二六九款，略称：

$$\cos A=1-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

此式为牛顿(Newton)初查得弧与弦相求之法，亦甚巧妙。

又因：e 为讷白尔(Napier)对数根。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

以　　$x=iA$ 及 $x=-iA$

分别代入简之，得：

$$\cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2},$$

$$\sin A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}。$$

此两式，当时拉果兰诸(Lagrange，1736～1813)以为最巧之法。惟观其求此两式之时，所用之正弦，余弦之级数，即为十七世纪奈端(即牛顿，Newton)所设之级数，如奈端当时多用一番心，则奈端已可知之，不必待五十年后尤拉(Euler)考出矣。

同书第二七〇、第二七一、第二七三各款，又介绍古累固里(Gregory)所设之式，即：

$$A=\tan A-\frac{1}{3}\tan^3A+\frac{1}{5}\tan^5A-\frac{1}{7}\tan^7A+\cdots\cdots,$$

古累固里考得此式，以与英国算学士高廉士(Collins，1625～1683)

(此 1671 年之事),又于 1675 年与来本之(Leibniz 1646～1716)言之。

同书算出:

$$\tan^{-1}1=\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(Euler)}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7},\qquad \text{(Hutton, Clausen)}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$=3\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{8}+3\tan^{-1}\frac{1}{9}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}+3\tan^{-1}\frac{1}{32};$$

以求平圆之周。又别设一解法,与二项式及虚数式无关,以求:

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}\tan\frac{1}{8}A+\cdots,$$

此式最简妙,为 1812 年华里斯(?)之书所载,其书初出时,咸以为新法。因此时英国之人,尚未知尤拉已有此法也。

同书第二七四、第二七五、第二七六各款,说明方程

$$x^{2n}-2x^{n}\cos n\theta+1=0,$$

可以因数分解之,称此为第摩爱之法,第摩爱似为棣美弗(De Moivre)的同名异译。

并称牛顿之友荀地斯(Cotes,1682～1716)对于上题引伸之法,乃平圆中最奇之法云。

同书第二八〇款示三角法与联立方程的关系,并解:

$$\left.\begin{aligned} wxyz&=a,\\ wz+xy&=b,\\ wy+xz&=c,\\ wx+yz&=d,\end{aligned}\right\}$$

得
$$w=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\tan\phi_2\tan\phi_3},$$
$$x=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\cot\phi_2\tan\phi_3},$$
$$y=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\tan\phi_2\cot\phi_3},$$
$$z=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\cot\phi_2\cot\phi_3},$$

而
$$\sin 2\phi_1=\frac{b}{2\sqrt{a}},$$
$$\sin 2\phi_2=\frac{c}{2\sqrt{a}},$$
$$\sin 2\phi_3=\frac{d}{2\sqrt{a}}。$$

最后又论平圆中内容十七等边形之法。其法本为哥斯(Gauss，1777～1855，著 *Disquisitiones arithmeticae*，1801 年)所设，《代数术》乃从勒禅德(Legendre)书中录出云。

《代数术》前引：

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i}$$

二式，今按二项式展开，简之又令 m 代 n，得：

$$\cos mA=\cos^m A\Big(1-\frac{m(m-1)}{2!}\tan^2 A$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\tan^4 A$$

$$-\cdots\cdots\Big] \tag{15}$$

$$\sin mA=\cos^m A\Big(m\tan A-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\tan^3 A$$

$$+\cdots\cdots\Big] \tag{16}$$

《三角数理》卷二,第一三四款,于上式。

因 $\cos^m A=(1-\sin^2 A)^{\frac{m}{2}}$于 $\cos mA$ 之级数内,将 $\cos^m A$ 并 $\cos A$ 之偶次自乘数,以 $\sin^2 A$ 为主,依二项式展开之,即

$$\cos mA=\cos^m A-\frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}A\sin^2 A$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4}A\sin^4 A$$

$$-\cdots\cdots \tag{15}$$

$$=1-\frac{m}{2}\sin^2 A+\frac{m(m-2)}{2\cdot 4}\sin^4 A$$

$$-\frac{m(m-2)(m-4)}{2\cdot 4\cdot 6}\sin^6 A+\cdots\cdots$$

$$-\frac{m(m-1)}{2!}\sin^2 A\Big[1-\frac{m-2}{2}\sin^2 A$$

$$+\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\Big]$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\sin^4 A\Big[1-\frac{m-4}{2}\sin^2 A$$

$$+\frac{(m-4)(m-6)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\Big],$$

即 $$\cos mA=1-\frac{m}{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)\sin^2 A$$

$$+\frac{m(m-2)}{1\cdot 3}\Big[\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot 4}\Big]\sin^4 A+\cdots\cdots。$$

因 $$\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}=\frac{m}{2},$$

$$\frac{3\cdot1}{2\cdot4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot4}=\frac{m(m+2)}{2\cdot4},$$

又因 $(1+x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}}=(1+x)^{\frac{m+n}{2}}$,

则
$$\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+2)}{2\cdot4\cdots2r}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+4)}{2\cdot4\cdots(2r-2)}\times\frac{n}{2}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+6)}{2\cdot4\cdots(2r-4)}\times\frac{n(n-2)}{2\cdot4}+\cdots=\frac{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+n-2r+2)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r},$$

故
$$\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 A-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots,$$

而 n 为偶数。 (8)

同理,可证明得《代数术》(7)、(9)、(10)各式,如以 $\frac{\pi}{2}-A$ 代(7)、(8)、(9)、(10)各式之(A),则可证得《代数术》(3)、(4)、(5)、(6)各式,因亦自成一系统。

其在中国,则董祐诚(字方立,阳湖人 1791~1823)《割圜连比例图解》三卷(1819 年),和项名达(1789~1850)遗著《象数一原》七卷,都论倍角的通弦和正矢①,而倍角的通弦式和上述(9)式完全相同,都在《代数学》,《三角数理》输入之前,是十分珍贵的。

后来关于三角术著述可记的,有左潜(?~1874)、曾纪鸿(1848~1877)、黄宗宪共撰之《圜率考真图解》一卷(1874 年),曾以几何法证 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$;李善兰所撰《弧矢启秘》有汪远

① 说详:李俨《明清算家的割圆术研究》,《科学杂志》第十二卷第十一期,1927 年 11 月,第 1487~1520 页;第十二卷第十二期,1927 年 12 月,第 1721~1766 页;第十三卷第一期,1928 年 1 月,第 53~102 页;第十三卷第二期,1928 年 2 月,第 200~250 页和本集第 254~484 页。

焜图解者，则以几何法证三角术各公式。

龚铭凤《算学答问》一卷（1897 年）以几何法证：

$$\operatorname{vers}\ (\alpha+\beta)=1-\cos\ (\alpha+\beta)$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2}{d}。^{①}$$

至解析罗士琳《三角和较算例》的有：王鉴，《三角和较算例演草》一卷，陈志坚（字思九，新阳人）《三角新理》三卷。解析项名达《三角和较术》者有：崔朝庆（字聘臣，南通人）释《勾股形边角相求法》（1891 年），胡炳文《勾股边角图说》一册（1898 年），吴和翱《勾股边角相求图解举隅》一卷（1898 年），周达《三角和较术解》四卷（1899 年），张毓瑗《平三角和较术图解》二卷（1902 年），石振埏《勾股形边角相求图解》一卷（1906 年）。就中陈志坚《三角新理》是以三角形一角和三边和较求三角形边角，和罗士琳以三角形一角和三边并中垂线求三边及中垂线，方法略有不同。

（三） 球面三角术的东来

七、球面三角术输入中国

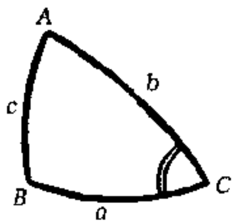
元郭守敬（1231～1316）首先论到球面割圆术。就中割浑圆即算球面三角法。至西洋的球面三角术和平面三角术，一同于崇祯辛未（1613 年）输入中国。徐光启和耶稣会士共修历书，崇祯辛未进《测量全义》十卷，其中第七卷论测曲线三角形，有：圆内九线相当法，圆球借论，分球上三角形之各类，球上斜三角形九种，球上三角

① 如令 $r=1, d=2$，可得 $\cos\ (\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

形相易之法，球上直角形各边角正弦等线之比例，球上直角相求约法，球上斜角形各边角正弦等线之比例，(球上)斜角形相求约法，各法。

其“《圆球(原本)》借论”，谓古德阿多西阿(Teodosius)撰，即 Teodosius 撰 *Sphærica*。

其“球上直角相求约法”谓：“球上直角三边形，有三角三边，此六者有三，可推其余，交互为三十求，各以乘法得之。”



$$\text{第一：有 } A,B \begin{cases} (1)\text{求 } a & 1:\sin B=\sec A:\sec a, \\ (2)\text{求 } b & 1:\sin A=\sec B:\sec b, \\ (3)\text{求 } c & 1:\tan B=\tan A:\sec c; \end{cases}$$

$$\text{第二：有 } B,a \begin{cases} (4)\text{求 } A & 1:\csc B=\sec a:\sec A, \\ (5)\text{求 } b & 1:\sin a=\tan B:\tan b, \\ (6)\text{求 } c & 1:\sec B=\tan a:\tan c; \end{cases}$$

$$\text{第三：有 } B,b \begin{cases} (7)\text{求 } A & 1:\sec b=\cos B:\sin A, \\ (8)\text{求 } a & 1:\tan b=\cot B:\sin a, \\ (9)\text{求 } c & 1:\sec B=\sin b:\sin c; \end{cases}$$

$$\text{第四：有 } B,c \begin{cases} (10)\text{求 } A & 1:\sec c=\cot B:\tan A, \\ (11)\text{求 } a & 1:\cos B=\tan c:\tan a, \\ (12)\text{求 } b & 1:\sin c=\sin B:\sin b; \end{cases}$$

$$\text{第五：有 } A,a \begin{cases} (13)\text{求 } B & 1:\sec a=\cos A:\sin B, \\ (14)\text{求 } b & 1:\tan b=\cot A:\sin b, \\ (15)\text{求 } c & 1:\csc A=\sin a:\sin c; \end{cases}$$

第六：有 A, b $\begin{cases} (16)\text{求 } B & 1 : \csc A = \sec b : \sec B, \\ (17)\text{求 } a & 1 : \sin b = \tan A : \tan a, \\ (18)\text{求 } c & 1 : \sec A = \tan b : \tan c; \end{cases}$

第七：有 A, c $\begin{cases} (19)\text{求 } B & 1 : \sec c = \cot A : \tan B, \\ (20)\text{求 } a & 1 : \sin c = \sin A : \sin a, \\ (21)\text{求 } b & 1 : \cos A = \tan c : \tan b; \end{cases}$

第八：有 a, b $\begin{cases} (22)\text{求 } B & 1 : \csc a = \tan b : \tan B, \\ (23)\text{求 } A & 1 : \csc b = \tan a : \tan A, \\ (24)\text{求 } c & 1 : \sec a = \sec b : \sec c; \end{cases}$

第九：有 a, c $\begin{cases} (25)\text{求 } B & 1 : \tan c = \cot a : \cos B, \\ (26)\text{求 } A & 1 : \csc c = \sin a : \sin A, \\ (27)\text{求 } b & 1 : \cos a = \sec c : \sec b; \end{cases}$

第十：有 b, c $\begin{cases} (28)\text{求 } B & 1 : \csc c = \sin b : \sin B, \\ (29)\text{求 } A & 1 : \tan c = \cot b : \cos A, \\ (30)\text{求 } a & 1 : \cos b = \sec c : \sec a。 \end{cases}$

其“球上斜角形各边角正弦等线之比例”和“(球上)斜角形相求约法”，则有下列各式：

正弦法则 $$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

余弦法则 $1^2 : \sin b \sin c = \operatorname{vers} A : [\operatorname{vers} a - \operatorname{vers}(c-b)]$，

或 $$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

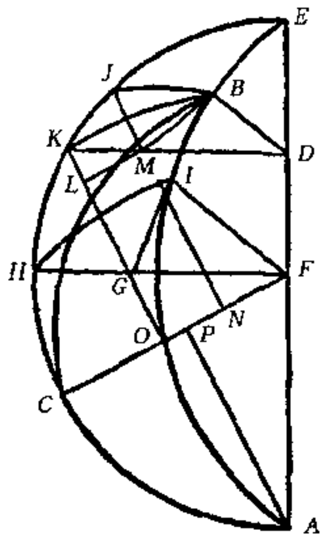
或 $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

或 $$\operatorname{vers} A = \frac{\operatorname{vers} a - \operatorname{vers}(c-b)}{\sin b \sin c},$$

或 $$\operatorname{vers} A = \frac{\operatorname{vers} a - \operatorname{vers}(c-b)}{\frac{1}{2}[\cos(c-b) \pm \cos(c+b)]}$$

其最后一式的分母，在《测量全义》第八卷“测球上大圜”，第九卷

“测星”、都称为“先得数”，其分子称为“后得数”。同书称如 $c+b<\frac{\pi}{2}$，用十号；$c+b>\frac{\pi}{2}$，用一号。而此正负号，颇引起后来中算家的争辩。《历象考成》(1723 年)称此为“总较法”。至《测量全义》，其原式的证法，则如图。



ABC 斜三角形，以 AB，AC 足成象限，遇于 E，各取其中点于 I 及 H，令 ABE 在斜面，ACE 在平面。又作 AK 弧 $=AB$ 弧，CJ 弧 $=BC$ 弧，作 KB 小圆。则 $R=HF=IF=AF=EF=CF$，$AP=\sin b$，$CP=\operatorname{vers} b$，$KD=\sin c$，$IG=\sin A$，$HG=\operatorname{vers} A$，$KO=\sin(c-b)$，$CO=\operatorname{vers}(c-b)$，$JN=\sin a$，$CN=\operatorname{vers} a$，$NO=CN-CO$，$LM=NO$。

因△，BMD，IGF 为相似，则

$$R:GF=BD:MD,$$

或 $$R:KD=HG:KM; \quad (1)$$

又因△，APF，KLM 为相似，则

$$AF:AP=KM:LM,$$

或 $$R:AP=KM:LM, \quad (2)$$

(1)×(2)得 $$1^2:\sin b\sin c=\operatorname{vers} A:\operatorname{vers} a-\operatorname{vers}(c-b)。$$

证讫。

到清朝薛凤祚从穆尼阁受对数和三角术，又称球面三角术为“圈线三角法”，其《三角算法》于正弧三角，将《测量全义》中第五、第六、第七、第十各并入第三、第二、第四、第九得十八法，都以对数入算。又列举德氏、讷氏比例式，半角之公式，和半弧之公式。

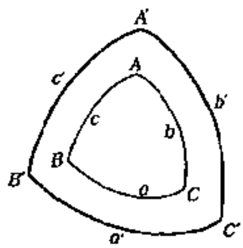
德氏比例式：
(Delambre's analogies)
$$\begin{cases}\tan\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\dfrac{C}{2},\\[2ex]\tan\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\dfrac{C}{2},\end{cases}$$

讷氏比例式：
(Napier's analogies)
$$\begin{cases}\tan\frac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\dfrac{c}{2},\\[2ex]\tan\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\dfrac{c}{2},\end{cases}$$

半角之公式： $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$,……

半弧之公式： $\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\sin C}}$,……

而
$$E=A+B+C-180°,$$
$$2s=a+b+c,$$
$$2S=A+B+C。$$



其最后一式之证法，则因原三角形 ABC 之三边为 a,b,c，其极三角形 $A'B'C'$ 之三边为 a'，b'，c'，则

$$a'+A=b'+B=c'+C=\pi,$$
$$a+A=b+B=c+C=\pi。$$

则
$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b')\sin(s-c')}{\sin b'\sin c'}}$$

或
$$\sin\left(\frac{180°-a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a'-b'+c'}{2}\right)\sin\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}{\sin b'\sin c'}},$$
$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180°-A+B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{180°-A-B+C}{2}\right)}{\sin(180°-B)\sin(180°-C)}}。$$

证讫。

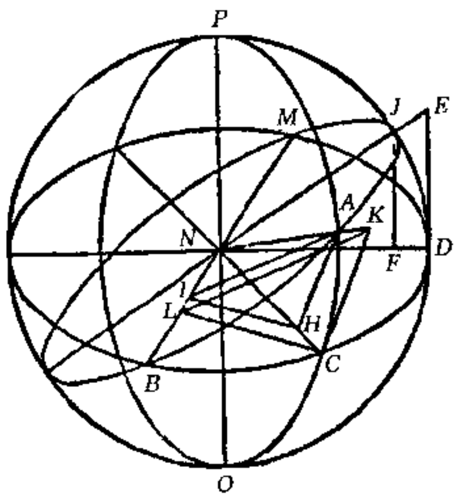
原书作图草率，又无几何证法，故以梅文鼎之善解西法，还不能了解，而叹为"残碑断碣，弧三角遂成秘密藏"①。

八、中算家的球面三角术研究(上)

球面三角术输入中国后，中算家的研究以梅文鼎为最热心。梅于康熙甲子(1684年)曾作《弧三角所成勾股书》，一册，以证(《崇祯历书》)正弧三角形相求之法。

因于《历书》原图加 ES，PS 二线，用以直接证

$$\left.\begin{aligned}\sin b&=\sin B\sin c\\ \sin a&=\sin A\sin c\end{aligned}\right\}\quad\text{和}\quad\left.\begin{aligned}\tan a&=\tan A\sin b\\ \tan b&=\tan B\sin a\end{aligned}\right\}。$$

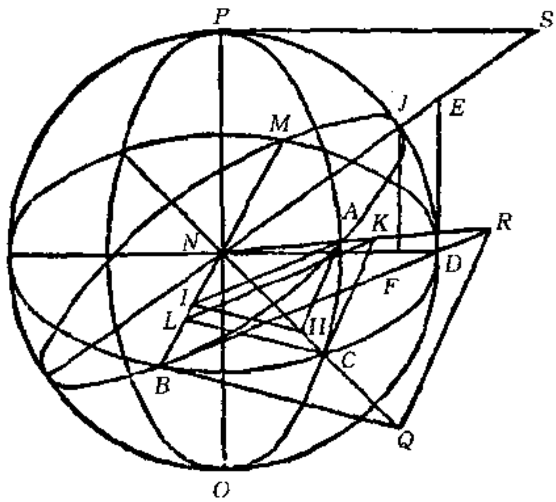


(1) 《历书》原图

又另作$\triangle BQR$ 以证

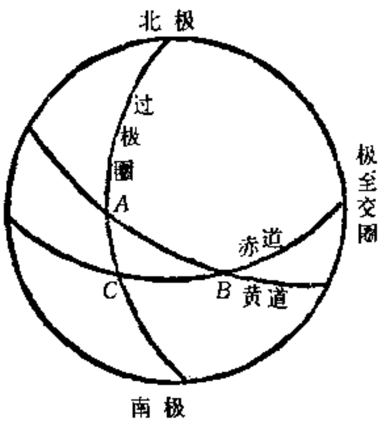
$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\cos B\tan c\\ \tan b&=\cos A\tan c\end{aligned}\right\}。$$

① 语见梅文鼎《勿庵历算书目》。

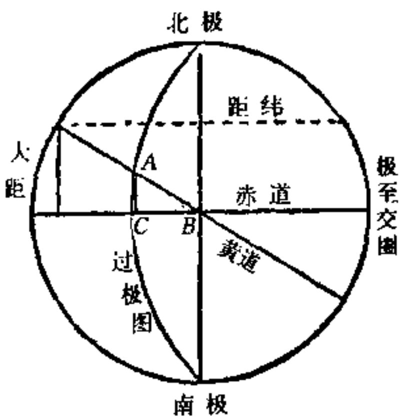


(2) 《梅氏》补图

说详《弧三角举要》(1684 年),由此基本三公式,可以化得相求三十法。梅氏又因郭守敬平视侧视诸图,即为球面三角形而设,因作正视,旁视二图:



(旁 视)



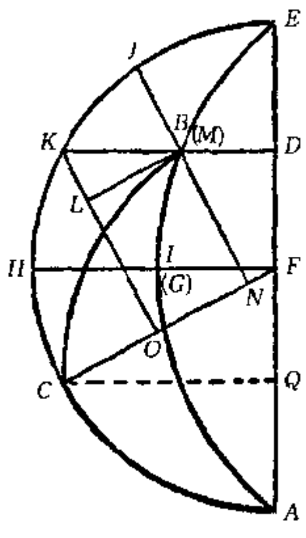
(正 视)

故梅文鼎《环中黍尺》(1700 年)卷一,证:

$$1^2 : \sin b \sin c = \operatorname{vers} A : \operatorname{vers} a - \operatorname{vers} (c-b)$$

作(*B*)图和《历书》略有不同。例如《历书》*HGFI*,*KMDB* 弧面形,

皆作平视成为 HIF,KBD 线。



(B)

故 $HI=\text{vers } A$, $IF=\cos A$,

$KD=\sin c$。

即 $1:KD=\text{vers } A:KB$。 (1)

又 $KO=\sin(c-b)$,

$BN=\sin a$,

$CO=\text{vers }(c-b)$,

$CN=\text{vers } a$。

则 $ON=CN-CO$

$=\text{vers } a-\text{vers }(c-b)$。

又 $CQ=\sin b$,$BL=ON$。

作 CQ 直垂于 AB,则△BLK,CFQ 为相似,故

$$CF:CQ=KB:BL,$$

即 $$1:\sin b=KB:BL \qquad (2)$$

(1)×(2)得 $1^2:\sin b\cdot\sin c=\text{vers } A:\text{vers } a=\text{vers }(c-b)$。

证讫。

其后又设数图,以证 a,b,c 边和 A 角或大或小,所生加减符号之差。又因

$$\sin b\sin c=\frac{\cos(c-b)\pm\cos(c+b)}{2},$$

《环中黍尺》卷五乃专论其加减之变。

《环中黍尺》卷二,论以量法代算弧三角,此即《历书》简平仪之说。

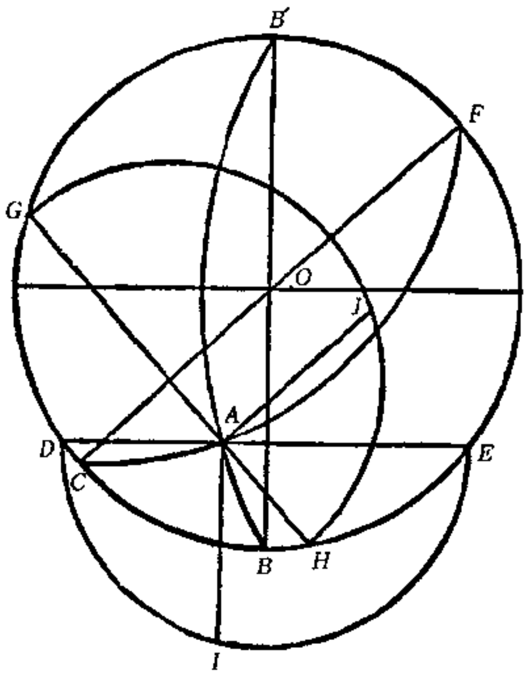
(1) $a=50^\circ$,$b=55^\circ$,$c=60^\circ$,求 B,C。

法先于 O 作圆,于圆界上量 $a=50^\circ=BC$,$b=55^\circ=BD$。作 DE

为 BO 之垂线，为球上小圆之平视，是称“等距圈”。

又自 C 通过 O，作 CF 径线。于大圆界上量 $C=60°=CG=CH$。联 GH 交 DE 于 A，则 A 为 b,c 之交点。

次求 B 角度：自 A 作直垂，与自 DE 为全径所作之平圆交于 I，则 DI 即 B 角度，量得 78°，算得 77°55′。



再次求 C 角度：自 A 作直垂，与自 GH 为全径所作之平圆交于 J，则 HJ 即 A 角度，量得 $67\frac{2}{3}°$，算得 67°39′。

(2) $a=100°, c=120°, \angle C=60°$，求 b。

法先于 O 作圆，于圆界上量 $a=100°=BC, C=120°=BD$。作 DE 为 BOB' 之垂线，为“等距圈”。

又自 C 通过 O，作 CF 径线。

次以 DE 为全径，作圆。于圆界上量 $\angle C=60°=DI$。

自 I 作直垂 IA 交 DE 于 A，则 A 为 b,c 之交点。

自 A 作 CO 之直垂 CH，则 CH 为 b 之度，量得 59°+，算得

59°7′。

(3) 有 $b,c,\angle B$ 求 a。

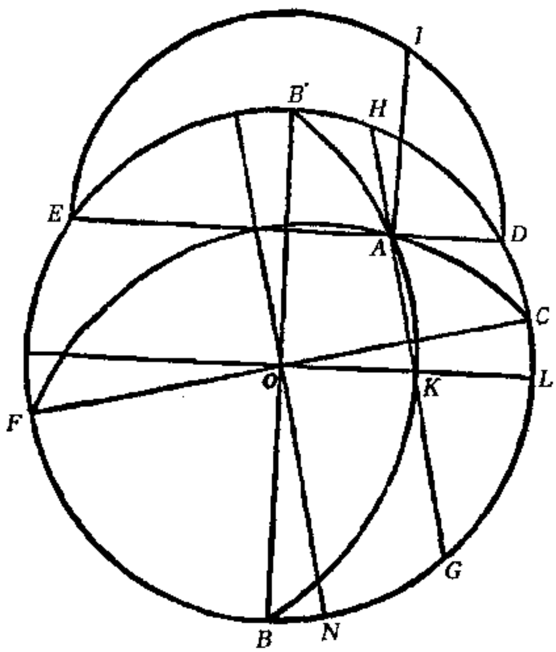
如前量 $c=BD$,作 DE。于 DE 作半圆。量 $b=DI$,作垂线交 DE 于 A。

次以 b 之通弦,即 GH 等距线,就 A 迁就游移,使 GH 切于外周及 A 线,半其弧得 HC 弧,即 b,量得 $a=BC$。

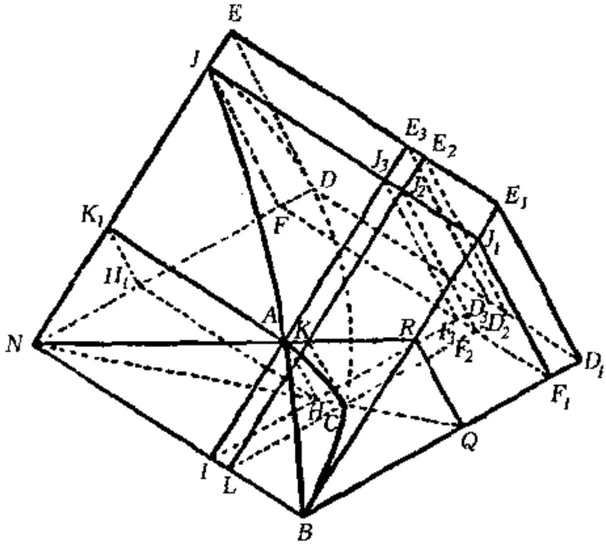
(4)有 B,C 角及 a 边。

如前量 $a=BC$,后又量 $\angle B=KL$,$\angle C=MN$;MC,BB' 弧相交于 A。其所得之 A 不甚准确。

梅文鼎又撰《堑堵测量》卷一"总论"称:



八线在平圆者,可以图明;在浑圆者,难以笔显,鼎尝深思其故,而见浑圆中诸线,犁然有合于古人堑堵之法。乃以坚楮肖之,为径寸之仪,而三弧三角各线所成之勾股,了了分明,…因名之曰《堑堵测量》,从其质也。



上列《堑堵测量》附图，可与《历书》及《弧三角举要》总图对照，便知。其中与勾股形 NED 平行之三勾股形，并全相等；每勾股形内各勾股形亦相等。

梅文鼎既于《弧三角举要》证：

$$\left.\begin{aligned}\sin b&=\sin B\sin c\\ \sin a&=\sin A\sin c\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\tan A\sin b\\ \tan b&=\tan B\sin a\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\cos B\tan c\\ \tan b&=\cos A\tan c\end{aligned}\right\}。$$

又复由《堑堵测量》证明之：

如图 1， $BJ_1 : BF_1 = BR : BQ$，

即 $1 : \cos B = \tan c : \tan a$，

可证 $$\left.\begin{aligned}\tan a&=\cos B\tan c\\ \tan b&=\cos A\tan c\end{aligned}\right\}。$$

如图 2， $LD_2 : E_2D_2 = LC : KC$，

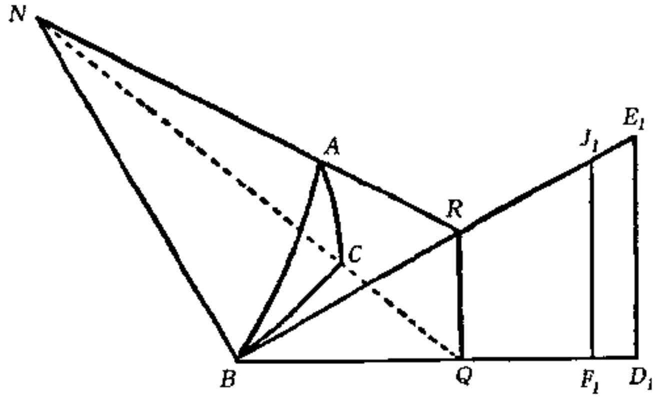


图 1. 第一层勾股比例图

即　　$1:\tan B=\sin a:\tan b$，

可证　　$\left.\begin{array}{l}\tan a=\tan A\sin b\\ \tan b=\tan B\sin a\end{array}\right\}$。

如图 3，　　$LJ_3:J_3F_3=LA:AH$，

即　　$1:\sin B=\sin c:\sin b$，

可证　　$\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\sin c\\ \sin a=\sin A\sin c\end{array}\right\}$。

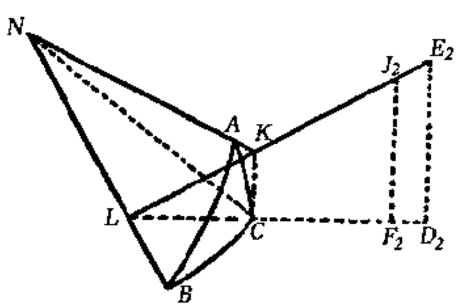


图 2. 第二层勾股比例图

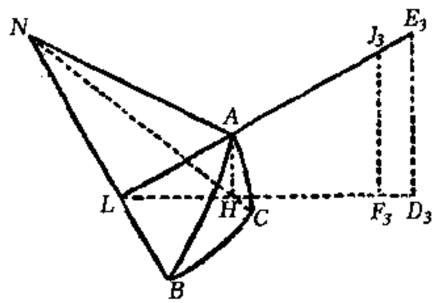
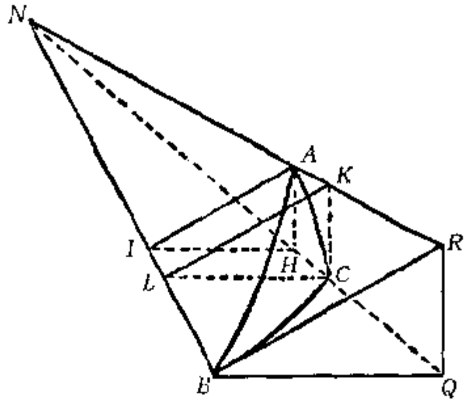
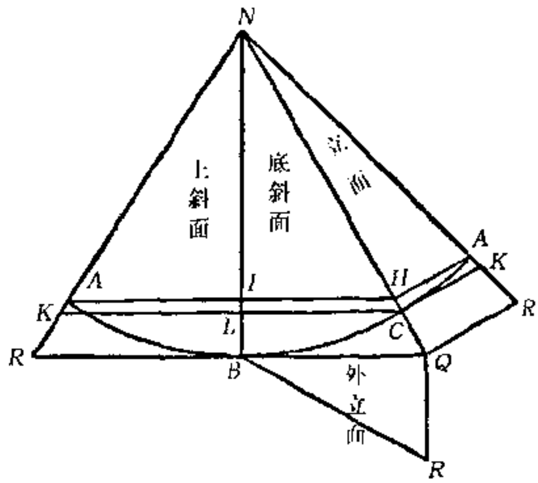


图 3. 第三层勾股比例图

《堑堵测量》卷二，谓：立勾股锥形 $N-BRQ$ 内容正弧三角形 ABC，其合形，展形如下图。而展形之四面各为勾股形。



(1) 合 形



(2) 展 形

梅文鼎为先了解三角术的人，后此作者如年希尧(字允恭，广宁人)《三角法摘要》一卷(1718年)，江永(字慎修，婺源人 1682～1762)《正弧三角疏义》、《正弧三角会通》，《历象考成》上编，卷二卷三内，弧三角上下(1723年刻)，明安图《割圜密率捷法卷》二内，弧线三角形边角相求(1736～1774)，戴震《勾股割圜记》三卷(1755年)，都照梅氏之说。就中《历象考成》所论深具条理，而《勾股割圜记》于余弦折半中数内加减符号，亦发折衷之论，可是于薛风祚所

受诸式，尚未论及。

雍正元年(1723 年)刻《历象考成》，其卷二，卷三论弧三角形，其目如下：

卷二

弧三角形上

弧三角形总论

弧三角形纲领

弧三角形凡例

正弧三角形论

正弧三角形八线勾股比例图说

正弧三角形用次形图说

正弧三角形边角相求法

正弧三角形设例七则

卷三

弧三角形下

斜弧三角形论

斜弧三角形边角比例法

斜弧三角形作垂弧法

斜弧三角形用总较法，次形法附。

斜弧三角形较例八则。

凌廷堪《校礼堂集》内《(戴震)东原先生事略状》论平面三角形之三角函数和与积之关系

$$\sin b \sin c=\frac{\cos(c-b)\pm\cos(c+b)}{2}$$

称：

用余弦折半为中数，则过象限与不过象限有相加相减之

殊，犹未为甚捷也。（戴震）先生则谓用余弦者或加或减，易生歧惑，乃立新术，用总较两弧之矢相较折半为中数，则一例用减，更简而捷矣。盖余弦者矢之余也。八线法：弧小则余弦大，弧大则余弦小；弧若大过象限九十度，则余弦反由小而渐大。唯矢不然，弧小则矢小，弧大则矢大；弧若大过象限九十度，则矢更随之而大。是矢与弧大小相应，不似余弦之参差，故以易之。

焦循《释弧》(1795～1798)亦言：

余弦之所以加所以减，皆由两矢端之故，则与其用余弦而多一加减之繁。何如直用两矢端之为捷。故（戴震）东原氏之例曰：以左右两距，相并为和度，相减为较度，即总弧存弧和度较度之矢，相减半之为矢半较，东原氏之术，视（梅文鼎）勿庵为约矣。

九、中算家的球面三角术研究（下）

第二期之研究球面三角术的，有梅瑴成(1681～1763)、汪莱(1768～1813)、焦循(1763～1820)、安清翘(1759～1830)、张作楠(1772～?)、董祐诚(1791～1823)、项名达(1789～1850)、陈杰、李善兰(1811～1882)、顾观光(1799～1862)、陈澧(1810～1882)、徐有壬(1800～1860)、梅启照、吴嘉善诸人。

梅瑴成《梅氏丛书辑要》(1761年)卷六十一《赤水遗珍》第四条“弧三角形三边求角，用开平方得半角正弦法解”注称：“友人见示，云西士所授，而不知其用法之故，特为解之。”

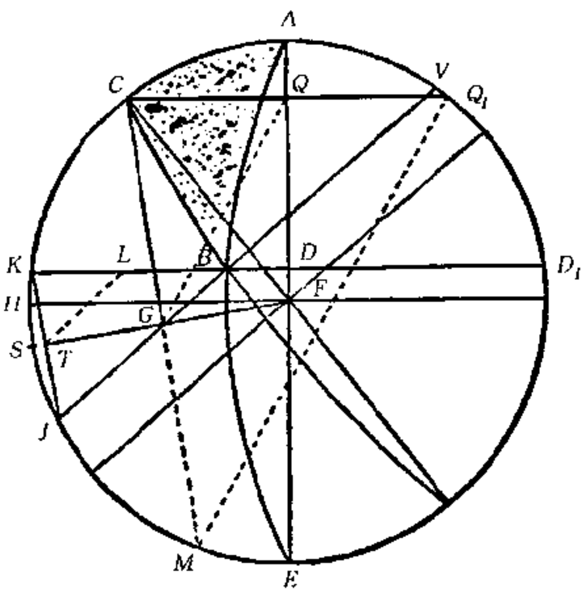
$$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{x},\quad \frac{\sin c}{x}=\frac{1}{y},\quad y^{\frac{1}{2}}=\sin\frac{A}{2}。$$

即
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}。$$

这是《天学会通》本《三角算法》求圈线钝角第五术，有三边算三角术，梅瑴成曾按其祖《环中黍尺》，将 $\sin b$，$\sin c$，$\sin(s-b)$，$\sin(s-c)$绘于图上，如图 ABC 三角形，KJ 弧折半于 S。

$QC=\sin b$，$CG=\sin(s-b)$，$KT=\sin(s-c)$，$DK=\sin c$。

（补证） 先证$\triangle_s QCG$，TKL 为相似。先引长 CG 遇圆界于 M，连 MQ_1。因 $CQ=QQ_1$，$CG=GM$。则$\triangle_s QCG$，Q_1CM 为相似。又自 T 作 TL，平行于 BJ，平分 BK 于 L。则$\triangle_s TKL$，JKB 为相似。而在$\triangle_s Q_1CM$，JKB，有$\angle Q_1CM=\angle BKJ$。又$\triangle_s CQ_1M$，KJV 同对 $2(s-b)$弧。



(A) 图

故$\triangle_s QCG$，TKL 为相似。证讫[1]。

梅瑴成称：
$$\frac{QC}{CG}=\frac{KT}{KL},$$

---

[1] 原书证法不完，另加补证比较明了。

即
$$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{KL}。$$

又因
$$KL=\frac{BK}{2},$$

故
$$\frac{DK}{KL}=\frac{HF}{\frac{HI}{2}},$$

即
$$\frac{\sin c}{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\frac{\operatorname{vers} A}{2}},$$

或
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}。$$

汪莱《衡斋算学》第一册(1796年)、第四册(1799年)论弧三角形中"知不知条目"、"有无定限条目",都是前人所未论的。

董祐诚《斜弧三边求角补术》(1821年),以几何法证

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}。$$

如图 $s=ACS$ 弧,$s-b=\frac{KAV}{2}$弧,$s-c=KHS$ 弧,

又
$$HI=\operatorname{vers} A,\ KD=\sin c。$$

于 $\triangle BKJ$ 上,因 $\angle KJV=\angle(s-b)$,$KJ=2\sin(s-c)$。

又因
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

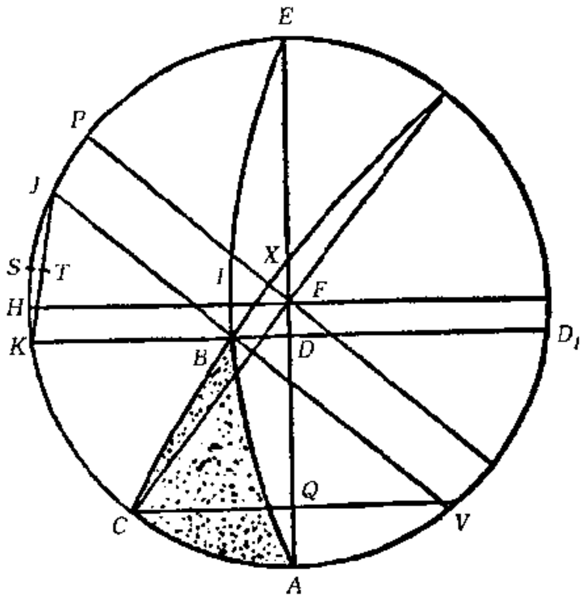
的关系,

故
$$\frac{\sin KBJ}{KJ}=\frac{\sin KJB}{KB},$$

而
$$\sin KBJ=\sin HFP=\sin AFC=\sin b,$$

得
$$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(s-b)}{KB};$$

又因
$$\frac{KD}{KB}=\frac{HF}{HI},$$



(B) 图

得
$$\frac{\sin C}{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\frac{\text{vers } A}{2}},$$

而
$$\frac{\text{vers } A}{2}=\sin^2\frac{A}{2}。$$

故
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}。证讫。$$

董祐诚又补证"求对大边之又一角",

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}。$$

公式如下:

如图:
$$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(180°-s)}{JB},$$

及
$$\frac{JN(=\sin a)}{JB}=\frac{1}{\frac{\text{vers}(180°-c)}{2}},$$

则
$$\frac{\sin a\cdot\sin b}{\sin s\cdot\sin(s-c)}=\frac{1}{\frac{\operatorname{vers}(180^\circ-c)}{2}},$$

即
$$\cos\frac{c}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}\text{证讫。}$$

张作楠(字云樵,全椒人)撰《弧角设如》三卷(1822年)称:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

可由 $1:\sin b\cdot\sin c=\operatorname{vers}A:\operatorname{vers}a-\operatorname{vers}(c-b)$,用代数法化得。

项名达《弧三角和较术》(1843年)论"斜弧三角"二十式,并应用讷氏比例式,以为算例。

徐有壬《弧三角拾遗》于讷氏比例式、(正弦)半角公式(见薛凤祚《三角算法》)、(余弦)半角公式(见董祐诚《斜弧三边求角补术》)外,又设以下正弦、余弦半弧公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cdot\cos(S-B)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}$$

而 $$S=\frac{1}{2}(A+B+C)。$$

外此则焦循祖述戴震之说，而安清翘、陈杰、顾观光、陈澧、梅启照、吴嘉善又好为平浅之论。陈杰、李善兰、顾观光虽并有志证明讷氏比例式，而设论尚有缺点。

十、球面三角术第二次输入中国

华蘅芳从英傅兰雅译英海麻士(John Hymers 1803～1877)《三角数理》，其卷九至十二论弧三角，谢洪赉从美潘慎文译美罗密士《八线备旨》(1894 年印)，其卷四论弧三角，同文馆欧礼斐编《弧三角阐微》五册，都是第二次输入的球面三角术。

(四)　三角函数表的东来

十一、三角函数表输入中国

古代三角函数表首先于开元六年(公元 718 年)由瞿昙悉达于所译《九执历》(见《开元占经》)内输入中国①，通晓的人甚少。

元郭守敬有三角函数表又不完全，又以乘方取度，所得不精。到明末耶稣会士始输入三角函数表。明崇祯四年(1631 年)正月二十八日呈进《割圜八线表》六卷，和《测量全义》十卷，就中：

(1)测圜八线小表

在《测量全义》卷三之内，是正弦、切线、割线和其余线的函数表，小数四位，每十五分有数，如表 1。

① 参看李俨《中国古代数学史料》第 174～177 页，1954，上海(＊见本书第三卷第 245～248 页。　　编者)。

表 1

度	分	正　弦(sin)	切　线(tan)	割　线(sec)
0°	0′	--	——	——
	15′	.0043	.0043	1.0000
	30′	.0087	.0087	1.0000
	45′	.0130	.0130	1.0001
1°	0′	.0174	.0174	1.0001
	15′	.0218	.0218	1.0002
	30′	.0261	.0262	1.0003
	45′	.0305	.0305	1.0005
2°	0′	.0349	.0349	1.0006
	15′	.0392	.0393	1.0007
	30′	.0436	.0437	1.0009
	45′	.0480	.0480	1.0011
3°	0′	.0523	.0524	1.0013
	15′	.0567	.0568	1.0016
	30′	.0610	.0612	1.0018
	45′	.0654	.0655	1.0021
4°	0′	.0697	.0699	1.0024
	15′	.0741	.0743	1.0027
	30′	.0784	.0787	1.0030
	45′	.0828	.0831	1.0034
5°	0′	.0871	.0875	1.0038

(2)《割圜八线表》

是为半象限的三角函数表，小数五位，每分有数，秒以下以比例算得。其次序先正弦线，次正切线，次正割线，次余弦，次余切线，次余割线，如表 2。

表 2

0°	正 弦 (sin)	正切线 (tan)	正割线 (sec)	余 弦 (cos)	余切线 (cot)	余割线 (csc)	
0′	.00000	.00000	1.00000	1.00000	0000.00000	0000.00000	60′
1′	.00029	.00029	1.00000	.99999	3437.74667	3437.74682	59′
2′	.00058	.00058	1.00000	.99999	1718.87319	1718.87348	58′
3′	.00087	.00087	1.00000	.99999	1145.91530	1145.91574	57′
4′	.00116	.00116	1.00000	.99999	859.43630	859.43689	56′
5′	.00145	.00145	1.00000	.99999	687.54887	687.54960	55′
6′	.00175	.00175	1.00000	.99999	572.95721	572.95809	54′
7′	.00204	.00204	1.00000	.99999	491.10600	491.10702	53′
8′	.00233	.00233	1.00000	.99999	429.71757	429.71873	52′
9′	.00262	.00262	1.00000	.99999	381.97099	381.97230	51′
10′	.00291	.00291	1.00000	.99999	343.77371	343.77516	50′
11′	.00320	.00320	1.00001	.99999	312.52137	312.52297	49′
12′	.00349	0.00349	1.00001	.99999	286.47773	286.47948	48′
13′	.00378	.00378	1.00001	.99999	264.44080	264.44269	47′
14′	.00407	.00407	1.00001	.99999	245.55198	245.55402	46′
15′	.00436	.00436	1.00001	.99999	229.18166	229.18385	45′
16′	.00465	.00465	1.00001	.99999	214.85762	214.85995	44′
17′	.00494	.00494	1.00001	.99999	202.21875	202.22122	43′
18′	.00524	.00524	1.00001	.99999	190.98419	190.98680	42′
19′	.00553	.00553	1.00002	.99998	180.93220	180.93496	41′
20′	.00582	.00582	1.00002	.99998	171.88540	171.88831	40′
21′	.00611	.00611	1.00002	.99998	163.70019	163.70325	39′
22′	.00640	.00640	1.00002	.99998	156.25908	156.26228	38′
23′	.00669	.00669	1.00002	.99998	149.46502	149.46837	37′
24′	.00698	.00698	1.00002	.99998	143.23712	143.24061	36′
25′	.00727	.00727	1.00003	.99997	137.50745	137.51108	35′
26′	.00756	.00756	1.00003	.99997	133.21851	133.22229	34′
27′	.00785	.00785	1.00003	.99997	127.32134	127.32526	33′
28′	.00815	.00815	1.00003	.99997	122.77396	122.77803	32′
29′	.00844	.00844	1.00003	.99996	118.54018	118.54440	31′
30′	.00873	.00873	1.00003	.99996	114.58865	114.59301	30′
	(cos)	(cot)	(csc)	(sin)	(tan)	(sec)	89°

此外还有：

（3）《割圜八线立成长表》，四卷，徐光启撰，《崇祯历书》本。

（4）《割圜勾股八线表》，附《代勾股开方法》一卷；汤若望撰，《西洋新法历书》本。

顺治时薛凤祚从西士穆尼阁受对数术，1653 年有《比例对数表》之作。清梅文鼎《勿庵历算书目》称："薛仪甫又有《四线新比例》，用四线（即正弦，余弦，切线，余切线）同，惟度析百分。从古率也。穆有《天步真原》，薛有《天学会通》并依此立算。"所谓《四线新比例》当即

（5）《比例四线新表》，一卷，薛凤祚、穆尼阁同译，《历学会通》本。

表 3

度	分	秒	正　弦(sin)	余　弦(cos)	切　线(tan)	余切线(cot)		
0°	0′	0″	0	10.0000000000	0		0″	60″
		10″	5.6855748565	9.9999999995	5.6855748670	14.3144251330	50″	
		20″	5.9866048617	9.9999999980	5.9865048637	14.0133951363	40″	
		30″	6.1626961198	9.9999999954	6.1625961244	13.8373038756	30″	
		40″	6.2876348554	9.9999999918	6.2876348636	13.7123651364	20″	
		50″	6.3845448673	9.9999999872	6.3845448801	13.6154551199	10″	
	1′	0″	6.4637261109	9.9999999786	6.4637261293	13.5362738707	0″	59″
		10″	6.5306728985	9.9999999750	6.5306729235	13.4693270765	50″	
		20″	6.5886648429	9.9999999673	6.5886648756	13.4113351244	40″	
		30″	6.6398173623	9.9999999568	6.6398174037	13.3601825963	30″	
		40″	6.6855748502	9.9999999489	6.6855749013	13.3144250987	20″	
		50″	6.7269675316	9.9999999382	6.7269675934	13.2730324066	10″	
	2′	0″	6.7647560882	9.9999999265	6.7947561617	13.2352438383	0″	58″
		10″	6.7995181904	9.9999999137	6.7995182767	13.2004817233	50″	
		20″	6.8317028692	9.9999998899	6.8317029693	13.1682970307	40″	
		30″	5.8616660875	9.9999998851	6.8616662024	13.1383337976	30″	
		40″	6.8896948059	9.9999998693	6.8896949366	13.1103050634	20″	
		50″	6.9163207389	9.9999998525	6.9160238864	13.0838761136	10″	
	3′	0″	6.9408473166	9.9999998346	6.9408474820	13.0591525180	0″	57″
			(cos)	(sin)	(cot)	(tan)		

李俨所见《历学会通》尚非全帙，惟据薛、穆《三角算法》所述，知此表小数六位，度以下析为百分，每分有数。

裘冲曼藏：

(6)《四线对数表》，一册，弦切四线，小数十位，明末清初套印本。此书疑稍后于《比例四线新表》。如表 3。

《数理精蕴》(1722 年)刻表较详，在前则有李子金、年希尧、陈订的著作。

(7)《天弧象限表》

为李子金于康熙癸亥(1683 年)所制。表 97 页，只设正余弦二线，由 0 度至 45 度，度析百分，小数五位，每十分有数。如表 4。

表 4

		正 弦(sin)	余 弦(cos)		
0°	0′	.00000	1.00000	90°	0′
	10′	.00175	.99999		90′
	20′	.00349	.99999		80′
	30′	.00524	.99999		70′
	40′	.00698	.99998		60′
	50′	.00873	.99996		50′
	60′	.01047	.99995		40′
	70′	.01222	.99993		30′
	80′	.01396	.99990		20′
	90′	.01571	.99988		10′
1°	0′	.01745	.99985	89°	0′
	10′	.01920	.99982		90′
	20′	.02094	.99978		80′
	30′	.02269	.99974		70′
	40′	.02443	.99970		60′
	50′	.02618	.99966		50′
	60′	.02792	.99961		40′
	70′	.02967	.99956		30′
	80′	.03141	.99951		20′
	90′	.03316	.99945		10′
2°	0′	.03490	.99939	88°	0′
		余 弦(cos)	正 弦(sin)		

年希尧编有：

(8)《八线真数表》，一卷

(9)《八线假数表》，一卷

其《八线真数表》一卷，年希尧校，计分"正弦、余弦真数表"、"切线真数表"二种，康熙戊戌(1718年)自序。度析为六十分，小数七位，每分有数。《八线假数表》一卷，年希尧校，计分"正弦、余弦假数表"、"切线假数表"二种，康熙戊戌(1718年)自序。度析为六十分，小数七位，每分有数。按《数理精蕴》康熙壬寅(1722年)告成，翌年始刻行，见《东华录》"雍正三"，《东华续录》"乾隆一四"。年氏二表之成，实不出于《数理精蕴》。

又有

(10)《对数广运》，一卷

相传亦年希尧撰。此书于对数表之外，有正弦假数表、切线假数表、割线假数表、正弦真数表、切线真数表、割线真数表等数种。此项小表，小数并为五位，其正弦假数表，即正弦对数表，如表5。

又有袖珍本(13厘米×21厘米)旧木刻本，朱墨套印，

(11)《数表》一卷

上半1～50页为1—10000之五位对数表，下半1～90页为0°—45°的正弦、切线、假数表和正弦、切线、割线真数表，疑为年希尧同时刻物，其下半第1页如表6。

陈讦于《勾股引蒙》(1722年)之内，附有

(12)《三角割圜八线小表》

即《测量全义》之《割圜八线小表》，亦在《数理精蕴》之前。

清康熙癸巳(1713年)始编《律吕算法》等书(见《东华续录》"乾隆一四")，康熙甲午(1714年)始拟以《律吕》、《历法》、《算法》三书共为一部，名《律历渊源》(见《东华录》"康熙九四")。康熙壬寅

表 5

正弦(sin)		假数	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0′	—	6.46373	6.76476	6.94085	7.06579	7.16270	7.24188	7.30882	7.36682	7.41797
	10′	7.46373	7.50512	7.54291	7.57767	7.60985	7.63982	7.66784	7.69417	7.71900	7.74248
	20′	7.76475	7.78594	7.80615	7.82545	7.84393	7.86166	7.87870	7.89509	7.91088	7.92612
	30′	7.94084	7.95508	7.96887	7.98223	7.99520	8.00779	8.02002	8.03192	8.04350	8.05478
	40′	8.06578	8.07650	8.08696	8.09718	8.10717	8.11693	8.12647	8.13581	8.14495	8.15390
	50′	8.16268	8.17128	8.17971	8.18798	8.19610	8.20407	8.21189	8.21958	8.22713	8.23456
89°	0′	9.99993	………4	………4	………4	………4	………4	………5	………5	………5	………5
	10′	9.99995	………6	………6	………6	………6	………6	………6	………7	………7	………7
	20′	9.99997	………7	………7	………7	………8	………8	………8	………8	………8	………8
	30′	9.99978	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9	………9
	40′	9.99999									
	50′	9.99999									
1°	0′	8.24186	8.24903	8.25609	8.26304	8.26988	8.27661	8.28324	8.28977	8.29621	8.30255
	10′	8.30879	8.31495	8.32103	8.32702	8.33292	8.33875	8.34450	8.35018	8.35578	8.36132
	20′	8.36678	8.37217	8.37750	8.38276	8.38796	8.39310	8.39818	8.40320	8.40816	8.41307
	30′	8.41792	8.42272	8.42746	8.43216	8.43680	8.44139	8.44594	8.45044	8.45489	8.45930
	40′	8.46366	8.46799	8.47226	8.47650	8.48069	8.48485	8.48896	8.49304	8.49708	8.50108
	50′	8.50504	8.50897	8.51287	8.51673	8.52055	8.52434	8.52810	8.53183	8.53552	8.53919

表 6

0°	(sin)	(tan) 假数	(sin)	(tan)	(sec) 真数
0′	—		0.00000	0.00000	1.00000
1′	6.46373	6.46373	0.00029	0.00029	1.00000
2′	6.76476	6.76476	0.00058	0.00058	1.00000
3′	6.94085	6.94085	0.00087	0.00087	1.00000
4′	7.06579	7.06579	0.00116	0.00116	1.00000
5′	7.16270	7.16270	0.00145	0.00145	1.00000
6′	7.24188	7.24188	0.00175	0.00175	1.00000
7′	7.30882	7.30882	0.00204	0.00204	1.00000
8′	7.36682	7.36682	0.00233	0.00233	1.00000
9′	7.41797	7.41797	0.00262	0.00262	1.00000
10′	7.46373	7.46373	0.00291	0.00291	1.00000
11′	7.50512	7.50512	0.00320	0.00320	1.00001
12′	7.54291	7.54291	0.00349	0.00349	1.00001
13′	7.57767	7.57767	0.00378	0.00378	1.00001
14′	7.60985	7.60985	0.00407	0.00407	1.00001
15′	7.63982	7.63982	0.00436	0.00436	1.00001
16′	7.66784	7.66784	0.00465	0.00465	1.00001
17′	7.69417	7.69417	0.00495	0.00495	1.00001
18′	7.71900	7.71900	0.00524	0.00524	1.00001
19′	7.74248	7.74248	0.00553	0.00553	1.00002
20′	7.76475	7.76476	0.00582	0.00582	1.00002
21′	7.78594	7.78595	0.00611	0.00611	1.00002
22′	7.80615	7.80615	0.00640	0.00640	1.00002
23′	7.82545	7.82546	0.00669	0.00669	1.00002
24′	7.84393	7.84394	0.00698	0.00698	1.00002
25′	7.86166	7.86167	0.00727	0.00727	1.00003
26′	7.87870	7.87871	0.00756	0.00756	1.00003
27′	7.89509	7.89510	0.00785	0.00785	1.00003
28′	7.91088	7.91089	0.00814	0.00815	1.00003
29′	7.92612	7.92613	0.00844	0.00844	1.00004
30′	7.94084	7.94086	0.00873	0.00873	1.00004

(1722年)六月《数理精蕴》、《历象考成》皆告成(见《东华续录》"乾隆一四")。雍正癸卯(1723年)冬十月《律历渊源》一百卷刻成。分三部,一为《历象考成》,一为《律吕正义》,一为《数理精蕴》,清世宗制序(见《东华录》"雍正三")。《数理精蕴》有:

(13)《八线表》上下卷

(14)《八线对数表》上下卷

《八线表》上下卷,见《数理精蕴》卷一,卷二,由0°至45°,小数七位,度析为六十分,分析为六十秒,每十秒有数。并补正割,余割二线,如表7。

《八线对数表》上下卷,见《数理精蕴》卷七,卷八,由0°至45°,小数十位,度析为六十分,分析为六十秒,每十秒有数,并补正割,余割二线。如表8。

稍后则有:

(15)《八线表》上下

《八线表》上下,屈曾发撰,附《数学精详》(1772年)卷十一之后,仅记一度至九十度,小数七位之八线表。

安清翘以一周为百度,度为十分,为前此所未有,计有:

(16)《一线表》

(17)《切线表》

二种。《一线表》在《学算存略》卷三"勾股算略"之内,又在《一线表用法》(1817年)卷一"一线表"之内,安清翘撰《数学五书》本。小数五位,一周为百度,半象限为12½度,度析为十分,每分有数,如表9。

《切线表》在《学算存略》卷三"勾股算略"之内,安清翘撰《数学五书》本,小数五位,一周为百度,半象限为12½度,度析为十分,每分有数,如表10。

表 7

0°度		正 弦 sin	正切线 tan	正割线 sec	余 弦 cos	余切线 cot	余割线 csc		
0′	0″	.0000000	.0000000	1.0000000	1.0000000	…………	…………	60′	0″
	10″	.0000485	.0000485	1.0000000	0.9999999	20618.5567020	20618.5576263		50″
	20″	.0000970	.0000970	1.0000000	0.9999999	10309.2773196	10309.2773681		40″
	30″	.0001454	.0001454	1.0000000	0.9999999	6877.5784044	6877.5784772		30″
	40″	.0001939	.0001939	1.0000000	0.9999999	5157.2970603	5157.2971573		20″
	50″	.0002424	.0002424	1.0000000	0.9999999	4125.4121287	4125.4122499		10″
1′	0″	.0002909	.0002909	1.0000000	0.9999990	3437.6070815	3437.6072269	59′	0″
	10″	.0003394	.0003394	1.0000000	0.9999999	2946.3756629	2946.3758326		50″
	20″	.0003879	.0003879	1.0000001	0.9999999	2577.9837587	2577.9839526		40″
	30″	.0004363	.0004363	1.0000001	0.9999998	2292.0004584	2292.0006766		30″
	40″	.0004848	.0004848	1.0000001	0.9999998	2062.7058581	2062.7061005		20″
	50″	.0005333	.0005333	1.0000002	0.9999998	1875.1168198	1875.1170865		10″
2′	0″	.0005818	.0005818	1.0000002	0.9999998	1718.8033689	1718.8036598	58′	0″
	10″	.0006303	.0006303	1.0000002	0.9999998	1586.5457719	1586.5460871		50″
	20″	.0006788	.0006788	1.0000003	0.9999997	1473.1875368	1473.1878762		40″
	30″	.0007272	.0007272	1.0000003	0.9999997	1375.1371012	1375.1374649		30″
	40″	.0007657	.0007757	1.0000003	0.9999997	1289.1577930	1289.1581809		20″
	50″	.0008242	.0008242	1.0000004	0.9999996	1213.2972579	1213.2976700		10″
3′	0″	.0008727	.0008727	1.0000004	0.9999996	1145.8686834	1145.8691197	57′	0″
		cos	cot	csc	sin	tan	sec		

表 8

0° 度		正 弦 (sin)	正切线 (tan)	正割线 (sec)	余 弦 (cos)	余切线 (cot)	余割线 (csc)		
0′	0″	………………	………………	………………	10.0000000000	………………	………………	60′	0″
	10″	5.6855748665	5.6855748670	10.0000000005	9.9999999995	14.3144251330	14.3144251335		50″
	20″	5.9866048617	5.9866048637	10.0000000020	9.9999999980	14.0133951363	14.0133951383		40″
	30″	6.1626961198	6.1626961244	10.0000000046	9.9999999954	13.8373038756	13.8873038802		30″
	40″	6.2876348554	6.2876548636	10.0000000082	9.9999999918	13.7123651364	13.7123651446		20″
	50″	6.3845448673	6.3845448801	10.0000000128	9.9999999872	13.6154551199	13.6154551327		10″
1′	0″	6.4637261109	6.4637261293	10.0000000184	9.9999999816	13.5362738707	13.5362738891	59′	0″
	10″	6.5306728985	6.5306729235	10.0000000250	9.9999999750	13.4693270765	13.4693271015		50″
	20″	6.5886648429	6.5886648756	10.0000000327	9.9999999673	13.4113351244	13.4123351571		40″
	30″	6.6398173623	6.6398174037	10.0000000414	9.9999999586	13.3601825963	13.3601826377		30″
	40″	6.6855748502	6.6855749013	10.0000000511	9.9999999489	13.3144250987	13.3144251498		20″
	50″	6.7269675316	6.7269675934	10.0000000618	9.9999999382	13.2730324066	13.2730324684		10″
2′	0″	6.7647560882	6.7657561617	10.0000000735	9.9999999265	13.2352438383	13.2352439118	58′	0″
	10″	6.7995181904	6.1995182767	10.0000000863	9.9999999137	13.2004817233	13.2004818096		50″
	20″	6.8317028692	6.8317029693	10.0000001001	9.9999998999	13.1682970307	13.1682971308		40″
	30″	6.8616660875	6.8616662024	10.0000001149	9.9999998851	13.1383337976	13.1383339125		30″
	40″	6.8896948059	6.8896949366	10.0000001307	9.9999998693	13.1103050634	13.1103051941		20″
	50″	6.9160237389	6.9160238864	10.0000001475	9.9999998525	13.0839761136	13.0839762611		10″
3′	0″	6.9408473166	6.9408474820	10.0000001654	9.9999998346	13.0591525180	13.0591526834	57′	0″

表 9

0^{G}	0′	0000	3^{G}	0′	18738	6^{G}	0′	36812	9^{G}	0′	53583
	1′	00628		1′	19355		1′	37396		1′	54112
	2′	01256		2′	19971		2′	37978		2′	54639
	3′	01884		3′	20586		3′	38558		3′	55165
	4′	02513		4′	21201		4′	39137		4′	55688
	5′	03141		5′	21814		5′	39715		5′	56208
	6′	03769		6′	22427		6′	40291		6′	56727
	7′	04397		7′	23039		7′	40865		7′	57243
	8′	05024		8′	23649		8′	41438		8′	57757
	9′	05651		9′	24260		9′	42009		9′	58269
1^{G}	0′	06279	4^{G}	0′	24869	7^{G}	0′	42578	10^{G}	0′	58778
	1′	06906		1′	25477		1′	43146		1′	59286
	2′	07532		2′	26084		2′	43712		2′	59790
	3′	08159		3′	26690		3′	44276		3′	60293
	4′	08785		4′	27295		4′	44838		4′	60793
	5′	09411		5′	27899		5′	45399		5′	61291
	6′	10036		6′	28502		6′	45958		6′	61786
	7′	10661		7′	29103		7′	46515		7′	62279
	8′	11285		8′	29704		8′	47070		8′	62769
	9′	11909		9′	30303		9′	47624		9′	63257
2^{G}	0′	12533	5^{G}	0′	30902	8^{G}	0′	48175	11^{G}	0′	63742
	1′	13156		1′	31498		1′	48725		1′	64225
	2′	13779		2′	32094		2′	49273		2′	64706
	3′	14401		3′	32689		3′	49818		3′	65183
	4′	15022		4′	33282		4′	50362		4′	65659
	5′	15643		5′	33874		5′	50904		5′	66131
	6′	16264		6′	34464		6′	51444		6′	66601
	7′	16883		7′	35053		7′	51982		7′	67069
	8′	17502		8′	35641		8′	52517		8′	67533
	9′	18121		9′	36227		9′	53051		9′	67995
									12^{G}	0′	68455
										1′	68911
										2′	69365
										3′	69363
										4′	70265
										5′	70710

表 10

0^G	0′	0000	3^G	0′	19075	6^G	0′	39592	9^G	0′	63461
	1′	00628		1′	19728		1′	40321		1′	64346
	2′	01257		2′	20381		2′	41053		2′	65238
	3′	01885		3′	21036		3′	41789		3′	66138
	4′	02513		4′	21694		4′	42592		4′	67045
	5′	03142		5′	22352		5′	43273		5′	67959
	6′	03771		6′	23013		6′	44021		6′	68882
	7′	04401		7′	23675		7′	44774		7′	69812
	8′	05030		8′	24340		8′	45530		8′	70751
	9′	05660		9′	25006		9′	46291		9′	71698
1^G	0′	06291	4^G	0′	25675	7^G	0′	47056	10^G	0′	72654
	1′	06922		1′	26346		1′	47826		1′	73618
	2′	07554		2′	27019		2′	48600		2′	74591
	3′	08186		3′	27694		3′	49379		3′	75574
	4′	08819		4′	28372		4′	50163		4′	76566
	5′	09453		5′	29052		5′	50952		5′	77567
	6′	10087		6′	29735		6′	51746		6′	78579
	7′	10722		7′	30420		7′	52545		7′	79600
	8′	11538		8′	31108		8′	53349		8′	80631
	9′	11994		9′	31798		9′	54160		9′	81873
2^G	0′	12632	5^G	0′	32492	8^G	0′	54974	11^G	0′	82727
	1′	13271		1′	33187		1′	55796		1′	83796
	2′	13911		2′	33887		2′	56623		2′	84866
	3′	14552		3′	34588		3′	57456		3′	85953
	4′	15194		4′	35294		4′	58294		4′	87051
	5′	15838		5′	36002		5′	59139		5′	88161
	6′	16483		6′	36713		6′	59991		6′	89285
	7′	17129		7′	37428		7′	60848		7′	90421
	8′	17776		8′	38146		8′	61713		8′	91568
	9′	18425		9′	38867		9′	62584		9′	92730
									12^G	0′	93906
										1′	95095
										2′	96299
										3′	97517
										4′	98751
										5′	100000

以上二表，事属草创，故与 *A. Granet-Tablas Tachéométriques*，H. Morin，Editeur，Paris 表相校，末位尚有不同。

嘉道之际，金华人张作楠辑《翠薇山房数学》，其第三，第四种为：

(18)《八线类编》三卷

(19)《八线对数类编》二卷

都题张作楠辑，是本于《数理精蕴》、《八线类编》小数七位，《八线对数类编》小数八位，每分有数，弦、切、割三线各为一组，和年希尧二表相类。其后多经翻刻，流传颇广。

梅启照于《学强恕斋笔算》(1870 年)卷十之内，附有

(20)《三角割圜八线小表》

和陈讦《三角割圜八线小表》同出于《测量全义》。

稍后则黄宗宪校正张作楠原辑的

(21)《八线对数类编》

丁取忠为刻入《白芙堂丛书》，前有同治十三年(1874)丁取忠识语。

同时贾步纬辈复译成下列各表，是三角函数表第二次输入中国的，计有

(22)《弦切对数表》

(23)《八线简表》一卷

(24)《八线对数简表》一卷

其《弦切对数表》，据《江南制造局记》卷二，题作："《翻译弦切对数表》八卷八册，贾步纬翻译，火荣业校对。"书列于《八线简表》之前。其《八线简表》一卷，《八线对数简表》一卷，共题贾步纬校，与张作楠《类编》相同，惟置各线于一叶，和张书略异。

据《江南制造局记》卷二，则《八线简表》于同治十三年(1874

年)出版,而陈维祺所辑《中西算学大成》(1889年)第九九卷、第一〇〇卷的:

(25)《八线简表》

(26)《八线对数简表》

都出于贾书。以上所述,为各表之大要,其各表计算则于次节述及。

十二、三角函数表的计算

与三角函数表和三角术同时输入中国的,有《大测》二卷(1631年)。其表原篇第三,表法篇第四,表用篇第五,列举"六宗率","三要法","二简法",和用表方法。法先求圆内容6边,4边,10边,3边,5边,15边之长,名曰"六宗率"。既得此六种形之一边,各半之,即得六种弧的各正弦 $\sin A$,由是可求 $\cos A$;$\sin 2A$,$\cos 2A$;$\sin\frac{A}{2}$,$\cos\frac{A}{2}$是为"三要法"。又由 $\sin A$,$\sin B$,$\cos A$,$\cos B$ 按法求 $\sin(A+B)$,$\sin(A-B)$;由 $\sin(60°+A)$,$\sin(60°-A)$求 $\sin A$,是为"二简法"。由此得正弦一百二十个其最小者45′。其表用篇第五,称相连两分之差,为"差率",此差以当60′。其余按此比例求得,这是最初输入三角函数表的计算方法。

杨作枚又于"六宗率"外,补算得圆内容9边之长,见所著《解割圆之根》一卷,《勿庵历算全书》本(1723年刻),同年所刻《数理精蕴》卷十六(1723年刻)于9边外并算得圆内容7边之长,和旧有之"六宗率"相参伍,可得正弦三百六十个,其最小者15′,又新增有"求 $\sin\frac{A}{3}$法"可得5′,其5′以下,以比例得之,已较前加密。其后汪莱,安清翘,并有求 $\sin\frac{A}{5}$法,则可算得1′了。

十七世纪末年(1700年)法人杜德美(Pierre Jartoux,1668～1720.11.30)来华,时国中适有测地之举,遂于役其间,又尝与来布尼兹(即来本之,Gottfried Wilhelm Leibniz,1646～1716)通讯[①]。其后梅瑴成于《梅氏丛书辑要》卷六十一,《赤水遗珍》中,介绍杜德美法,即“求弦矢捷法”。

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\ r^2}+\frac{a^5}{5!\ r^4}-\frac{a^7}{7!\ r^6}+\frac{a^9}{9!\ r^8}-\cdots$$

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{a^2}{2!\ r}-\frac{a^4}{4!\ r^3}+\frac{a^6}{6!\ r^5}-\frac{a^8}{8!\ r^7}+\frac{a^{10}}{10!\ r^9}-\cdots;$$

杜德美法曾引起中算家之兴味。董祐诚《割圜连比例图解》三卷(1819年)证得下列四式:

$$2\sin m\alpha=c_m=mc-\frac{m(m^2-1)c^3}{4\cdot3!\ r^2}+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot5!\ r^4}-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot7!\ r^6}+\cdots,$$

$$\operatorname{vers} m\ \alpha=m^2(\operatorname{vers}\ \alpha)-\frac{m^2(4m^2-4)2(\operatorname{vers}\ \alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\operatorname{vers}\ \alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\cdots,$$

$$2\sin\frac{\alpha}{m}=c\ \frac{1}{m}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{4\cdot3!\ m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\cdot5!\ m^5\cdot r^4}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot7!\ m^7\cdot r^6}+\cdots,$$

$$\operatorname{vers}\frac{\alpha}{m}=\frac{(\operatorname{vers}\ \alpha)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(\operatorname{vers}\ \alpha)^2}{4\cdot3\cdot4m^4\cdot r^2}+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4m^2-4)2^2(\operatorname{vers}\ \alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots;$$

而 $c=2\sin\ \alpha$。

项名达遗稿《象数一原》七卷,证得下列二式:

---

① 参看本集第293页,注(＊本卷第291页注①。——编者)。

$$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{(4)3!\ m^3\cdot r^2}$$
$$+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(c_m)^5}{(4^2)5!\ m^5\cdot r^4}$$
$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^3)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{(4^3)7!\ m^7\cdot r^6}+\cdots$$

$$\text{vers}\ \frac{n}{m}\alpha=\frac{n^2(2\text{vers}\ m\ \alpha)}{2!\ m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)(2\text{vers}\ m\ \alpha)^2}{4!\ m^4\cdot r}$$
$$+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(2\text{vers}\ m\ \alpha)^3}{6!\ m^6\cdot r^2}$$
$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\text{vers}\ m\ \alpha)^5}{8!\ m^8\cdot r^3}+\cdots$$

而 $c_m=2\sin\ m\ \alpha$。

项名达又以各三角函数，化为正弦或余弦之函数，如：

$$\tan\ \alpha=\sin\alpha+\frac{\sin^3\alpha}{2r^2}+\frac{3\cdot\sin^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6r^6}$$
$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\sin^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8r^8}+\cdots$$

………………………………………………

$$\cot\ \alpha=\cos\ \alpha+\frac{\cos^3\ \alpha}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$
$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cos^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots$$

………………………………………………

戴煦《外切密率》四卷(1852 年)，则有“本弧求切线”，及“本弧求割线”等式：

$$\tan\alpha=a+\frac{2a^3}{3!\ r^2}+\frac{16a^5}{5!\ r^4}+\frac{272a^7}{7!\ r^6}+\frac{7936a^9}{9!\ r^8}+\cdots$$
$$\sec\alpha-r=\frac{a^2}{2!\ r}+\frac{5a^4}{4!\ r^3}+\frac{61a^6}{6!\ r^5}+\frac{1385a^8}{8!\ r^7}+\frac{50521a^{10}}{10!\ r^9}+\cdots$$

戴煦又证得求四十五度以内诸正割对数的公式，即

$$\log_{10}\sec\alpha=\mu\left\{\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{2\alpha^4}{4!}+\frac{16\alpha^6}{6!}+\frac{272\alpha^8}{8!}+\frac{7936\alpha^{10}}{10!}+\cdots\right\}。$$

其分母为“本弧求割线”的分母，其分子为“本弧求切线”的分子。三角对数表，虽早经输入中国，至是始由戴煦证得其公式。后此李善兰、徐有壬、顾观光虽曾深考三角函数的级数式，终未尝用以入算，即徐有壬《造各表简法》所称：造正弦全表，造正矢全表，造正切全表，造八线对数全表，都徒具方法。前此则罗士琳跋《割圜密率捷法》(1839 年)，曾据术推演得

$$\log\tan\ 1°13'20''=8.3290934249,$$

$$\log\sin\ 6°41'10''=9.0660648312,$$

$$\log\sin\ 12°50'\ 0''=9.3465793117,$$

$$\log\tan\ 16°32'10''=9.4726090000,$$

$$\log\tan\ 42°32'40''=9.9627287560。$$

以证八线对数原表的错误[①]。

① 见《割圜密率捷法》，道光己亥(1839 年)罗士琳《后跋》，及《续畴人传》，道光二十年(1840 年)阮元序。

明清算家的割圆术研究*

目　　次

---

*　本文原载《科学》第 12 卷(1927 年)第 11 期第 1487～1502 页，第 12 期 1721～1766 页，第 13 卷(1928 年)第 1 期第 53～102 页，第 2 期第 200～250 页；1933 年收入《中算史论丛》(二)第 129～434 页，1955 年收入《中算史论丛》第三集第 254～512 页。

（一） 弧矢论

一、明唐顺之、顾应祥、程大位、周述学

如图 1，ABC 为弧矢形，$OC=r$ 为圆半径，$2OC=d$ 为圆径，$AC=c$ 为弦，$BD=b$ 为矢，$ABC=a$ 为弧，A 为面积。以后引述弧

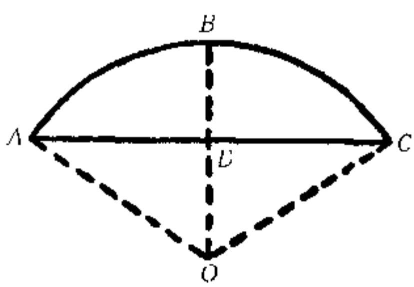


图 1

矢形或弧形，都用这记法。

明唐顺之（1507～1560）著“数论三篇”即《勾股测望论》、《勾股容方圆论》及《弧矢论》，见《唐荆川文集》卷十二。就中《弧矢论》称：

$$-A^2+Ab^2+db^3-1.25b^4=0$$

系简略朱世杰式

$$-5b^4+4db^3+4Ab^2-(2A)^2=0$$

而得到。他给顾（应祥）箬溪中丞第二书（见《荆川集补遗》卷三）称：“仆既作为《弧矢论》，以请于明公，而明公亦既演之为书矣。”则《弧矢论》之作，是在顾应祥《弧矢算术》（1552年）之前了。

顾应祥（1483～1565）著《勾股算术》二卷（1553年）、《测圆海镜释术》十二卷（1550年）、《弧矢算术》（1552年）、《测圆算术》四卷（1553年）。其《弧矢算术自序》称：“弧矢一术……钱塘吴（敬）信民《九章算法》止载一条，《四元玉鉴》所载数条，皆不言其所以然之故；沈（括）存中《梦溪笔谈》有割圆之法，虽自谓造微，然止于径矢求弦。”因并列诸说，如下式：

(1) $d=b+\dfrac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b}$。 《九章》勾股章“圆材埋壁”题，又会圆术（沈括，杨辉）

实出于赵君卿“勾股方圆图注”。

(2) $\dfrac{c}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2-\left(\dfrac{d}{2}-b\right)^2}$。 会圆术（沈括，杨辉）

(3) $b=\dfrac{d}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2-\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}$。 会圆术（杨辉）

(4) $a=\dfrac{2b^2}{d}+c$。 （沈括）

(5) $c^3-c^2+4bc+4b^2(2b-a)=0$。 由（沈括）公式化得。

(6)　$2b^3-(a-c)b^2-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0$。由(沈括)公式化得。

(7)　$4b^4+(4d^2-4ad)b^2-4d^3b+a^2d^2=0$。　(郭守敬)

(8)　$$-3\left(\frac{1}{2}c\right)^4+2b\left(\frac{1}{2}c\right)^3+(a'b-6b^2)\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2b^3\left(\frac{1}{2}c\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3b^4\}=0,$$

而　$a'=\pi d-a$。　(郭守敬)

(9)　$$b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{1}{2}c\right)^2b^2-(c+a')\left(\frac{1}{2}c\right)^2b+3\left(\frac{1}{2}c\right)^4=0。$$　(郭守敬)

(10)　$A=\frac{1}{2}(b+c)b$。　(《九章》)

(11)　$c=\frac{2A-b^2}{b}$。　(《九章》)

(12)　$b^2+bc-2A=0$。　(《九章》)

(13)　$-5b^4+4db^3+4Ab^2-(2A)^2=0$。　(朱世杰)

唐、顾二氏之说,周述学、程大位都采用过。

周述学《神道大编历宗算会》(周文烛嘉靖戊午,1558年撰序)卷八"弧矢经补下"称:"求矢之法有五:径弦求矢〔如(3)〕,径背求矢,得 $b=\frac{d^2\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{(d^3-d^2b)+(ad-b^2)b}$,径积求矢〔如(13)〕,积弦求矢〔如(12)〕,残周及弦求矢〔如(9)〕。求径之法有二:积矢求径,〔得 $d=\frac{A^2-Ab^2}{b^3}+1.25b$,乃由(3)化得〕,矢弦求径〔如(1)〕。求积之法有一:矢弦求积〔如(10)〕。求背之法有一:径矢求背〔如(4)〕。"元《授时历》"弧容直阔",李善兰曾为补草,见《算賸初编》。而《历宗算会》卷七"弧矢经补上",周述学已经说过。

程大位《算法统宗》(1592年)卷三卷六亦论弧矢术。

二、清梅瑴成、陈世佶

梅瑴成(1681～1763)《赤水遗珍》用借根方法解

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0,$$

画三乘方 b^4 为长柱形,惟 b^4 并非有形可指,瑴成实在是误解。

陈世佶(字士常,海宁人 1686～1749)著《弧矢割圆》一卷,谓求矢有六术,求弧弦有五术,求圆径有四术,求积有五术,求弧背有七术,比较顾应祥、周述学更为详细。

三、清孔广森、李子金

清初于弧矢术别立新术的有孔广森、李子金。

孔广森(1752～1786)《觷轩孔氏所著书》少广正负术外篇上内"割圆弧矢十术",其弧矢新式有四:

(1)　$b=\sqrt[3]{A^2/1.5d},$　　而　　$A>\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}$。

(2)　$b=\sqrt[3]{(3A)^2/27\,\frac{d}{2}}$①,　　而　　$\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}$。

(3)　$b=\sqrt[3]{(5A)^2/81\,\frac{d}{2}},$　　而　　$\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}$。

(4)　$b=\sqrt[3]{(7A)^2/81d},$　　而　　$\frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A$。

广森自称:量田演段,期于步分无差而已,故略分四例,视弧之大小,进退消息,以定矢实,视旧法颇加密。又称 $b^{\frac{1}{2}}=x$,则

$$x^8+2d^{\frac{1}{2}}x^7+dx^6+(4d^2-2ad)x^4-2ad^{3/2}x^3-4d^3x^2+a^2d^2=0。$$

---

① $\sqrt[3]{(3A)^2/27\,\frac{d}{2}}=\sqrt[3]{A^2/1.5d}$,故(1)式实和(2)式相同。

（严敦杰补）

李子金著《算法通义》五卷(1677年),其卷一有"弧矢论"称:"欲以矢弦求背,必先以矢弦求积,而求积之法,复自古难之,予沉思数年,于无法中求为有法,始创立一术,虽不敢谓天然巧合,亦庶乎至密而可用矣。"

如图2,弧背 $ABC=a$,圆径大弦 $RC=d$;正弧之弦大勾 $AC=c$;$\frac{c}{2}=$小勾。余弧之弦大股 $AR=c_1$;$\frac{c_1}{2}=$小股。正弦之矢 $BD=b$;正积 $ABC=A$。余弧之矢 $KL=b_1$;余积 $AKR=A_1$。

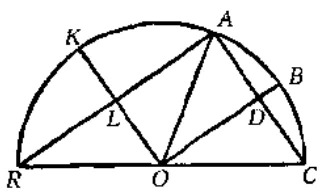


图 2

而 $$c_1=\sqrt{d^2-c^2},\ b=\frac{d}{2}-\frac{c_1}{2},\ b_1=\frac{d}{2}-\frac{c}{2}。$$

令 $b(3c+b)=\phi$ 为正率,$b_1(3c_1+b_1)=\phi_1$ 为余率,

$$A+A_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2},$$

则 $$A=\frac{\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right]b(3c+b)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi}{\phi+\phi_1},$$

$$A_1=\frac{\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right]b_1(3c_1+b_1)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi_1}{\phi+\phi_1}。$$

四、李锐、骆腾凤

李锐(1773~1817)《弧矢算术细草》一卷,以天元一法解析弧矢十三式,知(1),(2),(3)式出于杨辉;(4),(5),(6)式出于沈括;

(7),(8)式出于郭守敬,乃由杨辉、沈括二公式消去 c 而得。(9)式由杨辉、沈括二公式消去 d,并令 $\pi=3$, $a'+a=\pi d=3d$ 而得;(10),(11),(12)式都出于《九章》;(13)式则由《九章》和杨辉二公式消去 c 而得。

骆腾凤(1770～1841)著《艺游录》二卷,其卷二末论"弧矢"称:"(李锐)弦与残周求矢、径与截积求矢二率,以下廉为元数,尚不合率,今为正之。"李锐原草,本无错误,不过骆腾凤新草亦说得通。

五、谢家禾、冯桂芳、罗士琳、江衡

谢家禾著《谢榖堂算学》三种,死后道光十七年(1837年)戴煦为之校刻。其《弧田问率》以徽率 $\pi=3.14$、密率 $\pi=\frac{22}{7}$ 立算,因李锐《弧矢算术细草》设问立术,先设图3如下:

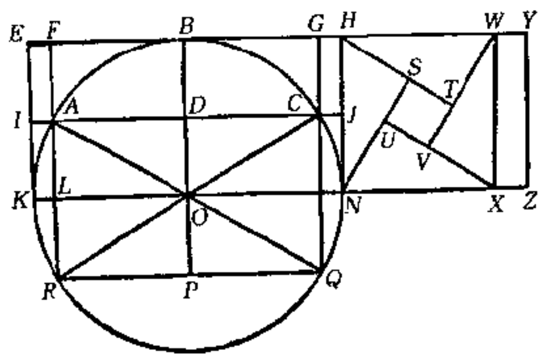


图 3

古半周 $EW=3\cdot\frac{d}{2}$,徽半周 $EY=3.14\cdot\frac{d}{2}$,$\square EX=3\left(\frac{d}{2}\right)^2$,$\square EZ=3.14\left(\frac{d}{2}\right)^2$。令半弦 $HS=\frac{c_1}{2}$,外半弦 $NS=\frac{c}{2}$,半弦差 ST

$=\dfrac{c-c_1}{2}$。弧弦 $AC=c$，外弦 $AR=c_1$；弧背 $ABC=a$，弧矢 $BD=b$，外矢 $KL=b_1$，半周差 $WY=(3.14-3)d$，古徽圆积差$\square WZ=(3.14-3)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=\dfrac{7}{50}\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$，半弦差幂$\square SV=\left(\dfrac{c-c_1}{2}\right)^2$，角幂$\square EA=bb_1$，隅幂$\triangle HSN=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{c_1}{2}=\dfrac{1}{8}cc_1$。

弧矢十三式中(1)，(2)，(3)式即杨辉公式，为真值，故与圆率之大小无关。(4)式以下因圆率之大小而变，惟为便利起见，先求(10)式之 $A=\dfrac{1}{2}\left[bc+b^2+\dfrac{7}{50}\left(\dfrac{1}{2}c\right)^2\right]$为率，逐次求(4)以下各式。

(10)有 c、b 求徽率 A。

因
$$\frac{c}{2}-\frac{c_1}{2}=(r-b_1)-(r-b_1)=b-b_1,$$

如图 3 $\square EZ-cc_1=\square EZ-8\cdot\dfrac{1}{8}cc_1=2A+2A_1$,

则
$$\begin{aligned}2A+2A_1&=bc+b_1c_1+2bb_1+(b-b_1)^2+\frac{7}{50}\left(\frac{d}{2}\right)^2\\&=\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}\\&\quad+\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\};\end{aligned}$$

故可假令
$$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\},$$
$$A_1=\frac{1}{2}\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\}。$$

如谢氏之说，则 π 无论为何数，可得(10)之普通公式：

$$A=\frac{1}{2}\left[bc+b^2+(\pi-3)\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]\cdots \tag{10}$$

(4)有 c、b 求徽率 a。

因扇形面积为 $\dfrac{ad}{4}=A+\left(\dfrac{d}{2}-b\right)\dfrac{c}{2}$,

或 $$4A-2bc=d(a-c)。$$

从(10)式得 $$\left(\frac{1}{a-c}\right)\left[\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2b^2\right]=d,$$

从(1)式 $$d=b+\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b},$$

化得 $$a=\frac{b^2(2b+c)+\left(\frac{14}{50}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2}\cdots \qquad (4)$$

(5)有 b,a 求徽率 c。

由(4)式化得

$$c^3-\left(a-\frac{14}{50}b\right)c^2-4b^2c+4b^2(2b-a)=0 \qquad (5)$$

(6)有 c,a 求徽率 b。

由(4)式化得

$$2b^3-(a-c)b^2+\frac{7}{100}c^2b-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0 \qquad (6)$$

(7)有 d,a 求徽率 b。

由杨辉公式 $(d-b)b=\left(\frac{1}{2}c\right)^2$,与(4)式中之

$$\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2b^2=d(a-c)$$

消去 c,得

$$7396b^4+2408db^3+(10196d^2-8600ad)b^2$$
$$-(1400ad^2+10000d^3)b+2500a^2d^2=0。 \qquad (7)$$

(8)有 $b,a'(=\pi d-a)$求徽率 c。

由杨辉公式,令 $x=c$ 得

$$314d^2=314\left(\frac{1}{4b}\right)^2(x^4+8b^2x^2+16b^4), \qquad (a)$$

又由(10)式得

$$7x^2+200b^2=100d(a-x), \tag{b}$$

由杨辉公式得

$$100d(a'+x)=100d(\pi d-a+x),$$

即

$$100\left(\frac{1}{4b}\right)(x^2+4b^2)(a'+x)=100d(\pi d-a+x); \tag{c}$$

(b)+(c)得

$$(7x^2+200b^2)+100\left(\frac{1}{4b}\right)(x^2+4b^2)(a'+x)=314d^2。 \tag{d}$$

由(a)及(d)消去 $314d^2$ 得

$$-314x^4+400bx^3+(400a'b-2400b^2)x^2$$
$$+1600b^3x+\{b(3200b^3+1600a'b^2)-5024b^4\}=0。$$

或

$$-3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4+2b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'b-6b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$+2b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3.14b^4\}=0。 \tag{8}$$

(9)有 c,a' 求徽率 b。

从(8)式得

$$1.14b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{c}{2}\right)^2b^2-(c+a')\left(\frac{c}{2}\right)^2b$$
$$+3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4=0。 \tag{9}$$

(11)有 b,A 求徽率 c。

由(10)式得

$$1.75c^2+50bc-(100A-50b^2)=0。 \tag{11}$$

(12)有 c,A 求徽率 b。

由(10)式得

$$b^2+cb-\left[2A-\frac{7}{50}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]=0。 \tag{12}$$

(13)有 d,A 求徽率 b。

由杨辉公式及(10)式得

$$-4.7396b^4+3.7592db^3+\left(\frac{172A}{50}-\frac{49d^2}{2500}\right)b^2$$

$$+\frac{28Ad}{50}b-(2A)^2=0。\qquad(13)$$

如 $\pi=\dfrac{22}{7}$,则得:

(10) $$A=\frac{1}{2}\left[bc+b^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right],$$

(4) $$a=\frac{b^2(2b+c)+\left(\frac{2}{7}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2},$$

(7) $$144b^4+48db^3+(200d^2-168ad)b^2$$

$$-(28ad^2+196d^3)b+49a^2d^2=0,$$

(8) $$-\frac{22}{7}\left(\frac{c}{2}\right)^4+2b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'd-6b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$+2b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\left[b(2b^3+a'b^2)-\frac{22}{7}b^4\right]=0,$$

(13) $$-232b^4+184db^3+(168A-d^2)b^2$$

$$+28Adb-(14A)^2=0。$$

冯桂芬(字林一,吴县人 1809～1874)因李锐《弧矢算术细草》而作《弧矢算术细草图解》,前有道光十九年(1839 年)自序,其图多勉强凑合,于义无当。

罗士琳(字次缪,号茗香,甘泉人,1789～1853)著《弧矢算术补》,时在道光癸卯(1843 年)。因弦、矢、圆径、弧背、残周、截积六事,交互错综,举二事为题,而求其余。每题应得四术,共当得四十四术。顾应祥已得十三术,乃为补二十七术。此外"有圆径有弧背求残周"一题,可无庸求,又"有圆径有弧背求截积"、"有圆径有截

积求弧背”、“有圆径有截积求残周”,非立地元不可,姑阙之,适合四十四术之数。全书以天元一立术,无图解。

光绪间元和江衡和英傅兰雅共译英哈司书《算式集要》。卷一有下求弧之三略近公式:

$$a=\frac{1}{3}(8c_{\frac{1}{2}}-c), \tag{1}$$

而 c 为通弦,$c_{\frac{1}{2}}$ 为半弧通弦。

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times 10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{15c^2+33\left(\frac{b}{2}\right)^2}, \tag{2}$$

而 c 为通弦,b 为倍矢。

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times 10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{60D-27\left(\frac{b}{2}\right)}+\sqrt{c^2+b^2}, \tag{3}$$

而 c 为通弦,b 为倍矢,D 为全径。

(二) 割圆旧法和周率算法

六、明代算家所设的圆率值

明代算家言圆率的,朱载堉谓:$\pi=\frac{\sqrt{2}}{0.45}$,$\pi=3.1426968$;邢云路谓:$\pi=3.126$,又 $\pi=3.12132034$;陈荩谟谓:$\pi=3.1525$;方以智谓:$\pi=\frac{52}{17}$;此外又有桐陵法 $\pi=\frac{63}{20}$,和智术 $\pi=\frac{25}{8}$。

日本关孝和(1637 或 1642～1708)遗著《括要算法》(1709 年刻)卷贞,求周径率,谓桐陵法:周率六十三,径率二十,周数三一五

整。

又日本村濑义益《算法勿惮改》(1673 年)一书，亦曾引到《桐陵算法》。

按梅文鼎《笔算》卷五附方田通法中，载有量田原法歌诀，谓出桐陵，可惜亦不记姓名，疑和关氏所引，同属一人，是明季隐者。现日本发现有明刊本《铜陵算法》，东北大学藏[①]。

智术见于程大位《算法统宗》(1592 年)，关孝和《括要算法》(1709 年)，不著撰人姓氏。清初程禄、袁士龙、顾长发、庄亨阳都从智术，其在西洋则公元前已有人说到此术[②]。

七、明末西洋割圆法的输入

崇祯辛未(1631 年)徐光启和耶稣会士所撰译《测量全义》，其卷五"圜面求积"称："凡圜面积与其半径线，偕半周线作矩内直角形积等。依此法则量圜形者，以半径乘半周而已，古高士阿基米得(Archimedes，前 287? ～前 212)作《圜书》(*Measurement of the Circle*)，内三题，洞烛圜形之理，今表而出之，为原本焉。"

第一题"圜形之半径，偕其周作勾股形，其容与圜形之积等"。

解曰：$CDEF$ 圜形，其心 B，其半径 BC，即以为股，(圜)形之周为勾，成 QST 勾股形，题言两形之容等。

---

① 见日本武田楠雄，《明代数学之特质》，《科学史研究》，第 29 号，第 8～18 页。

② 叔伯特(Schubert)谓：罗马奥古士都时代，有维都维(Vitruvius)，以周率为十二尺半，径率四尺，亦主张 $\pi=\frac{25}{8}$，见 Schubert, H., *Mathematical Essay and Recreations*, Tr. by McCormack, T. J., p. 128, Chicago, 1903. 马利(Marie)谓：维都维以汉，始元丙辰(公元前 85 年)生，建始乙未(公元前 26 年)死，尝著《建筑学理论》六卷，见 Marie, M., *Histoire des Sciences Mathematiques et Physiques*, Tome I, p. 219, 1883, Paris.

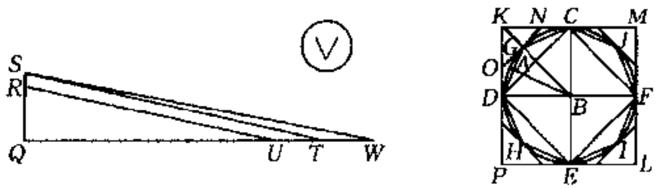


图 4

论曰：设有言不等，必云大或小。云圆形为大，勾股形小者，其较为Ⅴ形。即于圜内作 *CDEF* 正方形，又作 *CGDHEIFJ* 八角直线形。从心至八角形之各边作 *AB* 等中垂线。试于圜形内、减其大半；所余，又减其大半；末所余，以比较形Ⅴ，必能为小矣。(《几何》X，1.)，如先减 *CDEF* 方形，次减 *CJF* 等三角形(四)，末余 *CG* ……，*CJ*，……等三角杂形(八)，必小于Ⅴ形也。次作 *QRU* 三边形，与 *CGD*……八角形等，必小于 *QST* 三边形，何者？$QR=AB<BG(=r)$。先设 *QRU* 三边形，及Ⅴ较形，始与圜等。今 *QRU*，三边形，及八三角杂形适与圜等。夫△*QST* 大于△*QRU*，Ⅴ形大于八三角杂形，是合两大形(*QST* 及Ⅴ)始与圜等，复谓合两小形(即 *QRU* 及八三角杂形)与圜等，必无是理也。

次论曰：若言圜形为小、勾股形大者，其较为Ⅴ形，即于圜外作 *KMLP* 正方形，又作 *NO*……八角形。夫 *MP* 方形大于 *QST* 三角形者，方形的周线，大于圜形之周线也。内减其大半(即元圜)，又减其大半(即 *NOK* 等三角形也)，末余 *CNG*，*COD* 等三角杂形八，必小于较形Ⅴ；又作 *QSW* 三角形与 *CNO*……八角形等。兹形为圜之外切，必大于元圜，而 *QW* 为外形之周，必大于 *QT* 内圜之周。

先设圜及V形与 QST 三角形等，今并圜及三角杂形八（即 CNG 等八杂形也），反大于 QST 三角形，是圜借八杂小形而为大者，又借V大形而为小可乎？

第二题"凡圜周三倍圜径有奇"二支。

此有二法：　其一，　$3\frac{10}{70}>\pi$；

其二，　$\pi>3\frac{10}{71}>$；

即　$$3\frac{10}{70}>\pi>3\frac{10}{71}。$$

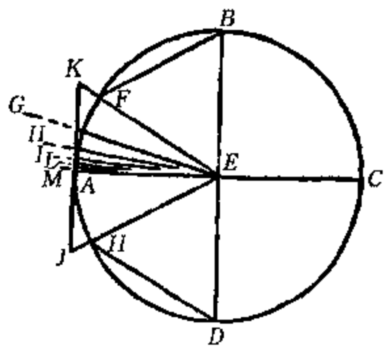


图　5

先解其一曰：$ABCD$ 圜，E 为心；AC，BD 为两径，辏心作直角。从 A 作 KJ 切线，从 B，D 作 BF，DH 线与 BE 相等。BEF 角六十度，FEA 角必三十度，为六边形之半角也。末从心过 F，H 作 EK，EJ 线成 EKJ 等角形。FEH 既六十度，则 KJ 为等形之边。

任设　$AK=153, KJ=EK=306, AE=\sqrt{306^2-153^2}=265^+$

则　$$\frac{AE}{AK}=\frac{265^-}{153},\left(或\sqrt{3}>\frac{265}{153}\right)。$$

次平分$\angle KEA$于G，

则 $$\frac{KE}{AE}=\frac{KG}{AG},\quad（《几何》\text{Ⅵ},3）。$$

合之 $$\frac{KE+AE}{AE}=\frac{KG+AG}{AG},$$

更之，$\dfrac{KE+AE}{AK}=\dfrac{AE}{AG}$，$\dfrac{AE}{AG}=\dfrac{306+265^{+}}{153}=\dfrac{571^{+}}{153}$。

令 $$\sqrt{571^{+2}+153^2}=591\frac{1^{+}}{8}=EG,$$

则 $$\frac{EG}{AG}=\frac{591\frac{1^{+}}{8}}{153}。$$

次平分$\angle GEA$于H，作EH线，则

$$\frac{GE+AE}{AG}=\frac{AE}{AH};\ \frac{AE}{AH}=\frac{1162\frac{1^{+}}{8}}{153}。$$

令 $$\sqrt{1162\frac{1}{8}^{2}+153^2}=1172\frac{1^{+}}{8}=EH,$$

则 $$\frac{EH}{AH}=\frac{1172\frac{1}{8}}{153},$$

次平分$\angle HEA$于I，作EI线，则

$$\frac{HE+AE}{AH}=\frac{AE}{AI},\ \frac{AE}{AI}=\frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

令 $$\sqrt{2334\frac{1}{4}^{2}+153^2}=2339\frac{1^{+}}{4}=EI,$$

则 $$\frac{EI}{AI}=\frac{2339\frac{1^{-}}{4}}{153}。$$

次平分$\angle IEA$于L，作EL线，则

$$\frac{IE+AE}{AI}=\frac{AE}{AL},\ \frac{AE}{AL}=\frac{4673\frac{1^{+}}{2}}{153},$$

即
$$\frac{AE}{AL}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}。$$

论曰：JEK 元角，为三等角形之一，即一直角形 $\frac{2}{3}$，KEA 其半，即 $\frac{1}{3}$；GEA 其半，即 $\frac{1}{6}$；HEA 其半，即 $\frac{1}{12}$；IEA 其半，即 $\frac{1}{24}$；LEA 其半，即 $\frac{1}{48}$。复作 AEM 角与 IEA 角等，成 LEM 角形。其 E 角为直角之 $\frac{1}{24}$，而 LM 弧为象限弧之 $\frac{1}{24}$，于全周为 $\frac{1}{96}$，LAM 其切线，为 96 边形之一边。此边与圜全径之比例，若 AE，$4673\frac{1}{2}$ 与 AL，153，末置 96 边形之一边，为 153。因周为 14688，径为 $4673\frac{1^{+}}{2}$，则 96 边圜外形之周，与圜径之比例为 $14688:4673\frac{1}{2}$ 约之为 $3\frac{1}{7}$ 不足，则径为 1，96 边圜外周为 $3\frac{1}{7}$ 不足。夫形在周之外，尚不及 $3\frac{1}{7}$，况圜周乎？故 $3\frac{10}{71}>\pi$。

次解其二，$3\frac{10}{70}$ 而盈者曰：圜内作 BC 径，从 C 作六边形之一边 CA 与半径 EC 等（《几何》Ⅳ.15），从 B 作 BA 成 BAC 形，在半圜之内，则 A 为直角（《几何》Ⅲ.31）。

设勾 $CA=780$；弦 $BC=1560$；

则股 $BA=\sqrt{1560^2-780^2}=1351^{-}$

则
$$\frac{BA}{CA}=\frac{1351^{-}}{780},\left(或\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\right)。$$

次平分 $\angle ABC$，作 BD 线，又作 CD 线，则 $\triangle BDC$，CDF 为相似。盖同用 D 直角，在半圜内，AD，DC 两相乘之弧等，则 DCF，DBC 两弧之角必等（《几何》Ⅲ，21）。

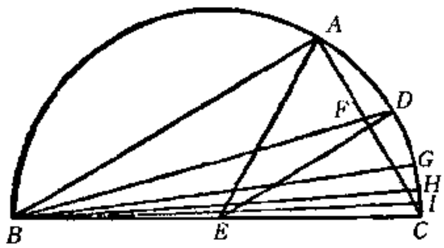


图　6

故　$$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF},$$

又　$$\frac{BC}{DC}=\frac{FC}{DF},$$

更之,是　$$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF}=\frac{BC}{FC}。$$

又因　$$\frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA}\quad（《几何》Ⅵ.3）^{①},$$

则　$$\frac{BC+BA}{BA}=\frac{FC+FA}{FA},\ \frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BA}{FA},$$

又　$$\frac{BA}{FA}=\frac{BC}{FC},$$

∴　$$\frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BC}{FC},\text{或}\frac{BC+BA}{CA}=\frac{BC}{FC}。$$

又从　$$\frac{BD}{DC}=\frac{BC}{FC}\text{及}\frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA},$$

得　$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{FA},$$

则　$$\frac{BD}{DC}=\frac{BC+BA}{CA},\text{或}\frac{BD}{DC}=\frac{1560+1351^{-}}{780}=\frac{2911^{-}}{780},$$

---

① 《几何》Ⅵ.3:“三角形,任以直线分一角为两平分,而分对角边为两分,则两分之比例若余两边之比例。”

如令　$BD=2911, DC=780$，

则
$$BC=\sqrt{2911^2+780^2}=3013\frac{3^-}{4},$$

则
$$\frac{BC}{DC}=\frac{3013\frac{3^-}{4}}{780}。$$

次平分$\angle DBC$，作 BG，GC 线，如前比例，论得$\frac{BG}{GC}$之数，

$$\frac{BG}{GC}=\frac{BD+BC}{DC}=\frac{2911+3013\frac{3^-}{4}}{780}=\frac{5924\frac{3^-}{4}}{780},$$

因分母数繁，今改 780 为 240，则

$$\frac{BG}{GC}=\frac{1823^-}{240},$$

如令
$$BD=1823, GC=240,$$

则
$$BC=\sqrt{1823^2+240^2}=1838\frac{9^-}{11},$$

则
$$\frac{BC}{GC}=\frac{1838\frac{9^-}{11}}{240}。$$

次平分$\angle GBC$，作 BH 及 HC 线，

则
$$\frac{BH}{HC}=\frac{BG+BC}{GC}=\frac{3661\frac{9^-}{11}}{240},$$

因分母数繁，又改 240 为 66，

则　$\frac{BH}{HC}=\frac{1007^-}{66}$，

令　$BH=1007, HC=66$。

则　$BC=\sqrt{1007^2+66^2}=1009\frac{1^-}{6}$，

则　$\frac{BC}{HC}=\frac{1009\frac{1}{6}}{66}$。

次平分$\angle HBC$，作BI，IC线，

则 $$\frac{BI}{IC}=\frac{BH+BC}{HC}=\frac{2016^{-}}{66},$$

而 $$\frac{BC}{HC}=\frac{2017\frac{1^{-}}{4}}{66}\quad 即\frac{BC}{HC}<\frac{2017\frac{1}{4}}{66}。$$

论曰：CA弧为全圜$\frac{1}{6}$，DC为$\frac{1}{12}$，GC为$\frac{1}{24}$，HC为$\frac{1}{48}$，IC为$\frac{1}{96}$，是IC为96边内切圜形之一边也。以96乘66，得6336为96边内切形之周；BC为$2017\frac{1^{-}}{4}$，两数约之，一得$3\frac{10}{71}$强，形之周也；一得1，圜之径也。夫圜周在多边形之外即大，则谓$3\frac{10}{71}$，不又盈乎？故

$$\pi>3\frac{10}{71}。$$

第三题 圜容积与径上方形之比例。

解曰：一为11与14而朒，一为223与284而盈。

先解朒者，圜BEF与方ACE。引长CA边为DA，令大于CA为$3\frac{1}{7}$倍，则与周等为勾。AB边，圜之半径也，为股，成$\triangle ABD$，其积与圜积略等。又$\triangle ABC$直角形，因

$$\frac{CA}{DA}=\frac{7}{22},$$

则 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{7}{22}。\quad(《几何》Ⅵ.1.)$$

$$\triangle ABD=\odot BEF,$$

则 $$\frac{\triangle ABC}{\odot BEF}=\frac{7}{22},$$

又 $$\triangle ABC=\frac{1}{4}\square ACE,$$

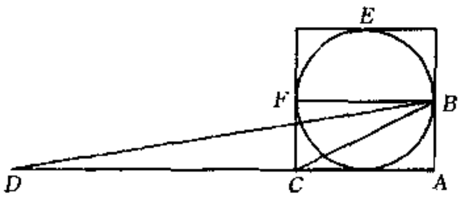


图 7

则 $$\frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{28}{22}=\frac{14}{11}。$$

次解盈者，设 $CA=71$，$DA=223$，

则 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{71}{223}，即\frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{284}{223}。$$

* * *

径与周之比例，古士之法如此，今士别立一法，其差甚微，然子母之数，积至二十一字，为万万亿，难可施用。即

径 100000000000000000000

大周 314159265358979323847

小周 314159265358979323846

约之，首取三字，为$\frac{314}{100}$，则 $3\frac{14}{100}$，再约之，得 $3\frac{1}{7}$，又朒如前①。

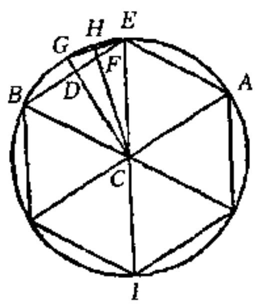
八、清初中算家圆率值的计算

梅文鼎《平三角举要》卷一补遗"正弦为八线之主"条谓："割圆

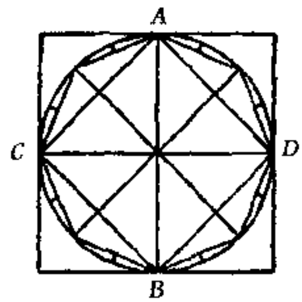
① 西人述阿基米得《圜书》的，有：Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschiste der Mathematik*, Vol. I. (Third Edition), pp. 300～303, 316, 319, Leipzig, 1907; Gino Loria, *Le Scienze Esatte nell' Antica Grecia*, in Modena, 1893, Libro II, pp. 126～132; Jame Gow, *A Short History of Greek Mathematics*, pp. 233～237, Cambridge, 1884; H. Weissen-born, *Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano*, Berlin, 1894.

之法，皆作勾股于圆内”，并载二图，第一图即《九章算经》内刘徽割圆术，第二图即元赵友钦《革象新书》内乾象周髀法。

梅文鼎《几何补编》卷五，称：“径七围二十二者，乃祖冲之方法，……吾友锡山杨崑山（作枚），柘城，孔林宗（兴泰）另有法。”杨法立圆径 10000；积 5238092564；孔法立圆径 10000，积 5234987750；因杨作枚以 $\pi=3.142855384<\frac{22}{7}$，孔兴泰以 $\pi=3.14159265$。前此王锡阐《晓庵新法》(1651)取 $\pi=3.1416$，梅文鼎《方圆幂积》(1710)取 $\pi=3.14159265$。



(1)



(2)

图 8

焦循(1763～1820)《里堂道听录》(约 1814 年)卷三十八，“圜解”条称：“王寅旭(锡阐，1628～1682)《晓庵遗书》第二册，首列勾股割圆之术，施国祁云此篇即潘集所云圆解者，惜绘图已亡，或更疑有错简，不敢增损一字，今依施所录，录之。”

李子金(字子金号隐山，柘城人)《算法通义》(1677 年)卷五，以圆内容四边形起，计算各边形面积，以证西法 $\pi=3.1416$ 之密。

其计算方法，与元赵友钦“乾象周髀法”相类。逐次所得勾股及内容各边形面积如下：

圆内 4 边形面积	$A_4=200$
8 段大勾股面积	$A_8=82.842712$
16 段次勾股面积	$A_{16}=23.30389$
32 段小勾股面积	$A_{32}=5.99775$
64 段细勾股面积	$A_{64}=1.5103$
128 段微勾股面积	$A_{128}=0.3784$
256 段极微勾股面积	$A_{256}=0.09519$
$\pi r^2 (r=10)$	$=314.128742$

故 $\pi=3.14128742$。

而

圆内容 4 边形面积	$=200$
圆内容 8 边形面积	$=282.842712$
圆内容 16 边形面积	$=306.146602$
圆内容 32 边形面积	$=312.144352$
圆内容 64 边形面积	$=313.654652$
圆内容 128 边形面积	$=314.033552$
圆内容 256 边形面积	$=314.128742$。

顾长发(字君源,江苏人)著《围径真旨》无卷数,以 $\pi=3.125$ 谓之智术,盖袭程大位之说,惟以甄鸾,刘徽,祖冲之,邢云路,汤若望诸人所定周径,皆未密合,则失之矣①。

九、清初西洋割圆法的输入

雍正元年癸卯(1723 年)刻成《数理精蕴》,其下编卷十五,"面部五"割圆"屡求勾股"谓:

古人用割圜之法,内弦外切,屡求勾股,为无数多边形,以

① 见《四库全书总目》卷一〇七,子部天文算法类存目。

切近圜界，使弧线直线，渐合为一，而圜周始得。……要之圜内六边起算者，圜径折半，即圜内六边之一，乃用屡求勾股之法，自六边至十二边。

如图 9

$$OG-\sqrt{OC^2-\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=GH,$$

$$\sqrt{GH^2+\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=CG,$$

为内容十二边形之一边，余仿此。

圜内四边起算者，则以圜径为内容正方之斜弦，自乘折半开方而得四边之一，亦用屡求勾股之法，自四边而八边。

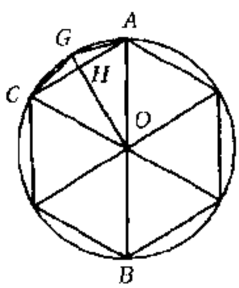


图 9

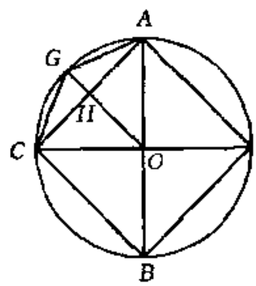


图 10

如图 10。

$\sqrt{2}AO=AC$ 为内容四边形的一边。

$$OG-\sqrt{\overline{OC}^2-\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=GH$$

$$\sqrt{GH^2+\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=CG$$

为内容八边形的一边。余仿此。

圜外六边起算者，圜径为弦，半径为勾，求得股，倍之即圜

外三边之一，取其$\frac{1}{3}$，即圜外六边之一。以六边之一，折半之勾为一率，半径之股为二率，小同式形之勾为三率，推得四率为小同式形之股，倍之即十二边之一。

如图 11。

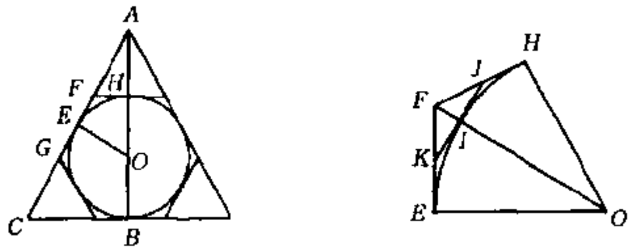


图 11

$$\sqrt{AO^2-OE^2}=\sqrt{HB^2-\left(\frac{HB^2}{2}\right)^2}=AE,\frac{2}{3}AE=FG$$

为圜外六边形之一边。

$$\sqrt{EG^2+OE^2}-OE=FI,\frac{FH}{OH}=\frac{FI}{IJ},2IJ=JK$$

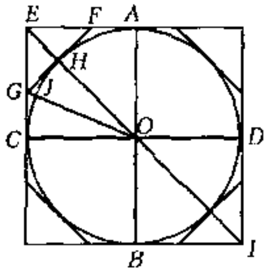
为圜外十二边形的一边，余仿此。

圜外四边起算者，圜径即四边之一，圜径自乘倍之开方，即圜外正方之斜弦，减去圜径，即圜外两角之余，又即圜外八边之一。以八边之一，折半之勾为一率，半径之股为二率，小同式形之勾为三率，推得四率，为小同式形之股，倍之，即十六边之一。

如图 12。

$$\sqrt{2}\,AB=EI,EI-AB=GF$$

为圜外八边形之一边。



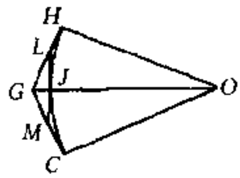


图　12

$$\sqrt{CG^2-OC^2}-OH=GJ,\frac{GH}{OH}=\frac{GJ}{JL},2JL=ML$$

为圜外十六边形之一边，余仿此。

如上四法累求至亿万边，如后四表所得四值，平均之，可得 $\pi=3.14159265358919323846$ 之值，此《测量全义》所谓今士之法，其差甚微，子母之数，积至二十一位。《数理精蕴》下编卷二十，则只应用 $\pi=3.14159265$ 入算。

十、钱塘、谈泰、许桂林、李潢、骆腾凤

钱塘(字岳原，号溉亭，嘉定人 1735～1790)著《溉亭述古录》二卷，卷二引 $\pi=3.14$，$\pi=\frac{355}{113}$，又称："予尝测圆器，围八百十分，径二百五十八分。"即 $\pi=\frac{810}{258}$。阮元《畴人传》(1799 年)于钱塘传后论称："秦九韶以 $\sqrt{10}$ 为周率，与塘所创率正同。江宁谈泰曾作一丈径木板，以篾尺量其周，正得三丈一尺六寸奇，以为钱塘周率为至当不可易。"许桂林(字同叔，号月南，海州人 1778～1821)著《宣西通》令 $\pi=3.151907$[①]。钱塘、谈泰、许桂林所述，并多不合。

① 张文虎：《舒艺室杂著》甲编，卷上，第二十四引。

表 1　圆内容六边起算

边　数	每　边　长
6	100,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
12	51,76380,90205.04152,46977,97675,24809,66576,64
24	26,10523,84440.10318,30968,12455,79097,80203,87
48	13,08062,58460.28613,36306,31117,55035,08828,79
96	6,54381,65643.55228,41273,12288,24160,86784,33
192	3,27234,63252.97356,32859,28565,89918,98332,13
384	1,63622,79207.87425,85703,98146,58952,66799,64
768	81812,08052.46957,91892,48219,91003,62523,27
1536	40906,12582.32819,02288,26117,96358,51900,39
3072	20453,07360.67660,90823,85922,29210,20790,29
6144	10226,53814.02739,50220,28598,95885,22439,17
12288	5113,26923.72483,46281,23299,03190,88476,79
24576	2556,63463.95130,94805,23449,01114,10631,76
49152	1278,31732.23676,62618,69476,46404,92099,97
98304	639,15866.15102,20711,60708,07126,38707,53
1,96608	319,57933.07959,09031,09381,54193,06538,00
3,93216	159,78966.54030,55288,69248,77937,23759,67
7,86432	79,89483.27021,64654,28066,68105,61111,48
15,72864	39,94741.63511,74529,75868,07068,11793,39
31,45728	19,97370.81755,90966,64039,25400,28679,64
62,91456	9,98685.40877,96728,39755,75740,61136,14
125,82912	4,99342.70438,98519,83312,36398,29963,55
251,65824	2,49671.35219,49279,37088,61769,88026,56
503,31648	1,24835.67609,74642,11723,32250,47094,18
1006,63296	62417.83804,87321,36259,06320,95878,43
2013,26592	31208.91902,43660,71929,20426,91184,02
4026,53184	15604.45951,21830,36439,49710,73209,51
8053,06368	7802.22975,60915,18279,15048,29151,42
16106,12736	3901.11487,80457,59146,99658,14870,15
32212,25472	1950.55743,90228,79574,52953,44068,74
64424,50944	975.27871,95114,39787,32936,44199,26
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,67749,89099,05
2,57698,03776	243.81967,98778,59946,83874,94549,53
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,41424,79879,09
周长 =	628,31853.07179.58647,65801,34822,03550,10887,68

表 2 圆内容四边起算

边 数	每 边 长
4	141,42135,62373.09504,88016,88724,20969,80785,69
8	76,53668,64730.17954,34569,19968,06079,77335,22
16	39,01806,44032.25653,56965,69736,95404,44818,55
32	19,60342,80659.12120,39883,91127,77728,36917,22
64	9,81353,48654.83602,85099,15073,54192,18045,86
128	4,90824,57045.82457,60634,71621,06208,57541,33
256	2,45430,76571.43985,21588,17805,28322,70716,00
512	1,22717,69298.30895,07192,81109,89753,91502,87
1024	61359,13525.93481.84009,35613,56118,88503,18
2048	30679,60372.56953,12246,07554,48255.35780,54
4096	15339,80637.48540,90538,77216,80698,05365,29
8192	7669,90375.14279,11781,44963,40791,32883,11
16384	3834,95194.62140,66148,79839,14675,43703,33
32768	1917,47598.19195,46917,41044,43334,12743,17
65536	958,73799.20613,37690,98012,98668,34958,07
1,31072	479,36899.61683,64374,58375,65717,71348,27
2,62144	239,68449.81013,94128,43044,37461,75283,30
5,24288	119,84224.90528,48556,85760,04932,95546,88
10,48576	59,92112.45266,93215,00909,93872,60060,65
20,97152	29,96056.22633,80224,57708,71412,02539,66
41,94304	14,98028.11316,94314,42261,07534,74329,33
83,88608	7,49014.05658,47682,47806,37746,51550,77
167,77216	3,74507.02829,23906,89737,66870,66800,32
335,54432	1,87253.51414,61961,65598,14435,01082,24
671,08864	93626.75707,30981,85390,23592,46503,06
1342,17728	46813.37853,65491,05519,01343,10246,82
2684,35456	23406.68926,82745,54362,49364,90997,84
5368,70912	11703.34463,41372,77381,62019,12483,21
10737,41824	5851.67231,70686,38715,85676,64614,64
21474,83648	2925.83615,85343,19361,05921,70853,94
42949,67296	1462.91807,92671,59680,92096,27745,29
85899,34592	731.45903,96335,79840,50314,01660,27
1,71798,69184	365.72951,98167,89920,25768,49928,86
3,43597,38368	× 182.86475,99083,94960,12960,68607,70
周长 =	628,31853,07179.58647,68630,83106,75500,30233,60

表 3 圆外切六边起算

边 数	每 边 长
6	115,47005,38379.25152,90182,97561.00391,49112,95
12	53,58983,84862.24541,29451,07316,98825,52661,14
24	26,33049,95174.79170,69430,52914,81943,42071,84
48	13,10869,25630.47645,71290,87449,75988,55898,42
96	6,54732.20825.94517,28785,17897,78691,92473,10
192	3,27278.44270.62316,53306,82157,22593,98891,56
384	1,63628.26807.58775,27407,50124,14262,93055,02
768	81812.76501.57471,23405,28654,70206,37842,46
1536	40906.21138.43948,71770,73895,76250,93086,70
3072	20453,08430.18968,23098,79892,04940,73014,38
6144	10226,53947.71650,29406,07923,61708,24007,68
12288	5113,26940.43597,23011,62489,86396,73782,62
24576	2556,63446.04020,16640,52453,71933,91505,82
49152	1278,31732.49787,77840,10560,77401,04623,48
98304	639,15866.18366,10114,03335,64137,76784,84
1,96608	319,57933.08367,07706,38925,14975,02516,94
3,93216	159,78966.54081,54184,37010,37920,29433,22
7,86432	79,89483.27028,02133,58210,87258,60420,30
15,72864	39,94741.63512,41696,96569,02814,87045,58
31,45728	19,97370.81756,00927,25467,47497,76443,54
62,91456	9.98685.40877,97973,47381,60797,42752,98
125,82912	4,99342.70438,98675,46771.78780,94612,14
251,65824	2,49671.35219,49298,82521,01688,28848,62
503,31648	1,24835.67609,74644,54902,39881,37230,82
1006,63296	62417.83804,87321,66656,43570,33969,76
2013,26592	31208.91902,43660,75728,87238,87654,28
4026,53184	15604.45951,21830,36914,51801,15160,80
8053,06368	7802.22975,60915,18238,51923,28997,10
16106,12736	3901.11487,80357,59154,41714,48425,62
32212,25472	1950.55743,90228,79575,35326,34703,68
64424,50944	975.27871,95114,39787,44471,81163,20
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,69336,98558,02
2,57698,03776	243.81967,98778.59946,84306,12776,06
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,42107,76825,16
周长 =	628,31853,07179.58647,69321,54601,77828,39608,32

表 4 圆外切四边起算

边　数	每　边　长
4	200,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
8	82,84271,24746.19009,76033,77448,41939,61571,38
16	39,78247,34759.31601,38231,95245,28935,24571,94
32	19,69828,06714.32850,61543,95042,58265,48645,84
64	9,82536,99538.93450,82106,86642,54262,72341,58
128	4,90972,44217.85088,82091,59507,92181,74423,84
256	2,45449,24759.13255,04617,75106,46854,15928,90
512	1,22720,00315.24680,39285,88731,20262,16705,82
1024	61359,42402.84532,99741,47831,36424,34765,84
2048	30679,63982.17733,30569,85441,63670,08749,44
4096	15339,81088.68618,52103,46415,42325,58475,38
8192	7669,90431.54288,19766,91468,36815,44393,20
16384	3834,95201.67141,77702,91555,12172,61821,10
32768	1917,47599.07320,60800,92296,09314,51461,06
65536	958,73799.31629,01924,52065,52620,76198,58
1,31072	479,36899.63060,59903,71697,52988,94629,44
2,62144	239,68449.81186,06069,57023,26958,93013,20
5,24288	119,84224.90550,00049,50001,14815,00233,66
10,48576	59,92112.45269,62151,58939,66012,80201,54
20,97152	29,96056.22634,13841,64962,30634,82482,20
41,94304	14,98028.11316,98516,55667,71553,86417,54
83,88608	7,49014.05658,48207,74482,17815,32914,52
167,77216	3,74507.02829,23972,55572,12912,74047,30
335,54432	1,87253.51414,61969,86327,44457,01335,74
671,08864	93626.75707,30982,87981,39478,58733,86
1342,17728	46813.37853,65491,18352,90645,55376,02
2684,35456	23406,68926.82745,55965,47936,05939,16
5368,70912	11703.34463,41372,77581,99294,69000,96
10737,41824	5851.67231,70686,38740,90313,17704,40
21474,83648	2925.83615,85343,19364,18989,81783,94
42949,67296	1462.91807,92671,59681,39836,98502,52
85899,34592	731.45903,96339,79840,60134,63671,66
1,71798,69184	365.72951,98167,89920,28844,33638,38
3,43597,38368	× 182.86475,99083,94960,14269,29544,50
周长　=	628,31853,07179.58647,73127,17861,85894,13376,00

李潢(字云门,钟祥人,?～1811)著《九章算术细草图说》九卷,(1820 年刻)其注释《九章》割圆恰到好处。因刘徽注《九章》割圆,以内容六等边形起算。其法第一步以半径为弦,半六等边为勾,求得股;以股减半径为小勾,半六等边为小股,得小弦幂,开得小弦 0.517638,即为内容十二等边形之一边。第二步以半径为弦,半十二等边为勾,求得股;惟为简便精密起见,不复以前得小弦自乘为勾幂,而以前得小弦幂之四分一为勾幂,开得股 0.965925 $\frac{4}{5}$;又以股减半径为小勾,半十二等边为小股,得小弦幂。同理以前得小弦幂之四分一为小股幂,得新小弦幂,开得新小弦 0.261052 即为内容二十四等边之一边,余仿此。此种解法,可不问每次"勾","小股"之值,仅认前次所得"小弦幂",以为第二次的"勾幂","小股幂",事较切当。李潢即本这方法作为图解。李潢又以为 1536 弧之一面为 0.004090612582,则 $\pi=3.1415904629$,是据《数理精蕴》的说法。

骆腾凤(1770～1841)著《艺游录》二卷,其卷二"割圆密率图解",即本诸李潢,惟不明上述"不复以前得小弦自乘为勾幂,而以前得小弦幂之四分一为勾幂"的意义,所以所得有差,其过不在李潢而在骆腾凤了。

十一、圆率解析法输入后圆率值计算

梅瑴成(1681～1763)于《梅氏丛书辑要》卷六十一附录一《赤水遗珍》内载"求周径密率捷法,译西士杜德美(Pierre Jartoux,1668～1720.11.30,1700 年来华)法。"即以下三术:

$$\pi d=d\left(3+\frac{3\cdot1^2}{4\cdot3!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2}{4^2\cdot5!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3\cdot7!}+\cdots\cdots\right)$$

或 $$\pi=3\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{3!}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}-\cdots\cdots\right)$$
$$=3.1415926495\cdots\cdots, \quad (\text{I})$$

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\cdot r^2}+\frac{a^5}{5!\cdot r^4}-\frac{a^7}{7!\cdot r^6}+\frac{a^9}{|9\cdot r^8}-\cdots\cdots, \quad (\text{II})$$

$$\text{vers}\ \alpha=\frac{a^2}{2!\,r}-\frac{a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{a^6}{6!\cdot r^5}-\frac{a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{10!\cdot r^9}-\cdots\cdots。 \quad (\text{III})$$

孔广森（1752～1786）《顨轩孔氏所著书》五十五《少广正负术》外篇上称："密弧求法，……宣城御史大夫梅（瑴成）公书中尝载焉。至其弧背与弦矢互求，亦各有乘除之法，世则罕有传者，广森幸得闻之于灵台郎陈君际新。"则于（Ⅱ），（Ⅲ）式外，复录以下二术：

$$a=\sin\alpha+\frac{1^2\cdot\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9\alpha}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots, \quad (\text{VI})$$

$$a^2=r\left[(2\text{vers}\alpha)+\frac{1^2\cdot(2\text{vers}\alpha)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot(2\text{vers}\alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot(2\text{vers}\alpha)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}\right]+\cdots\cdots, \quad (\text{VII})$$

如图 13，用径一万（$D=2\,r=10000$）设算，试立直角于半圆之上，令成勾六，股八，正勾股形。以勾为通弦者，其矢必有一，按（Ⅶ）式，求得弧 $a_1=6435.008$，以股为通弦者，其矢必有二，按（Ⅷ）式求得弧幂 $a_2^2=85987642.08515$，开方得弧 $a_2=9272.952$，并此两弧而倍之，即

$$\pi=2(6435.008+9272.952)\div 10000=3.141592。$$

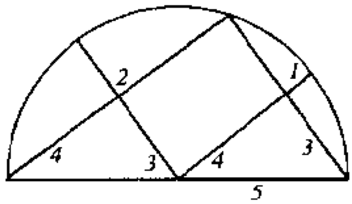


图 13

朱鸿(字云路,号筠麓,或小梁,秀水人)先得张豸冠杜氏《九术》写本,于嘉庆戊辰(1808年)以示汪莱,又于己卯(1819年)以示董祐诚。朱又以杜氏法推得四十位,徐有壬(1800～1860)采入《务民义斋算学》中,而二十五位以后,与真数不合,即

$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26431\ 86367\ 47227\ 9514$。

项名达(号梅侣,仁和人1789～1850)遗著《象数一原》七卷,其卷六因椭圜求周术变通而新定得“圜周求径”术,如:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\cdots$$

因椭圜周全长 $$L=\pi d\Big[1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}e^8-\cdots\cdots\Big];$$

而 $$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$ ①

项氏自称此级数,敛级颇难,不足为术。

徐有壬(字君卿,乌程人)《测圆密率》卷一,第六术,谓。

---

① 参看李俨《中算家的圆锥曲线说》,本集第519～537页(＊见本卷第491～508页。——编者)。

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots$$

是以 $a=\frac{\pi r}{3}$，$2\ \mathrm{vers}\ a=r$，代入(Ⅷ)式得来。

顾观光(号尚之，金山人 1799～1862)《算賸初编》，“用理分中末线求圆周法”(1853)算得 $\pi=3.14159\ 26535\ 8979_{25}$。

十二、清季西算的输入和圆率值计算

李善兰(字壬叔，号秋纫，海宁人 1811～1882)，咸丰壬子(1852 年)五月到沪，和西士伟烈亚力(Alexander Wylie)共译《几何原本》后九卷(1852～1856)，棣么甘(Augustus De Morgan，1806～1871)《代数学》十三卷(1859 年)，罗密士(Elias Loomis，1811～1899)《代微积拾级》十八卷(1859 年)，胡威立(Whewell)《曲线说》一卷(1866 年)，他自著《方圆阐幽》、《弧矢启秘》即以尖锥求积术代积分术以求圆积。《方圆阐幽》所载求象限面积术，和《代微积拾级》卷十八，积分术相似，以今积分式表之如下：

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\cdots\cdots\right)dx\\&=\left[x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}-\cdots\cdots\right]_0^1\\&=1-\frac{1^2}{3!}-\frac{1^2\cdot3}{5!}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{7!}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{9!}-\cdots\cdots\\&=1-\frac{1}{3!}-\frac{(2^2-1)}{5!}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{7!}\\&\quad-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{9!}-\cdots,\end{aligned}\tag{1}$$

夏鸾翔(字紫笙，钱塘人 1823～1864)著《象数一原》九卷

(1862年)亦用积分术得：

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1^2}{5\cdot 2!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{7\cdot 4!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{9\cdot 6!}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(2^2-1)}{(2)(5)}+\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{(2\cdot 4)(5\cdot 7)}\right.$$
$$\left.+\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{(2\cdot 4\cdot 6)(5\cdot 7\cdot 9)}+\cdots\cdots\right] \tag{2}$$

又以 $a=\frac{\pi r}{2}$，$\sin\alpha=r$，代入杜氏(Ⅶ)式得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1^2}{3!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}+\cdots\cdots, \tag{3}$$

夏鸾翔于《致曲术》以微积分术推得正矢求弧背术，即：

$$a=r\left(\frac{2\ \mathrm{vers}\ \alpha}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mathrm{vers}\ \alpha}{2\cdot 3!\cdot r}+\frac{3^2\cdot\mathrm{vers}^3\ \alpha}{2^2\cdot 5!\cdot r^2}\right.$$
$$\left.+\frac{3^2\cdot 5^2\mathrm{vers}^3\ \alpha}{2^3\cdot 7!\cdot r^3}+\cdots\cdots\right),$$

以 $a=\frac{\pi}{2}$，$\mathrm{vers}\ \alpha=1$，代入得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1^2}{2\cdot 3!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 5!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7!}$$
$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^4\cdot 9!}+\cdots\cdots, \tag{4}$$

若以 $a=\frac{\pi r}{4}$，$\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{2}}$代入杜氏(Ⅶ)式，亦可得上式。

又以 $a=\frac{\pi}{4}$，$\tan\alpha=1$ 代入戴煦《外切密率》卷三的“切线求本弧”术，$\pi a=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5\alpha}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7\alpha}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots$，

得
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots, \tag{5}$$

以 $a=\frac{\pi}{6}$，$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$代入，得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\cdots\cdots, \tag{6}$$

刘彝程著《割圜密率》一卷(1869 年),丁取忠欲刊入《白芙堂丛书》,以资罄未果,迨光绪戊戌(1898 年)善化刘铎为列入《古今算学丛书》中。其求平圆周有三术,以下二术,较为简易,也是得力于微积分法。

$$\pi=3\left[\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{1\cdot 3^2\cdot 5}{4^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{4^4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}-\cdots\cdots\right)\right] \tag{7}$$

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1\cdot 3}{4(2)(5)}+\frac{1\cdot 3^2\cdot 5}{4^2(2\cdot 4)(5\cdot 7)}+\frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{4^3(2\cdot 4\cdot 6)(5\cdot 7\cdot 9)}+\cdots\cdots\right] \tag{8}$$

左潜(字壬叟,湘阴人,? ~1874)于《割圆八线缀术补算》,及《缀术释戴》、《缀术释明》外,又和曾纪鸿(1848~1877)、黄宗宪共著《圜率考真图解》一卷(是书前后有同治十三年(1874 年),丁取忠,曾纪鸿《序跋》)以几何法证得:

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

及

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{12}+\tan^{-1}\frac{5}{27}+\tan^{-1}\frac{1}{5}$$

由第一式求 π,$\frac{1}{\pi}$各至百位,即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 7067_{97},$$

$$\frac{1}{\pi}=0.31830\ 98861\ 83970\ 67153\ 77675\ 26745\ 02872\ 40689\ 19291\ 48091\ 28974\ 95334\ 68811\ 77935\ 95268\ 45307\ 01802\ 27605\ 53250\ 6171_{91}。$$

光绪丙子(1876年)黄宗宪随使至英，于博物院天学书中觅得圆率真数一百五十八位，和曾、左所推得百位者，校之，一一吻合。语见黄宗宪《容圆七术》卷尾"圆率真数补"。

同治十二年(1873年)，华蘅芳和英傅兰雅共译英华里司《代数术》二十五卷。其卷二十五亦论圆率，并由$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{3}$算得$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$。谓："曾有算学士固灵(Ludolph Van Ceulen，1540～1610，荷兰人)者，用平圆内容外切之多等边形，即割圆法。费了极大工夫，算得此三十六位之数，其临死之时，嘱其家以此数刻于墓碑。……惟固灵之后，又有法兰西人提拉尼(Fautet De Lagny，1719年)者，用简便之法推得一百二十八位周率之数。后有欧拉(即尤拉 Euler)考之，言提拉尼之法，只须八十小时工夫，已可算毕。又有人云，英国哇克斯福德大书院(Radcliffe Library，Oxford)内有一书中，已记一百五十位周率。"其第273款又算得

$$\frac{2}{\pi}=0.63661977236,$$

$$\pi=3.141592636。$$

光绪三年(1877年)，华蘅芳和英傅兰雅共译英海麻士(John Hymers，1803～1887)《三角数理》十二卷。其第146及147款谓：

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}。$$

第 159 款谓：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdots\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)},\text{Wallis},1656$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots。$$

（三） 圆率解析法

十三、杜德美法的输入

距利玛窦(Matteo Ricci)来华之期，恰及一棋，法人杜德美(Pierre Jartoux；1668～1720.11.30)也来中国，时为十七世纪的末年(1700 年)。是时国中适有测地之举，遂在其间工作。杜德美又尝和来布尼兹(即来本之，Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716)通讯[①]。

梅瑴成(1681～1763)于《梅氏丛书辑要》卷六十一，附录一，《赤水遗珍》内载“求周径密率捷法”，注称译西士杜德美法。

$$\pi d=d\left(3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot 3!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot 7!}+\cdots\cdots\right)$$

---

① 参观三上义夫《中日数学发达史》第 14 页，即 Mikami，Y.，*The Development of Mathematics in China and Japan*，p. 14，1913. Leipzig 及 Smith，D. E. and Mikami，Y.，*History of Japanese Mathematics*，pp. 154～155，1914，Chicago。

或
$$\pi=3\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{3!}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}+\cdots\cdots\right)$$
$$=3.1415926495 \qquad (\text{I})$$

次载"求弦,矢捷法"即:

设弧求正弦,

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\cdot r^2}+\frac{a^5}{5!\cdot r^4}-\frac{a^7}{7!\cdot r^6}+\frac{a^9}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots; \qquad (\text{II})$$

正矢,

$$\text{vers}\ \alpha=\frac{a^2}{2!\cdot r}-\frac{a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{a^6}{6!\cdot r^5}-\frac{a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{10!\cdot r^9}-\cdots\cdots。 \qquad (\text{III})$$

《割圜密率捷法》四卷,系明安图(一作明图,号静庵,奉天蒙古正白旗生员)所作,创始乾隆初年(1736~?),其子明新(字景臻),门人张肱(字良亭,宝应人,后官农部主政),陈际新(一作陈季新,号舜五,宛平人,后官灵台郎),于明安图死后数年续成之,时为乾隆三十九年(1774年)。书成后为某氏(一作张敦仁)所秘,未及刻行①。书虽未刻,世间已有知道的;孔广森(1752~1786)曾闻其说于陈际新②。阮元(1764~1849)已藏有《割圜捷法》一帙,不知何人之书,故《畴人传》(1799年)未载③。其《九术》写本,世多传记,而次

① 见《衡斋算学》第六册,《割圜连比例术图解序》(1819年)和《割圜密率捷法》,道光己亥(1839年)岑建功序。

② 孔广森《少广正负术外篇》上,"割圜弧矢十条"称:"至其弧背与弦矢互求,亦各有乘除之法,世则罕有传者,广森幸得闻之于灵台郎陈君际新。"陈际新字商盘,宛平人。著《气候备考》一卷有1781年自序,在陈启运《陈氏六书》之内。

③ 语见《割圜密率捷法》,道光二十年(1840年)阮元序。

序互有异同。朱鸿(字云路,号筠麓或小梁,秀水人)先得张豸冠写本,于嘉庆戊辰(1808年)以示汪莱,汪莱始翻然改悔前此诋斥杜术之误[①]。朱鸿又于嘉庆己卯(1819)以《九术》示董祐诚、钟祥李潢(?～1811)旧藏有四卷本原书,道光辛巳(1821年)即归朱鸿、董祐诚[②]。丁取忠(字果臣,号云梧,长沙人)一日于友人家得一钞本算书,首尾残缺,不知何人撰,细抽其法,则弧度求弦矢、弦矢求弧度之全法,是杜德美的原术,第其文隐奥难解,而又无算例,果臣乃发愤为算例凡若干言,书成名曰《数学拾遗》(1851年),时不知有明氏、董氏书(即明安图《割圜密率捷法》,董祐诚《割圜连比例术图解》1819年)[③]。又十余年至道光己亥(1839年)明氏书始刻行,上距创始,已有百年。在未刻行前,范景福、孔广森、汪莱、董祐诚、焦循、安清翘诸家著说,已受此书的影响了。

《割圜密率捷法》卷一"步法"有圜径求周等九术,陈际新称:"内圆径求周、弧背求弦、求矢三法,本泰西杜氏德美所著。"其余六术为明安图所补创。但朱鸿、张豸冠、董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦、丁取忠、夏鸾,复通称杜氏九术。九术如下:

---

① 语见汪莱《衡斋算学》第三册、第六册。及《割圜密率捷法》罗士琳识。

汪莱:《衡斋算学》第六册称:

又论曰:西人杜德美有随度求弦矢捷法,梅氏《赤水遗珍》载之未备。戊辰(1808)冬效力史馆,协修朱君云路出示所藏,乃睹德美全法,……

记曰:旧刻此册,误诋德美之失。古愚张太守非之,盖得明君图所解者,太守秘其书不相示。予至都中,求之司博士廷楝,博士购之经岁,不能得,闻之人云,明君所传者,陈君季新,季新早卒无传。然张太守已得之,惜予不获见。尔因朱君出其全法,思悟及此,急改刊旧论,并记之,以志吾过。

② 语见汪莱《衡斋算学》第六册,及董祐诚《割圜连比例术图解自序》、《后序》。

③ 语见丁取忠《数学拾遗》,邹汉勋咸丰元年(1851年)序,丁取忠同治十三年(1874年)自跋。

(一)圜径求周

$$\pi d=d\left(3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot 3!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot 7!}+\cdots\cdots\right),$$

或 $$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{3!}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}+\cdots\cdots,$$

或 $$\pi d=3d\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!}。\qquad(\mathrm{I})$$

(二)弧背求正弦

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\cdot r^2}+\frac{a^5}{5!\cdot r^4}-\frac{a^7}{7!\cdot r^6}+\frac{a^9}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

或 $$\sin\alpha=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}。\qquad(\mathrm{II})$$

(三)弧背求正矢

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{a^2}{2!\cdot r}-\frac{a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{a^6}{6!\cdot r^5}-\frac{a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{10!\cdot r^9}-\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers}\alpha=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!}。\qquad(\mathrm{III})$$

(四)弧背求通弦

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

或 $$c=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}。\qquad(\mathrm{IV})$$

(五)弧背求矢

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{(2a)^2}{4\cdot 2!\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot 4!\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot 6!\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^4\cdot 8!\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers}\alpha=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!}。\tag{V}$$

（六）通弦求弧背

$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\,5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\,7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}c^{2n-1}。\tag{VI}$$

（七）正弦求弧背

$$a=\sin\alpha+\frac{1^2\cdot\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9\alpha}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\sin^{2n-1}\alpha;\tag{VII}$$

此式是由（VI）式，令 $c=2\sin\alpha$ 代得。

（八）正矢求弧背

$$a^2=r\left[(2\operatorname{vers}\alpha)+\frac{1^2(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot(2\operatorname{vers}\alpha)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right],$$

或 $$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}\cdot(2n)!}(2\operatorname{vers}\alpha)^n。\tag{VIII}$$

（九）矢求弧背

$$(2a)^2=r\left[(8\operatorname{vers}\alpha)+\frac{1^2(8\operatorname{vers}\alpha)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2(8\operatorname{vers}\alpha)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6r^2}\right.$$

$$+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2(8\text{ vers }\alpha)^4}{4^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8r^3}+\cdots\cdots\Bigg],$$

或 $(2a)^2=2r\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\cdot r^{n-1}(2n)!}(8\text{vers}\alpha)^n$;

（Ⅸ）

此式由（Ⅷ）式化得，极易看出。

以上所述九法，以（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），（Ⅴ），（Ⅵ），（Ⅷ）六式为基本，其余则（Ⅰ）式则由（Ⅵ）以 $2a=\frac{\pi d}{6}$，$c=\frac{d}{2}$ 代入化得；（Ⅶ）式由（Ⅵ）以 $c=2\sin\alpha$ 代入化得；（Ⅸ）式由（Ⅷ）式两边各增乘 4 化得。故《割圜密率捷法》卷三，卷四，“法解上，下，”仅解析此基本六法。六法之中，又以（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅵ），（Ⅷ）四法，为诸术所自出，故陈际新以告孔广森，徐有壬《测圜密率》卷二，亦仅录此四法。其在西洋，则（Ⅱ），（Ⅲ）式为古累固里（James Gregory）所发明（1667 年），（Ⅵ）式和牛顿（Isaac Newton）反正弦 $\sin^{-1}\frac{1}{a}$ 式（1676 年）相类。（Ⅷ）式则尤拉（Euler）曾得到（1737 年），而公布此式则为斯腾微（J. de Stainvilles，1815 年）。

其九术名目，次序亦颇有异同，如名目则：

古　　法	《割圜密率捷法》本	张豸冠项名达引杜氏九术	丁取忠引杜氏术
弧背（$2a$）	弧背（$2a$）	通弧（$2a$）	通弧（$2a$）
弦（c）	通弦（c）	通弦（c）	通弦（c）
半弧背（a）	弧背（a）	弧背（a）	弧度（a）
半弧弦（$\sin\alpha$）	正弦（$\sin\alpha$）	正弦（$\sin\alpha$）	正弦（$\sin\alpha$）

次序则：

《割圜密率捷法》本	张豸冠写本杜氏九术全本	项名达引杜氏九术	丁取忠《数学拾遗》引杜氏术
圜径(d) 求周(πd) (Ⅰ)	圜径求周 (1)	圜径求周 (9)	全径求周 (9)
弧背(a) 求正弦($\sin\alpha$) (Ⅱ)	弧背求正弦 (4)	弧背求正弦 (3)	弧度求正弦 (1)
《割圜密率捷法》本	张豸冠写本杜氏九术全本	项名达引杜氏九术	丁取忠《数学拾遗》引杜氏术
弧背(a) 求正矢($\mathrm{vers}\,\alpha$) (Ⅲ)	弧背求正矢 (5)	弧背求正矢 (4)	弧度求正矢 (2)
弧背($2a$) 求通弦(c) (Ⅳ)	通弧求通弦 (2)	通弧求通弦 (1)	通弧求通弦 (5)
弧背($2a$) 求矢($\mathrm{vers}\,\alpha$) (Ⅴ)	通弧求矢 (3)	通弧求矢 (2)	通弧求矢 (6)
通弦(c) 求弧背($2a$) (Ⅵ)	通弦求通弧 (6)	通弦求通弧 (5)	通弦求通弧 (7)
正弦($\sin\alpha$) 求弧背(a) (Ⅶ)	正弦求弧背 (8)	正弦求弧背 (7)	正弦求弧度 (3)
正矢($\mathrm{vers}\,\alpha$) 求弧背(a) (Ⅷ)	正矢求弧背 (9)	正矢求弧背 (8)	正矢求弧度 (4)
矢($\mathrm{vers}\,\alpha$) 求弧背($2a$) (Ⅸ)	矢求通弧 (7)	矢求通弧 (6)	正矢求通弧 (8)

十四、明安图的《割圜密率捷法》

明安图以三十年之精思,始撰成《割圜密率捷法》,以解析九术,并由连比例三角形入手。此数与形的结合,堪与笛卡儿创解析几何媲美。兹先说明连比例三角形,及其各率之性质。如图 14,15 $ABE, BEF, EFJ, FJS, JST, STU, TUV, \cdots\cdots$,因第二形之边线,和前形之底线相等,故各边为连比例,如

$$AB : BE = BE : EF = EF : FJ = FJ : JS = JS : ST = ST : TU = \cdots$$

即 $\phi_1 : \phi_2 = \phi_2 : \phi_3 = \phi_3 : \phi_4 = \phi_4 : \phi_5 = \phi_5 : \phi_6 = \cdots\cdots$,

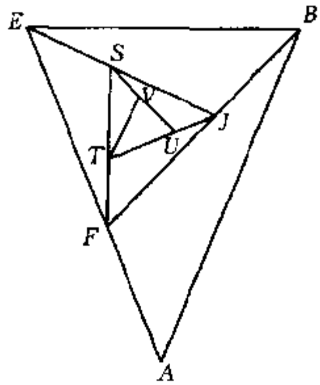


图 14

而 $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\cdots\cdots$等称为一，二，三，……率。

且可知 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$，

$\phi_1:\phi_2=\phi_4:\phi_5$；

$\phi_1:\phi_3=\phi_3:\phi_5$；

$\phi_1:\phi_3=\phi_5:\phi_7$；

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

即 $\phi_3=\dfrac{\phi_2^2}{\phi_1}$；

$\phi_5=\dfrac{\phi_2\cdot\phi_4}{\phi_1}$，或 $\phi_5=\dfrac{\phi_3^2}{\phi_1}$；

$\phi_7=\dfrac{\phi_3\cdot\phi_5}{\phi_1}$，或 $\phi_7=\dfrac{\phi_3^3}{\phi_1^2}$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

$$\phi_{2n+1}=\frac{\phi_n\cdot\phi_{n+2}}{\phi_1}$$

且 $\phi_2,\phi_3,\cdots\cdots$等无论何数，凡与 ϕ_1 可成连比例者，并合上定理。

故可证得： $\phi_3'=\dfrac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}$， 1，2，3，

$$\phi_5'' = \frac{\phi_3'' \cdot \phi_3''}{\phi_1}。$$

分弧通弧求全弧通弦，即弧背求通弦所由起。其法由一分弧通弦，ϕ_2，以几何法证得 2，3，4，5，10，100，1000，10000 分弧之通弦，如下 I°内 $a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ; b_1^\circ, b_2^\circ; c^\circ; d^\circ; e^\circ; f^\circ; g^\circ; h^\circ$所示，若倍数扩充至无穷大，则全弧与无穷大倍数之一分弧通弦($n\phi_2$)相合①。

I°. 分弧通弦率数，求全弧通弦率数法解

a_1°. $\frac{1}{2}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数第一法。

如图 15，A 为圆心，AB 为半径，平分 BD 弧于 C，BC 弧于 E。联 DA、DB、DC；BC、CE、BE、AC、AE 各线。作 $BF=BE$。则$\triangle_s ABE$，BEF 为连比例$\triangle_s$，即 $AB : BE = BE : EF$，或 $\phi_1 : \phi_2 = \phi_2 : \phi_3$，其中 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 称为一，二，三率。

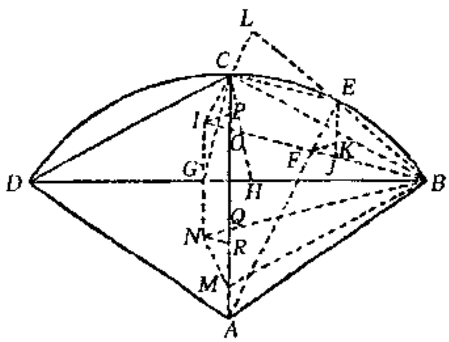


图 15

① 以下见《割圜密率捷法》卷三“法解上”第 1～49 页，道光己亥(1839 年)孟秋，石梁岑氏校刊。

又作 $BG=DH=BC$，则有连比例△$_s$ BCG、CGH。

因 $$\angle BAE=\angle CBD,$$

故连比例△$_s$ ABE、BEF∽连比例△$_s$ BCG、CGH。

即 $$AB : EF=BC : GH,$$

故 $$BD=2BC-GH=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}。$$

又作 $BM=BC$，则有连比例△$_s$ ABC，BCM。

即 $$AB : BC=BC : CM，或\ \phi_1 : \phi_2=\phi_2 : \phi_3。$$

又作 $EJ=EF$，$FK=FJ$，则有连比例△$_s$ ABE，BEF，EFJ，FJK。

其中 $$\phi_1=AB,\phi_2=BE,\phi_3=EF,\phi_4=FJ,\phi_5=JK。$$

次引长 BE，BF，令 $EL=BE$，$FI=BF$，则△BEF∽△BLI。以 BI 为轴，展△BIL 为△BIN。因∠$_s$ CBI，IBG 为平分角，故 BC 与 BG 合。以 BN 为轴，展△BGN 为△BNM。因∠GBN，NBM 为平分角，故 BG 与 BM 合。又作 $IP=IO$，则连比例△$_s$ CIO，IOP＝连比例△$_s$ EFJ，FJK。因筝形(Kite)$ABEC$，$BLIN$ 为相似，故

$$\begin{aligned}AB : 2BE(=BL=BE+EC)&=2BE : LI\\&\quad -IN(=CI+IN+NM)\\&=2BE : CM+PO(=CM+JK)。\end{aligned}$$

由前 $$AB : BC=BC : CM,$$

或 $$\phi_1 : \phi_2=\phi_2 : \phi_3;$$

而 $$\phi_3=\frac{BC^2}{AB}=\frac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1}。$$

又 $$AB : BL=BL : (CI+IN+NM),$$

或 $$\phi_1 : \phi_2'=\phi_2' : \phi_3';$$

而 $$\phi_3'=\frac{BL^2}{AB}=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1},\ \frac{\phi_3'}{4}=CI=\frac{1}{4}\cdot\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}。$$

$$4CI=\phi_3'$$

故 $$\phi_1 : \frac{\phi_3'}{4}=\frac{\phi_3'}{4} : \phi_5'',$$

或 $$\phi_1 : \phi_3''=\phi_3'' : \phi_5'';$$

而 $$\phi_5''=\frac{1}{16}\cdot\frac{\phi_3'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\frac{\phi_5'}{16}=OP。$$

故 $$\phi_3=\phi_3'-\frac{\phi_5'}{16}=CM=4CI-OP=4\phi_3''-\phi_5''。$$

同理 $$\phi_1 : \phi_3=\phi_3 : \phi_5,$$

即 $$\phi_1 : \left(\phi_3'-\frac{\phi_5'}{16}\right)=\left(\phi_3'-\frac{\phi_5'}{16}\right) : \phi_5,$$

$$\phi_5=\phi_5'-2\cdot\frac{\phi_7'}{16}+\frac{\phi_9'}{16\cdot16},$$

或 $$\phi_5=\phi_5'-2\cdot\frac{\phi_7'}{4^2}+\frac{\phi_9'}{4^4};$$

$$\frac{\phi_5}{16}=\frac{\phi_5'}{16}-2\cdot\frac{\phi_7}{16\cdot16}+\frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16},$$

或 $$\frac{\phi_5}{4^2}=\frac{\phi_5'}{4^2}-2\cdot\frac{\phi_7'}{4^2}+\frac{\phi_9'}{4^6}。$$

又同理 $$\phi_1 : \phi_3=\phi_5 : \phi_7$$

即 $$\phi_1 : \phi_3=\frac{\phi_5}{16} : \frac{\phi_7}{16}。$$

$$\phi_1 : \left(\phi_3'-\frac{\phi_5'}{16}\right)=\left(\frac{\phi_5'}{16}-2\cdot\frac{\phi_7'}{16\cdot16}+\frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16}\right) : \frac{\phi_7}{16}$$

$$\frac{\phi_7}{16}=\frac{\phi_7'}{16}-3\frac{\phi_9'}{16\cdot16}+3\frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16}-\frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16},$$

$$\frac{\phi_7}{16\cdot16}=\frac{\phi_7'}{16\cdot16}-3\frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16}$$

$$+3\frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16}\quad\frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}。$$

又 $$\phi_1 : \phi_3=\phi_7 : \phi_9,$$

即 $$\phi_1 : \phi_3 = \frac{\phi_7}{16\cdot16} : \frac{\phi_9}{16\cdot16},$$

$$\phi_1 : \left(\phi_3' - \frac{\phi_5'}{16}\right) = \left(\frac{\phi_7'}{16\cdot16} - 3\,\frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16}\right.$$

$$\left. + 3\,\frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16} - \frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right) : \frac{\phi_9}{16\cdot16}。$$

$$\frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16} = \frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16} - 4\,\frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

$$+ 6\,\frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16} - 4\,\frac{\phi_{15}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

（以下略去）。

又 $$\phi_1 : \phi_3 = \phi_9 : \phi_{11}$$

即 $$\phi_1 : \phi_3 = \frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16} : \frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}$$

$$\phi_1 : \left(\phi_3' - \frac{\phi_5'}{16}\right) = \left(\frac{\phi_9'}{16\cdot16\cdot16}\right.$$

$$- 4\,\frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16} + 6\,\frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

$$\left. - 4\,\frac{\phi_{15}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right) : \frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}。$$

$$\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16} = \frac{\phi_{11}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16} - 5\,\frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

$$+ 10\,\frac{\phi_{15}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$ （以下略去）。

同理

$$\frac{\phi_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16} = \frac{\phi_{13}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16} - 6\,\frac{\phi_{15}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16},$$

$$\frac{\phi_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16} = \frac{\phi_{15}'}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}。$$（以下略去）

由上各式可以求得 $\phi_3, \phi_5, \phi_7 \cdots\cdots$ 为函数的 ϕ_3' 数值，因

$$\phi_3=\phi_3'-\frac{\phi_5'}{16}$$

$$\frac{\phi_5}{16}=\quad\frac{\phi_5'}{16}-2\frac{\phi_7'}{16^2}+\frac{\phi_9'}{16^3}$$

$$2\frac{\phi_7}{16^2}=\quad 2\frac{\phi_7'}{16^2}-6\frac{\phi_9'}{16^3}+6\frac{\phi_{11}'}{16^4}-2\frac{\phi_{13}'}{16^5}$$

$$5\frac{\phi_9}{16^3}=\quad 5\frac{\phi_9'}{16^3}-20\frac{\phi_{11}'}{16^4}+30\frac{\phi_{13}'}{16^5}-20\frac{\phi_{15}'}{16^6}$$

$$14\frac{\phi_{11}}{16^4}=\quad 14\frac{\phi_{11}'}{16^4}-70\frac{\phi_{13}'}{16^5}+140\frac{\phi_{15}'}{16^6}$$

$$42\frac{\phi_{13}}{16^5}=\quad 42\frac{\phi_{13}'}{16^5}-252\frac{\phi_{15}'}{16^6}$$

$$132\frac{\phi_{15}}{16^6}=\quad 132\frac{\phi_{15}'}{16^6}$$

加之得 $\phi_3+\frac{\phi_5}{16}+2\frac{\phi_7}{16^2}+5\frac{\phi_9}{16^3}+14\frac{\phi_{11}}{16^4}+42\frac{\phi_{13}}{16^5}+132\frac{\phi_{15}}{16^6}$

$=\phi_3'$。

而 $$\frac{\phi_3'}{4}=\frac{\phi_3}{4}+\frac{\phi_5}{4\cdot16}+2\frac{\phi_7}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_9}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{11}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{13}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^6}。$$

又 $$EF=\frac{\phi_3'}{4},\frac{BC\times EF}{AB}=\frac{\phi_2}{\phi_1}\left(\frac{\phi_3'}{4}\right)=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

前证得 $BD=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}$，代入得

$$BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

而 $\phi_1=AB=r$；ϕ_2，ϕ_4，ϕ_6，……为分弧通弦率，BD 为二分全弧通弦率；这指明以 BC 为某弧之通弦，因而求得 BD 为二倍弧之通弦。

a_2°. $\frac{1}{2}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数第二法。

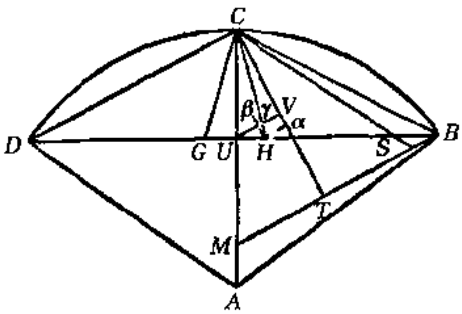


图 16

按图16，于$\triangle BCM$内作 $BM=BC$，$CS=CM$，$ST=MT$；联各线，则有连比例$\triangle$，ABC，BCM，CMS，即 $AB:BC=BC:CM=CM:MS$，即 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4$。自 U，H 作 MB 之平行线 $U\gamma V$，$H\alpha$，则 $MT=\frac{1}{2}\phi_4$，$U\gamma V=\frac{1}{4}\phi_4$。

因$\angle UC\alpha=\angle CBU=\angle GCH$，则$\triangle GCU=\triangle HC\alpha$ 而 $H\alpha=UH=GU$。

自 H 作 $H\beta\perp U\gamma V$。因 $MB\parallel DC$，$U\gamma V\parallel MB$，即 $U\gamma V\parallel DC$。而$\triangle$，DCH，$U\gamma H$ 为相似，故 $UH=U\gamma$。

故得连比例　　$\triangle$，BCG，CGH，$2UHr$。

则　　$AB:BC=BC:CM$，

即　　$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$；

而　　$CU=\frac{1}{2}\phi_3$。

又 $BC : CU = CU : U\gamma V$,

即 $\phi_2 : \frac{1}{2}\phi_3 = \frac{1}{2}\phi_3 : \frac{1}{4}\phi_4$,

则 $\frac{1}{4}\phi_4 = \frac{\left(\frac{1}{2}\phi_3\right)^2}{\phi_2}$,

而 $U\gamma V = \frac{1}{4}\phi_4$。

又 $BC : CG = CG : GH$,

即 $\phi_2 : \frac{1}{2}\phi_3' = \frac{1}{2}\phi_3' : \frac{1}{4}\phi_4'$,

则 $\frac{1}{4}\phi_4' = \frac{\left(\frac{1}{2}\phi_3'\right)^2}{\phi_2}$,

而 $UH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi_4'$。

又 $BC : UH = UH : \beta\gamma$,

即 $\phi_2 : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi_4' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi_4' : \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi_6'$,

则 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi_6' = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi_4'\right)^2}{\phi_2}$,

而 $\beta\gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi_6'$。

如图 $UH + H\alpha - \beta\gamma = U\gamma V$,

即 $\frac{1}{4}\phi_4' - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\phi_6' = \frac{1}{4}\phi_4$。

同理 $\phi_2 : \frac{\phi_4}{4} = \frac{\phi_4}{4} : \frac{\phi_6}{16}$,

即 $\phi_2 : \left(\frac{\phi_4'}{4} - \frac{\phi_6'}{4\cdot 16}\right) = \left(\frac{\phi_4'}{4} - \frac{\phi_6'}{4\cdot 16}\right) : \frac{\phi_6}{16}$,

$$\frac{\phi_6}{16} = \frac{\phi_6'}{16} - 2\,\frac{\phi_8'}{16^2} + \frac{\phi_{10}'}{16^3},$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot16}=\frac{\phi_6'}{4\cdot16}-2\,\frac{\phi_8'}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}'}{4\cdot16^3}。$$

又 $$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_6}{4\cdot16}:\frac{\phi_8}{16^2}$$

即 $$\phi_2:\left(\frac{\phi_4'}{4}-\frac{\phi_6'}{4\cdot16}\right)$$

$$=\left(\frac{\phi_6'}{4\cdot16}-2\,\frac{\phi_8'}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}'}{4\cdot16^3}\right):\frac{\phi_3}{16^2},$$

$$\frac{\phi_8}{16^2}=\frac{\phi_8'}{16^2}-3\,\frac{\phi_{10}'}{16^3}+3\,\frac{\phi_{12}'}{16^4}-\frac{\phi_{14}'}{16^5},$$

$$\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}=\frac{\phi_8'}{4\cdot16^2}-3\,\frac{\phi_{10}'}{4\cdot16^3}+3\,\frac{\phi_{12}'}{4\cdot16^4}-\frac{\phi_{14}'}{4\cdot16^5}。$$

又 $$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}:\frac{\phi_{10}}{16^3}$$

即 $$\phi_2:\left(\frac{\phi_4'}{4}-\frac{\phi_6'}{4\cdot16}\right)$$

$$=\left(\frac{\phi_8'}{4\cdot16^2}-3\,\frac{\phi_{10}'}{4\cdot16^3}+3\,\frac{\phi_{12}'}{4\cdot16^4}-\frac{\phi_{14}'}{4\cdot16^5}\right):\frac{\phi_{10}}{16^3}。$$

$$\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}=\frac{\phi_{10}'}{4\cdot16^3}-4\,\frac{\phi_{12}'}{4\cdot16^4}+6\,\frac{\phi_{14}'}{4\cdot16^5}$$

$$-4\,\frac{\phi_{16}'}{4\cdot16^6}。$$（以下略去）

又 $$\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}=\frac{\phi_{12}'}{4\cdot16^4}-5\,\frac{\phi_{14}'}{4\cdot16^5}+10\,\frac{\phi_{16}'}{4\cdot16^6}。$$

（以下略去）

$$\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}=\frac{\phi_{14}'}{4\cdot16^5}-6\,\frac{\phi_{16}'}{4\cdot16^6}$$（以下略去）

$$\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^6}=\frac{\phi_{16}'}{4\cdot16^6}。$$（以下略去）

由上各式可以求得 $\phi_4,\phi_6,\phi_8,\cdots\cdots$ 为函数之 ϕ_4' 数值，因

$$\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot 16}=\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}=2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}-6\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}+6\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-2\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$5\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}=5\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}-20\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}+30\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-20\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$14\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}=14\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-70\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}+140\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$42\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}=42\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-252\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$132\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}=132\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

加之得　$$\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}=\frac{\phi'_4}{4}。$$

而　$UH=\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi'_4}{4}$。

因得　$BD=2BC-GH=2BC-2UH$

$$=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot 16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6},$$

与第一法相同。

$a_3°$. $\frac{1}{2}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数第三法。

按图 17，引长 BC 交直垂线 DE 于 E。又作 $BF=BE$

则　$DE=CM=\phi_3=a$，

$BD=b$，

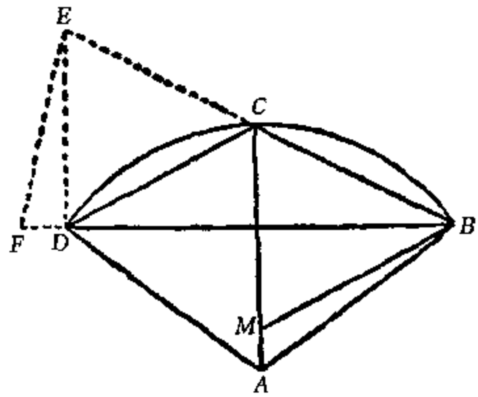


图 17

$$BE = 2\phi_2 = c$$

而 $$a^2 + b^2 = c^2$$

次如图 18，作$\square BEUG = c^2$，$\square FHIG = b^2$。

则 磬折形 $BHUE = (c+b)(c-b) = a^2$。

按毕达哥拉斯定理，$(c+b)(c-b) = a^2$，$\frac{a^2}{c+b} = c-b$，分数$\frac{a^2}{c+b}$之分

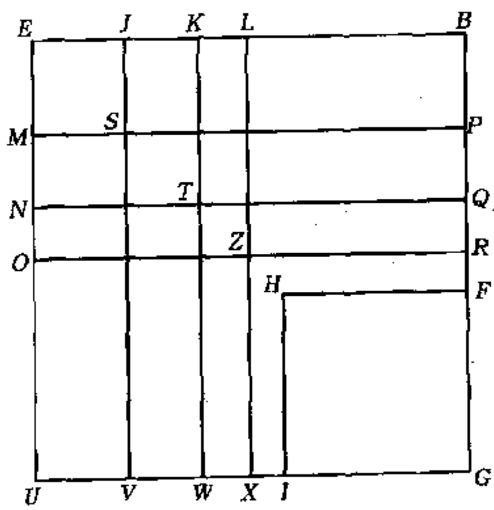


图 18

母分子若为已知，则可直接求得 $c-b$。但仅有分子 $a^2=\phi_3^2$ 为已知，而分母 $c+b$ 中仅有 $c=2\phi_2$ 为已知。如令 $b=c$ 代入之，则分母为 $2c=4\phi_2$，可以先求得 $c-b$ 较小之数，但实际 $c>b$，故 $\frac{a^2}{2c}<c-b$，现假令所得较小之数为 BP。

因上述 $\frac{\phi_3\cdot\phi_3}{4\phi_2}=\left(\frac{\phi_4}{4}\right)$ 之关系，即得 $\frac{(c+b)(c-b)}{2c}=BP$。此 $\frac{1}{c+b}$ 的初商。（初商）

如图 18，如磬折形 $BHUE=\square BEMP+\square JEUV$。

$=$磬折形 $BSUE+\square ES$

则 $\square ES=$磬折形 $PHVS$，而 $ES=\left(\frac{\phi_4}{4}\right)^2$。

又因
$$\frac{\left(\frac{\phi_4}{4}\right)^2}{4\phi_2}=\left(\frac{\phi_6}{4\cdot16}\right)$$

之关系，即得
$$\frac{\text{磬折形 } PHVS}{2c}=PQ,$$

此为 $\frac{a^2}{c+b}$ 的次商。（次商）

又如图 18 中磬折形 $PHVS=\square PN+\square KV$。

$=$磬折形 $QSVT+$磬折形 $JTNS$。

即 磬折形 $QHWT+$磬折形 $QSVT=$磬折形 $QSVT$

$+$磬折形 $JTNS$。

$\therefore$ 磬折形 $JTNS=$磬折形 $QHWT$。

而 磬折形 $JTNS=$中，$JS=\frac{\phi_4}{4}$，$PQ=\frac{\phi_6}{4\cdot16}$。

$\therefore$ 磬折形 $JTNS=$磬折形 $QHWT$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}\right)\frac{\phi_6}{4\cdot16}。$$

故
$$\frac{\text{磬折形 } QHWT}{4\phi_2}=\left(2\cdot\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)=QR。$$
（三商）

同理，磬折形 $KZOT$=磬折形 $RHXZ$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)\times\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)。$$

故 $$\frac{\text{磬折形 }RHXZ}{4\phi_2}=\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)。\quad（四商）$$

同理，

$$\text{五商}=\left\{\left[2\left(\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)+\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)\right]\left[4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right]\right\}\div4\phi_2$$

$$=\left(8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)\text{（以下略去）。}$$

$$\text{六商}=\left(16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)\text{（以下略去）。}$$

$$\text{七商}=\left(32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)\text{（以下略去）。}$$

故 $$c-b=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)+\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)+\left(8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)+\left(16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)+\left(32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$

$$=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

因 $c=2\phi_2$，

故 $$b=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

其结果与前二法同。

其后邹伯奇(1819～1869)以同样图式说明二项式应用于开平方的原理。

b_1°. $\frac{1}{3}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数第一法。

如图 19，以 A 为圆心，AB 为半径，$BC=CD=DE$。联 EC,BD,BE；而 $BD=EC$。由前法知：

$$BD=2BC-GH, EC=2ED-G'H'。$$

次作 $BI=EL=BD$，又作 $DI=DJ=CK=CL$。故连比例$\triangle_s BDI, DIJ$ 或$\triangle_s ECL, CLK\backsim$连比例$\triangle_s BCG, CGH$ 或$\triangle_s EDH', DG'H'$。

即 $$AB : BC=CG : GH$$

或 $$\phi_1 : \phi_2=\phi_3 : \phi_4;$$

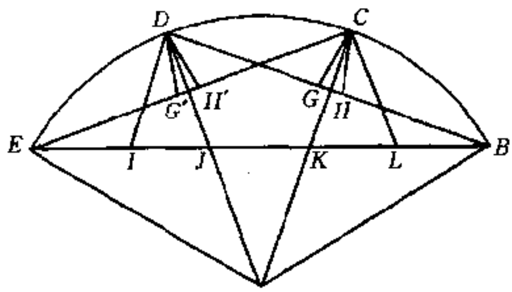


图 19

而 $\qquad BC:GH=BD:IJ$。$\qquad IJ=\dfrac{BD\times GH}{BC}$。

$$BE=2BD-IL=2BD-(DC+IJ)=2BD-BC-IJ。$$

由前题知

$$BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$
$$-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$
$$-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

又知

$$GH=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$
$$+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

$$\frac{BD\times GH}{BC}=2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$
$$-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

则 $\qquad BE=2BD-BC-IJ$

$$=4\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^6}$$
$$-\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot16}+4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$+)\quad+28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

$\therefore\quad BE=3\phi_2-4\dfrac{\phi_4}{4}$为所求三分全弧通弦率数。

$b_2°$. $\frac{1}{3}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数第二法。

如图 19，$AB:BC=CK:KL$，

即此 $$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4$$

$$BE=3BC-KL=3\phi_2-\phi_4。$$

此法甚易，然与前法不能相通，故置为又法。(按此即《数理精蕴》卷十六"新增按分作相连比例四率法"甲之法，1723 年)。

c°. $\frac{1}{4}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如图 20，以 A 为圆心，AB 为半径，BC，CD，……为$\frac{1}{4}$弧；BC，CD，……为$\frac{1}{4}$弧通弦；BD，DF，……为$\frac{1}{2}$弧通弦。求 BF 全弧通弦。

作 $BH=BD$，$FI=FD$；$BG=BC$。

则连比例$\triangle_s BDH$，DHI 或 FDI，$DHI\backsim$连比例，$\triangle_s ABC$，BCG。

即 $$AB:BC=BC:CG$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3;$$

而 $$AB:CG=BD:HI,\qquad HI=\frac{BD\times CG}{AB}。$$

$$BF=2BD-HI=2BD-\frac{BD\times CG}{AB}。$$

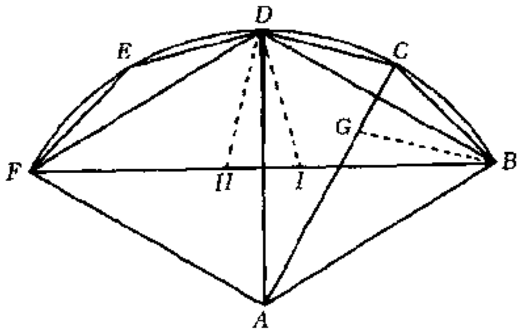


图 20

因 $\frac{BD\times CG}{AB}=\frac{\phi_3}{\phi_1}BD$

$$=8\frac{\phi_4}{4}-16\frac{\phi_6}{4\cdot16}-16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-80\frac{\phi_{12}}{2\cdot16^4}-224\frac{\phi_{14}}{4\cdot11^5}-672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

$BF=2BD-HI$

$$=4\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

$$+)\quad -8\frac{\phi_4}{4}+16\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+80\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+224\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

$$BF=4\phi_2-10\frac{\phi_4}{4}+14\frac{\phi_6}{4\cdot16}+12\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+22\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+52\frac{\phi_{12}}{4\cdot17^4}+140\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+408\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

为所求四分全弧通弦率数。

d°. $\frac{1}{5}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如图 21，以 A 为圆心，AB 为半径，$BC,CD,\cdots\cdots$为$\frac{1}{5}$弧。$BC,CD,\cdots\cdots$为$\frac{1}{5}$弧通弦。BE,GD 为$\frac{1}{3}$弧通弦。作 $BH=BE,GK=GD$，联 EH,DK。此二线各与 DA,EA 平行。

则连比例$\triangle_s BEH,EHI$ 或 $GDK,DKJ\backsim$连比例$\triangle_s AED,EDL$。

即　在$\triangle_s ADE,DEL$

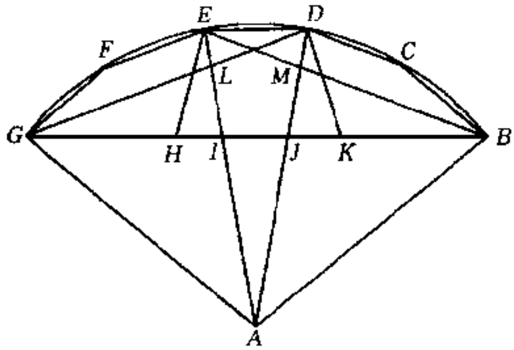


图 21

$$AB : BC = ED : EL, \text{或} \ \phi_1 : \phi_2 = \phi_2 : \phi_3。$$

而 $AB : EL : BE : HI$, $\quad HI = \dfrac{BE \times EL}{AB}$;

$$\begin{aligned} BG &= 2BE - BC - HI \\ &= 2(3\phi_2 - \phi_4) - \phi_2 - (3\phi_2 - \phi_4)\frac{\phi_3}{\phi_1} \\ &= 5\phi_2 - 5\phi_4 + \phi_6。\end{aligned}$$

即 $BG = 5\phi_2 - 5\phi_4 + \phi_6$

为所求五分弧通弦率数。

按此"隔一分加减之法"$\left(\text{即}\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \cdots\cdots\right)$"较逐位递求"的，固然容易。可是析至千万分，亦不胜其繁；故又设以两分数弧通弦率数$\left(\text{如}\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}\right)$，求两分数乘得一分数弧通弦率数$\left(\text{如}\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{1000}\right)$之法。此法项名达称为"易率法"，徐有壬称为"借径术"。其法如下。

e°. $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如图22，以A为圆心，AB为半径。$BEC\cdots\cdots H$为10分全弧，BH为10分弧通弦。BE为1分弧通弦，BC为2分弧通弦，而BEC弧为2分弧，亦为全弧之$\frac{1}{5}$。其中$AB=\phi_1$，$BE=\phi_2$。

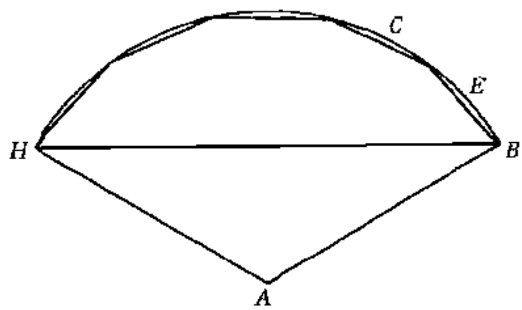


图 22

如令$AB=\phi_1=\phi_1'$，$BC=\phi_2'$，可以求得ϕ_4'，$\phi_6'\cdots\cdots$

即
$$\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1},\ \phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1},$$
$$\phi_6'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_4'}{\phi_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

已知
$$\phi_2'=BC=2\phi_2(=BE)-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-14\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$
$$=CM=4CI-OP$$

及 $\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}=4\phi_3-\phi_5$。（参看图 15）

则 $$\phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=32\,\frac{\phi_4}{4}-192\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}+192\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+128\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+192\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+384\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+896\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

同理，

$$\phi_6'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_4'}{\phi_1}=2048\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}-20480\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+61440\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-40960\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-20480\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-24576\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

但 $BH=5\phi_2'-5\phi_4'+\phi_6'$

故 $$BH=10\phi_2-165\,\frac{\phi_4}{4}+3003\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}-21450\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+60775\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-41990\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-22610\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-29716\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

为 10 分全弧通弦率数。

f°. $\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ 分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如图 23，以 A 为圆心，AB 为半径。$BCHI$ 为 100 分全弧。BI 为 100 分全弧通弦。BC 为 1 分弧通弦。BH 为 10 分弧通弦。而 BCH 为 10 分弧，亦为全弧之 $\frac{1}{10}$。

如令 $AB=\phi_1=\phi_1'$。$BH=\phi_2'$ 可以求得 $\phi_4',\phi_6',\cdots\cdots$

即 $\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1},\phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1},\phi_6'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_4'}{\phi_1},\cdots\cdots$

令 $$\phi_2'=BH=10\phi_2-165\,\frac{\phi_4}{4}+3003\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}-21450\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+60775\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-41990\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

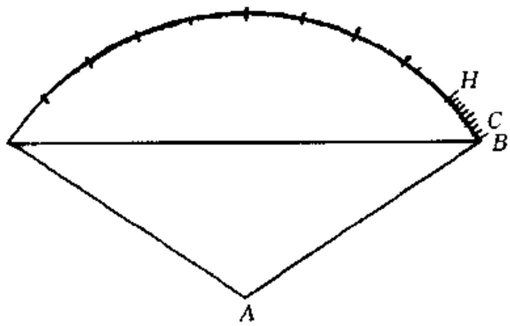


图 23

$$-22610\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-29716\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6},$$

$$\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}=100\phi_3-3300\,\frac{\phi_5}{4}+168960\,\frac{\phi_7}{4\cdot16}$$

$$-4392960\,\frac{\phi_9}{4\cdot16^2}+65601536\,\frac{\phi_{11}}{4\cdot16^3}$$

$$-596377600\,\frac{\phi_{13}}{4\cdot16^4}+3355443200\,\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^5},$$

$$\phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=1000\phi_4-49500\,\frac{\phi_6}{4}+4167900\,\frac{\phi_8}{4\cdot16}$$

$$-197227800\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^2}+5874133980\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^3}$$

$$-117332222280\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^4}+1633711449432\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^5},$$

$$\frac{\phi_4'}{4}=1000\,\frac{\phi_4}{4}-198000\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16671600\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$-788911200\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+23496535920\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-469328889120\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+6534845797728\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}。$$

同理 $\phi_6' = \frac{\phi_3' \cdot \phi_4'}{\phi_1} = 100000\phi_6 - 825000\frac{\phi_8}{4}$

$$+1239150000\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16} - 112586100000\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^2}$$

$$+6943061510000\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^3} - 309389380780000\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^4},$$

$$\frac{\phi_6'}{4\cdot 16} = 100000\frac{\phi_6}{4\cdot 16} - 33000000\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2} + 4956600000\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$-450344400000\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4} + 27772246040000\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-1237557523120000\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6},$$

$$\frac{\phi_8'}{4\cdot 16^2} = 10^7\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2} - 462\times 10^7\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3} + 998844\times 10^6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$-134521464\times 10^6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$+126777505624\times 10^5\frac{\phi_{16}}{3\cdot 16^6},$$

$$\frac{\phi_{10}'}{4\cdot 16^3} = 10^9\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3} - 594\times 10^9\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4} + 1676268\times 10^8\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-299349864\times 10^8\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6},$$

$$\frac{\phi_{12}'}{4\cdot 16^4} = 10^{11}\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4} - 726\times 10^{11}\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5} + 2527932\times 10^{11}\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6},$$

$$\frac{\phi_{14}'}{4\cdot 16^5} = 10^{13}\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5} - 858\times 10^{13}\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6},$$

$$\frac{\phi_{16}'}{4\cdot 16^6} = 10^5\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6};$$

但 $BI = 10\phi_2' - 165\frac{\phi_4'}{4} + 3003\frac{\phi_6'}{4\cdot 16} - 21450\frac{\phi_8'}{4\cdot 16^2}$

$$+60775\frac{\phi_{10}'}{4\cdot 16^3} - 41990\frac{\phi_{12}'}{4\cdot 16^4}$$

$$-22610\frac{\phi_{14}'}{4\cdot 16^5} - 29716\frac{\phi_{16}'}{4\cdot 16^6}。$$

故 $$BI=100\phi_2-166650\frac{\phi_4}{4}+333000030\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$$
$$-316350028500\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}$$
$$+17488840755750\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$
$$-6308081496204670 0\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$
$$+1597885566692498700\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$
$$-299215485831496628228 0\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}。$$

即百分全弧通弦率数。

g°. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如前说得

$$BJ=1000\phi_2-1666666500\frac{\phi_4}{4}$$
$$+33333000000300\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$$
$$-317449206431428500 0\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}$$
$$+17635202856684075555750 0\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$
$$-6412281601910066962047267000\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$
$$+16439758245733938061297075078700 0\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$
$$-313085331935055410016470456628794280 0\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$$

即千分全弧通弦率数。

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$分弧通弦率数，求全弧通弦率数。

如前说得

$$BK=10000\phi_2-166666665000\,\frac{\phi_4}{4}$$

$$+3333333000000003000\,\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$

$$-31746020634921457142850000\,\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$+1763666948853963668407555555575000\,\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-641332916466812762435266962047272670000\,\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+16444413857794457374149343983955092123078700000\,\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-3132264070711435752669786985059763664566287999427000\,\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

即万分全弧通弦率数[①]。

Ⅱ°. 弧背求通弦率数法解[②]

在前 f°(百分全弧通弦率数),g°(千分全弧通弦率数),h°(万分全弧通弦率数),所得 BI,BJ,BK,可以比例相较而得弧背求通弦之率数,因其间都有共同的性质。又因

$$\phi_4=\frac{\phi_2^3}{\phi_1^2},\phi_6=\frac{\phi_2^5}{\phi_1^4},\phi_8=\frac{\phi_2^7}{\phi_1^6},$$

$$\phi_{10}=\frac{\phi_2^9}{\phi_1^8},\phi_{12}=\frac{\phi_2^{11}}{\phi_1^{10}},\cdots\cdots,\phi_{16}=\frac{\phi_2^{15}}{\phi_1^{14}};$$

故 BI,BJ,BK 可书为

---

① 以上见《割圜密率捷法》卷三"法解上",第 1~49 页,道光己亥(1839 年)孟秋,石梁岑氏校刊。

② 以下见《割圜密率捷法》卷三"法解上",第 49~59 页,石梁岑氏校刊本。

$$BI=(100\phi_2)-\frac{(100\phi_2)^3}{\frac{4(100)^3}{166650}\phi_1^2}+\frac{(100\phi_2)^5}{\frac{4(100)^3}{166150}\cdot\frac{166650\times16(100)^2}{333000030}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^7}{\frac{4(100)^3}{166650}\cdot\frac{1666650\times16(100)^2}{333000030}\times\frac{333000030\times16(100)^2}{316350028500}\phi_1^6}+\cdots\cdots,$$

$$=(100\phi_2)-\frac{(100\phi_2)^3}{24.0024\phi_1^2}+\frac{(100\phi_2)^5}{24.0024\times80.07\phi_1^4}-\frac{(100\phi_2)^7}{24.0024\times80.07\times168.842\phi_1^6}$$

$$+\frac{(100\phi_2)^9}{24.0024\times80.07\times168.42\times289.41\phi_1^8}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{11}}{24.0024\times80.07\times168.42\times289.41\times443.59\phi_1^{10}}+\cdots\cdots。$$

$$BJ=(1000\phi_2)-\frac{(1000\phi_2)^3}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\phi_1^2}+\frac{(1000\phi_2)^5}{\frac{4(1000)^3}{1666666500}\cdot\frac{166666500\times16(1000)^2}{33333000000300}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^7}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\cdot\frac{166666500\times16(1000)^2}{33333000000300}\times\frac{33333000000300\times16(1000)^2}{31744920643142850000}\phi_1^6}+\cdots\cdots;$$

$$=(1000\phi_2)-\frac{(1000\phi_2)^3}{24.000024\phi_1^2}+\frac{(1000\phi_2)^5}{24.000024\times80.0007\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^7}{24.000024\times80.0007\times168.0042\phi_1^6}+\frac{(1000\phi_2)^9}{24.000024\times80.0007\times168.0042\times288.014\phi_1^8}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^{11}}{24.000024\times 80.0007\times 168.0042\times 288.014\times 440.035\phi_1^{10}}+\cdots\cdots。$$

$$BK=(10000\phi_2)-\frac{(10000\phi_2)^3}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\phi_1^2}+\frac{(10000\phi_2)^5}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{33333330000000003000}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^7}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{33333330000000003000}\times\frac{33333330000000003000\times 16(10000)^2}{317460206349214571428500000}\phi_1^6}$$

$$+\cdots\cdots;$$

$$BK=(10000\phi_2)-\frac{(10000\phi_2)^3}{24.00000024\phi_1^2}+\frac{(10000\phi_2)^5}{24.00000024\times 80.000007\phi_1^4}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^7}{24.00000024\times 80.000007\times 168.000042\phi_1^6}$$

$$+\frac{(10000\phi_2)^9}{24.00000024\times 80.000007\times 168.000042\times 288.00014\phi_1^8}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^{11}}{24.00000024\times 80.000007\times 168.000042\times 288.00014\times 440.00035\phi_1^{10}}$$

$$+\frac{(10000\phi_2)^{13}}{24.00000024\times 80.000007\times 168.000042\times 288.00014\times 440.00035\times 624.00075\phi_1^{12}}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^{15}}{24.00000024\times 80.000007\times 168.000042\times 288.00014\times 440.00035\times 624.00075\times 840.0014\phi_1^{14}}$$

$$+\cdots\cdots。$$

现比较 BI,BJ,BK 各项分母奇零之差，逼弧愈近则愈微。例如 BI,BJ,BK 第二项分母逐次为 24.0024，24.000024，24.00000024 是也。

若径以(全)弧背为二率(即 $2a=1000\cdots\cdots000\phi_2$)，则奇零必尽，而分母为 24，80，168，288，440，624，840 等整数。此时的通弦 $=c$，而 $r=\phi_1$，则得

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{24r^2}+\frac{(2a)^5}{24\times 80r^4}-\frac{(2a)^7}{24\times 80\times 168r^6}+\frac{(2a)^9}{24\times 80\times 168\times 288r^8}-\frac{(2a)^{11}}{24\times 80\times 168\times 288\times 440r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{24\times 80\times 168\times 288\times 440\times 624r^{12}}-\frac{(2a)^{15}}{24\times 80\times 168\times 288\times 440\times 624\times 840r^{14}}+\cdots\cdots;$$

$$=2a-\frac{(2a)^3}{4\times 6r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\times 6\times 20r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\times 6\times 20\times 42r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4\times 6\times 20\times 42\times 72r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156r^{12}}-\frac{(2a)^{15}}{4^7\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156\times 210r^{14}}+\cdots\cdots,$$

故 $$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot 11!\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\cdot 13!\cdot r^{12}}-\frac{(2a)^{15}}{4^7\cdot 15!\cdot r^{14}}+\cdots\cdots。\qquad(\text{IV})$$

设以 $BD=a$ 为(半)弧背,$BDC=2a$ 为(全)弧背,$BC=c$ 为通弦,$AB=r$ 为半径,而 d 为全径。又 $DE=$(全)弧背($2a$)之矢。又为半弧背(a)之正矢,则

$$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}r^{2(n-1)}(2n-1)!}\qquad(\text{IV})$$

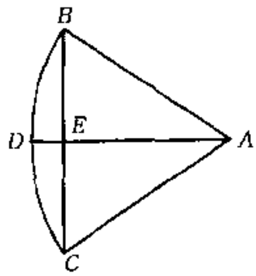


图　24

Ⅲ°. 通弦求弧背率数法解①

已知弧背求通弦率数法,再由通弦求弧背率数法,李善兰称为:"级数回求。"徐有壬称为:"还原术。"其法如下:

盖因　$\phi_3'=\dfrac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}$, $\phi_4'=\dfrac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1}$, $\phi_6'=\dfrac{\phi_3'\cdot\phi_4'}{\phi_1}$,

$\phi_8'=\dfrac{\phi_3'\cdot\phi_6'}{\phi_1}$, $\phi_{10}'=\dfrac{\phi_3'\cdot\phi_8'}{\phi_1}$, $\phi_{12}'=\dfrac{\phi_3'\cdot\phi_{10}'}{\phi_1}$,

$\phi_{14}'=\dfrac{\phi_3'\cdot\phi_{12}'}{\phi_1}$, $\phi_{16}'=\dfrac{\phi_2'\cdot\phi_{14}'}{\phi_1}$。

之关系,令

① 以下见《割圜密率捷法》卷三"法解上",第 59～71 页,道光己亥(1839 年)孟秋,石梁岑氏校刊。

$$\phi_2'=c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}$$
$$+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot 11!\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\cdot 13!\cdot r^{12}},$$

$$\phi_3'=\frac{(2a)^2}{r}-2\frac{(2a)^4}{4\cdot 3!\cdot r^3}+5\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^6}{4^2\cdot 5!\cdot r^5}-16\cdot\frac{(2a)^8}{4^3\cdot 7!\cdot r^7}$$
$$+51\frac{1}{5}\cdot\frac{(2a)^{10}}{4^4\, 9!\cdot r^9}-170\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{12}}{4^5\, 11!\cdot r^{11}}$$
$$+585\frac{1}{7}\cdot\frac{(2a)^{14}}{4^7\, 13!\cdot r^{13}},$$

$$\phi_4'=\frac{(2a)^3}{r^2}-3\frac{(2a)^5}{4\cdot 3!\cdot r^4}+13\frac{(2a)^7}{4^2\cdot 5!\cdot r^6}-68\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^3\cdot 7!\cdot r^8}$$
$$+402\frac{3}{5}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^4\cdot 9!\cdot r^{10}}-2555\frac{(2a)^{13}}{4^5\cdot 11!\cdot r^{12}}$$
$$+17082\frac{1}{35}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^6\cdot 13!\cdot r^{14}},$$

$$\phi_6'=\frac{(2a)^5}{r^4}-5\frac{(2a)^7}{4\cdot 3!\cdot r^6}+38\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^2\cdot 5!\cdot r^8}$$
$$-378\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^3\cdot 7!\cdot r^{10}}+4417\frac{(2a)^{13}}{4^4\cdot 9!\cdot r^{12}}$$
$$-58085\frac{(2a)^{15}}{4^5\cdot 11!\cdot r^{14}},$$

$$\phi_8'=\frac{(2a)^7}{r^6}-7\frac{(2a)^9}{4\cdot 3!\cdot r^8}+77\frac{(2a)^{11}}{4^2\cdot 5!\cdot r^{10}}$$
$$-1117\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^3\cdot 7!\cdot r^{12}}+19600\frac{1}{5}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^4\cdot 9!\cdot r^{14}},$$

$$\phi_{10}'=\frac{(2a)^9}{r^8}-9\frac{(2a)^{11}}{4\cdot 3!\cdot r^{10}}+129\frac{(2a)^{13}}{4^2\cdot 5!\cdot r^{12}}$$
$$-2473\frac{(2a)^{15}}{4^3\cdot 7!\cdot r^{14}},$$

$$\phi_{12}'=\frac{(2a)^{11}}{r^{10}}-11\frac{(2a)^{13}}{4\cdot 3!\cdot r^{12}}+194\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^2\cdot 5!\cdot r^{14}},$$

$$\phi'_{14}=\frac{(2a)^{13}}{r^{12}}-13\,\frac{(2a)^{15}}{4\cdot 3!\cdot r^{14}},$$

$$\phi'_{16}=\frac{(2a)^{15}}{r^{14}};$$

故
$$\phi'_2+\frac{\phi'_4}{4\cdot 3!}+\frac{9\phi'_6}{4^2\cdot 5!}+\frac{9\cdot 25\cdot \phi'_8}{4^3\cdot 7!}+\frac{9\cdot 25\cdot 49\phi'_{10}}{4^4\cdot 9!}$$
$$+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\phi'_{12}}{4^5\cdot 11!}+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\cdot 121\phi'_{14}}{4^6\cdot 13!}$$
$$+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\cdot 121\cdot 169\phi'_{16}}{4^7\cdot 15!}=2a。$$

即
$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}$$
$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot c^{11}}{4^5\cdot 11!\cdot r^{10}}+\cdots\cdots,$$

或
$$2a=\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}c^{(2n-1)} \qquad (\text{Ⅵ})$$

Ⅳ°. 弧背正弦相求法解[①]

因 $\sin\alpha=\frac{c}{2}$，故(Ⅳ)式可化为

$$\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3\cdot r^2}+\frac{a^5}{5\cdot r^4}-\frac{a^7}{7\cdot r^6}+\frac{a^9}{9\cdot r^8}-\frac{a^{11}}{11\cdot r^{10}}$$
$$+\frac{a^{13}}{13\cdot r^{12}}-\frac{a^{15}}{15\cdot r^{14}}+\cdots\cdots;$$

或
$$\sin\alpha=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}, \qquad (\text{Ⅱ})$$

---

① 以下见《割圜密率捷法》卷三"法解上"，第 71～73 页。

V°. 分弧正矢率数，求全弧正矢率数法解①

分弧正矢，求全弧正矢，即弧背求正矢率数所自起。其法先以几何法证 2，3，4，5，10，100，1000，10000 弧之正矢，如下 a°，b°，c°，d°，e°，f°，g°，h°所示：

a°. $\frac{1}{2}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

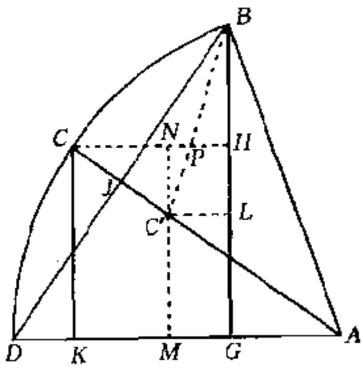


图 25

如图 25，以 A 为圆心，AB 为半径，平分 BD 弧于 C。联 BC，BD，AC 各线。作 $BC'=BC$。

则 $\triangle_s ABC$，BCC' 为连比例$\triangle_s$。

即 $$AB : BC = BC : CC'$$

或 $$\phi_1 : \phi_2 = \phi_2 : \phi_3$$

而 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 为一，二，三率。

又自 B，C，C'，作 AD 之直垂线 BG，CK，$NC'M$。

① 以下见《割圜密率捷法》卷四"法解下"，第 1～23 页。道光己亥(1839 年)孟秋，石梁岑氏校刊。

自 C,C' 作 AD 之平行线 $CNPH,C'L$。

则$\triangle_s ABC,BCC',CC'P,2\cdot C'PN$ 为连比例$\triangle_s$;$\triangle_s BCJ,C'PN$ 为相似形。

即 $AB:CJ=CC':PN$。

如图 25, $AB=\phi_1,BC=\phi_2,CC'=\phi_3,$

$$CJ=DK=MG=\text{vers }\alpha=\frac{\phi_3}{2},$$

$$CP=2\cdot\frac{\phi_3}{2},C'P=\phi_4,PN=\frac{\phi_5}{2}。$$

故 $AB:CJ=CC':PN$

可书为 $\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=2\cdot\frac{\phi_3}{2}:\frac{\phi_5}{2}$。

$$\begin{aligned}\text{vers }2\alpha&=DG\\&=(CP-PN)+(DK+MG)\\&=\left(2\cdot\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}\right)+2\cdot\frac{\phi_3}{2}=4\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}。\end{aligned}$$

b°. $\frac{1}{3}$分弧正矢率数,求全弧正矢率数。

如图 26,以 A 为圆心,AB 为半径,BC,CD,DE 为$\frac{1}{3}$弧$=\alpha$。

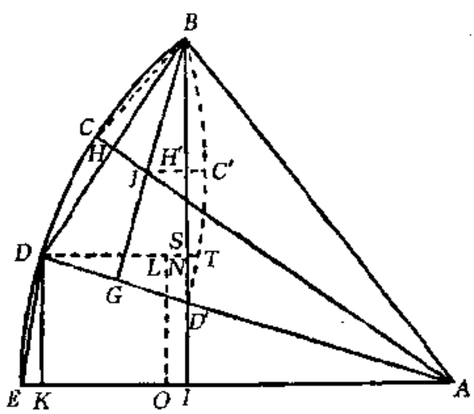


图 26

BCD 为$\frac{2}{3}$弧，$BCDE$ 为$\frac{3}{3}$弧。

又 $$CH, EK = \text{vers } \alpha,$$
$$DG = \text{vers } 2\alpha$$
$$EI = \text{vers } 3\alpha$$

试以 BJG 为轴，将 $BCDG$ 面右展为 $BC'D'G$。作 $LN=CH$，则 $CH=C'H'=EK=LN=\text{vers } \alpha$，$D'G=\text{vers } 2\alpha$，……而 $\Delta_s ADE$，$DD'T$ 几为相似，$DD' \doteqdot DT$（按此两$\triangle_s$虽非绝对相似，而所差已至微细）。

如图 26，因前例，令 $AB=\phi_1$，$DD'=8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}$。

又因 $$AD : EK = DD' : ST,$$

即 $$\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right) : ST。$$

则 $$\text{vers } 3\alpha = EI = (DD'-ST-C'H')+(EK+LN)$$
$$=\left[\left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right)-\left(8\frac{\phi_5}{2^2}-4\frac{\phi_7}{2^3}\right)-\frac{\phi_3}{2}\right]+2\frac{\phi_3}{2}。$$
$$=9\frac{\phi_3}{2}-12\frac{\phi_5}{2^2}+4\frac{\phi_7}{2^3}。$$

c°. $\frac{1}{4}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如图 27，以 A 为圆心，AB 为半径；BC，CD，DE，EF 为$\frac{1}{4}$弧$=\alpha$，BCD 为$\frac{2}{4}$弧$=2\alpha$，$BCDE$ 为$\frac{3}{4}$弧$=3\alpha$，$BCDEF$ 为$\frac{4}{4}$弧$=4\alpha$。

试以 BJI 为轴，将 $BCDEI$ 面右展为 $BD'E'I$。

而 $\Delta_s AEF$，$EE'T$ 几为相似。$EE' \doteqdot ET$。

如图 27，因前例，令 $AB=\phi_1$，作 $LN=DH$。

$$EE'=18\frac{\phi_3}{2}-24\frac{\phi_5}{2^2}+8\frac{\phi_7}{2^3}。$$

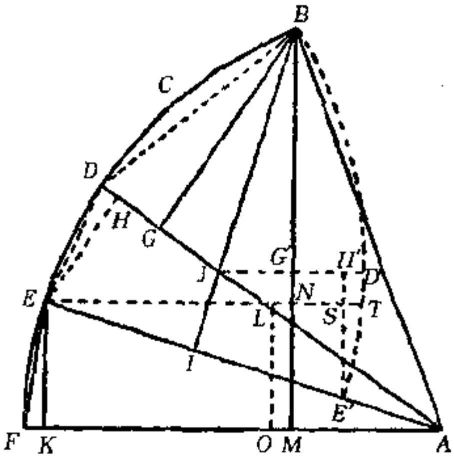


图 27

又因 $$AE : FK = EE' : ST,$$

即 $$\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) : ST。$$

则 $$\text{vers } 4\alpha = FM = (EE' - ST - D'G') + (FK + LN)$$

$$= \left[\left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) - \left(18\frac{\phi_5}{2^2} - 24\frac{\phi_7}{2^3} + 8\frac{\phi_9}{2^4}\right) - \left(4\frac{\phi_3}{2} - 2\frac{\phi_5}{2^2}\right)\right] + 2\frac{\phi_3}{2}。$$

$$= 16\frac{\phi_3}{2} - 40\frac{\phi_5}{2^2} + 32\frac{\phi_7}{2^3} - 8\frac{\phi_9}{2^4}。$$

d°. $\frac{1}{5}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如图 28，因前例 $\Delta_s AFG, FF'T$ 几为相似，$FF' \doteqdot FT$ 令 $AB = \phi_1$，作 $LN = EH$。

$$FF' = 32\frac{\phi_3}{2} - 80\frac{\phi_5}{2^2} + 64\frac{\phi_7}{2^3} - 16\frac{\phi_9}{2^4}。$$

又因 $$AF : GK = FF' : ST。$$

即 $$\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \left(32\frac{\phi_3}{2} - 80\frac{\phi_5}{2^2} + 64\frac{\phi_7}{2^3} - 16\frac{\phi_9}{2^4}\right) : ST。$$

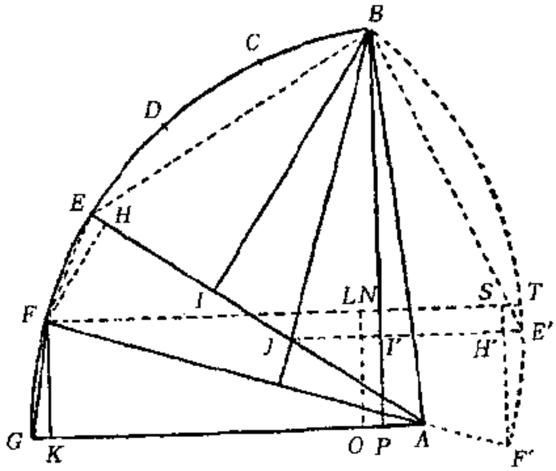


图 28

则 $$\text{vers } 5\alpha = GP = (EF' - ST - E'I') + (GK + LN)$$

$$= \left[\left(32\frac{\phi_3}{2} - 80\frac{\phi_5}{2^2} + 64\frac{\phi_7}{2^3} - 16\frac{\phi_9}{2^4}\right)\right.$$

$$-\left(32\frac{\phi_5}{2^2} - 80\frac{\phi_7}{2^3} + 64\frac{\phi_9}{2^4} - 16\frac{\phi_{11}}{2^5}\right)$$

$$\left.-\left(9\frac{\phi_3}{2} - 12\frac{\phi_5}{2^2} + 4\frac{\phi_7}{2^3}\right)\right] + 2\frac{\phi_3}{2}$$

$$= 25\frac{\phi_3}{2} - 100\frac{\phi_5}{2^2} + 140\frac{\phi_7}{2^3} - 80\frac{\phi_9}{2^4} + 16\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

e°. $\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ 分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如前有$\frac{1}{10}$分弧通弦，求全弧通弦之例。令

$$AB = \phi_1 = \phi_1',$$

$$\frac{\phi_3'}{2} = 25\frac{\phi_3}{2} - 100\frac{\phi_5}{2^2} + 140\frac{\phi_7}{2^3} - 80\frac{\phi_9}{2^4} + 16\frac{\phi_{11}}{2^5},$$

$$\frac{\phi_5'}{2^2} = \frac{\phi_3' \cdot \phi_3'}{2^2\phi_1} = 625\frac{\phi_5}{2^2} - 5000\frac{\phi_7}{2^3} + 17000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-32000\frac{\phi_{11}}{2^5}+36400\frac{\phi_{13}}{2^6}-25600\frac{\phi_{15}}{2^7}+10880\frac{\phi_{17}}{2^9}。$$

但由 a°知 $\text{vers}\ 10\alpha=\text{vers}\ 2(5a)=4\frac{\phi_3'}{2}-2\frac{\phi_5'}{2^2}$

$$=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8}。$$

f°. $\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如前例有$\frac{1}{10}$分弧通弦，求全弧通弦之例。令

$$AB=\phi_1=\phi_1'。$$

$$\frac{\phi_3'}{2}=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi_5'}{2^2}=\frac{\phi_3'\cdot\phi_3'}{2^2\phi_1}=10000\frac{\phi_5}{2^2}-330000\frac{\phi_7}{2^3}+4834500\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-41712000\frac{\phi_{11}}{2^5}+237582400\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-950809600\frac{\phi_{15}}{2^7}+2781374080\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi_7'}{2^3}=\frac{\phi_3'\cdot\phi_5'}{2^3\phi_1}=1000000\frac{\phi_7}{2^3}-49500000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+1133550000\frac{\phi_{11}}{2^5}-15976125000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-155601600000\frac{\phi_{15}}{2^7}+1115359800000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi_9'}{2^4}=\frac{\phi_3'\cdot\phi_7'}{2^4\phi_1}=100000000\frac{\phi_9}{2^4}-1600000000\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-205590000000\frac{\phi_{13}}{2^6}-4025010000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+55653958250000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{11}}{2^5}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{2^5\phi_1}=10000000000\frac{\phi_{11}}{2^5}-825000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+32505000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-814852500000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{13}}{2^6}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{2^6\phi_1}=1000000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}-99000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+4717350000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{15}}{2^7}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{2^7\phi_1}=100000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-11550000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{17}}{2^8}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{2^8\phi_1}=10000000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8}。$$

由 e°知，vers $100\alpha=$ vers $10\ (10\alpha)$

$$=100\frac{\phi'_3}{2}-1650\frac{\phi'_5}{2^2}+10560\frac{\phi'_7}{2^3}-34320\frac{\phi'_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi'_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi'_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi'_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi'_{17}}{2^8}$$

$$=10000\frac{\phi_3}{2}-16665000\frac{\phi_5}{2^2}+11105556000\frac{\phi_7}{2^2}$$

$$-3962700357000\frac{\phi_9}{2^4}+879191119206400\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-132877748698240000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+14549383384936960000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-1206507617195897408000\frac{\phi_{17}}{2^8}。$$

g°. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如前例：

$$\begin{aligned}\text{vers } 1000\alpha = {} & 1000000\,\frac{\phi_3}{2}-166666500000\,\frac{\phi_5}{2^2}+111110555555600000\,\frac{\phi_7}{2^3} \\ & -396819841292857000000\,\frac{\phi_9}{2^4} \\ & +8818077603192717488640000\,\frac{\phi_{11}}{2^5} \\ & -133603896240579385791924000000\,\frac{\phi_{13}}{2^6} \\ & +1468121829673788186088302096000000\,\frac{\phi_{15}}{2^7} \\ & -12233749097534451420559864743310800000\,\frac{\phi_{17}}{2^8}。\end{aligned}$$

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$分弧正矢率数，求全弧正矢率数。

如前例

$$\begin{aligned}\text{vers } 10000\alpha = {} & 100000000\,\frac{\phi_3}{2}-1666666650000000\,\frac{\phi_5}{2^2}+11111110555555560000000\,\frac{\phi_7}{2^3} \\ & -396825341269843214285700000000\,\frac{\phi_9}{2^4} \\ & +88183395055474628149063492064000000\,\frac{\phi_{11}}{2^5}\end{aligned}$$

$$-1336111712361843884661684103001924000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+14682541003973984566536117801268691420960000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-1223544484127407718443098957543875917905100310800000000\frac{\phi_{17}}{2^8}。$$

Ⅵ°. 弧背求正矢率数法解①

在前 f°,g°,h°所得百分全弧正矢率数 vers 100 α,千分全弧正矢率数 vers 1000 α,万分全弧正矢率数 vers 10000 α 可如前 Ⅱ°“弧背求通弦率法解”之例,比例相较,得“弧背求正矢率数”,以其间并有共同之性质也。又因

$$\phi_3=\frac{\phi_2^2}{\phi_1},\phi_5=\frac{\phi_2^4}{\phi_1^3},$$

$$\phi_7=\frac{\phi_2^6}{\phi_1^5},\phi_9=\frac{\phi_2^8}{\phi_1^7},$$

$$\phi_{11}=\frac{\phi_2^{10}}{\phi_1^9},\cdots\cdots,\phi_{17}=\frac{\phi_2^{16}}{\phi_1^{15}},$$

① 以下见《割圜密率捷法》卷四,“法解下”,第 23～31 页。道光己亥(1839)孟秋石梁岑氏校刊。

vers 100 α

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(100\phi_2)^4}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\phi_1^3}+\frac{(100\phi_2)^6}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times16665000\times(100)^2}{11105556000}\phi_1^5}\\
&-\frac{(100\phi_2)^8}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times16665000\times(100)^2}{11105556000}\cdot\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{3962700357000}\phi_1^7}\\
&+\frac{(100\phi_2)^{10}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdots\cdots\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{3962700357000}\cdot\frac{2\times3962700357000\times(100)^2}{879191119206400}\phi_1^9}\\
&-\frac{(100\phi_2)^{12}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdots\cdots\frac{2\times3963700057000\times(100)^2}{879191119206400}\cdot\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{132877748698240000}\phi_1^{11}}\\
&+\frac{(100\phi_2)^{14}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdots\cdots\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{132877748698240000}\cdot\frac{2\times132877748698240000\times(100)^2}{14549383384936960000}\phi_1^{13}}\\
&-\frac{(100\phi_2)^{16}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdots\cdots\frac{2\times132877748698240000\times(100)^2}{14549383384936960000}\cdot\frac{2\times14549383384936960000\times(100)^2}{1206576171958974080000}\phi_1^{15}}
\end{aligned}
$$

即 vers 100 α

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(100\phi_2)^4}{2\times 12.0012\phi_1^3}\\
&+\frac{(100\phi_2)^6}{2\times 12.0012\times 30.012\phi_1^5}\\
&-\frac{(100\phi_2)^8}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\phi_1^7}\\
&+\frac{(100\phi_2)^{10}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\phi_1^9}\\
&-\frac{(100\phi_2)^{12}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\times 132.33\phi_1^{11}}\\
&+\frac{(100\phi_2)^{14}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 132.33\times 182.65\phi_1^{13}}\\
&-\frac{(100\phi_2)^{16}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 182.65\times 241.1\phi_1^{15}}。
\end{aligned}
$$

同理,vers 1000 α

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(1000\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(1000\phi_2)^4}{2\times 12.000012\phi_1^3}\\
&+\frac{(1000\phi_2)^6}{2\times 12.000012\times 30.00012\phi_1^5}\\
&-\frac{(10000\phi_2)^8}{2\times 12.000012\times 30.00012\times 56.0005\phi_1^7}\\
&+\frac{(1000\phi_2)^{10}}{2\times 12.000012\times\cdots\cdots\times 56.0005\times 90.0014\phi_1^9}\\
&-\frac{(10000\phi_2)^{12}}{2\times 12.000012\times\cdots\cdots\times 90.0014\times 132.0033\phi_1^{11}}\\
&+\frac{(1000\phi_2)^{14}}{2\times 12.000012\times\cdots\cdots\times 132.0033\times 182.0065\phi_1^{13}}\\
&-\frac{(1000\phi_2)^{16}}{2\times 12.000012\times\cdots\cdots\times 182.0065\times 240.011\phi_1^{15}}。
\end{aligned}
$$

vers 10000 α

$$=\frac{(10000\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(10000\phi_2)^4}{2\times 12.00000012\phi_1^3}$$

$$+\frac{(10000\phi_2)^6}{2\times 12.00000012\times 30.0000012\phi_1^5}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^8}{2\times 12.00000012\times 30.0000012\times 56.000005\phi_1^7}$$

$$+\frac{(10000\phi_2)^{10}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 56.000005\times 90.000014\phi_1^9}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^{12}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 90.000014\times 132.000033\phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(10000\phi_2)^{14}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 132.000033\times 182.000065\phi_1^{13}}$$

$$-\frac{(10000\phi_2)^{16}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 182.000065\times 240.00011\phi_1^{15}}。$$

若以半弧背 $a=100\cdots\cdots00\ \alpha=100\cdots\cdots00\ \phi_2$,

全弧背 $2a=2\times 100\cdots\cdots00\ \phi_2$,

则
$$\text{vers}\ \alpha=\frac{a^2}{2r}-\frac{a^4}{2\times 12r^3}+\frac{a^6}{2\times 12\times 30r^5}$$

$$-\frac{a^8}{2\times 12\times 30\times 56r^7}+\frac{a^{10}}{2\times 12\times 30\times 56\times 90r^9}$$

$$-\frac{a^{12}}{2\times 12\times 30\times 56\times 90\times 132r^{11}}$$

$$+\frac{a^{14}}{2\times 12\times 30\times 56\times 90\times 132\times 182r^{13}}$$

$$-\frac{a^{16}}{2\times 12\times 30\times 56\times 90\times 132\times 182\times 240r^{15}}$$

$$=\frac{a^2}{2!\cdot r}-\frac{a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{a^6}{6!\cdot r^5}-\frac{a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{10!\cdot r^9}$$

$$-\frac{a^{12}}{12!\cdot r^{11}}+\frac{a^{14}}{14!\cdot r^{13}}-\frac{a^{16}}{16!\cdot r^{15}},$$

或
$$\text{vers}\ \alpha=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!}。\qquad (\mathrm{II})$$

Ⅶ°. 正矢求弧背法解①

这和“通弦求弧背法解”同是级数回求法。

因 $\phi'_5=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_7=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}$, $\phi'_9=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{\phi_1}$, $\phi'_{11}=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{\phi_1}$,

$\phi'_{13}=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{\phi_1}$, $\phi'_{15}=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{\phi_1}$, $\phi'_{17}=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{\phi_1}$

之关系，及

$$\begin{aligned}\text{vers }\alpha=&\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\times12}+\frac{\phi_7}{2\times12\times30}-\frac{\phi_9}{2\times12\times30\times56}\\&+\frac{\phi_{11}}{2\times12\times30\times56\times90}\\&-\frac{\phi_{13}}{2\times12\times30\times56\times90\times132}\\&+\frac{\phi_{15}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182}\\&-\frac{\phi_{17}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\text{vers }\alpha=\phi_3&-\frac{\phi_5}{12}+\frac{\phi_7}{12\times30}-\frac{\phi_9}{12\times30\times56}\\&+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90}-\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}\\&+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}\\&-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240},\end{aligned}$$

令 $$\begin{aligned}\phi'_3=2\text{vers }\alpha=\phi_3&-\frac{\phi_5}{12}+\frac{\phi_7}{12\times30}-\frac{\phi_9}{12\times30\times56}\\&+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90}-\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}\end{aligned}$$

---

① 以下见《割圜密率捷法》卷四“法解下”，第 31～37 页。道光己亥（1839 年）孟秋，石梁岑氏校刊。

$$+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240},$$

$$\phi_5'=\phi_5-2\frac{\phi_7}{12}+4\frac{1}{2}\frac{\phi_9}{12\times30}-11\frac{1}{3}\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56}$$

$$+31\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90}-90\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+273\frac{1}{20}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182},$$

$$\phi_7'=\phi_7-3\frac{\phi_9}{12}+10\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{11}}{12\times30}-42\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56}$$

$$+195\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90}$$

$$-976\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132},$$

$$\phi_9'=\phi_9-4\frac{\phi_{11}}{12}+19\frac{\phi_{13}}{12\times30}-106\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56}$$

$$+685\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90},$$

$$\phi_{11}'=\phi_{11}-5\frac{\phi_{13}}{12}+30\frac{\phi_{15}}{12\times30}-215\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56},$$

$$\phi_{13}'=\phi_{13}-6\frac{\phi_{15}}{12}+43\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30},$$

$$\phi_{15}'=\phi_{15}-7\frac{\phi_{17}}{12},$$

$$\phi_{17}'=\phi_{17}。$$

则 $$\phi_3'+\frac{\phi_5'}{12}+4\frac{\phi_7'}{12\times30}+36\frac{\phi_9'}{12\times30\times56}$$

$$+576\frac{\phi_{11}'}{12\times30\times56\times90}$$

$$+14400\frac{\phi_{13}'}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+518400\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+25401600\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}$$

$$=\phi_3,$$

或 $$\frac{a^2}{r}=\phi'_3+1^2\frac{\phi'_5}{12}+2^2\frac{\phi'_7}{12\times30}+2^2\cdot3^2\frac{\phi'_9}{12\times30\times56}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\frac{\phi'_{11}}{12\times30\times56\times90}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\frac{\phi'_{13}}{12\times30\times56\times90\times182}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot7^2\cdot\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240};$$

即 $$a^2=r\Big[(2\text{ vers }\alpha)+\frac{1^2(2\text{ vers }\alpha)^2}{3\cdot4r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{ vers }\alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6r^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }\alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}\Big]+\cdots\cdots,$$

或 $$a^2=2r\sum_{i}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-2)^2}{r^{n-1}(2n)!}。\qquad(\text{VIII})$$

VIII°. 弧背矢相求法解①

因 $$a^n=\frac{(2a)^{2n}}{2^{2n}}=\frac{(2a)^{2n}}{4^n},$$

故(Ⅲ)式可化为

$$\text{vers }\alpha=\frac{(2a)^2}{4\cdot2!\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot4!\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot6!\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^5\cdot8!\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\text{vers }\alpha=\sum_{i}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\cdot r^{2n-1}(2n)!}。\qquad(\text{V})$$

---

① 以下见《割圜密率捷法》卷四,"法解下",第37~38页。

十五、孔广森的《少广正负术》

孔广森(1752～1786)《顨轩孔氏所著书》五十五《少广正负术外篇》上称:"密弧求法,宣城御史大夫梅公书中尝载焉。至其弧背弦矢互求,亦各有乘除之法,世则罕有传者,广森幸得闻之于灵台郎陈君际新。"

弦求弧背

$$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1},\qquad(\text{Ⅵ})$$

矢求弧背

$$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}(2n)!}(2\operatorname{vers}\alpha)^n,\qquad(\text{Ⅷ})$$

弧背求矢

$$\operatorname{vers}\alpha=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!},\qquad(\text{Ⅲ})$$

弧背求弦

$$\sin\alpha=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}。\qquad(\text{Ⅱ})$$

徐有壬(1800～1860)《测圜密率》卷二引作"正弦求弧背"(Ⅵ),"正矢求弧背"(Ⅷ),"弧背求正矢"(Ⅲ),"弧背求正弦"(Ⅱ)。

十六、董祐诚的《割圜连比例图解》

董祐诚(字方立,阳湖人,1791～1823)于嘉庆二十四年(1819年)撰《割圜连比例图解》三卷其卷上冠以杜氏九术,并立"以弦求弧"、"以矢求矢"四则,即:

(1)有通弦求通弧加倍几分之通弦。凡弦之倍分,皆取奇数。

$$c_m = mc - \frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2} + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4} - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6} + \cdots。 \qquad (\text{X})$$

(2)有矢求通弧加倍几分之矢。凡矢之倍分，奇偶通用。

$$\text{vers}\ m\ \alpha = m^2(\text{vers}\ \alpha) - \frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers}\ \alpha)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r} + \frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers}\ \alpha)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2} - \cdots, \qquad (\text{XI})$$

(3)有通弦求几分通弧之一通弦。此亦取奇数。

$$c_{1/m} = \frac{c}{m} + \frac{(m^2-1)c^3}{4\cdot 3!\cdot m^3 r^2} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\cdot 5!\cdot m^5\cdot r^4} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot 7!\cdot m^7\cdot r^6} + \cdots, \qquad (\text{X})\text{a}$$

(4)有矢求几分通弧之一矢。此亦奇偶通用。

$$\text{vers}\ \frac{1}{m}\alpha = \frac{(\text{vers}\ \alpha)}{m^2} + \frac{(4m^2-4)2(\text{vers}\ \alpha)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot m^4\cdot r} + \frac{(4m^2-4)(4\cdot 4m^2-4)2^2(\text{vers}\ \alpha)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2} + \cdots。 \qquad (\text{XI})\text{a}$$

董氏并称此四术为立法之原，杜氏九术由此推衍而归于简易。

如图 29 和图 30、图 34、图 39，$AB=r=\phi_1$，

BC 弧为一分弧，其弦 BC，($c_1=\phi_2$)；

BD 弧为二分弧，其矢 CP，($\text{vers}\alpha=CP$)；

倍矢 CC'，($b_1=2\text{vers}\ \alpha=CC'$)；

BE 弧为三分弧，其弦 BE，($c_3=BE$)；

BF 弧为四分弧，其矢 DQ，($\text{vers}\ 2\alpha=DQ$)；

倍矢 DD'，($b_2=2\ \text{vers}\ 2\alpha=DD'$)；

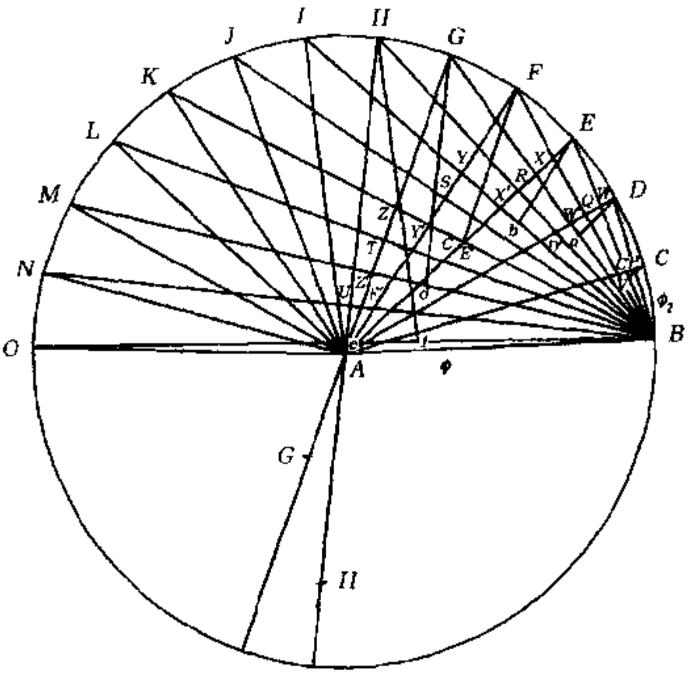


图 29

BG 弧为五分弧，其弦 BG，$(c_5=BG)$；

BH 弧为六分弧，其矢 ER，(vers $3\alpha=ER$)；

倍矢 EE'，($b_3=2$ vers $3\alpha=EE'$)；

BI 弧为七分弧，其弦 BI，$(c_7=BI)$；

BJ 弧为八分弧，其矢 FS，(vers $4\alpha=FS$)；

倍矢 FF'，($b_4=2$ vers $4\alpha=FF'$)；

BK 为九分弧，其弦 BK，$(C_9=BK)$；

十分弧，其矢 vers 5α，

倍矢，($b_5=2$ vers 5α)；

十一分弧，其弦 C_{11}；

十二分弧，其矢 vers 6α，

倍矢($b_6=2$ vers 6α);

十三分弧,其弦 C_{13}。

因 $$AB=\phi_1, BC=\phi_2, CV /\!/ DA,$$

$$AB : BC=BC : CC'。$$

即 $$\phi_1 : \phi_2=\phi_2 : \phi_3,$$

而 $$CC'=\phi_3=2\text{ vers }\alpha, \frac{CC'}{2}=\frac{\phi_3}{2}=\text{vers }\alpha$$

故一分弧之弦 BC, $c_1=\phi_2$,

二分弧之倍矢 CC' $b_1=\phi_3$

又 $$AB : BC=CC' : C'V,$$

即 $$\phi_1 : \phi_2=\phi_3 : \phi_4。$$

故三分弧之弦,$BE=2BC+(BC-C'V)$,

即 $$c_3=2(\phi_2)+(\phi_2-\phi_4), =3\phi_2-\phi_4。$$

又 $$BW'=BE-BC=2\phi_2-\phi_4,$$

$$AB : BC=BW' : W'W$$

即 $$\phi_1 : \phi_2=(2\phi_2-\phi_4) : W'W。$$

$$W'W=2\phi_3-\phi_5,$$

$$W'Q=\frac{W'W}{2}=\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5,$$

$$DQ=DW'+W'Q=CC'+W'Q。$$

或 $$\text{vers }4\alpha=2\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5。$$

故四分弧之倍矢,$DD'=2CC'+W'W$。

即 $$b_2=(2\phi_3-\phi_5)+2(\phi_3)=4\phi_3-\phi_5。$$

又 $$AB : BC=DW : Wa,$$

即 $$\phi_1 : \phi_2=(3\phi_3-\phi_5) : Wa。$$

$$Wa=3\phi_4-\phi_6, X'W=BC-Wa。$$

$$=\phi_2-3\phi_4+\phi_6,$$

$$2BW=2BW'=2(2\phi_2-\phi_4)=4\phi_2-2\phi_4。$$

故五分弧之弦， $BG=2BW+X'W$。

即 $$c_5=2(2\phi_2-\phi_4)+(\phi_2-3\phi_4+\phi_6)$$

$$=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6。$$

又 $$BX'=BW+X'W,$$

$$=BG-BW=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

$$AB:BC=BX':X'X。$$

即 $$\phi_1:\phi_2=(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6):X'X。$$

$$X'X=3\phi_3-4\phi_5+\phi_7。$$

$$RX'=\frac{X'X}{2}=1\frac{1}{2}\phi_3-2\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7。$$

$$ER=RX'+EX=RX'+DW。$$

或 $$\operatorname{vers}6\alpha=4\frac{1}{2}\phi_3-3\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7。$$

故六分弧之倍矢 $EE'=X'X+2DW$。

即 $$b_3=(3\phi_3-4\phi_5+\phi_7)-2(3\phi_3-\phi_5)$$

$$=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$$

又 $$EX=EE'-E'X=EE'-DW$$

$$=6\phi_3-5\phi_5+\phi_7,$$

$$AB:BC=EX:Xb,$$

$$\phi_1:\phi_2=(6\phi_3-5\phi_5+\phi_7):Xb,$$

$$Xb=6\phi_4-5\phi_6+\phi_8,$$

$$XY'=EF-Xb=BC-Xb$$

$$=\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8。$$

故七分弧之弦 $BI=2BX+XY'$，

即 $$c_7=2(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6)+(\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8)$$

$$=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8。$$

又 $BY'=BI-BX'=4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8,$

$$AB:BC=BY':Y'Y,$$

$$\phi_1:\phi_2=(4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8):Y'Y,$$

$$Y'Y=4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9,$$

故八分弧之倍矢 $FF'=Y'Y+2EX$。

即 $b_4=(4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9)+2(6\phi_3-5\phi_5+\phi_7)$

$$=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9。$$

……………………………………

若按序列之，则因以下的关系：

$$1+1+1+1+\cdots\cdots+1=n。$$

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2!}$$

$$1+3+6+10+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$1+4+10+20+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$1+5+15+35+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+4)}{5!}$$

$$1+6+21+56+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6!}$$

……………………………………

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{n(2n)}{2!}$$

$$1+4+9+16+25\cdots\cdots+\frac{n(2n)}{2!}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$1+5+14+30+55+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

$$1+6+20+50+105+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$1+7+27+77+182+378+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{6!}$$

………………………………………………

故 一分弧之弦 $=\phi_2$,

三分弧之弦 $=2(\phi_2)+(\phi_2-\phi_4)$,

五分弧之弦 $=2(2\phi_2-\phi_4)+(\phi_2-3\phi_4+\phi_6)$,

七分弧之弦 $=2(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6)+(\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8)$,

九分弧之弦 $=2(4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8)$,

$+(\phi_2-10\phi_4+15\phi_6-7\phi_8+\phi_{10})$,

十一分弧之弦 $=2(5\phi_2-20\phi_4+21\phi_6-8\phi_8+\phi_{10})$

$+(\phi_2-15\phi_4+35\phi_6-28\phi_8+9\phi_{10}-\phi_{12})$,

十三分弧之弦 $=2(6\phi_2-35\phi_4+56\phi_6-36\phi_8+10\phi_{10}$

$-\phi_{12})+(\phi_2-21\phi_4+70\phi_6-84\phi_8$

$+45\phi_{10}-11\phi_{12}+\phi_{14})$,

十五分弧之弦 $=2(7\phi_2-56\phi_4+126\phi_6-120\phi_8$

$+55\phi_{10}-12\phi_{12}+\phi_{14})+(\phi_2-28\phi_4$

$$+126\phi_6-210\phi_8+165\phi_{10}-66\phi_{12}$$
$$+13\phi_{14}-\phi_{16}),$$

十七分弧之弦$=2(8\phi_2-84\phi_4+252\phi_6-330\phi_8$
$$+220\phi_{10}-78\phi_{12}+14\phi_{14}-\phi_{16})$$
$$+(\phi_2-36\phi_4+210\phi_6-462\phi_8$$
$$+495\phi_{10}-286\phi_{12}+91\phi_{14}-15\phi_{16}+\phi_{18})$$

时，同理可归纳得：

$(2n+1)$分弧之弦

$$=2\left[n\phi_2-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{5!}\phi_6\right.$$
$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{7!}\phi_8$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{9!}\phi_{10}$$
$$\left.-\cdots+(-1)^{n-1}\phi_{2n}\right]$$
$$+\left[\phi_2-\frac{n(n+1)}{2!}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n+2)}{4!}\phi_6\right.$$
$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n+3)}{6!}\phi_8$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n+4)}{8!}\phi_{10}$$
$$\left.-\cdots+(-1)^n\phi_{2n+2}\right],$$

或可书：m 分弧之弦，

$$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\cdot3!}\phi_4-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot5!}\phi_6$$
$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot7!}\phi_8+\cdots,\qquad (\mathrm{X})$$

或因 $c_1=\phi_2$,

$$c_3=3\phi_2-\phi_4,$$

$$c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$$

$$c_7=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8,$$

$$c_9=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10},$$

$$c_{11}=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}-\phi_{12},$$

$$c_{13}=13\phi_2-91\phi_4+182\phi_6-156\phi_8$$
$$+65\phi_{10}-13\phi_{12}+\phi_{14},$$

$$c_{15}=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8$$
$$+275\phi_{10}-90\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16},$$

$$c_{17}=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8$$
$$+935\phi_{10}-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}+\phi_{18},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

时,同理可归纳得:

$$c_{2n-1}=(2n-1)\phi_2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{3!}\phi_4$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-1)}{5!}\phi_6$$
$$-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(2n-1)}{7!}\phi_8$$
$$+\cdots\cdots,$$

或
$$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\cdot 3!}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot 5!}\phi_6$$
$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot 7!}\phi_8+\cdots\cdots,$$

或
$$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}$$
$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\cdots, \qquad (\text{X})$$

同理，$b_1=(\phi_3)$，

$$b_2=(2\phi_3-\phi_5)+2(\phi_3),$$

$$b_3=(3\phi_3-4\phi_5+\phi_7)+2(3\phi_3-\phi_5),$$

$$b_4=(4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9)+2(6\phi_3-5\phi_5+\phi_7),$$

$$b_5=(5\phi_3-20\phi_5+21\phi_7-8\phi_9+\phi_{11})+2(10\phi_3-15\phi_5+7\phi_7-\phi_9),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}b_m=&\Big(m\phi_3-\frac{(m-1)m(m+1)}{3!}\phi_5\\&+\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{5!}\phi_7\\&-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{7!}\phi_9\\&+\cdots\cdots\Big)\\&+2\Big(\frac{(m-1)m}{2!}\phi_3-\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{4!}\phi_5\\&+\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{6!}\phi_7\\&-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{8!}\phi_9\\&+\cdots\cdots\Big)\\=&\frac{2\cdot(2m)^2}{4\cdot 2!}\phi_3-\frac{2\cdot(2m)^2[(2m)^2-2^2]}{4^2\cdot 4!}\phi_5\\&+\frac{2\cdot(2m)^2[(2m)^2-2^2][(2m)^2-4^2]}{4^3\cdot 6!}\phi_7\\&-\frac{2\cdot(2m)^2[(2m)^2-2^2][(2m)^2-4^2][(2m)^2-6^2]}{4^4\cdot 8!}\phi_9+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

或因 $b_1=\phi_3$，

$$b_2=4\phi_3-\phi_5,$$

$$b_3=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7,$$

$$b_4=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$$

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$b_m=m^2\phi_3-\frac{2m^2(m^2-1^2)}{4!}\phi_5+\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{6!}\phi_7-\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{8!}\phi_9+\cdots\cdots,$$

或

$$\text{vers } m\ \alpha=m^2(\text{vers } \alpha)-\frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers } \alpha)^2}{4\cdot3\cdot4r}+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers } \alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\cdots。\qquad (\text{XI})$$

在(X),(XI)二式,如 m 为极大,则括弧内所减 1,4,9,16,25,36,……各数,可不入算。

又以

$$m\phi_2=2a,$$

$$(2m)^2\phi_3=\frac{(2m)^2\phi_2^2}{\phi_1}=\frac{(2a)^2}{r}$$

$$m^3\phi_4=\frac{m^3\cdot\phi_2\cdot\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1\cdot\phi_1}=\frac{(2a)^3}{r^2};$$

$$(2m)^4\phi_5=\frac{(2m)^4\phi_2^4}{\phi_1^3}=\frac{(2m)^4\phi_2}{\phi_1^3}=\frac{(2a)^4}{r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故(X),(XI)二式可化为(IV),(V),即:

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot3!\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot5!\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot7!\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或

$$c=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n+1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!};\qquad (\text{IV})$$

及

$$\text{vers } \alpha=\frac{(2a)^2}{4\cdot2!\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot4!\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot6!\cdot r^5}$$

$$-\frac{(2a)^8}{4^4\cdot 8!\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或
$$\operatorname{vers}\alpha=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\cdot r^{2n+1}\cdot(2n)!}。\qquad(\mathrm{V})$$

同理，得（Ⅱ），（Ⅲ）[①]。

次由（Ⅳ），得（Ⅵ），由（Ⅲ）得（Ⅷ），回求之法，略同明氏解法。此与明氏同以（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），（Ⅴ），（Ⅵ），（Ⅷ）为基本，以（Ⅳ），（Ⅴ）又为基本之基本，故先述之。

项名达称："堆积既与率数合，何以有倍分无析分，倍分中弦率又何以有奇分无偶分，且弦矢线于圆中，与三角堆何与。"[②] 于是有《象数一原》之作，说详次节。

十七、项名达的《象数一原》

项名达(1789～1850)因董祐诚《割圜连比例》中所论割圜："堆积既与率数合，何以有倍分无析分，倍分中弦率又何以有奇分无偶分，且弦矢线于圆中，于三角堆何与。"蓄是疑有年，丁酉(1837 年)归自苕南，舟中偶念此，恍然有悟，先为《图说》二卷[③]。至丙午冬(1846 年)复以前稿疏脱甚多，续为图解，未成而死。其友戴煦(1805～1860)为续成之，共得七卷，是为《象数一原》[④]。其后徐有壬、夏鸾翔皆本项氏之法，其立法之根，实从廉法表递加之数，悟得其理，与西法之二项例无异，惟当时二项之例，尚未译出，项氏深思而得之[⑤]。计其卷目，则：

---

① 以上见《割圜连比例图解》卷上，中。

② 见《象数一原》，项名达自序。

③ 见《象数一原》，项名达道光二十三年(1843 年)自序。

④ 《象数一原》六卷，项名达撰，戴煦续第七卷。

⑤ 见华蘅芳《学算笔谈》卷十二。

卷一 (A) 整分起度弦矢率论。

卷二 (B) 半分起度弦矢率论。

卷三 (C) 零分起度弦矢率论。

卷四 (D) 零分起度弦矢率论(原本不全,戴煦补)。

卷五 (E) 诸术通诠。

卷六 (F) 诸术明变(原本无加减差表,戴煦补)。

卷七 椭圆求周图解(原本无,戴煦补)。

(A) 整分起度弦矢率论

本论所采图形,与董氏全相一致,只略变其步骤,以求计算之简捷。

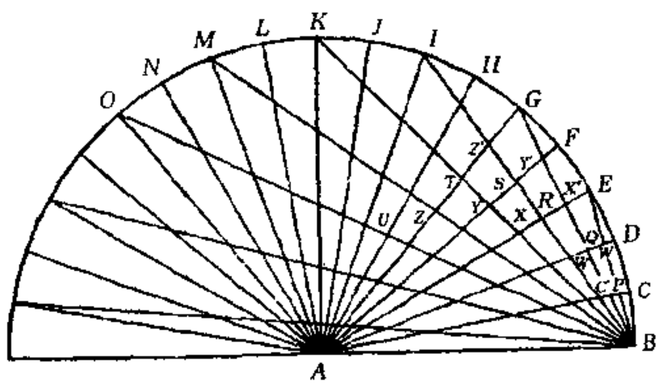


图 30

如图 30,第一形 ABC, 第二形 BCC', 第三形 $AC'W'$, 第四形 $BW'W$, 第五形 AWX', 第六形 $BX'X$, 第七形 AXY', 第八形 $BY'Y$, 第九形 AYZ', 第十形 $BZ'Z$,……,

都为相似等腰三角形。

令第一形 ABC，腰 $AB=\phi_1$，

$$\left.\begin{array}{r}\text{第一形 } ABC\text{，底}\\ \text{或第二形 } BCC'\text{ 腰}\end{array}\right\} BC=\phi_2,$$

第二形 BCC' 底 $CC'=\phi_3$，

则第三形 $AC'W'$ 腰 $AC'=\phi_1-\phi_3$，即第一形腰，第二形底相减之数。

$$\text{第三形 } AC'W' \text{ 底 } C'W'=\frac{BC}{AB}\times AC'$$
$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-\phi_3)=\phi_2-\phi_4,$$

第四形 $BW'W$ 腰 $BW'=BC+C'W'=2\phi_2-\phi_4$，

即第二形腰，第三形底相加之数。

$$\text{第四形 } BW'W \text{ 底 } WW'=\frac{BC}{AB}\times BW'$$
$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(2\phi_2-\phi_4)=2\phi_3-\phi_5,$$

$$\text{第五形 } AWX' \text{ 腰 } AW=AC'-WW'$$
$$=(\phi_1-\phi_3)-(2\phi_3-\phi_5)$$
$$=\phi_1-3\phi_3+\phi_5,$$

即第三形腰，第四形底相减之数。

$$\text{第五形 } AWX' \text{ 底 } WX'=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-3\phi_3+\phi_5)=\phi_2-3\phi_4+\phi_6,$$

$$\text{第六形 } BX'X \text{ 腰 } BX'=BW'+WX'$$
$$=(2\phi_2-\phi_4)+(\phi_2-3\phi_4+\phi_6)$$
$$=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

即第四形腰，第五形底相加之数。

$$\text{第六形 } BX'X \text{ 底 } XX'=\frac{\phi_2}{\phi_1}(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6)$$

$$=3\phi_3-4\phi_5+\phi_7。$$

同理，

第七形 AXY' 腰 $AX=\phi_1-6\phi_3+5\phi_5-\phi_7$，

第七形 AXY' 底 $XY'=\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8$，

第八形 $BY'Y$ 腰 $BY'=4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8$，

第八形 $BY'Y$ 底 $YY'=4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9$，

第九形 AYZ' 腰 $AY=\phi_1-10\phi_3+15\phi_5-7\phi_7+\phi_9$，

第九形 AYZ' 底 $YZ'=\phi_2-10\phi_4+15\phi_6-7\phi_8+\phi_{10}$，

第十形 $BZ'Z$ 腰 $BZ'=5\phi_2-20\phi_4+21\phi_6-8\phi_8+\phi_{10}$，

第十形 $BZ'Z$ 底 $ZZ'=5\phi_3-20\phi_5+21\phi_7-8\phi_9+\phi_{11}$，

………………………………………………

而第 n 形腰=第 $n-2$ 形腰，

第 $n-1$ 形底相减之数， n=奇数；

第 n 形底$=\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$(第 n 形腰)， n=奇数；

第 m 形腰=第 $m-2$ 形腰，

第 $m-1$ 形底相加之数，m=偶数；

第 m 形底$=\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$(第 m 形腰) m=偶数；

故得：

(a)逐分通弦率。

即：

一分通弦 $BC=\phi_2$，

三分通弦 $BE=3\phi_2-\phi_4$，

五分通弦 $BG=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

七分通弦 $BI=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8$，

九分通弦 $BK=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10}$，

十一分通弦 $BM=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}-\phi_{12}$,

十三分通弦 $BO=13\phi_2-9\phi_4+182\phi_6-156\phi_8+65\phi_{10}$
$-13\phi_{12}+\phi_{14}$,

十五分通弦 $=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8+275\phi_{10}$
$-90\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16}$,

十七分通弦 $=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8+935\phi_{10}$
$-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}+\phi_{18}$,

而 n 分通弦 $=$第$n-1$形腰,及第$n+1$形腰相加之数,
而$n=$奇数,

(b)逐分倍矢率。

命第三,五,……形腰较,为第三,五,……形腰与半径之较。

一分倍矢 $2CP=\phi_3$,即第二形腰较,

二分倍矢 $2DQ=4\phi_3-\phi_5$,即第三,五形腰较和,

三分倍矢 $2ER=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$ 即五,七形腰较和,

四分倍矢 $2FS=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$,即七,九形腰较和,

五分倍矢 $2GT=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$,即九,十一形腰较和,

六分倍矢 $2HU=36\phi_3-105\phi_5+112\phi_7-54\phi_9+12\phi_{11}-\phi_{13}$,即十一,十三形腰较和,

七分倍矢 $=49\phi_3-196\phi_5+296\phi_7-210\phi_9+77\phi_{11}-14\phi_{13}+\phi_{15}$,即十三,十五形腰较和,

八分倍矢 $=64\phi_3-336\phi_5+672\phi_7-660\phi_9+352\phi_{11}-104\phi_{13}+16\phi_{15}-\phi_{17}$,即第十五,十七形腰较之和,

而 m 分倍矢 $=$第 $2m-1$ 形腰较,及第 $2m+1$ 形腰较相加之数。

即知 n 分通弦为第 $n-1$ 形腰,及第 $n+1$ 腰相加之数;又 m 分倍矢为第 $2m-1$ 形腰较,及第 $2m+1$ 腰较相加之数,而各形腰,及各形腰较,与各率的关系,又可以以下的"递加图"示之,即:

第	第	第	第	第	第	第	第	第	第	第	第
二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三
形	形	形	形	形	形	形	形	形	形	形	形
腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰	腰
	较		较		较		较		较		较

ϕ_2	1	2	3	4	5	6	根，	其积即董氏之平 三角堆积，
ϕ_3	1	3	6	10	15	21	平积，	其积即董氏之立 三角堆积，
ϕ_4	1	4	10	20	35		立积，	其积即董氏之三乘 三角堆积，
ϕ_5	1	5	15	35	70		三乘积，	其积即董氏之四乘 三角堆积，
ϕ_6	1	6	21	50			四乘积，	其积即董氏之五乘 三角堆积，
ϕ_7	1	7	28	84			五乘积，	其积即董氏之六乘 三角堆积，
ϕ_8	1	8	36				六乘积，	其积即董氏之七乘 三角堆积，
ϕ_9	1	9	45				七乘积，	其积即董氏之八乘 三角堆积，
ϕ_{10}	1	10					八乘积，	其积即董氏之九乘 三角堆积，
ϕ_{11}	1	11					九乘积，	其积即董氏之十乘 三角堆积，
ϕ_{12}	1						十乘积，	其积即董氏之十一乘 三角堆积，
ϕ_{13}	1						十一乘积，	其积即董氏之十二乘 三角堆积，

此即巴斯噶三角形(Pascal's triangle)斜视之图。在国中则杨辉《详解九章算法》(1261 年)、朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)已首论之[①]。原图如次：

左积　右隅
本积①
商除①①
平方①②①
立方①③③①
三乘①④⑥④①
四乘①⑤⑩⑩⑤①
五乘①⑥⑮⑳⑮⑥①

左衺乃积数，右衺乃隅算，中藏者皆廉，
以廉乘商方，命而实除之。

因二项式定理之最简式：

$$
\begin{aligned}
(1+1)^n &= 1+n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 1^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 1^3 \\
&\quad +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 1^4+\cdots\cdots+1^n, \\
&= 1+n\cdot 1+(\text{平三角堆积})+(\text{立三角堆积}) \\
&\quad +(\text{三乘三角堆积})+\cdots\cdots+1^n。
\end{aligned}
$$

故项名达求腰率法称：形数($2n$)折半为根，即为二率(之系数，如第八形腰，为$\frac{8}{2}\phi_2=4\phi_2$，第十形腰，为$\frac{10}{2}\phi_2=5\phi_2$……，第 $2n$ 形腰为$n\phi_2$)。根自乘减一，以乘二率，二除之，三除之，得四率[之系数，如第八形腰，为$\frac{4(4^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=10\phi_4$，第十形腰为$\frac{5(5^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=20\phi_4$，……，第 $2n$ 形腰，为$\frac{n(n^2-1)}{3}\phi_4$]。根自乘减四，以乘四率，四除之，五除之，得六率[之系数，如第八形腰，为$\frac{10(4^2-4)}{4\cdot 5}\phi_6=6\phi_6$，第十形

① 见李俨《中算家的巴斯噶三角形研究》，《中算史论丛》第一集(*见本书第六卷。　编者)。

腰为$\frac{20(5^2-4)}{4\cdot5}\phi_6=21\phi_6$，…，第 $2n$ 形腰为$\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5!}\phi_6$]。根自乘减九，以乘六率，六除之，七除之，得八率[之系数，如第八形腰为$\frac{6(4^2-9)}{6\cdot7}\phi_8=\phi_8$，第十形腰为$\frac{21(5^2-9)}{6\cdot7}\phi_8=8\phi_8$，……，第 $2n$ 形腰，为$\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{7!}\phi_8$]。二率为正，四率为负，以下皆正负相间，凡乘法恒以 1，2，3，4 等数自乘之，与根自乘相减。若相减适尽，则已得末率，不必再求（如第八形腰之$\frac{6(4^2-9)}{6\cdot7}\phi_8=\phi_8$）。

因　$2n+1$ 分弧通弦＝第 $2n$ 形腰＋第 $2(n+1)$ 形腰

$$
\begin{aligned}
&=\Big[n\phi_2+\frac{n(n^2-1)}{3!}\phi_4+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5!}\phi_6\\
&\qquad-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{7!}\phi_8+\cdots\cdots\Big]\\
&\qquad+\Big\{(n+1)\phi_2-\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{3!}\phi_4\\
&\qquad+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2^2]}{5!}\phi_6\\
&\qquad-\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-2^2][(n+1)^2-3^2]}{7!}\phi_8+\cdots\cdots\Big\},
\end{aligned}
$$

令 $2n+1=m$，则“倍分通弦”中，m 分弧之弦，

$$C_m = m\phi_2 - \frac{m(m^2-1^2)}{2^2\cdot 3!}\phi_4 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot 5!}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot 7!}\phi_8 + \cdots\cdots。\qquad (X)$$

又求腰较率法称：形数($2m$)为倍根，倍根自乘减一，四除之，二除之，为三率[之系数，如第七形腰较，为$\frac{(7^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=6\phi_3$，第九形腰较，为$\frac{(9^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=10\phi_3\cdots\cdots$，第 $2m$ 形腰较，为$\frac{(\overline{2m}^2-1^2)}{4\cdot 2}\phi_3$]。倍根自乘减九，以乘三率，四除之，三除之，四除之，得五率[之系数，如第七形腰较，为$\frac{6(7^2-3^2)}{4\cdot 3\cdot 4}\phi_5=5\phi_5$，第九形腰较，为$\frac{10(9^2-3^2)}{4\cdot 3\cdot 4}\phi_5=15\phi_5$，$\cdots\cdots$第 $2m$ 形腰较，为$\frac{[(2m)^2-1^2][(2m)^2-3^2]}{4^2\cdot 4!}\phi_5$]。倍根自乘减二十五，以乘五率，四除之，五除之，六除之，得七率[之系数，如第七形腰较，为$\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot 5\cdot 6}\phi_5=\phi_5$，第九形腰较，为$\frac{15(9^2-5^2)}{4\cdot 5\cdot 6}\phi_5=7\phi_5$，$\cdots\cdots$，第 $2m$ 形腰较，为$\frac{[(2m)^2-1^2][(2m)^2-3^2][(2m)^2-5^2]}{4^3\cdot 6!}\phi_7$]。三率为正，五率为负，以下皆正负相间，凡乘法恒以 1，3，5，7 等数自乘之，与倍根自乘相减，若相减适尽，则已得末率，不必再求。(如第七形腰较之$\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot 5\cdot 6}\phi_5=\phi_5$)。

因　m 分倍矢＝第 $2m-1$ 形腰较＋第 $2m+1$ 形腰较

$$=\left\{\frac{[(2m-1)^2-1^2]}{4\cdot 2!}\phi_3-\frac{[(2m-1)^2-1^2][(2m-1)^2-3^2]}{4^2\cdot 4!}\phi_5\right.$$

$$+\frac{[(2m-1)^2-1^2][(2m-1)^2-3^2][(2m-1)^2-5^2]}{4^3\cdot 6!}\phi_7$$

$$\left.-\frac{[(2m-1)^2-1^2][(2m-1)^2-3^2][(2m-1)^2-5^2][(2m-1)^2-7^2]}{4^4\cdot 8!}\phi_9+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\left\{\frac{[(2m+1)^2-1^2]}{4\cdot 2!}\phi_3-\frac{[(2m+1)^2-1^2][(2m+1)^2-3^2]}{4^2\cdot 4!}\phi_5\right.$$

$$+\frac{[(2m+1)^2-1^2][(2m+1)^2-3^2][(2m+1)^2-5^2]}{4^3\cdot 6!}\phi_7$$

$$\left.+\frac{[(2m+1)^2-1^2][(2m+1)^2-3^2][(2m+1)^2-5^2][(2m+1)^2-7^2]}{4^4\cdot 8!}\phi_9-\cdots\cdots\right\}。$$

则“倍分倍矢”中，m 分弧之倍矢，

$$b_m=\frac{2(2m)^2}{4\cdot 2!}\phi_3-\frac{2(2m)^2[(2m)^2-2^2]}{4^2\cdot 4!}\phi_5+\frac{2(2m)^2[(2m)^2-2^2][(2m)^2-4^2]}{4^3\cdot 6!}\phi_7$$

$$-\frac{2(2m)^2[(2m)^2-2^2][(2m)^2-4^2][(2m)-6^2]}{4^4\cdot 8!}\phi_9+\cdots\cdots,$$

$$=m^2\phi_3-\frac{m^2(m^2-1)}{3\cdot 4}\phi_5+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\phi_7$$

$$-\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\phi_9+\cdots, \qquad (\text{XI})$$

以上见项名达《象数一原》卷一。

〔B〕 半分起度弦弧率论

如图31,BD为本弧,AB,AD为半径,BD为通弦,成ABD两等边三角形。

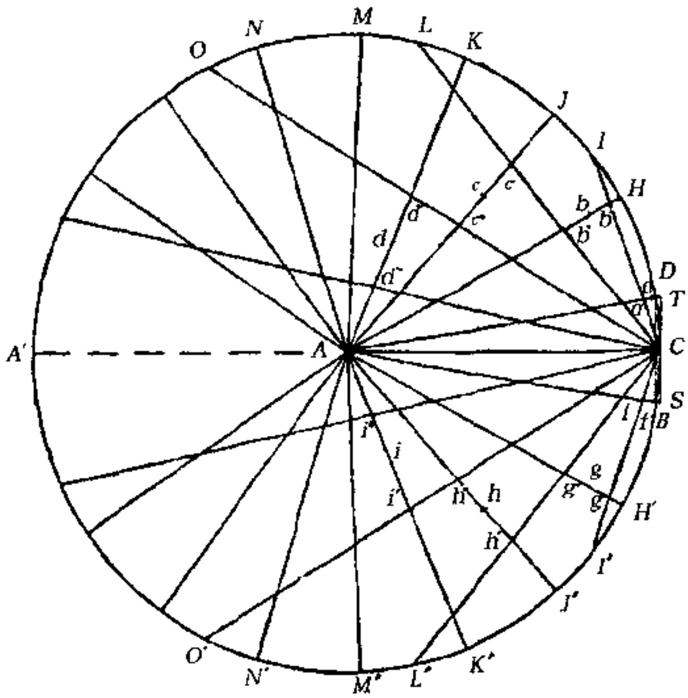


图 31

因半分起度,将全弧折半于C,则BC,CD皆半弧。

自C作BD之平行线,交AB,AD之引长线于S,T。又联CI,CL,CO,……等线,得:

第一形,AST,	第六形,$Cc'c''$,
第二形,CTa',	第七形,$Ac''d'$,
第三形,$Aa'b'$,	第八形,$Cd'd''$,
第四形,$Cb'b''$,	………………
第五形,$Ab''c'$,	………………

都为相似等腰三角形。

因 $r=\phi_1, 2\sin\dfrac{\theta}{2}=\phi_2,$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\phi_2}{2},$$

故 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\left(\phi_1^2-\dfrac{\phi_2^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

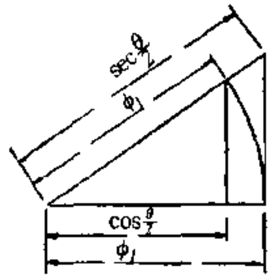


图 32

按商除法或二项式定理，得

$$\cos\frac{\theta}{2}=\left(\phi_1^2-\frac{\phi_2^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\phi_1-\frac{1}{2^3}\phi_3-\frac{1}{2^7}\phi_5-\frac{2}{2^{11}}\phi_7$$
$$-\frac{5}{2^{15}}\phi_9-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

又因 $\dfrac{\sec\frac{\theta}{2}}{\phi_1}=\dfrac{\phi_1}{\cos\frac{\theta}{2}},\ \sec\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\phi_1^2}{\cos\frac{\theta}{2}},$

即 $\sec\dfrac{\theta}{2}=\phi_1^2\left(\phi_1-\dfrac{1}{2^3}\phi_3-\dfrac{1}{2^7}\phi_5-\dfrac{2}{2^{11}}\phi_7-\dfrac{5}{2^{15}}\phi_9\right.$

$$\left.-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots\right)^{-1}$$
$$=\phi_1+\frac{1}{2^3}\phi_3+\frac{3}{2^7}\phi_5+\frac{10}{2^{11}}\phi_7+\frac{35}{2^{15}}\phi_9+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}$$
$$+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots。$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故得递求半分起度各形腰底率，即 α_1，

第一形 AST 腰 $AS=\phi_1+\dfrac{1}{2^3}\phi_3+\dfrac{3}{2^7}\phi_5+\dfrac{10}{2^{11}}\phi_7+\dfrac{35}{2^{15}}\phi_9$

$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\dfrac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_1=\beta_1,$

第一形 AST 底 $ST=\phi_2+\dfrac{1}{2^3}\phi_4+\dfrac{3}{2^7}\phi_6+\dfrac{10}{2^{11}}\phi_8+\dfrac{35}{2^{15}}\phi_{10}$

$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots;$$

$$\frac{\beta_1}{2}=\alpha_2,$$

第二形 CTa' 腰 $CT=\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{2^4}\phi_4+\frac{3}{2^8}\phi_6+\frac{10}{2^{12}}\phi_8+\frac{35}{2^{16}}\phi_{10}$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_2=\beta_2,$$

第二形 CTa' 底 $Ta'=\frac{1}{2}\phi_3+\frac{1}{2^4}\phi_5+\frac{3}{2^8}\phi_7+\frac{10}{2^{12}}\phi_9+\frac{35}{2^{16}}\phi_{11}$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3,$$

第三形 $Aa'b'$ 腰 $Aa=\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9$

$$-\frac{154}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_3=\beta_3,$$

第三形 $Aa'b'$ 底 $a'b'=\phi_2-\frac{3}{2^3}\phi_4-\frac{5}{2^7}\phi_6-\frac{14}{2^{11}}\phi_8-\frac{45}{2^{15}}\phi_{10}$

$$+\frac{154}{2^{19}}\phi_{12}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{14}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{16}-\cdots\cdots;$$

$$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4,$$

第四形 $Cb'b''$ 腰 $Cb'=\frac{3}{2}\phi_2-\frac{5}{2^4}\phi_4-\frac{7}{2^8}\phi_6-\frac{18}{2^{12}}\phi_8-\frac{55}{2^{16}}\phi_{10}$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{12}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{14}-\frac{2244}{2^{28}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_4=\beta_4,$$

第四形 $Cb'b''$底 $b'b''=\frac{3}{2}\phi_3-\frac{5}{2^4}\phi_5-\frac{7}{2^8}\phi_7-\frac{18}{2^{12}}\phi_9-\frac{55}{2^{16}}\phi_{11}$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{13}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{15}-\cdots\cdots;$$

$$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5,$$

第五形 $Ab''c'$腰 $Ab''-\phi_1-\frac{15}{2^3}\phi_3+\frac{35}{2^7}\phi_5+\frac{42}{2^{11}}\phi_7+\frac{99}{2^{15}}\phi_9+\frac{286}{2^{19}}\phi_{11}$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_5=\beta_5,$$

第五形 $Ab''c'$底 $b''c'=\phi_2-\frac{15}{2^3}\phi_4+\frac{35}{2^7}\phi_6+\frac{42}{2^{11}}\phi_8+\frac{99}{2^{15}}\phi_{10}+\frac{286}{2^{19}}\phi_{12}$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots;$$

$$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6,$$

第六形 $Cc'c''$腰 $Cc'=\frac{5}{2}\phi_2-\frac{35}{2^4}\phi_4+\frac{63}{2^8}\phi_6+\frac{66}{2^{12}}\phi_8+\frac{143}{2^{16}}\phi_{10}$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{3876}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_6=\beta_6,$$

第六形 $Cc'c''$底 $c'c''=\frac{5}{2}\phi_3-\frac{35}{2^4}\phi_5+\frac{63}{2^8}\phi_7+\frac{66}{2^{12}}\phi_9+\frac{143}{2^{16}}\phi_{11}$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7,$$

第七形 $Ac''d'$腰 $Ac''-\phi_1-\frac{35}{2^3}\phi_3+\frac{315}{2^7}\phi_5-\frac{462}{2^{11}}\phi_7-\frac{429}{2^{15}}\phi_9$

$$-\frac{858}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{2210}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{6460}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_7=\beta_7,$$

第七形 $Ac''d'$ 底 $c''d' = \phi_2 - \frac{35}{2^3}\phi_4 + \frac{315}{2^7}\phi_6 - \frac{462}{2^{11}}\phi_8 - \frac{429}{2^{15}}\phi_{10}$

$$- \frac{858}{2^{19}}\phi_{12} + \frac{2210}{2^{23}}\phi_{14} - \frac{6460}{2^{27}}\phi_{16} - \cdots\cdots;$$

$\alpha_6 + \beta_7 = \alpha_8$,

第八形 $Cd'd''$ 腰 $Cd' = \frac{7}{2}\phi_2 - \frac{105}{2^4}\phi_4 + \frac{693}{2^8}\phi_6 - \frac{858}{2^{12}}\phi_8 - \frac{715}{2^{16}}\phi_{10}$

$$- \frac{1326}{2^{20}}\phi_{12} - \frac{3230}{2^{24}}\phi_{14} - \frac{9044}{2^{28}}\phi_{16} - \cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_8 = \beta_8$,

第八形 $Cd'd''$ 底 $d'd'' = \frac{7}{2}\phi_2 - \frac{105}{2^4}\phi_5 - \frac{693}{2^8}\phi_7 - \frac{858}{2^{12}}\phi_9 - \frac{715}{2^{16}}\phi_{11}$

$$- \frac{1326}{2^{20}}\phi_{13} - \frac{3230}{2^{24}}\phi_{15} - \cdots\cdots;$$

$\alpha_7 - \beta_8 = \alpha_9$,

第九形腰 $= \phi_1 - \frac{63}{2^3}\phi_3 + \frac{1155}{2^7}\phi_5 - \frac{6006}{2^{11}}\phi_7 + \frac{6435}{2^{15}}\phi_9$

$$+ \frac{4862}{2^{19}}\phi_{11} + \frac{8398}{2^{23}}\phi_{13} + \frac{19380}{2^{27}}\phi_{15} + \cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_9 = \beta_9$,

第九形底 $= \phi_2 - \frac{63}{2^3}\phi_4 + \frac{1155}{2^7}\phi_6 - \frac{6006}{2^{11}}\phi_8 + \frac{6435}{2^{15}}\phi_{10}$

$$+ \frac{4862}{2^{19}}\phi_{12} + \frac{8398}{2^{23}}\phi_{14} + \frac{19380}{2^{27}}\phi_{16} + \cdots\cdots;$$

$\alpha_8 + \beta_9 = \alpha_{10}$,

第十形腰 $= \frac{9}{2}\phi_1 - \frac{231}{2^4}\phi_4 + \frac{3003}{2^8}\phi_6 - \frac{12870}{2^{12}}\phi_8$

$$+ \frac{12155}{2^{16}}\phi_{10} + \frac{8398}{2^{20}}\phi_{12} - \frac{13566}{2^{24}}\phi_{14}$$

$$+ \frac{29716}{2^{28}}\phi_{16} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_{10}=\beta_{10},$$

第十形底$=\dfrac{9}{2}\phi_3-\dfrac{231}{2^4}\phi_5+\dfrac{3003}{2^8}\phi_7-\dfrac{12870}{2^{12}}\phi_9+\dfrac{12155}{2^{16}}\phi_{11}+\dfrac{8398}{2^{20}}\phi_{13}+\dfrac{13566}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$

故　α_{n+1},

$$\begin{aligned}\text{第}\,n+1\,\text{形腰}=&\frac{n}{2!}\phi_2-\frac{n(n^2-2^2)}{2^3\cdot 3!}\phi_4+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2^5\cdot 5!}\phi_6-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2^7\cdot 7!}\phi_8\\&+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2^9\cdot 9!}\phi_{10}\\&-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)}{2^{11}\cdot 11!}\phi_{12}\\&+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)}{2^{13}\cdot 13!}\phi_{14}\\&-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)(n^2-14^2)}{2^{15}\cdot 15!}\phi_{16}\\&+\cdots\cdots;\end{aligned}$$

而 n 为奇数。

又　α_{m+1},

$$\begin{aligned}\text{第}\,m+1\,\text{形腰}=&\phi_1-\frac{(m^2-1^2)}{2^2\cdot 2!}\phi_3+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot 4!}\phi_5-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot 6!}\phi_7\\&+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{2^8\cdot 8!}\phi_9\end{aligned}$$

$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)}{2^{10}\cdot 10!}\phi_{11}$$
$$+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)}{2^{12}\cdot 12!}\phi_{13}$$
$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)(m^2-13^2)}{2^{14}\cdot 14!}\phi_{15}$$
$$+\cdots\cdots,$$

而 m 为偶数。

故得：

$\alpha_2+\alpha_4$，

二分通弦 $CI=2\phi_2-\frac{1}{2^2}\phi_4-\frac{1}{2^6}\phi_6-\frac{2}{2^{10}}\phi_8-\frac{5}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{14}{2^{18}}\phi_{12}-\frac{42}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{132}{2^{26}}\phi_{16}\cdots\cdots$；

$\alpha_4+\alpha_6$，

四分通弦 $CL=4\phi_2-\frac{10}{2^2}\phi_4+\frac{14}{2^6}\phi_6+\frac{12}{2^{10}}\phi_8+\frac{22}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{52}{2^{18}}\phi_{12}+\frac{140}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{408}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots$；

$\alpha_6+\alpha_8$，

六分通弦 $CO=6\phi_2-\frac{35}{2^2}\phi_4+\frac{189}{2^6}\phi_6-\frac{189}{2^{10}}\phi_8-\frac{143}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{234}{2^{18}}\phi_{12}-\frac{510}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{1292}{2^{26}}\phi_{16}-\cdots\cdots$；

$\alpha_8+\alpha_{10}$，

八分通弦 $=8\phi_2-\frac{84}{2^2}\phi_4+\frac{924}{2^6}\phi_6-\frac{3432}{2^{10}}\phi_8+\frac{2860}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{1768}{2^{18}}\phi_{12}-\frac{2584}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{5168}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots$；

而

$$m\text{ 分通弦 } C_m = m\phi_2 - \frac{m(m^2-1^2)}{2^2 \cdot 3!}\phi_4 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4 \cdot 5!}\phi_6 - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6 \cdot 7!}\phi_8 + \cdots\cdots。 \quad (\text{X})$$

$2\phi_1 - \alpha_1 - \alpha_3$，$\frac{1}{2}$分倍矢，

$$2aD = a'D - DT = \frac{1}{2^2}\phi_3 + \frac{1}{2^6}\phi_5 + \frac{2}{2^{10}}\phi_7 + \frac{5}{2^{14}}\phi_9 + \frac{14}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{42}{2^{22}}\phi_{13} + \frac{132}{2^{26}}\phi_{15};$$

$2\phi_1 - a_3 - \alpha_5$，$1\frac{1}{2}$分倍矢，

$$2bH = b'H + b''H = \frac{9}{2^2}\phi_3 - \frac{15}{2^6}\phi_5 - \frac{14}{2^{10}}\phi_7 - \frac{27}{2^{14}}\phi_9 - \frac{66}{7^{18}}\phi_{11} - \frac{182}{2^{22}}\phi_{13} - \frac{540}{2^{26}}\phi_{15};$$

$2\phi_1 - \alpha_5 - \alpha_7$，$2\frac{1}{2}$分倍矢，

$$2cJ = c'J + c''J = \frac{25}{2^2}\phi_3 - \frac{175}{2^6}\phi_5 + \frac{210}{2^{10}}\phi_7 + \frac{165}{2^{14}}\phi_9 + \frac{286}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{65}{2^{22}}\phi_{13} + \frac{1700}{2^{26}}\phi_{15};$$

$2\phi_1 - \alpha_7 - \alpha_9$，$3\frac{1}{2}$分倍矢，

$$2dK = d'K + d''K = \frac{49}{2^2}\phi_3 - \frac{735}{2^6}\phi_5 + \frac{3234}{2^{10}}\phi_7 - \frac{3003}{2^{14}}\phi_9 - \frac{2002}{2^{18}}\phi_{11} - \frac{3094}{2^{22}}\phi_{13} - \frac{6460}{2^{26}}\phi_{15};$$

而$\frac{n}{m}$分倍矢，

$$b_{n/m} = \left(\frac{n}{m}\right)^2\phi_3 - \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1^2\right]}{3 \cdot 4}\phi_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots。\qquad(\text{XI})$$

以上见项名达《象数一原》卷二。

项氏既于《象数一原》卷一，如董祐诚之例，由 1,3,5,7…等分弧弦归纳得(Ⅹ)式，又于《象数一原》卷二，由 2,4,6,8……等分弧弦归纳得(Ⅹ)式，则董氏所谓“凡弦之倍分，皆取奇数”现在知道它可以奇偶通用了。董氏(Ⅺ)式，项氏(Ⅺ)式，都以整数立论；《象数一原》卷二、三，则设法用分数证 $C_{n/m}$，$b_{n/m}$，比较董氏仅证 $C_{1/m}$，$b_{1/m}$ 的已经有了进步。

(C) 零分起度弦矢率论

前节求 $b_{n/m}$，以 $\frac{n}{m}=\frac{n}{2}$，兹再以 $\frac{n}{m}=\frac{n}{3}$，$\frac{n}{4}$，$\frac{n}{5}$ 证 $C_{n/m}$，$b_{n/m}$。

第一：令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{3}$。

如图 33 BE 为本弧，三分为 BC，CD，DE，作 CD 弦引出圆外，交 AB，AE 之引长线于 S，T。则△ AST，ABE 为相似三角形。又作 CI，CL，CO 各线为 $\frac{7}{3}$，$\frac{13}{3}$，$\frac{19}{3}$ 弧通弦。

$\frac{n}{3}$ 分弧起度，可分为 $\frac{2}{3}$ 分弧起度，及 $\frac{1}{3}$ 分弧起度之二例。

前者以 $A'AC$ 线上半圆起算，有：

负第一形 CSf'	第五形 $Ab''c'$
第一形 AST	第六形 $Cc'c''$
第二形 CTa'	第七形

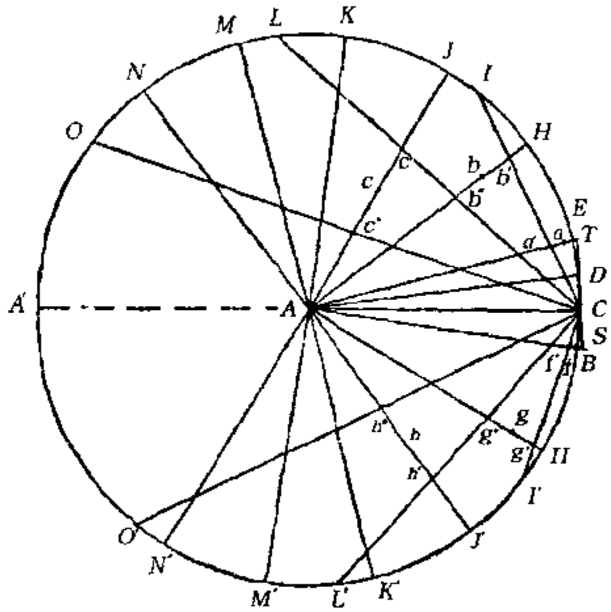


图 33

第三形 $Aa'b'$	第八形
第四形 $Cb'b''$	……………

后者以 $A'AC$ 线下半圆起算，有：

负第二形 CTa'	第五形 $Ag''h'$
第一形 AST	第六形 $Ch'h''$
第二形 CSf'	第七形
第三形 $Af'g'$	第八形
第四形 $Cg'g''$	……………

次用“借率法”，以便可借前所得的，以计算新形：

因
$$AS=\frac{AC\times AB}{AC'}=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\phi_3},$$

而 AC' 为前整分起度内之第三形腰。故

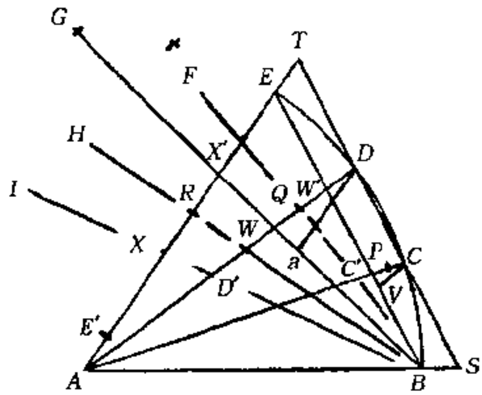


图 34

$$\text{第一形 } AST \text{ 腰 } AS=\frac{\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$$

$$=\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}。$$

又因 $\quad CS=\dfrac{AC\times BC'}{AC'}=\dfrac{AC\times BC}{AC'}=\dfrac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$,

而 BC 为前整分起度内之第二形腰(参阅图 33 和图 34),故

$$\text{第二形 } CSf' \text{ 腰 } CS=\frac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$$

$$=\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}。$$

又因 $\quad CT=\dfrac{AC\times C'E}{AC'}=\dfrac{AC\times BW'}{AC'}=\dfrac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3}$,

而 BW',即前整分起度内之第四形腰。故

$$\text{又第二形 } CTa \text{ 腰 } CT=\frac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3}$$

$$=2\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}。$$

复次用"易率法":

因 $\quad c_3=3\phi_2-\phi_4$

令 $\quad \phi_1'=\phi_1,\phi_2'=c_3$,

即 $$\frac{\phi_2'}{3}=\phi_2-\frac{\phi_4}{3},$$

则 $$\frac{\phi_3'}{3^2}=\frac{\frac{\phi_2'}{3}\cdot\frac{\phi_2'}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7。$$

同理 $$\frac{\phi_5'}{3^4}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_3'}{3^2}}{\phi_1}=\phi_5-\frac{4}{3}\phi_7+\frac{6}{3^2}\phi_9-\frac{4}{3^3}\phi_{11}+\frac{1}{3^4}\phi_{13},$$

$$\frac{\phi_7'}{3^6}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_5'}{3^4}}{\phi_1}=\phi_7-\frac{6}{3}\phi_9+\frac{15}{3^2}\phi_{11}-\frac{20}{3^3}\phi_{13}+\frac{15}{3^4}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_9'}{3^8}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_7'}{3^6}}{\phi_1}=\phi_9-\frac{8}{3}\phi_{11}+\frac{28}{3^2}\phi_{13}-\frac{56}{3^3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{11}'}{3^{10}}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_9'}{3^8}}{\phi_1}=\phi_{11}-\frac{10}{3}\phi_{13}+\frac{45}{3^2}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{13}'}{3^{12}}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_{11}'}{3^{10}}}{\phi_1}=\phi_{13}-\frac{12}{3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{15}'}{3^{14}}=\frac{\frac{\phi_3'}{3^2}\cdot\frac{\phi_{13}'}{3^{12}}}{\phi_1}=\phi_{15}-\cdots\cdots。$$

因以上之关系，可逐次代入，化得：

第一形腰之易率式，

$$\begin{aligned}&\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}\\&=\phi_1'+\frac{\phi_3'}{3^2}+\frac{5\phi_5'}{3^5}+\frac{28\phi_7'}{3^8}+\frac{165\phi_9'}{3^{11}}+\frac{1001\phi_{11}'}{3^{14}}\\&\quad+\frac{6188\phi_{13}'}{3^{17}}+\frac{38760\phi_{15}'}{3^{20}},\end{aligned}$$

而 $$5=(2\times1)+1\times3,$$

$$28=(5\times4-1)+1\times3^2,$$

$$165=(28\times6-5\times6)+1\times3^3,$$

$$1001=(165\times8-28\times15+5\times4)+1\times3^4,$$

$$6188=(1001\times10-165\times28+28\times20-5\times1)+1\times3^5,$$

$$38760=(6188\times12-1001\times45+165\times56-28\times15)+1\times3^6。$$

……………………………………

又因 $c_3=3\phi_2-\phi_4$,

令 $\phi_1'=\phi_1, \phi_2'=c_3$,

即 $\dfrac{\phi_2'}{3}=\phi_2-\dfrac{\phi_4}{3}$;

则 $$\frac{\phi_3'}{3^2}=\frac{\frac{\phi_2'}{3}\cdot\frac{\phi_2'}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7。$$

同理 $$\frac{\phi_4'}{3^3}=\frac{\frac{\phi_2'}{3}\cdot\frac{\phi_3'}{3^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{3}{3}\phi_6+\frac{3}{3^2}\phi_8-\frac{1}{3^3}\phi_{10},$$

$$\frac{\phi_6'}{3^5}=\phi_6-\frac{5}{3}\phi_8+\frac{10}{3^2}\phi_{10}-\frac{10}{3^3}\phi_{12}+\frac{5}{3^4}\phi_{14}-\frac{1}{3^5}\phi_{16},$$

$$\frac{\phi_8'}{3^7}=\phi_8-\frac{7}{3}\phi_{10}+\frac{21}{3^2}\phi_{12}-\frac{35}{3^3}\phi_{14}+\frac{35}{3^4}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{10}'}{3^9}=\phi_{10}-\frac{9}{3}\phi_{12}+\frac{36}{3^2}\phi_{14}-\frac{84}{3^3}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{12}'}{3^{11}}=\phi_{12}-\frac{11}{3}\phi_{14}+\frac{55}{3^2}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{14}'}{3^{13}}=\phi_{14}-\frac{13}{3}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{16}'}{3^{15}}=\phi_{16}-\cdots\cdots。$$

因以上之关系，可逐次代入化得

负第二形腰之易率式，

$$\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}$$
$$=\frac{\phi_2}{3}+\frac{4\phi_4'}{3^4}+\frac{21\phi_6'}{3^7}+\frac{120\phi_8'}{3^{10}}+\frac{715\phi_{10}'}{3^{13}}$$
$$+\frac{4368\phi_{12}'}{3^{16}}+\frac{27132\phi_{14}'}{3^{19}}+\frac{170544\phi_{16}'}{3^{21}},$$

而 $4=(1)+1\times3$

$$21=(4\times3)+1\times3^2$$
$$120=(21\times5-4\times3)+1\times3^3$$
$$715=(120\times7-21\times10+4\times1)+1\times3^4$$
$$4368=(715\times9-120\times21+21\times10)+1\times3^5$$

……………………………………。

由是得“求三分之二起度各形腰底率”，在$\frac{2}{3}$起度，$\triangle CSf'$为负第一形。

α_{-1}，负第一形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi_2'}{3}+\frac{4\phi_4'}{3^4}+\frac{21\phi_6'}{3^7}+\frac{120\phi_8'}{3^{10}}+\frac{715\phi_{10}'}{3^{13}}$$
$$+\frac{4368\phi_{12}'}{3^{16}}+\frac{27132\phi_{14}'}{3^{19}}+\frac{170544\phi_{16}'}{3^{21}};$$

α_1，第一形 AST 腰，

$$AS=\phi_1'+\frac{\phi_3'}{3^2}+\frac{5\phi_5'}{3^5}+\frac{28\phi_7'}{3^8}+\frac{165\phi_9'}{3^{11}}+\frac{1001\phi_{11}'}{3^{14}}$$
$$+\frac{6188\phi_{13}'}{3^{17}}+\frac{38760\phi_{15}'}{3^{20}};$$

β_1，第一形 AST 底，

$$ST=\phi_2'+\frac{\phi_4'}{3^2}+\frac{5\phi_6'}{3^5}+\frac{28\phi_8'}{3^8}+\frac{165\phi_{10}'}{3^{11}}$$
$$+\frac{1001\phi_{12}'}{3^{14}}+\frac{6188\phi_{14}'}{3^{17}}+\frac{38760\phi_{16}'}{3^{20}};$$

$-\alpha_{-1}+\beta_1=\alpha_2$，第二形 CTa' 腰，

$$CT=\frac{2\phi_2'}{3}+\frac{5\phi_4'}{3^4}+\frac{24\phi_6'}{3^7}+\frac{132\phi_8'}{3^{10}}+\frac{770\phi_{10}'}{3^{13}}$$
$$+\frac{4641\phi_{12}'}{3^{16}}+\frac{28560\phi_{14}'}{3^{19}}+\frac{178296\phi_{16}'}{3^{22}},$$

β_2，第二形 CTa' 底，

$$Ta'=\frac{2\phi_3'}{3}+\frac{5\phi_5'}{3^4}+\frac{24\phi_7'}{3^7}+\frac{132\phi_9'}{3^{10}}+\frac{770\phi_{11}'}{3^{13}}$$
$$+\frac{4641\phi_{13}'}{3^{16}}+\frac{28560\phi_{15}'}{3^{19}};$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$，第三形 $Aa'b'$ 腰，

$$Aa'=\phi_1'-\frac{5\phi_3'}{3^2}-\frac{10\phi_5'}{3^5}-\frac{44\phi_7'}{3^8}-\frac{231\phi_9'}{3^{11}}$$
$$-\frac{1309\phi_{11}'}{3^{14}}-\frac{7735\phi_{13}'}{3^{17}}-\frac{46920\phi_{15}'}{3^{20}};$$

β_3，第三形 $Aa'b'$ 底，

$$a'b'=\phi_2'-\frac{5\phi_4'}{3^2}-\frac{10\phi_6'}{3^5}-\frac{44\phi_8'}{3^8}-\frac{231\phi_{10}'}{3^{11}}$$
$$-\frac{1309\phi_{12}'}{3^{14}}-\frac{7735\phi_{14}'}{3^{17}}-\frac{46920\phi_{16}'}{3^{20}};$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cb'b''$ 腰，

$$Cb'=\frac{5\phi_2'}{3}-\frac{40\phi_4'}{3^4}-\frac{66\phi_6'}{3^7}-\frac{264\phi_8'}{3^{10}}-\frac{1309\phi_{10}'}{3^{13}}$$
$$-\frac{7140\phi_{12}'}{3^{16}}-\frac{41055\phi_{14}'}{3^{19}}-\frac{243984\phi_{16}'}{3^{22}};$$

β_4，第四形 $Cb'b''$ 底，

$$b'b''=\frac{5\phi_3'}{3}-\frac{40\phi_5'}{3^4}-\frac{66\phi_7'}{3^7}-\frac{264\phi_9'}{3^{10}}-\frac{1309\phi_{11}'}{3^{13}}$$
$$-\frac{7140\phi_{13}'}{3^{16}}-\frac{41055\phi_{15}'}{3^{19}};$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰，

$$Ab''=\phi_1-\frac{20\phi_3'}{3^2}+\frac{110\phi_5'}{3^5}+\frac{154\phi_7'}{3^8}+\frac{561\phi_9'}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_5，第五形 $Ab''c'$ 底，

$$b''c'=\phi'_2-\frac{20\phi'_4}{3^2}+\frac{110\phi'_6}{3^5}+\frac{154\phi'_8}{3^8}+\frac{561\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰，

$$Cc'=\frac{8\phi'_2}{3}-\frac{220\phi'_4}{3^4}+\frac{924\phi'_6}{3^7}+\frac{1122\phi'_8}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{442221\phi'_{16}}{3^{22}};$$

β_6，第六形 $Cc'c''$ 底，

$$c'c''=\frac{8\phi'_3}{3}-\frac{220\phi'_5}{3^4}+\frac{924\phi'_7}{3^7}+\frac{1122\phi'_9}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{15}}{3^{19}};$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形腰，

$$=\phi'_1-\frac{44\phi'_3}{3^2}+\frac{770\phi'_5}{3^5}-\frac{2618\phi'_7}{3^8}-\frac{2805\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_7，第七形底，

$$=\phi'_2-\frac{44\phi'_4}{3^2}+\frac{770\phi'_6}{3^5}-\frac{2618\phi'_8}{3^8}-\frac{2805\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形腰，

$$=\frac{11\phi'_2}{3}-\frac{616\phi'_4}{3^4}+\frac{7854\phi'_6}{3^7}-\frac{22440\phi'_8}{3^{10}}-\frac{21505\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{60996\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{238119\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{1088544\phi'_{16}}{3^{22}}。$$

又“求三分之一起度各形腰底率”，

α_{-2}，负第二形 CTa' 腰，

$$CT=\frac{2\phi'_2}{3}+\frac{5\phi'_4}{3^4}+\frac{24\phi'_6}{3^7}+\frac{132\phi'_8}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{4641\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{178296\phi'_{16}}{3^{22}};$$

α_1，第一形 AST 腰，

$$AT=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_1，第一形 AST 底，

$$ST=\phi'_2+\frac{\phi'_4}{3^2}+\frac{5\phi'_6}{3^5}+\frac{28\phi'_8}{3^8}+\frac{165\phi'_{10}}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\beta_1-\alpha_{-2}=\alpha_2$，第二形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{22}};$$

β_2 第二形 CSf' 底，

$$Sf'=\frac{\phi'_3}{3}+\frac{4\phi'_5}{3^4}+\frac{21\phi'_7}{3^7}+\frac{120\phi'_9}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{11}}{3^{13}}+\frac{4368\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{15}}{3^{19}};$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$，第三形 $Af'g'$ 腰，

$$Af'=\phi'_1-\frac{2\phi'_3}{3^2}-\frac{7\phi'_5}{3^5}-\frac{35\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{6916\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_3，第三形 $Af'g'$ 底，

$$f'g'=\phi'_2-\frac{2\phi'_4}{3^2}-\frac{7\phi'_6}{3^5}-\frac{35\phi'_8}{3^8}-\frac{195\phi'_{10}}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{6916\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cg'g''$ 腰，

$$Cg'=\frac{4\phi'_2}{3}-\frac{14\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{195\phi'_8}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{5928\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{213180\phi'_{16}}{3^{22}};$$

β_4，第四形 $Cg'g''$ 底，

$$g'g''=\frac{4\phi'_3}{3}-\frac{14\phi'_5}{3^4}-\frac{42\phi'_7}{3^7}-\frac{195\phi'_9}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{11}}{3^{13}}-\frac{5928\phi'_{13}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{15}}{3^{19}};$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ag''h'$ 腰，

$$Ag''=\phi'_1-\frac{14\phi'_3}{3^2}+\frac{35\phi'_5}{3^5}+\frac{91\phi'_7}{3^8}+\frac{390\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1976\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_5，第五形 $Ag''h'$ 底，

$$g''h'=\phi'_2-\frac{14\phi'_4}{3^2}+\frac{35\phi'_6}{3^5}+\frac{91\phi'_8}{3^8}+\frac{390\phi'_{10}}{3^{11}}+\frac{1976\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\alpha_4-\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Ch'h''$ 腰，

$$Ch'=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{140\phi'_4}{3^4}+\frac{273\phi'_6}{3^7}+\frac{624\phi'_8}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{11856\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{351120\phi'_{16}}{3^{22}};$$

β_6，第六形 $Ch'h''$ 底，

$$h'h''=\frac{7\phi'_3}{3}-\frac{140\phi'_5}{3^4}+\frac{273\phi'_7}{3^7}+\frac{624\phi'_9}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{11}}{3^{13}}+\frac{11856\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{19}};$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形腰，

$$=\phi'_1-\frac{35\phi'_3}{3^2}+\frac{455\phi'_5}{3^5}-\frac{728\phi'_7}{3^8}-\frac{1482\phi'_9}{3^{11}}-\frac{5434\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{15}}{3^{20}};$$

β_7，第七形底，

$$=\phi'_2-\frac{35\phi'_4}{3^2}+\frac{45\phi'_6}{3^5}-\frac{728\phi'_8}{3^8}-\frac{1482\phi'_{10}}{3^{11}}-\frac{5434\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{16}}{3^{20}};$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形腰，

$$=\frac{10\phi'_2}{3}-\frac{455\phi'_4}{3^4}+\frac{4368\phi'_6}{3^7}-\frac{5928\phi'_8}{3^{10}}-\frac{10868\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{37050\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{159600\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{777480\phi'_{16}}{3^{22}};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\circ$$

故“三分弧之二起度各通弦率”，

$$\phi'_1=r_1\ \phi'_2=c_3,$$

$$\alpha_{-1}-\alpha_2,c_{1/3}=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{\phi'_4}{3^4}+\frac{3\phi'_6}{3^7}+\frac{12\phi'_8}{3^{10}}+\frac{55\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{273\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{1428\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{7752\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$\alpha_2+\alpha_4,c_{7/3}=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{35\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{132\phi'_8}{3^{10}}-\frac{539\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{2489\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{12495\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{65686\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$\alpha_4+\alpha_6, c_{13/3}=\frac{13\phi_2'}{3}-\frac{260\phi_4'}{3^4}+\frac{858\phi_6'}{3^7}+\frac{858\phi_8'}{3^{10}}+\frac{2431\phi_{10}'}{3^{13}}$$

$$+\frac{9282\phi_{12}'}{3^{16}}+\frac{41055\phi_{14}'}{3^{19}}+\frac{198237\phi_{16}'}{3^{22}},$$

$$\alpha_6+\alpha_8, c_{19/3}=\frac{19\phi_2'}{3}-\frac{836\phi_4'}{3^4}+\frac{8778\phi_6'}{3^7}-\frac{21318\phi_8'}{3^{10}}-\frac{17765\phi_{10}'}{3^{13}}$$

$$-\frac{44574\phi_{12}'}{3^{16}}-\frac{156009\phi_{14}'}{3^{19}}-\frac{646323\phi_{16}'}{3^{22}}。$$

“三分弧之二起度各倍矢率”，

$$2\phi_1'-\alpha_1-\alpha_3, b_{2/3}=\frac{4\phi_3'}{3^2}+\frac{5\phi_5'}{3^5}+\frac{16\phi_7'}{3^8}+\frac{66\phi_9'}{3^{11}}+\frac{308\phi_{11}'}{3^{14}}$$

$$+\frac{1547\phi_{13}'}{3^{17}}+\frac{8160\phi_{15}'}{3^{20}},$$

$$2\phi_1'-\alpha_3-\alpha_5, b_{5/3}=\frac{25\phi_3'}{3^2}-\frac{100\phi_5'}{3^5}-\frac{110\phi_7'}{3^8}-\frac{330\phi_9'}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi_{11}'}{3^{14}}-\frac{5950\phi_{13}'}{3^{17}}-\frac{29325\phi_{15}'}{3^{20}},$$

$$2\phi_1'-\alpha_5-\alpha_7, b_{8/3}=\frac{64\phi_3'}{3^2}-\frac{880\phi_5'}{3^5}+\frac{2464\phi_7'}{3^8}+\frac{2244\phi_9'}{3^{11}}$$

$$-\frac{5984\phi_{11}'}{3^{14}}-\frac{21896\phi_{13}'}{3^{17}}-\frac{93840\phi_{15}'}{3^{20}}。$$

又“三分弧之一起度各通弦率”

$$\alpha_2+\alpha_4, c_{5/3}=\frac{5\phi_2'}{3}-\frac{10\phi_4'}{3^4}-\frac{21\phi_6'}{3^7}-\frac{75\phi_8'}{3^{10}}-\frac{325\phi_{10}'}{3^{13}}$$

$$-\frac{1560\phi_{12}'}{3^{16}}-\frac{7980\phi_{14}'}{3^{19}}-\frac{42636\phi_{16}'}{3^{22}},$$

$$\alpha_4+\alpha_6, c_{11/3}=\frac{11\phi_2'}{3}-\frac{154\phi_4'}{3^4}+\frac{231\phi_6'}{3^7}+\frac{429\phi_8'}{3^{10}}+\frac{1430\phi_{10}'}{3^{13}}$$

$$+\frac{5928\phi_{12}'}{3^{16}}+\frac{27588\phi_{14}'}{3^{19}}+\frac{137940\phi_{16}'}{3^{22}},$$

$$\alpha_6+\alpha_8, c_{17/3}=\frac{17\phi_2'}{3}-\frac{595\phi_4'}{3^4}+\frac{4641\phi_6'}{3^7}+\frac{5304\phi_8'}{3^{10}}-\frac{8398\phi_{10}'}{3^{13}}$$

$$-\frac{25194\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{96900\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{426360\phi'_{16}}{3^{22}}。$$

“三分弧之一起度各倍矢率”

$$2\phi'_1-\alpha_1-\alpha_3, b_{1/3}=\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{2\phi'_5}{3^5}+\frac{7\phi'_7}{3^8}+\frac{30\phi'_9}{3^{11}}+\frac{143\phi'_{11}}{3^{14}}$$
$$+\frac{728\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{3876\phi'_{15}}{3^{20}},$$

$$2\phi'_1-\alpha_3-\alpha_5, b_{4/3}=\frac{16\phi'_3}{3^2}-\frac{28\phi'_5}{3^5}-\frac{56\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}$$
$$+\frac{832\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{3952\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{20064\phi'_{15}}{3^{20}}$$

$$2\phi'_1-\alpha_5-\alpha_7, b_{7/3}=\frac{49\phi'_3}{3^2}-\frac{490\phi'_5}{3^5}+\frac{637\phi'_7}{3^8}+\frac{1092\phi'_9}{3^{11}}$$
$$+\frac{3458\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13832\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}}。$$

故
$$c_{n/m}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{2^2\cdot 3!}\phi'_4$$
$$+\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{2^4\cdot 5!}\phi'_6,$$
$$-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right]}{2^6\cdot 7!}\phi_8$$
$$+\cdots\cdots, \qquad (\text{XI})$$

$$b_{n/m}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{3\cdot 4}\phi_5$$
$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\phi'_7$$
$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\phi'_9$$

$+\cdots\cdots$。 (XIII)

第二：令$\frac{n}{m}=\frac{n}{4}$。

如图 35，BE 为本弧，四分为 $BC\left(=\frac{BE}{4}\right)$，$CE\left(=\frac{2BE}{4}\right)$，$EF\left(=\frac{BE}{4}\right)$，作 CE 弦引出圆外，交 AB，AF 之引长线于 S，T，则$\triangle_s AST$，ABF 为相似三角形。如图 35 又作 CI，CL，CO，各线为$\frac{10}{4}$，$\frac{18}{4}$，$\frac{26}{4}$弧通弦。

$\frac{n}{4}$分弧起度，可分为$\frac{3}{4}$分弧起度，及$\frac{1}{4}$分弧起度的二例。

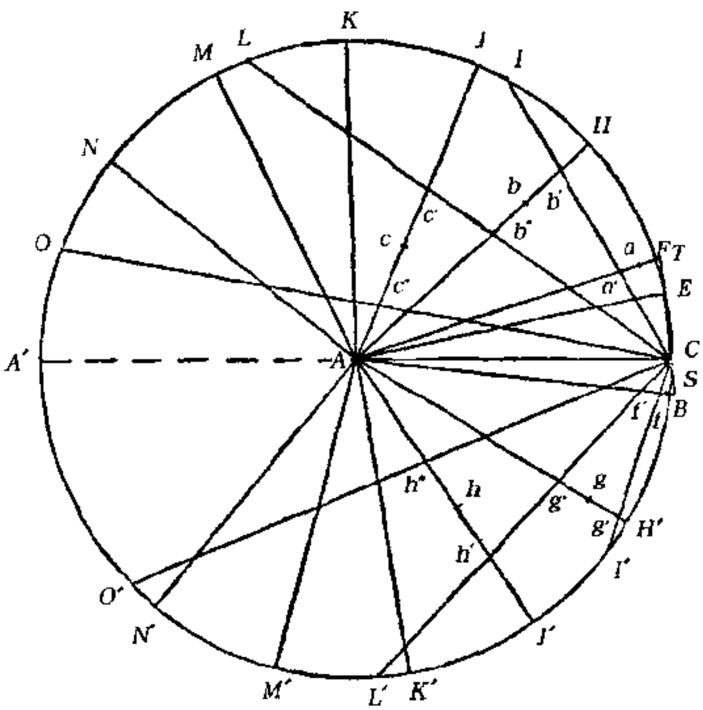


图 35

如前例，前者以 $A'AC$ 线上半圆起算，后者以 $A'AC$ 线下半圆起算。

次如前用“借率法”，并参阅(B)半分起度弦矢率论，附图图 31 和图 36。

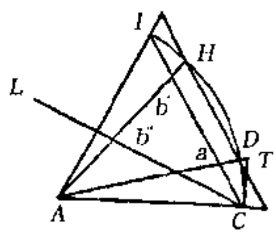


图 31

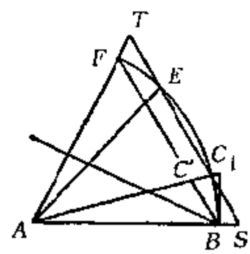


图 36

因 $AS=\dfrac{AC\times AB}{Ac'}$

$$=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9-\frac{154}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}},$$

而 Ac' 即前半$\left(\frac{1}{2}\right)$分起度之第三形腰；Aa'

故 第一形 AST 腰，

$$AS=\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}。$$

又图 36，因 $CS=\dfrac{AC\times BC'}{AC'}=\dfrac{AC\times Bt}{AC'}$

$$=\frac{\phi_1\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\phi_4}{2^4}+\frac{3\phi_6}{2^8}+\frac{10\phi_8}{2^{12}}+\frac{35\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{126\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{462\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1716\phi_{16}}{2^{28}}\right)}{\phi_1-\frac{3\phi_3}{2^3}-\frac{5\phi_5}{2^7}-\frac{14\phi_7}{2^{11}}-\frac{45\phi_9}{2^{15}}-\frac{154\phi_{11}}{2^{19}}-\frac{546\phi_{13}}{2^{23}}-\frac{1980\phi_{15}}{2^{27}}}$$

而 Bt 即前半$\left(\frac{1}{2}\right)$分起度之第二形腰 CT（图 31）。

故　第二形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{18}}$$
$$+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}}。$$

复次用"易率法"：

因　$b_2=4\phi_3-\phi_5$。

令　$\phi_1'=\phi_1,\phi_3'=b_2$。

即　$\frac{\phi_3'}{2^2}=\phi_3-\frac{4\phi_5}{2^4}$，

则　$\frac{\phi_5'}{2^4}=\phi_5-\frac{8\phi_7}{2^4}+\frac{16\phi_9}{2^8}$，

$$\frac{\phi_7'}{2^6}=\phi_7-\frac{12\phi_9}{2^4}+\frac{48\phi_{11}}{2^8}-\frac{64\phi_{13}}{2^{12}},$$

$$\frac{\phi_9'}{2^8}=\phi_9-\frac{16\phi_{11}}{2^4}+\frac{96\phi_{13}}{2^8}-\frac{256\phi_{15}}{2^{12}}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{11}'}{2^{10}}=\phi_{11}-\frac{20\phi_{13}}{2^4}+\frac{160\phi_{15}}{2^8}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{13}'}{2^{12}}=\phi_{13}-\frac{24\phi_{15}}{2^4}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi_{15}'}{2^{14}}=\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

因以上之关系，可逐次代入化得：

第一形腰之易率式，

$$\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}$$
$$+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}=\phi_1'+\frac{3\phi_3'}{2^5}+\frac{35\phi_5'}{2^{11}}+\frac{462\phi_7'}{2^{17}}$$

$$+\frac{6435\phi_9'}{2^{23}}+\frac{92378\phi_{11}'}{2^{29}}+\frac{1352078\phi_{13}'}{2^{35}}+\frac{20058300\phi_{15}'}{2^{41}},$$

而 $35=23+3\times4,$

$462=182+35\times8,$

$6435=1451+462\times12-35\times16,$

$92378=11594+6435\times16-462\times48,$

$1352078=92710+92378\times20-6435\times96+462\times64,$

$20058300=741548+1352078\times24-92378\times160+6435\times256$。

又因
$$c_2=2\phi_2-\frac{\phi_4}{2^2}-\frac{\phi_6}{2^6}-\frac{2\phi_8}{2^{10}}-\frac{5\phi_{10}}{2^{14}}-\frac{14\phi_{12}}{2^{18}}-\frac{42\phi_{14}}{2^{22}}-\frac{132\phi_{16}}{2^{26}},$$

$$b_2=4\phi_3-\phi_5,$$

如前令
$$\phi_1'=\phi_1,\ \phi_3'=b_2,$$

则
$$\frac{\phi_2'}{2}=\frac{c_2}{2}=\phi_2-\frac{2\phi_4}{2^4}-\frac{2\phi_6}{2^8}-\frac{4\phi_8}{2^{12}}-\frac{10\phi_{10}}{2^{16}}-\frac{28\phi_{12}}{2^{20}}-\frac{84\phi_{14}}{2^{24}}-\frac{264\phi_{16}}{2^{28}}。$$

此乃因
$$\frac{\phi_3'}{2^2}-\frac{\frac{\phi_2'}{2}\cdot\frac{\phi_2'}{2}}{\phi_1}=\frac{b_2}{2^2}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2^2}。$$

同理，
$$\frac{\phi_4'}{2^3}=\frac{\frac{\phi_2'}{2}\cdot\frac{\phi_3'}{2^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{6\phi_6}{2^4}+\frac{6\phi_8}{2^8}+\frac{4\phi_{10}}{2^{12}}+\frac{6\phi_{12}}{2^{16}}+\frac{12\phi_{14}}{2^{20}}+\frac{28\phi_{16}}{2^{24}},$$

$$\frac{\phi_6'}{2^5}=\phi_6-\frac{10\phi_8}{2^4}+\frac{30\phi_{10}}{2^8}-\frac{20\phi_{12}}{2^{12}}+\frac{10\phi_{14}}{2^{16}}-\frac{12\phi_{16}}{2^{20}},$$

$$\frac{\phi_8'}{2^7}=\phi_8-\frac{14\phi_{10}}{2^4}+\frac{70\phi_{12}}{2^8}-\frac{140\phi_{14}}{2^{12}}+\frac{70\phi_{16}}{2^{16}},$$

$$\frac{\phi_{10}'}{2^9}=\phi_{10}-\frac{18\phi_{12}}{2^4}+\frac{126\phi_{14}}{2^8}-\frac{420\phi_{16}}{2^{12}},$$

$$\frac{\phi'_{12}}{2^{11}}=\phi_{12}-\frac{22\phi_{14}}{2^4}+\frac{198\phi_{16}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{14}}{2^{13}}=\phi_{14}-\frac{26\phi_{16}}{2^4},$$

$$\frac{\phi'_{16}}{2^{15}}=\phi_{16}。$$

因以上之关系，可逐次代入，化得

第二形腰之易率式，

$$\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}$$
$$+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}}$$
$$=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{2^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}$$
$$+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{47}},$$

而 $$5=4+\frac{2}{2},$$

$$63=32+5\times6+\frac{2}{2},$$

$$858=256+63\times10-5\times6+\frac{4}{2},$$

$$12155=2048+858\times14-63\times30-5\times4+\frac{10}{2}$$

$$176358=16384+12155\times18-858\times70+63\times20$$
$$-5\times6+\frac{28}{2},$$

$$2600150=131072+176358\times22-12155\times126$$
$$+858\times140+63\times10-5\times12+\frac{84}{2},$$

$$38779380=1048576+2600150\times26-176358\times198+12155$$

$$\times 420-858\times 70+63\times 12-5\times 28+\frac{264}{2}。$$

……………………………………

由是得“求四分之三起度各形腰底率”:

α_{-1},负第一形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi_2'}{2^2}+\frac{5\phi_4'}{2^7}+\frac{63\phi_6'}{2^{13}}+\frac{858\phi_8'}{2^{19}}+\frac{12155\phi_{10}'}{2^{25}}+\frac{176358\phi_{12}'}{2^{31}}+\frac{2600150\phi_{14}'}{2^{37}}+\frac{38779380\phi_{16}'}{2^{43}};$$

α_1,第一形 AST 腰,

$$AS=\phi_1'+\frac{3\phi_3'}{2^5}+\frac{35\phi_5'}{2^{11}}+\frac{462\phi_7'}{2^{17}}+\frac{6435\phi_9'}{2^{23}}+\frac{92378\phi_{11}'}{2^{29}}+\frac{1352078\phi_{13}'}{2^{35}}+\frac{20058300\phi_{15}'}{2^{41}};$$

β_1,第一形 AST 底,

$$ST=\phi_2'+\frac{3\phi_4'}{2^5}+\frac{35\phi_6'}{2^{11}}+\frac{462\phi_8'}{2^{17}}+\frac{6435\phi_{10}'}{2^{23}}+\frac{92378\phi_{12}'}{2^{29}}+\frac{1352078\phi_{14}'}{2^{35}}+\frac{20058300\phi_{16}'}{2^{41}};$$

$-\alpha_{-1}+\beta_1=\alpha_2$,第二形 CTa' 腰,

$$CT=\frac{3\phi_2'}{2^2}+\frac{7\phi_4'}{2^7}+\frac{77\phi_6'}{2^{13}}+\frac{990\phi_8'}{2^{19}}+\frac{13585\phi_{10}'}{2^{25}}+\frac{193154\phi_{12}'}{2^{31}}+\frac{2808162\phi_{14}'}{2^{37}}+\frac{41453820\phi_{16}'}{2^{43}}$$

β_2,第二形 CTa' 底,

$$Ta'=\frac{3\phi_3'}{2^2}+\frac{7\phi_5'}{2^7}+\frac{77\phi_7'}{2^{13}}+\frac{990\phi_9'}{2^{19}}+\frac{13585\phi_{11}'}{2^{25}}+\frac{193154\phi_{13}'}{2^{31}}+\frac{2808162\phi_{15}'}{2^{37}};$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$,第三形 $Aa'b'$ 腰,

$$Aa'=\phi_1'-\frac{21\phi_3'}{2^5}-\frac{77\phi_5'}{2^{11}}-\frac{770\phi_7'}{2^{17}}-\frac{9405\phi_9'}{2^{23}}$$
$$-\frac{124982\phi_{11}'}{2^{29}}-\frac{1738386\phi_{13}'}{2^{35}}-\frac{24872292\phi_{15}'}{2^{41}};$$

β_3，第三形 $Aa'b'$ 底，

$$a'b'=\phi_2'-\frac{21\phi_4'}{2^5}-\frac{77\phi_6'}{2^{11}}-\frac{770\phi_8'}{2^{17}}-\frac{9405\phi_{10}'}{2^{23}}$$
$$-\frac{124982\phi_{12}'}{2^{29}}-\frac{1738386\phi_{14}'}{2^{35}}-\frac{24872292\phi_{16}'}{2^{41}};$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cb'b''$ 腰，

$$Cb'=\frac{7\phi_2'}{2^2}-\frac{77\phi_4'}{2^7}-\frac{231\phi_6'}{2^{13}}-\frac{2090\phi_8'}{2^{19}}-\frac{24035\phi_{10}'}{2^{25}}$$
$$-\frac{306774\phi_{12}'}{2^{31}}-\frac{4145382\phi_{14}'}{2^{37}}-\frac{58035348\phi_{16}'}{2^{43}};$$

β_4，第四形 $Cb'b''$ 底，

$$b'b''=\frac{7\phi_3'}{2^2}-\frac{77\phi_5'}{2^7}-\frac{231\phi_7'}{2^{13}}-\frac{2090\phi_9'}{2^{19}}-\frac{24035\phi_{11}'}{2^{25}}$$
$$-\frac{306774\phi_{13}'}{2^{31}}-\frac{4145382\phi_{15}'}{2^{37}};$$

$\alpha_3-\beta_1=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰，

$$Ab''=\phi_1'-\frac{77\phi_3'}{2^5}+\frac{1155\phi_5'}{2^{11}}+\frac{2926\phi_7'}{2^{17}}+\frac{24035\phi_9'}{2^{23}}$$
$$+\frac{259578\phi_{11}'}{2^{29}}+\frac{3169998\phi_{13}'}{2^{35}}+\frac{41453820\phi_{15}'}{2^{41}};$$

β_5，第五形 $Ab''c'$ 底，

$$b''c'=\phi_2'-\frac{77\phi_4'}{2^5}+\frac{1155\phi_6'}{2^{11}}+\frac{2926\phi_8'}{2^{17}}+\frac{24035\phi_{10}'}{2^{23}}$$
$$+\frac{259578\phi_{12}'}{2^{29}}+\frac{3169998\phi_{14}'}{2^{35}}+\frac{41453820\phi_{16}'}{2^{41}};$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰，

$$Cc'=\frac{11\phi_2'}{2^2}-\frac{385\phi_4'}{2^7}+\frac{4389\phi_6'}{2^{13}}+\frac{9614\phi_8'}{2^{19}}+\frac{72105\phi_{10}'}{2^{25}}$$

$$+\frac{731538\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{107779932\phi'_{16}}{2^{43}};$$

β_6，第六形 $Cc'c''$ 底，

$$c'c''=\frac{11\phi'_3}{2^2}-\frac{385\phi'_5}{2^7}+\frac{4389\phi'_7}{2^{13}}+\frac{9614\phi'_9}{2^{19}}$$

$$+\frac{72105\phi'_{11}}{2^{25}}+\frac{731538\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{15}}{2^{37}};$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形腰，

$$=\phi'_1-\frac{165\phi'_3}{2^5}+\frac{7315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_7}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{95099940\phi'_{15}}{2^{41}};$$

β_7，第七形底，

$$=\phi'_2-\frac{165\phi'_4}{2^5}+\frac{7315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_8}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{95099940\phi'_{16}}{2^{41}};$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形腰，

$$=\frac{15\phi'_2}{2^2}-\frac{1045\phi'_4}{2^7}+\frac{33649\phi'_6}{2^{13}}-\frac{259578\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{447051\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{2844870\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{25603830\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{272619828\phi'_{16}}{2^{43}};$$

……………………………………………。

又“求四分之一起度各形腰底率”：

α_{-2}，负第二形 CTa' 腰，

$$CT=\frac{3\phi'_2}{2^2}+\frac{7\phi'_4}{2^7}+\frac{77\phi'_6}{2^{13}}+\frac{990\phi'_8}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{43}};$$

α_1，第一形 AST 腰，

$$AT=\phi_1'+\frac{3\phi_3'}{2^5}+\frac{35\phi_5'}{2^{11}}+\frac{462\phi_7'}{2^{17}}+\frac{6435\phi_9'}{2^{23}}+\frac{92378\phi_{11}'}{2^{29}}+\frac{1352078\phi_{13}'}{2^{35}}+\frac{20058300\phi_{15}'}{2^{41}};$$

β_1，第一形 AST 底，

$$ST=\phi_2'+\frac{3\phi_4'}{2^5}+\frac{35\phi_6'}{2^{11}}+\frac{462\phi_8'}{2^{17}}+\frac{6435\phi_{10}'}{2^{23}}+\frac{92378\phi_{12}'}{2^{29}}+\frac{1352078\phi_{14}'}{2^{35}}+\frac{20058300\phi_{16}'}{2^{41}};$$

$-\alpha_{-2}+\beta_1=\alpha_2$，第二形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi_2'}{2^2}+\frac{5\phi_4'}{2^7}+\frac{63\phi_6'}{2^{13}}+\frac{858\phi_8'}{2^{19}}+\frac{12155\phi_{10}'}{2^{25}}+\frac{176358\phi_{12}'}{2^{31}}-\frac{2600150\phi_{14}'}{2^{37}}+\frac{38779380\phi_{16}'}{2^{43}};$$

β_2，第二形 CSf' 底，

$$Sf'=\frac{\phi_3'}{2^2}+\frac{5\phi_5'}{2^7}+\frac{63\phi_7'}{2^{13}}+\frac{858\phi_9'}{2^{19}}+\frac{12155\phi_{11}'}{2^{25}}+\frac{176358\phi_{13}'}{2^{31}}+\frac{2600150\phi_{15}'}{2^{37}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$，第三形 $Af'g'$ 腰，

$$Af'=\phi_1'-\frac{5\phi_3'}{2^5}-\frac{45\phi_5'}{2^{11}}-\frac{546\phi_7'}{2^{17}}-\frac{7293\phi_9'}{2^{23}}-\frac{102102\phi_{11}'}{2^{29}}-\frac{1469650\phi_{13}'}{2^{35}}-\frac{21544100\phi_{15}'}{2^{41}};$$

β_3，第三形 $Af'g'$ 底，

$$f'g'=\phi_2'-\frac{5\phi_4'}{2^5}-\frac{45\phi_6'}{2^{11}}-\frac{546\phi_8'}{2^{17}}-\frac{7293\phi_{10}'}{2^{23}}-\frac{102102\phi_{12}'}{2^{29}}-\frac{1469650\phi_{14}'}{2^{35}}-\frac{21544100\phi_{16}'}{2^{41}};$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cg'g''$ 腰，

$$Cg'=\frac{5\phi'_2}{2^2}-\frac{15\phi'_4}{2^7}-\frac{117\phi'_6}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_8}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{10}}{2^{25}}$$
$$-\frac{232050\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{14}}{2^{37}}-\frac{47397020\phi'_{16}}{2^{43}};$$

β_4，第四形 $Cg'g''$ 底，

$$g'g''=\frac{5\phi'_3}{2^2}-\frac{15\phi'_5}{2^7}-\frac{117\phi'_7}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_9}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{11}}{2^{25}}$$
$$-\frac{232050\phi'_{13}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{15}}{2^{37}};$$

α_5，第五形 $Ag''h'$ 腰，

$$Ag''=\phi'_1-\frac{45\phi'_3}{2^5}+\frac{195\phi'_5}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_7}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_9}{2^{23}}$$
$$+\frac{170170\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{15}}{2^{41}};$$

β_5，第五形 $Ag''h'$ 底，

$$g''h'=\phi'_2-\frac{45\phi'_4}{2^5}+\frac{195\phi'_6}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_{10}}{2^{23}}$$
$$+\frac{170170\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{16}}{2^{41}};$$

α_6，第六形 $Ch'h''$ 腰，

$$Ch'=\frac{9\phi'_2}{2^2}-\frac{195\phi'_4}{2^7}+\frac{663\phi'_6}{2^{13}}+\frac{3978\phi'_8}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{10}}{2^{25}}$$
$$+\frac{448630\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{76247380\phi'_{16}}{2^{43}};$$

β_6，第六形 $Ch'h''$ 底，

$$h'h''=\frac{9\phi'_3}{2^2}-\frac{195\phi'_5}{2^7}+\frac{663\phi'_7}{2^{13}}+\frac{3978\phi'_9}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{11}}{2^{25}}$$
$$+\frac{448630\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{15}}{2^{37}};$$

α_7，第七形腰，

$$=\phi'_1-\frac{117\phi'_3}{2^5}+\frac{3315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_7}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{15}}{2^{41}};$$

β_7，第七形底，

$$=\phi'_2-\frac{117\phi'_4}{2^5}+\frac{3315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_8}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{16}}{2^{41}};$$

α_8，第八形腰，

$$=\frac{13\phi'_2}{2^2}-\frac{663\phi'_4}{2^7}+\frac{13923\phi'_6}{2^{13}}-\frac{33150\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{160225\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{1355890\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{14045570\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{164533820\phi'_{16}}{2^{43}}。$$

故“四分弧之三起度各通弦率”，

$$-\alpha_{-1}+\alpha_2,c_{2/4}=c_{1/2}=\frac{\phi'_2}{2}+\frac{\phi'_4}{2^6}+\frac{7\phi'_6}{2^{12}}+\frac{66\phi'_8}{2^{18}}+\frac{715\phi'_{10}}{2^{24}}$$

$$+\frac{8398\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{104006\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{1337020\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$\alpha_2+\alpha_4,c_{10/4}=c_{5/2}=\frac{5\phi'_2}{2}-\frac{35\phi'_4}{2^6}-\frac{77\phi'_6}{2^{12}}-\frac{550\phi'_8}{2^{18}}-\frac{5225\phi'_{10}}{2^{24}}$$

$$-\frac{56810\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{668610\phi'_{14}}{2^{36}}-\frac{8290764\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$\alpha_4+\alpha_6,c_{18/4}=c_{9/2}=\frac{9\phi'_2}{2}-\frac{231\phi'_4}{2^6}+\frac{2079\phi'_6}{2^{12}}+\frac{3762\phi'_8}{2^{18}}$$

$$+\frac{24035\phi'_{10}}{2^{24}}+\frac{212382\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{2194614\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$+\frac{24872292\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$\alpha_6+\alpha_8,c_{26/4}=c_{13/2}=\frac{13\phi'_2}{2}-\frac{715\phi'_4}{2^6}+\frac{19019\phi'_6}{2^{12}}$$

$$-\frac{124982\phi'_8}{2^{18}}-\frac{187473\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{1056666\phi'_{12}}{2^{30}}$$

$$-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{36}}-\frac{8241948\phi'_{16}}{2^{42}};$$

“四分弧之三起度各倍矢率”，

$$2\phi_1-\alpha_1-\alpha_3, b_{3/4}=\frac{9\phi'_3}{4^2}+\frac{21\phi'_5}{4^5}+\frac{154\phi'_7}{4^8}+\frac{1485\phi'_9}{4^{11}}+\frac{16302\phi'_{11}}{4^{14}}$$
$$+\frac{193154\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{2406996\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-\alpha_3-\alpha_5, b_{4/7}=\frac{49\phi'_3}{4^2}-\frac{539\phi'_5}{4^5}-\frac{1078\phi'_7}{4^8}-\frac{7315\phi'_9}{4^{11}}$$
$$-\frac{67298\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{715806\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{8290764\phi'_{15}}{4^{23}},$$

$$2\phi_1-\alpha_5-\alpha_7, b_{11/4}=\frac{121\phi'_3}{4^2}-\frac{4235\phi'_5}{4^5}+\frac{32186\phi'_7}{4^8}+\frac{52877\phi'_9}{4^{11}}$$
$$+\frac{317262\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{2682306\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{26823060\phi'_{15}}{4^{20}};$$

又“四分弧之一起度各通弦率”，

$$\alpha_2+\alpha_4, c_{3/2}=\frac{3\phi'_2}{2}-\frac{5\phi'_4}{2^6}-\frac{27\phi'_6}{2^{12}}-\frac{234\phi'_8}{2^{18}}-\frac{2431\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{27846\phi'_{12}}{2^{30}}$$
$$-\frac{339150\phi'_{14}}{2^{36}}-\frac{4308820\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$\alpha_4+\alpha_6, c_{7/2}=\frac{7\phi'_2}{2}-\frac{105\phi'_4}{2^6}+\frac{273\phi'_6}{2^{12}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{18}}+\frac{10829\phi'_{10}}{2^{24}}$$
$$+\frac{108290\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{1207850\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{14425180\phi'_{16}}{2^{42}};$$

$$\alpha_6+\alpha_8, c_{11/2}=\frac{11\phi'_2}{2}-\frac{429\phi'_4}{2^6}+\frac{7293\phi'_6}{2^{12}}-\frac{14589\phi'_8}{2^{18}}$$
$$-\frac{60775\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{4175710\phi'_{14}}{2^{36}}$$
$$-\frac{44143220\phi'_{16}}{2^{42}};$$

“四分弧之一起度各倍矢率”，

$$2\phi_1-\alpha_1-\alpha_3, b_{1/4}=\frac{3\phi'_3}{4^2}+\frac{5\phi'_5}{4^5}+\frac{42\phi'_7}{4^8}+\frac{429\phi'_9}{4^{11}}+\frac{4862\phi'_{11}}{4^{14}}$$

$$+\frac{58786\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{742900\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-\alpha_3-\alpha_5, b_{5/4}=\frac{25\phi'_3}{4^2}-\frac{75\phi'_5}{4^5}-\frac{390\phi'_7}{4^8}-\frac{3315\phi'_9}{4^{11}}$$

$$-\frac{34034\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{386750\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{4683500\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-\alpha_5-\alpha_7, b_{9/4}=\frac{81\phi'_3}{4^2}+\frac{1755\phi'_5}{4^5}+\frac{3978\phi'_7}{4^8}+\frac{17901\phi'_9}{4^{11}}$$

$$+\frac{139230\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{1345890\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{14642100\phi'_{15}}{4^{20}};$$

故

$$c_{n/m}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{2^2\cdot 3!}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{2^4\cdot 5!}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right]}{2^6\cdot 7!}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots, \qquad (\text{XII})$$

$$b_{n/m}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{3\cdot 4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad (\text{XIII})$$

第三：令$\frac{n}{m}=\frac{n}{5}$。

如图 37 和图 38，BG 为本弧，各析为 $BC\left(=\frac{BG}{5}\right)$，$CG$

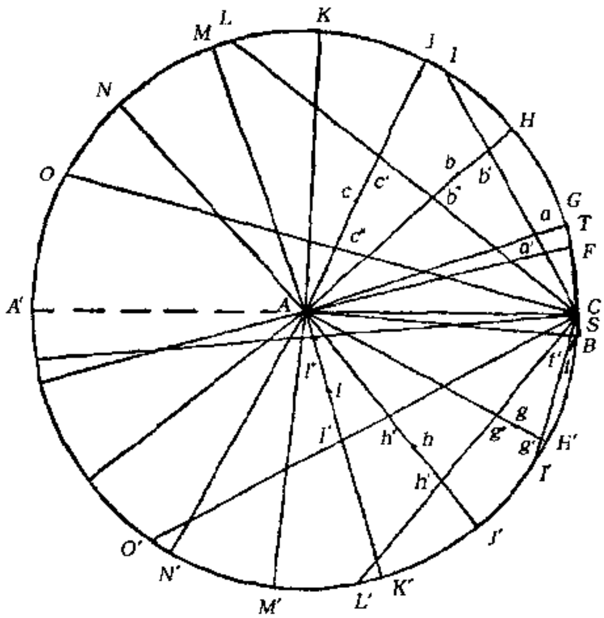

K
L
M
J
I
N
H
O
b
b′
c
c′
G
a
T
a′
F
A′
A
C
S
B
f′
g
H′
h
I′
J′
O′
N′
M′
L′
K′

图 37

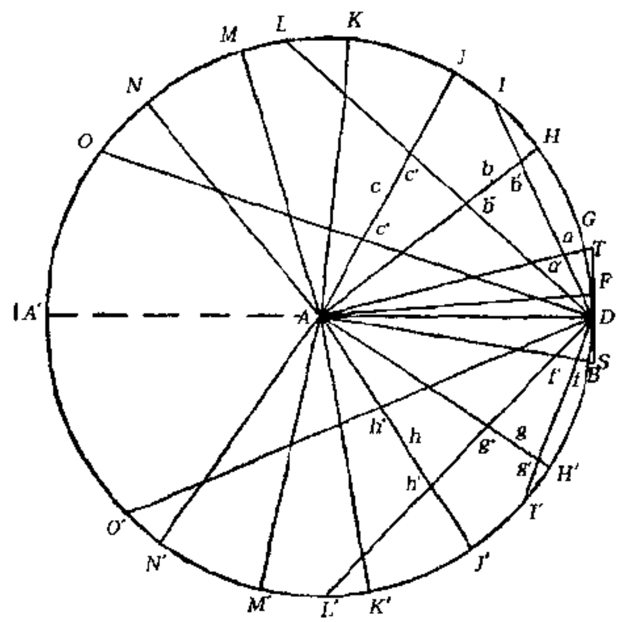

K
L
M
J
I
N
H
O
b
b′
c
c′
G
a
T
a′
F
A′
A
D
S
B
f′
f
g
H′
h
I′
J′
O′
N′
M′
L′
K′

图 38

$\left(=\frac{4BG}{5}\right)$，或 $BD\left(=\frac{2BG}{5}\right)$，$DG\left(=\frac{3BG}{5}\right)$。如前作线成相似形。又作$\frac{3}{5}$，$\frac{13}{5}$，$\frac{23}{5}$，$\frac{33}{5}$；$\frac{7}{5}$，$\frac{17}{5}$，$\frac{27}{5}$；$\frac{1}{5}$，$\frac{11}{5}$，$\frac{21}{5}$，$\frac{31}{5}$；$\frac{9}{5}$，$\frac{19}{5}$，$\frac{29}{5}$各通弦线。

次如前用"借率法"，并参阅(A)整分起度弦矢率论，附图图 30 和图 39。

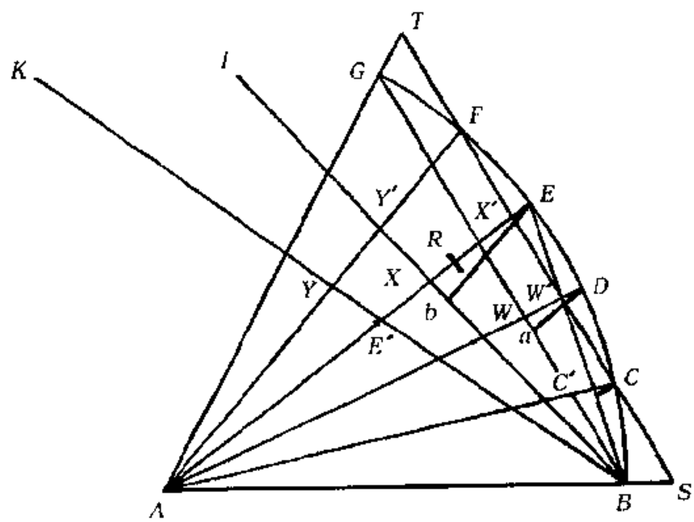


图 39

$\frac{1}{5}$第一形 AST 腰

$$AS=\frac{AW'\cdot(=AC')AB}{AW}=\frac{(\phi_1-\phi_3)\phi_1}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$
$$=\phi_1+2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}+610\phi_{15}$$

又在 $\triangle BCS$ 内，$\angle BCS=\frac{2}{5}\alpha$，

$\triangle BAW$ 内，$\angle BAW=\frac{2}{5}\alpha$，

又 $\angle CSB=\angle WBA$；

故$\triangle BCS$，BAW 为相似三角形。

$\frac{1}{5}$第二形 CSf' 腰(参看图 39)

$$
\begin{aligned}
CS &= \frac{AC \cdot BC}{AW} = \frac{\phi_1 \cdot \phi_2}{\phi_1 - 3\phi_3 + \phi_5} \\
&= \phi_2 + 3\phi_4 + 8\phi_6 + 21\phi_8 + 55\phi_{10} \\
&\quad + 144\phi_{12} + 377\phi_{14} + 987\phi_{16}。
\end{aligned}
$$

次如前用"借率法",并参阅(A)整分起度弦矢率论,附图图 30 和图 40。

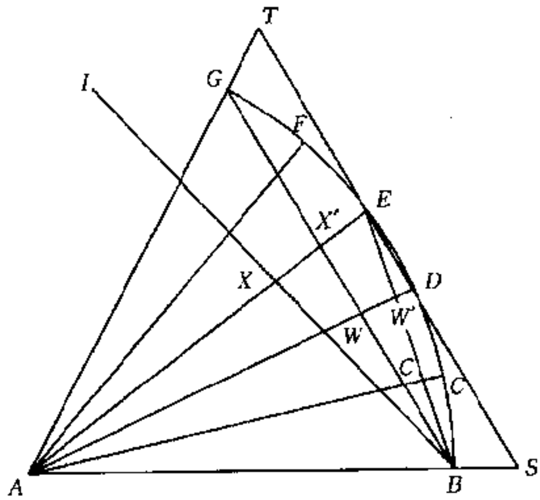


图　40

$\frac{2}{5}$第一形 AST 腰

$$
\begin{aligned}
AS &= \phi_1 + 3\phi_3 + 8\phi_5 + 21\phi_7 + 55\phi_9 \\
&\quad + 144\phi_{11} + 377\phi_{12} + 987\phi_{15}。
\end{aligned}
$$

$\frac{2}{5}$第二形 DSf' 腰(参看图 38)

$$
\begin{aligned}
DS &= \frac{AD \cdot BW(=BW')}{AW} = \frac{\phi_1(3\phi_2 - \phi_4)}{\phi_1 - 3\phi_3 + \phi_5} \\
&= 2\phi_2 + 5\phi_4 + 13\phi_6 + 34\phi_8 + 89\phi_{10} + 233\phi_{12}
\end{aligned}
$$

$$+610\phi_{14}+1597\phi_{16}。$$

复次用"易率法"：

因 $b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$，

令 $\phi_1'=\phi_1, \phi_3'=\phi_5$；

则
$$\frac{\phi_3'}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\frac{7\phi_7}{5}-\frac{2\phi_9}{5}+\frac{\phi_{11}}{5^2},$$

$$\frac{\phi_5'}{5^4}=\phi_5-4\phi_7+\frac{34\phi_9}{5}-\frac{32\phi_{11}}{5}+\frac{81\phi_{13}}{5^2}-\frac{32\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi_7'}{5^6}=\phi_7-6\phi_9+\frac{81\phi_{11}}{5}-\frac{130\phi_{13}}{5}+\frac{690\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi_9'}{5^8}=\phi_9-8\phi_{11}+\frac{148\phi_{13}}{5}-\frac{336\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi_{11}'}{5^{10}}=\phi_{11}-10\phi_{13}+\frac{235\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi_{13}'}{5^{12}}=\phi_{13}-12\phi_{15},$$

$$\frac{\phi_{15}'}{5^{14}}=\phi_{15}。$$

故 $\frac{1}{5}$第一形腰

$$AS=\phi_1-2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}+610\phi_{15}。$$

$$=\phi_1'+\frac{2\phi_3'}{5^2}+\frac{9\phi_5'}{5^4}+\frac{231\phi_7'}{5^7}+\frac{1254\phi_9'}{5^9}$$

$$+\frac{35112\phi_{11}'}{5^{12}}+\frac{200564\phi_{13}'}{5^{14}}+\frac{1161508\phi_{15}'}{5^{16}},$$

而 $2=2$，

$9=2\times2+5$，

$231=13\times5+9\times4-2\times7$，

$1254=34\times5+231\times6-9\times34+2\times2$，

$$35112=89\times5^2+1254\times8\times5-231\times81+32\times9\times5-2\times1,$$

$$200564=233\times5^2+35112\times10-1254\times148+231\times130-9\times81,$$

$$1161508=610\times5^2+200564\times12-35112\times\frac{235}{5}+1254\times336-231\times\frac{690}{5}+9\times32。$$

又因　$c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$,

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}。$$

如前令　$\phi_1'=\phi_1,\phi_3'=b_5$,

则　$\dfrac{\phi_2'}{5}=\phi_2-\phi_4+\dfrac{\phi_6}{5}$。

盖因从定义 $\phi_1':\dfrac{\phi_2'}{5}=\dfrac{\phi_2'}{5}:\dfrac{\phi_3'}{5^2}$,

$$\frac{\phi_3'}{5^2}=\frac{\frac{\phi_2'}{5}\cdot\frac{\phi_2'}{5}}{\phi_1}=\frac{b_5}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\frac{7\phi_7}{5}-\frac{2\phi_9}{5}+\frac{\phi_{11}}{5^2}。$$

同理　$$\frac{\phi_4'}{5^3}=\frac{1}{\phi_1}\left(\frac{\phi_2'}{5}\cdot\frac{\phi_3'}{5^2}\right)=\phi_4-3\phi_6+\frac{18\phi_8}{5}-\frac{11\phi_{10}}{5}+\frac{18\phi_{12}}{5^2}-\frac{3\phi_{14}}{5^2}+\frac{\phi_{16}}{5^3},$$

$$\frac{\phi_6'}{5^5}=\phi_6-5\phi_8+\frac{55\phi_{10}}{5}-\frac{70\phi_{12}}{5}+\frac{285\phi_{14}}{5^2}-\frac{155\phi_{16}}{5^2},$$

$$\frac{\phi_8'}{5^7}=\phi_8-7\phi_{10}+\frac{112\phi_{12}}{5}-\frac{217\phi_{14}}{5}+\frac{1421\phi_{16}}{5^2},$$

$$\frac{\phi_{10}'}{5^9}=\phi_{10}-9\phi_{12}+\frac{189\phi_{14}}{5}-\frac{492\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi_{12}'}{5^{11}}=\phi_{12}-11\phi_{14}+\frac{286\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi_{14}'}{5^{13}}=\phi_{14}-13\phi_{16},$$

$$\frac{\phi_{16}'}{5^{15}}=\phi_{16}。$$

故 $\frac{1}{5}$第二形腰

$$CS=\phi_2+3\phi_4+8\phi_6+21\phi_8+55\phi_{10}+144\phi_{12}$$
$$+377\phi_{14}+987\phi_{16}$$
$$=\frac{\phi_2'}{5}+\frac{4\phi_4'}{5^3}+\frac{99\phi_6'}{5^6}+\frac{528\phi_8'}{5^8}+\frac{2926\phi_{10}'}{5^{10}}$$
$$+\frac{82992\phi_{12}'}{5^{13}}+\frac{478268\phi_{14}'}{5^{16}}+\frac{13938096\phi_{16}'}{5^{18}},$$

而 $4=3+1,$

$$99=8\times5+4\times3\times5-1,$$

$$528=21\times5+99\times5-4\times18,$$

$$2926=55\times5+528+7-99\times\frac{55}{5}+4\times11,$$

$$82992=144\times5^2+2926\times9\times5-528\times112+99\times70$$
$$-4\times18,$$

……………………………………………………。

复次用“易率法”：

因 $b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11},$

令 $\phi_1'=\phi_1,\phi_3'=b_5,$

如前求得$\frac{\phi_3'}{5^2},\frac{\phi_5'}{5^4},\frac{\phi_7'}{5^6},\frac{\phi_9'}{5^8},\frac{\phi_{11}'}{5^{10}},\frac{\phi_{13}'}{5^{12}},\frac{\phi_{15}'}{5^{14}},$

故 $\frac{2}{5}$第一形腰

$$AS=\phi_1+3\phi_3+8\phi_5+21\phi_7+55\phi_9$$
$$+144\phi_{11}+377\phi_{13}+987\phi_{15},$$

$$=\phi_1' + \frac{3\phi_3'}{5^2} + \frac{14\phi_5'}{5^4} + \frac{364\phi_7'}{5^7} + \frac{1989\phi_9'}{5^9}$$

$$+ \frac{55913\phi_{11}'}{5^{12}} + \frac{320229\phi_{13}'}{5^{14}} + \frac{1858032\phi\phi_{15}'}{5^{16}}。$$

又因 $c_5 = 5\phi_2 - 5\phi_4 + \phi_6$,

$$b_5 = 25\phi_3 - 50\phi_5 + 35\phi_7 - 10\phi_9 + \phi_{11},$$

如前令 $\phi_1' = \phi_1, \phi_3' = b_5$,

由是求得$\frac{\phi_2'}{5}, \frac{\phi_4'}{5^3}, \frac{\phi_6'}{5^5}, \frac{\phi_8'}{5^7}, \frac{\phi_{10}'}{5^9}, \frac{\phi_{12}'}{5^{11}}, \frac{\phi_{14}'}{5^{13}}, \frac{\phi_{16}'}{5^{15}}$;

故 $\frac{2}{5}$第二形腰,

$$DS = 2\phi_2 + 5\phi_4 + 13\phi_6 + 34\phi_8 + 89\phi_{10} + 233\phi_{12}$$

$$+ 610\phi_{14} + 1597\phi_{16}$$

$$= \frac{2\phi_2'}{5} + \frac{7\phi_4'}{5^3} + \frac{168\phi_6'}{5^6} + \frac{884\phi_8'}{5^8} + \frac{4862\phi_{10}'}{5^{10}}$$

$$+ \frac{137241\phi_{12}'}{5^{13}} + \frac{788256\phi_{14}'}{5^{15}} + \frac{22915728\phi_{16}'}{5^{18}}。$$

复次求得$\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$起度各形腰底率。

由是得“五分弧之四起度各通弦率”,

$$c_{3/5} = \frac{3\phi_2'}{5} + \frac{2\phi_4'}{5^3} + \frac{27\phi_6'}{5^5} + \frac{99\phi_8'}{5^8} + \frac{418\phi_{10}'}{5^{10}}$$

$$+ \frac{9576\phi_{12}'}{5^{13}} + \frac{46284\phi_{14}'}{5^{15}} + \frac{1161508\phi_{16}'}{5^{18}},$$

$$c_{13/5} = \frac{13\phi_2'}{5} - \frac{78\phi_4'}{5^3} + \frac{273\phi_6'}{5^6} - \frac{741\phi_8'}{5^8} - \frac{2717\phi_{10}'}{5^{10}}$$

$$- \frac{57305\phi_{12}'}{5^{13}} - \frac{262276\phi_{14}'}{5^{15}} - \frac{6332082\phi_{16}'}{5^{18}},$$

$$c_{23/5} = \frac{23\phi_2'}{5} - \frac{483\phi_4'}{5^3} + \frac{9177\phi_6'}{5^6} - \frac{5244\phi_8'}{5^8} + \frac{12673\phi_{10}'}{5^{10}}$$

$$+ \frac{215441\phi_{12}'}{5^{13}} + \frac{861764\phi_{14}'}{5^{15}} + \frac{18958808\phi_{16}'}{5^{18}},$$

$$c_{33/5}=\frac{33\phi_2'}{5}-\frac{1463\phi_4'}{5^3}+\frac{79002\phi_6'}{5^6}-\frac{218196\phi_8'}{5^8}-\frac{103037\phi_{10}'}{5^{10}}$$
$$-\frac{1095939\phi_{12}'}{5^{13}}-\frac{3400221\phi_{14}'}{5^{15}}-\frac{63470792\phi_{16}'}{5^{18}};$$

“五分弧之四起度各倍矢率”，

$$b_{4/5}=\frac{16\phi_3'}{5^2}+\frac{12\phi_5'}{5^4}+\frac{168\phi_7'}{5^7}+\frac{727\phi_9'}{5^9}$$
$$+\frac{13376\phi_{11}'}{5^{12}}+\frac{61712\phi_{13}'}{5^{14}}+\frac{299744\phi_{15}'}{5^{16}},$$

$$b_{9/5}=\frac{81\phi_3'}{5^2}+\frac{378\phi_5'}{5^4}-\frac{1297\phi_7'}{5^7}-\frac{3078\phi_9'}{5^9}$$
$$-\frac{54549\phi_{11}'}{5^{12}}-\frac{224828\phi_{13}'}{5^{14}}-\frac{1011636\phi_{15}'}{5^{16}},$$

$$b_{14/5}=\frac{196\phi_3'}{5^2}-\frac{2793\phi_5'}{5^4}+\frac{44688\phi_7'}{5^7}+\frac{23142\phi_9'}{5^9}$$
$$+\frac{262276\phi_{11}'}{5^{12}}+\frac{852397\phi_{13}'}{5^{14}}+\frac{3297184\phi_{15}'}{5^{16}};$$

又“五分弧之一起度各通弦率”，

$$c_{7/5}=\frac{7\phi_2'}{5}-\frac{7\phi_4'}{5^3}-\frac{77\phi_6'}{5^6}-\frac{264\phi_8'}{5^8}-\frac{1078\phi_{10}'}{5^{10}}$$
$$-\frac{24206\phi_{12}'}{5^{13}}-\frac{115444\phi_{14}'}{5^{15}}-\frac{2869608\phi_{16}'}{5^{18}},$$

$$c_{17/5}=\frac{17\phi_2'}{5}-\frac{187\phi_4'}{5^3}+\frac{748\phi_6'}{5^6}+\frac{1496\phi_8'}{5^8}+\frac{4862\phi_{10}'}{5^{10}}$$
$$+\frac{95914\phi_{12}'}{5^{13}}+\frac{420546\phi_{14}'}{5^{15}}+\frac{9852792\phi_{16}'}{5^{18}},$$

$$c_{27/5}=\frac{27\phi_2'}{5}-\frac{792\phi_4'}{5^3}+\frac{24948\phi_6'}{5^6}-\frac{15444\phi_8'}{5^8}-\frac{26598\phi_{10}'}{5^{10}}$$
$$-\frac{391716\phi_{12}'}{5^{13}}-\frac{1441314\phi_{14}'}{5^{15}}-\frac{29993058\phi_{16}'}{5^{18}},$$

“五分弧之一起度各倍矢率”，

$$b_{1/5}=\frac{\phi_3'}{5^2}+\frac{2\phi_5'}{5^4}+\frac{33\phi_7'}{5^7}+\frac{132\phi_9'}{5^9}+\frac{2926\phi_{11}'}{5^{12}}$$

$$+\frac{13832\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{68324\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{6/5}=\frac{36\phi'_3}{5^2}-\frac{33\phi'_5}{5^4}-\frac{352\phi'_7}{5^7}-\frac{1188\phi'_9}{5^9}$$

$$-\frac{24024\phi'_{11}}{5^{12}}-\frac{107198\phi'_{13}}{5^{14}}-\frac{508896\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{11/5}=\frac{121\phi'_3}{5^2}-\frac{968\phi'_5}{5^4}+\frac{3388\phi'_7}{5^7}+\frac{6292\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{97526\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{372372\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1593834\phi'_{15}}{5^{16}}。$$

同理，得$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{5}$弧起度各通弦及各倍矢率。

故

$$c_{n/m}=\left(\frac{n}{m}\right)\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{2^2\cdot3!}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{2^4\cdot5!}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right]}{2^6\cdot7!}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots; \qquad (\text{XI})$$

$$b_{n/m}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]}{3\cdot4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right]\left[\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right]}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots。 \qquad (\text{XII})$$

以上见项名达《象数一原》卷三。

(D) 零分起度弦矢率论

按连比例定理，

$$\phi_1' : \phi_2' = \phi_2' : \phi_3',$$

令

$$\phi_3' = b_m,$$

则

$$\phi_1' : \phi_2' = \phi_2' : b_m$$

而

$$\phi_2' = c_m,$$

故(XⅡ)，(XⅢ)二式可改书为：

$$\begin{aligned} c_{n/m} = \frac{n}{m}c_m & - \frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{4\cdot 3!\cdot m^3\cdot r^2} \\ & + \frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(c_m)^5}{4^2\ 5!\cdot m^5\cdot r^4} \\ & - \frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{4^3\cdot 7!\cdot m^7\cdot r^6} \\ & + \cdots\cdots。 \end{aligned} \qquad (\text{XIV})$$

$$\begin{aligned} b_{n/m} = \frac{n}{m}b_m & - \frac{n^2(n^2-m^2)(b_m)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r} \\ & + \frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(b_m)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6m^6\cdot r^2} \\ & - \frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^4} \\ & + \cdots\cdots, \end{aligned} \qquad (\text{XV})$$

项名达逐次令$\frac{n}{m}=\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{4},\frac{n}{5}$以证(XⅡ)，(XⅢ)二式的真确，卷四写成四纸，因病未续，其后戴煦续成此卷，为演(XIV)，(XV)二式，如上所举。

以上见项名达《象数一原》卷四。

(E) 诸术通诠

《象数一原》卷五，先以(XV)式化为：

$$\operatorname{vers}\frac{n}{m}\alpha=\frac{n^2(2\operatorname{vers}m\alpha)}{2!\cdot m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)(2\operatorname{vers}m\ \alpha)^2}{4!\cdot m^4\cdot r}$$
$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(2\operatorname{vers}m\ \alpha)^3}{6!\ m^6r^2}$$
$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\operatorname{vers}m\ \alpha)^4}{8!\cdot m^8\cdot r^3}$$
$$+\cdots\cdots。\qquad (\text{XVI})$$

项氏以(XIV),(XV)或(XVI)为本术,

令　$r=1$,

$c_m=2\sin 30°=1$,

而　$m=30°$;

$b_m=2\operatorname{vers}60°=1$,

而　$m=60°$;

变通为下之二术:

$$\sin n=\frac{n}{60}\left(1+\frac{(30^2-n^2)}{3!\cdot(60)^2}+\frac{(30^2-n^2)(9\times 30^2-n^2)}{5!\cdot(60)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{(30^2-n^2)(9\times 30^2-n^2)(25\times 30^2-n^2)}{7!\cdot(60)^6}+\cdots\cdots\right),$$

$$\operatorname{vers}n=\frac{n^2}{2(60)^2}\left(1+\frac{(2^2\cdot 30^2-n^2)}{3\cdot 4\cdot(60)^2}+\frac{(2^2\cdot 30^2-n^2)(4^2\cdot 30^2-n^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(60)^4}\right.$$

$$+\frac{(2^2\cdot30^2-n^2)(4^2\cdot30^2-n^2)(6^2\cdot30^2-n^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8(60)^6}+\cdots\cdots\Big];$$

又由(XIV),(XV)二式,容易证得董氏四术:

$$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\cdot3!\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot5!\cdot r^4}-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot7!\cdot r^6}+\cdots\cdots, \quad (\text{X})$$

$$b_m=m^2b-\frac{m^2(m^2-1^2)b^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)b^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6r^2}-\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8r^3}+\cdots\cdots;$$

或

$$\text{vers }m\alpha=m^2(\text{vers }\alpha)-\frac{m^2(4m^2-4)\cdot2\cdot(\text{vers }\alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)\cdot2^2\cdot(\text{vers }\alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)(4m^2-25)\cdot2^3\cdot(\text{vers }\alpha)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots, \quad (\text{XI})$$

$$c_{1/m}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{4\cdot3!\,m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\cdot5!\cdot m^5\cdot r^4}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot7!\cdot m^7\cdot r^6}+\cdots\cdots, \quad (\text{X})。$$

$$b_{1/m}=\frac{b}{m^2}+\frac{(m^2-1)b^2}{3\cdot4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(m^2-1)(2\cdot m^2-1)b^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^2-1)(2^2\cdot m^2-1)(3^2\cdot m^2-1)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}+\cdots\cdots;$$

或
$$\operatorname{vers}\frac{1}{m}\alpha=\frac{(\operatorname{vers}\alpha)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)\cdot2\cdot(\operatorname{vers}\alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4\cdot m^2-4)\cdot2^2\cdot(\operatorname{vers}\alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4m^2-4)(9\cdot4m^2-4)2^3\cdot(\operatorname{vers}\alpha)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}+\cdots\cdots。\qquad(\text{XI})_a$$

又由(XIV),(XV)二式,可证杜氏九术:

以前已由董氏(X),(XI)二式,证得杜氏的(IV),(V)和(II),(III)四式,现不另述。

此外(VI)式,“通弦求通弧”,则由前之(X)$_a$式,令$m=\infty$,则$c_{1/m}$为无穷细,而与弧合,而$(m^2-1),(2^2\cdot m^2-1),(3^2\cdot m^2-1),\cdots\cdots$等甚近于$m^2,2^2\cdot m^2,3^2\cdot m^2,\cdots\cdots$故(X)$_a$式可变为:

$$c_{1/m}=\frac{c}{m}+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot3!\cdot m\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot c^5}{4^2\cdot5!\cdot m\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot c^7}{4^3\cdot7!\,m\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或
$$2a=m\cdot c_{1/m}=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot c^5}{4^2\cdot5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot c^7}{4^3\cdot7!\cdot r^6}+\cdots\cdots。\qquad(\text{VI})$$

同理得(VII)。

至(IX)式,“矢求通弧”则由(XI)$_a$式,令$m=\infty$,则$(4m^2-4),(4\cdot4m^2-4),(9\cdot4m^2-4),\cdots\cdots$等甚近于$4m^2,4\cdot4m^2,9\cdot4m^2,\cdots\cdots$,故(XI)$_a$式可变为:

$$\operatorname{vers}\frac{1}{m}\alpha=\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)}{2!\cdot m^2}+\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{4!\cdot m^2\cdot r}+\frac{2^2\cdot(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{6!\cdot m^2\cdot r^2}$$

$$+\frac{2^2\cdot 3^2\cdot(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^4}{8!\cdot m^2\cdot r^3}+\cdots\cdots,$$

因　$r:c_{1/m}=c_{1/m}:b_{1/m}$之关系，上式左边可书为：$\dfrac{(c_{1/m})^2}{2\cdot r}$，两边再各乘 $4m^2$，化得

$$(2a)^2=r\left[(8\ \mathrm{vers}\ \alpha)+\frac{1^2(8\ \mathrm{vers}\ \alpha)}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2(8\ \mathrm{vers}\ \alpha)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots\cdots\right] \tag{Ⅸ}$$

同理得(Ⅷ)。

至(Ⅰ)式，"圜径求周"乃由(Ⅵ)式推得，前已述及，可不复述，以上见项名达《象数一原》卷五。

(F)　诸术明变

"诸术明变"中，著下列正弦求各线，余弦求各线式：

$$\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{\sin^3\alpha}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\sin^5\alpha}{2\cdot 4\cdot r^4}+\frac{3\cdot 5\sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\sin^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\alpha=r+\frac{\sin^2\alpha}{2\cdot r}+\frac{3\cdot\sin^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\sin^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{vers}\ \alpha=\frac{\sin^2\alpha}{2\cdot r}+\frac{\sin^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\sin^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\cos\alpha=r-\left(\frac{\sin^2\alpha}{2\cdot r}+\frac{\sin^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cdot\sin^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots\right),$$

$$\csc\alpha=\frac{r^2}{\sin\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{r^2}{\sin\alpha}-\left(\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\sin^3\alpha}{2\cdot 4\cdot r^2}+\frac{3\cdot\sin^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\sin^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8}+\cdots\cdots\right);$$

* * *

$$\cot\alpha=\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{2\cdot r^2}+\frac{3\cos^5\alpha}{2\cdot 4\cdot r^4}+\frac{2\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cos^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$\csc\alpha=r+\frac{\cos^2\alpha}{2r}+\frac{3\cos^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cdot 5\cos^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cos^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\sin\alpha=r-\left(\frac{\cos^2\alpha}{2\cdot r}+\frac{\cos^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cos^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots\right),$$

$$\operatorname{covers}\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{2\cdot r}+\frac{\cos^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cos^6\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^8\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\alpha=\frac{r^2}{\cos\alpha},$$

$$\tan\alpha=\frac{r^2}{\cos\alpha}-\left(\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\cos^3\alpha}{2\cdot 4\cdot r^2}+\frac{3\cos^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cos^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8}+\cdots\cdots\right)。$$

项名达又因椭圆求周术，变通得“圆周求径”术，如：

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\cdots,$$

椭圆周长 $L=\pi d\left[1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}e^8-\cdots\cdots\right],$

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$ ①

① 参看李俨，《中算家的圆锥曲线说》，本集第 519～537 页（*见本卷第 491～508 页。——编者）。

项氏自谓："此级数，敛级颇难，不足为术也"，以上见项名达《象数一原》卷六。

十八、戴煦的求表捷术

戴煦，字鄂士，钱塘人（1805～1860），自道光乙巳（1845 年）至咸丰壬子（1852 年），前后八年，演录《对数简法》、《外切密率》、《假数测圜》三种，总名为《求表捷术》。戴煦曾校补项名达遗著《象数一原》，已详前节。其《外切密率》则因杜氏仅求弦矢，徐有壬有切线弧背互求二术，而于割线尚未齐全，尝以此意告项名达，并为推演，以示项氏，未及半而项氏卒。辛亥（1851 年）见李善兰，由李示以《对数探源》、《弧矢启秘》，并促成其说，因于咸丰壬子（1852 年）写定。以切割二线出于圆外，故名曰《外切密率》，凡四卷：

卷一　本弧求切线术解。　余弧求切线术解。
　　　弧背求切线算式。
卷二　本弧求割线术解。　余弧求割线术解。
　　　弧背求割线算式。
卷三　切线求本弧术解。　切线求余弧术解。
　　　切线求距弧术解。　切线求弧背算式。
卷四　割线求本弧术解。　割线求余弧术解。
　　　割线求半弧术解。　割线求倍弧术解。
　　　割线求弧背算式。

*　　*　　*

1°　本弧求切线：

$$\tan\alpha = a + \frac{2a^3}{3!\cdot r} + \frac{16a^5}{5!\cdot r^4} + \frac{272a^7}{7!\cdot r^6} + \frac{7936a^9}{9!\cdot r^8} + \cdots, \qquad (1)^{①}$$

如图 41，$AB=\alpha$ 为本弧，$BC=90-\alpha$ 为余弧。

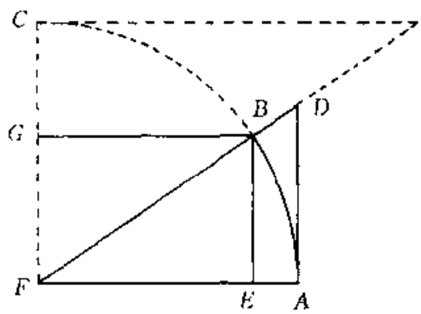


图 41

$DA=\tan\alpha, BE=\sin\alpha, FE=\cos\alpha,$

因 $FE : BE = FA : DA,$

即 $\cos\alpha : \sin\alpha = r : \tan\alpha,$

$1-\text{vers}\,\alpha : \sin\alpha = r : \tan\alpha,$

由杜氏（Ⅱ），（Ⅲ）式得

$$\tan\alpha = \frac{r\left(a - \frac{a^3}{3!\cdot r^2} + \frac{a^5}{5!\cdot r^4} - \frac{a^7}{7!\cdot r^6} + \frac{a^9}{9!\cdot r^8} - \cdots\cdots\right)}{\left(r - \frac{a^2}{2!\cdot r} + \frac{a^4}{4!\cdot r^3} - \frac{a^6}{6!\cdot r^5} + \frac{a^8}{8!\cdot r^7} - \cdots\cdots\right)},$$

---

① 参看《中算史论丛》第一集第 325 页的记法*

* 此注为作者所藏修订本中所补，系指《中算家的级数论》一文有关 Bernoulli 数在正切函数上之应用。

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$$

见本《全集》第六卷第 295 页。由此可以判断李俨已考虑到与 Bernoulli 数的相似问题。 编者

因 $r=\phi_1, a=\phi_2$,

故 $\dfrac{a^2}{r}=\phi_3, \dfrac{a^3}{r^2}=\phi_4, \cdots\cdots$,

前式化为:

$$\tan\alpha=\frac{\phi_1\left(\phi_2-\dfrac{\phi_4}{3!}+\dfrac{\phi_6}{5!}-\dfrac{\phi_8}{7!}+\dfrac{\phi_{10}}{9!}-\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1-\dfrac{\phi_3}{2!}+\dfrac{\phi_5}{4!}-\dfrac{\phi_7}{6!}+\dfrac{\phi_9}{8!}-\cdots\cdots\right)};$$

以上分母子按代数除法除得

$$\tan\alpha=\phi_2+\frac{2\phi_4}{3!}+\frac{16\phi_6}{5!}+\frac{272\phi_8}{7!}+\frac{7936\phi_{10}}{9!}+\cdots\cdots,$$

$$=a+\frac{2a^3}{3!\cdot r^2}+\frac{16a^5}{5!\cdot r^4}+\frac{272a^7}{7!\cdot r^6}+\frac{7936a^9}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots。$$ 证讫。

2° 余弧求切线:

$$\tan\alpha=\frac{r^2}{\dfrac{\pi}{2}-a}-\frac{2\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{3!}-\frac{8\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot 5!\cdot r^2}-\frac{32\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot 7!\cdot r^4}-\frac{1152\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot 5\cdot 9!\cdot r^6}-\cdots\cdots。\quad (2)$$

如前图 $BG:GF=FA:DA$,

即 $\sin(90°-\alpha):\cos(90°-\alpha)=r:\tan\alpha$,

$$\tan\alpha = = \frac{r\left[r-\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^2}{2!\cdot r}+\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^4}{4!\cdot r^3}-\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^6}{6!\cdot r^5}+\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^8}{8!\cdot r^7}-\cdots\right]}{\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)-\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^3}{3!\cdot r^2}+\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^5}{5!\cdot r^4}-\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^7}{7!\cdot r^6}+\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^9}{9!\cdot r^8}-\cdots\right]},$$

令 $r=\phi_2,\ \dfrac{\pi}{2}-a=\phi_3,$

则 $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^2}{r}=\phi_4,\ \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^3}{r^2}=\phi_5,\ \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^4}{r^3}=\phi_6,$

$\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^5}{r^4}=\phi_7,\ \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^7}{r^6}=\phi_9,$

……………………；

代入化得：

$$\tan\alpha=\frac{\phi_2\left(\phi_2-\dfrac{\phi_4}{2!}+\dfrac{\phi_6}{4!}-\dfrac{\phi_8}{6!}+\dfrac{\phi_{10}}{8!}-\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_3-\dfrac{\phi_5}{3!}+\dfrac{\phi_7}{5!}-\dfrac{\phi_9}{7!}+\dfrac{\phi_{11}}{9!}-\cdots\cdots\right)}=\phi_1-\frac{2\phi_3}{3!}-\frac{8\phi_5}{3\cdot5!}-\frac{32\phi_7}{3\cdot7!}-\frac{1152\phi_9}{3\cdot5\cdot9!}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{r^2}{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}-\frac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{3!}-\frac{8\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot5!\cdot r^2}-\frac{32\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot7!\cdot r^4}-\frac{1152\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\ 9!\cdot r^6}-\cdots\cdots$$ 。证讫。

以上见戴煦《外切密率》卷一。

3° 本弧求割线：

$$\sec\alpha-r=\frac{a^2}{2!\cdot r}+\frac{5a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{61a^6}{6!\cdot r^5}+\frac{1385a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{50521a^{10}}{10!\cdot r^9}+\cdots\cdots。\tag{3}$$

如图 42，$AB=a$ 为本弧，$BC=\frac{\pi}{2}-a$ 为余弧。

$$FD=\sec\alpha,$$

$$BD=\sec\alpha-r,$$

$$EF=\cos\alpha,$$

$$EA=BG=\text{vers }\alpha,$$

$$FB=r。$$

因 $EF:FB=BG:BD$，

即 $\cos\alpha:r=\text{vers }\alpha:(\sec\alpha-r)$，

$$\sec\alpha-r=\frac{r\left(\frac{a^2}{2!\cdot r}-\frac{a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{a^6}{6!\cdot r^5}-\frac{a^8}{8!\cdot r^7}+\cdots\right)}{\left(r-\frac{a^2}{2!\cdot r}+\frac{a^4}{4!\cdot r^3}-\frac{a^6}{6!\cdot r^5}+\frac{a^8}{8!\cdot r^7}-\cdots\right)}。$$

令 $r=\phi_1, a=\phi_2, \frac{a^2}{r}=\phi_3, \cdots\cdots,$

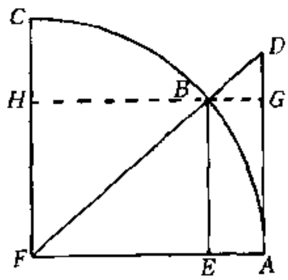


图 42

代入化得：

$$\sec\alpha-r=\frac{\phi_1\left(\frac{\phi_3}{2!}-\frac{\phi_5}{4!}+\frac{\phi_7}{6!}-\frac{\phi_9}{8!}+\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1-\frac{\phi_3}{2!}+\frac{\phi_5}{4!}-\frac{\phi_7}{6!}+\frac{\phi_9}{8!}-\cdots\cdots\right)},$$

$$=\frac{\phi_3}{2!}+\frac{5\phi_5}{4!}+\frac{61\phi_7}{6!}+\frac{1385\phi_9}{8!}+\frac{50521\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{a^2}{2!\cdot r}+\frac{5a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{61a^6}{6!\cdot r^5}+\frac{1385a^8}{8!\cdot r^7}+\frac{50521a^{10}}{10!\cdot r^9}+\cdots\cdots。$$

证讫。

4° 余弧求割线：

$$\sec\alpha=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{3!}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot5!\cdot r^2}+\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot7!\cdot r^4}+\frac{1142\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\cdot9!\cdot r^6}+\cdots。\tag{4}$$

如前图 $HB:FB=FA:FD,$

$$\sin(90-\alpha):r=r:\sec\alpha,$$

$$\sec\alpha=r^2\div\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3!\cdot r^2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{5!\cdot r^4}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{7!\cdot r^6}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^9}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots\right];$$

令 $r^2=\phi_2,\frac{\pi}{2}-a=\phi_3,\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{r}=\phi_4,\cdots\cdots,$

代入化得：

$$\sec\alpha=\frac{\phi_4}{\phi_3-\dfrac{\phi_5}{3!}+\dfrac{\phi_7}{5!}-\dfrac{\phi_9}{7!}+\dfrac{\phi_{11}}{9!}-\cdots\cdots},$$

$$=\phi_1+\frac{\phi_3}{3!}+\frac{7\phi_5}{3\cdot5!}+\frac{31\phi_7}{3\cdot7!}+\frac{1142\phi_9}{3\cdot5\cdot9!}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{r^2}{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{3!}+\frac{7\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot5!\cdot r^2}$$

$$+\frac{31\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot7!\cdot r^4}+\frac{1142\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\cdot9!\cdot r^6}+\cdots\cdots。\quad 证讫。$$

以上见戴煦《外切密率》卷二。

5° 切线求本弧：

$$a=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5\alpha}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7\alpha}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots。\tag{5}$$

凡连比例率分，皆可还原；由（Ⅰ）：

$$\phi_2'=\tan\alpha=\phi_2+\frac{2\phi_4}{3!}+\frac{16\phi_6}{5!}+\frac{272\phi_8}{7!}+\frac{7936\phi_{10}}{9!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}=\phi_3+\frac{4\phi_5}{3!}+\frac{136\phi_7}{3\cdot5!}+\frac{992\phi_9}{7!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\phi_4+\frac{6\phi_6}{3!}+\frac{264\phi_8}{3\cdot5!}+\frac{7040\phi_{10}}{3\cdot7!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_6'=\phi_6+\frac{10\phi_8}{3!}+\frac{640\phi_{10}}{3\cdot5!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_8'=\phi_8+\frac{14\phi_{10}}{3!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_{10}'=\phi_{10}+\cdots\cdots,$$

齐其级数，化而并之，得

$$\alpha=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5\alpha}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7\alpha}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots。\quad 证讫。$$

6° 切线求余弧：

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left(\tan\alpha+\frac{2r^2}{3!\tan\alpha}-\frac{32r^4}{3\cdot5!\tan^3\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{704r^6}{3\cdot7!\tan^5\alpha}-\cdots\cdots\right)。$$

切线求余弧，若依切线求本弧还原法入之，反不适用，乃另用下法求之，如图 43。

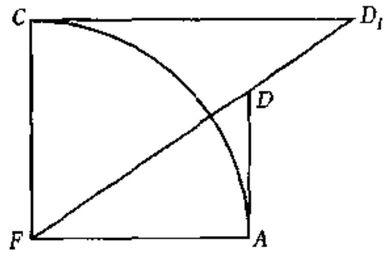


图 43

$$CD_1:CF=FA:DA,$$

即 $$\tan(90^\circ-\alpha):r=r:\tan\alpha,$$

则 $$\tan\alpha=\frac{r^2}{\tan(90^\circ-\alpha)};$$

又从杜氏(V)式知：

$$\frac{\dfrac{r_2}{\tan\alpha-\dfrac{\tan^3\alpha}{3r^2}+\dfrac{\tan^5\alpha}{5r^4}-\dfrac{\tan^7\alpha}{7r^6}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成为四率比例。令

$$r=\phi_2,\tan\alpha=\phi_3,$$

则 $$\frac{r^2}{\tan\alpha}=\phi_1;$$

上式可书为：

$$\frac{\dfrac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_3-\dfrac{\phi_5}{3}+\dfrac{\phi_7}{5}-\dfrac{\phi_9}{7}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a};$$

按商除法除得：

$$\frac{\left(\phi_1+\dfrac{2\phi_3}{3!}-\dfrac{32\phi_5}{3\cdot5!}+\dfrac{704\phi_7}{3\cdot7!}-\cdots\cdots\right)}{r}=\frac{r}{a}。$$

如令 $r=\phi_2,\ \dfrac{r^2}{\tan\ (90^\circ-\alpha)}=\phi_1=\tan\ \alpha,$

则 $$\phi_3=\frac{r^2}{\tan\ \alpha},\ \phi_5=\frac{r^4}{\tan^3\ \alpha},\ \phi_7=\frac{r^6}{\tan^5\ \alpha}\cdots\cdots,$$

而上式之第四率，应改书为$\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，故

$$\frac{\tan\ \alpha+\dfrac{2r^2}{3!\ \tan\ \alpha}-\dfrac{32r^4}{3\cdot5!\ \tan^3\ \alpha}+\dfrac{704r^6}{3\cdot7!\ \tan^5\ \alpha}-\cdots}{r}$$

$$=\frac{r}{\dfrac{\pi}{2}-\alpha}。$$ 证讫。

以上见戴煦《外切密率》卷三。

吴诚《割圜通解》(1898 年)第 38 页以后，曾用代数术证上列公式，和以下各式。

7° 割线求本弧：

$$a^2=r\Big[2(\sec\ \alpha-r)-\frac{5\cdot2^2(\sec\ \alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{64\cdot2^3(\sec\ \alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$
$$-\frac{1560\cdot2^4(\sec\ \alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\Big]。\quad(7)$$

如图 44，$BC=a$ 为本弧，

$AD=\sec\ \alpha,$

$BD=\sec\ \alpha-r,$

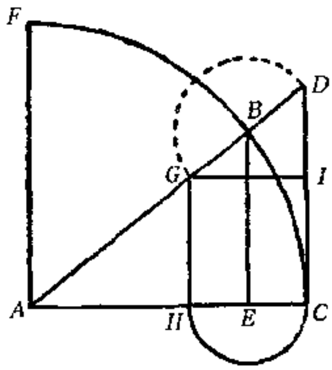


图 44

$$GD=2(\sec\alpha-r),$$

而 $$HC=2\ \mathrm{vers}\ \alpha,$$

故 $$\sec\alpha : r=2(\sec\alpha-r) : 2\mathrm{vers}\ \alpha。$$

令 $$\phi_1=r_1,\phi_3=2(\sec\alpha-r),$$

则 $$\sec\alpha=\phi_1+\frac{1}{2}\phi_3,$$

故 $$\phi_3'=2\mathrm{vers}\ \alpha=\frac{\phi_1\cdot\phi_3}{\phi_1+\frac{\phi_3}{2}}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2}+\frac{\phi_7}{2^2}-\frac{\phi_9}{2^3}+\frac{\phi_{11}}{2^4}-\cdots,$$

$$\phi_5'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\frac{(2\mathrm{vers}\ \alpha)^2}{r}=\phi_5-\frac{2\phi_7}{2}+\frac{3\phi_9}{2^2}-\frac{4\phi_{11}}{2^3}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_7'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_5'}{\phi_1}=\frac{(2\mathrm{vers}\ \alpha)^3}{r^2}=\phi_7-\frac{3\phi_9}{2}+\frac{6\phi_{11}}{2^2}-\cdots\cdots,$$

$$\phi_9'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_7'}{\phi_1}=\frac{(2\mathrm{vers}\ \alpha)^4}{r^3}=\phi_9-\frac{4\phi_{11}}{2}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_{11}'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_9'}{\phi_1}=\frac{(2\mathrm{vers}\ \alpha)^5}{r^4}=\phi_{11}-\cdots\cdots。$$

由(Ⅷ)式,

$$\alpha^2=r\Big((2\mathrm{vers}\ \alpha)+\frac{1^2(\mathrm{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }\alpha)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\Big],$$

得
$$a^2=r\Big[2\ (\sec\alpha-r)\frac{5\cdot2^2(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{64\cdot2^3(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$
$$-\frac{1560\cdot2^4(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\Big],$$

而 $a=10''$,……$15°$,割线自 $10''$至 $15°$用此式。

8° 割线求余弧:

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\Big(\sec\alpha-\frac{r^2}{3!\cdot\sec\alpha}-\frac{17r^4}{3\cdot5!\cdot\sec^3\alpha}+\frac{367r^6}{3\cdot7!\cdot\sec^5\alpha}-\cdots\cdots\Big),\tag{8}$$

如切线求余弧之例,由(Ⅶ)式知,

$$\frac{\dfrac{r^2}{\sin\alpha+\dfrac{1^2\cdot\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6}+\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成为四率比例。

令 $r=\phi_2,\sin\alpha=\phi_3,$

则 $$\frac{r^2}{\sec\alpha}=\phi_1=\csc\alpha,$$

上式可书为:

$$\frac{\phi_1-\dfrac{\phi_3}{3!}-\dfrac{17\phi_5}{3\cdot5!}-\dfrac{367\phi_7}{3\cdot7!}-\cdots\cdots}{r}=\frac{r}{a}$$

或

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\Big(\sec\alpha-\frac{r^2}{3!\cdot\sec\alpha}-\frac{17r^4}{3\cdot5!\cdot\sec^3\alpha}-\frac{367r^6}{3\cdot7!\cdot\sec^5\alpha}-\cdots\cdots\Big),$$

而 $\alpha=60°$,……$89°\ 50'\ 50''$,割线自 $60°$至 $89°\ 59'\ 50''$用此式。

9° 割线求半弧:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=r\left(\frac{r(\sec\alpha-r)}{(\sec\alpha+r)}-\frac{8\,r^2(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec\alpha+r)^2}+\frac{184\,r^4(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec\alpha+r)^3}-\frac{8448\,r^6(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot(\sec\alpha+r)^4}+\cdots\cdots\right),\tag{9}$$

由(5)式切线求本弧,得

$$\alpha^2=\left(\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{3\cdot r^2}-\frac{\tan^5\alpha}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7\alpha}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots\right)^2$$
$$=\tan^2\alpha-\frac{8\tan^4\alpha}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6\alpha}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}-\frac{8448\tan^8\alpha}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或 $$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{8\tan^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}-\frac{8448\tan^8\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots。$$

因 $$\frac{\sec\alpha+r}{\sec\alpha-r}=\frac{r}{\dfrac{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{r}},$$

故上式可化为:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=r\left(\frac{r(\sec\alpha-r)}{(\sec\alpha+r)}-\frac{8r^2(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec\alpha+r)^2}+\frac{184r^4(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec\alpha+r)^3}-\frac{8448r^6(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8(\sec\alpha+r)^4}+\cdots\cdots\right),$$

而 $\alpha=15°,\cdots\cdots30°$，割线自 15°至 30°用此式。

此外割线自 30°至 45°，

则由 $$\frac{2r^2-\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}=\frac{r}{\sec 2\alpha},$$

求得 $\sec 2\alpha$，命为连比例第一率，半径为二率，如(8)割线求余弧术入之，依前得倍本弧 $2a$ 之余弧：

$$\frac{\pi}{2}2a=\alpha',$$

以减象限弧 $\frac{\pi}{2}$，得倍本弧 2α，半之，即本弧。

又割线自 45°至 60°，

则由 $$\frac{2r^2-\sec^2(90°-\alpha)}{\sec^2(90°-\alpha)}=\frac{r}{\sec^2(90°-\alpha)},$$

求得 $\sec 2(90°-\alpha)$，命为连比例第一率，半径为二率，如(8)割线求余弧术入之，得 $2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 之余弧：

$$\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=2\alpha-\frac{\pi}{2},$$

以加象限弧 $\frac{\pi}{2}$，得倍本弧 2α，半之即本弧。割线求弧背所以分为：

$10''$——15°，15°——30°，30°——45°，

45°——60°，60°——89°59′50″

五限，是为便于降位。以上见戴煦《外切密率》卷四。

10° 本弧弧分，径求四十五度以内正割对数

$$\log_{10}\sec\alpha=u\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{2a^4}{4!}+\frac{16a^6}{6!}+\frac{272a^8}{8!}+\frac{7836a^{10}}{10!}+\cdots\right)。\quad(10)$$

戴煦著《假数测圜》(1852 年)论八线对数，其前则于《续对数简法》(1846 年)曾论“用数”，谓求 $\log_{10}N$，应先求其用数 $1+y$ 之

对数，而 y 为小数。

而 $\log_{10}(1+y)=u\log_e(1+y)$

$$=u\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\right],$$

说详李俨《对数的发明和东来》①。由上义可求"以本弧弧分径求四十五度以内正割对数"，因 45°以内各正割为半径($r=1$)外带割线半径差

$$(y=\sec\alpha-r=\sec\alpha-1)$$

故 $\log_{10}\sec\alpha=\log_{10}[1+(\sec\alpha-1)]=\log_{10}(1+y)$

$$=u\log_e(1+y)=u\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right],$$

而 $y=(\sec\alpha-1)$，

又 $\phi_3'=\sec\alpha-r=\sec\alpha-1$

$$=\frac{\phi_3}{2!}+\frac{5\phi_5}{4!}+\frac{61\phi_7}{6!}+\frac{1385\phi_9}{8!}+\frac{50521\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

则 $\phi_5'=\dfrac{(\sec\alpha-r)^2}{r}=(\sec\alpha-1)^2$

$$=\frac{6\phi_5}{4!}+\frac{150\phi_7}{6!}+\frac{5166\phi_9}{8!}+\frac{252750\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_7'=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}=(\sec\alpha-1)^3$$

$$=\frac{90\phi_7}{6!}+\frac{6300\phi_9}{8!}+\frac{466830\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_9'-\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}=(\sec\alpha-1)^4$$

---

① 见《中算史论丛》(一)，1931 年初版(上海)，和本集第 69～190 页内"对数的发明和东来"(＊见本卷第 82～191 页．——编者)。

$$=\frac{2520\phi_9}{8!}+\frac{378000\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_{11}'=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}=(\sec\alpha-r)^5$$

$$=\frac{113400\phi_{11}}{10!}+\cdots\cdots,$$

故
$$\phi_3'-\frac{1}{2}\phi_5'+\frac{1}{3}\phi_7'-\frac{1}{4}\phi_9'+\frac{1}{5}\phi_{11}'-\cdots$$

$$=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{\phi_3}{2!}+\frac{2\phi_5}{4!}+\frac{16\phi_7}{6!}+\frac{272\phi_9}{8!}+\frac{7936\phi_{11}}{10!}+\cdots。$$

上式的分母为“本弧求割线”的分母，其分子为“本弧求切线”的分子，故

$$\log_{10}\sec\alpha=u\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{2a^4}{4!}+\frac{16a^6}{6!}+\frac{272a^8}{8!}+\frac{7936a^{10}}{10!}+\cdots\right)$$

为四十五度以内诸正割对数之公式。

十九、丁取忠、李善兰、顾观光

同时丁取忠、李善兰、顾观光虽亦论究割圆学说，但比明、董、项、戴尚是不如。

丁取忠著《数学拾遗》，咸丰元年(1851 年)，邹汉勋序称：“于友人家得一算书，盖杜德美原术，第其文隐奥难解，而又无算例，(丁取忠)果臣乃发愤为算例凡若干言，书成，名曰《数学拾遗》。”时丁取忠尚不知有明氏，董氏各书[①]。

李善兰《则古昔斋算学》十二为《级数回求》，示有“弧背求正弦”，间“正弦求弧背”之一例，所谓回求即还原术。其《弧矢启秘》所

① 见《白芙堂丛书》本《数学拾遗》。

举之弧背求正弦、弧背求正矢、正弦求弧背、正矢求弧背，即杜术之(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅵ)，(Ⅷ)；弧背求正切、弧背求正割、正切求弧背、正割求弧背三术、正割求弧背一术，即戴氏之(1)，(3)，(5)，(7)，(9)。其稍异的为次之二术：

(1)正弦求弧背，用圆外积术：

$$\alpha=\frac{1}{r}\left[(r+\text{vers }\alpha)\sin\alpha-\left(\frac{2\sin^3\alpha}{3!\cdot r}+\frac{2\cdot 3\sin^5\alpha}{5!\cdot r^3}+\frac{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot\sin^7\alpha}{7!\cdot r^5}+\frac{2\cdot 3^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^9\alpha}{9!\cdot r^7}+\cdots\cdots\right)\right]。$$

(2)正割求弧背又术：

$$\alpha^2=r\left(t-\frac{2t^2}{4!\cdot r}+\frac{23t^3}{6!\cdot r^2}-\frac{264t^4}{8!\cdot r^3}+\cdots\cdots\right),$$

而 $$t=\frac{2r\cdot 2(\sec\alpha-r)}{2r+(\sec\alpha-r)}=\frac{2^2\cdot\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{r}$$ 为用数。

顾观光(字尚之，金山人，1799～1862)以项名达未有切割求余线术特为补之①。又以戴煦仅有以本弧弧分径求四十五度以内正割对数，为著"用诸乘差求八线对数法"(1855 年)。用求他三角函数之对数值②。

二十、徐有壬的《测圜密率》和《割圜八线缀术》

徐有壬(1800～1860)著《测圜密率》三卷，未记年月，咸丰壬子(1852 年)戴煦自序《外切密率》称："泰西杜氏德美以连比例九术入中国，……但能求弦矢，而不能求切割二线，钧卿徐氏(有壬)有切线弧背互求二术。"似此则《测圜密率》之成，是在壬子以前了。徐

① 见顾观光《算剩续编》内"书割圜捷术后"(1851 年)。

② 见顾观光《算剩余稿》。

有壬又著《割圜八线缀术》大约未完稿，卷数也未定。以前南丰吴嘉善（字子登）、长沙丁取忠（字果臣）曾闻其说，及徐氏死后，吴嘉善为衍成三卷，见同治元年（1862 年）吴嘉善序。湘阴左潜（字壬叟）又为补草，合成四卷，语见同治癸酉（1873 年）左潜序。是年冬十一月左潜又撰《缀术释戴》一卷、《缀术释明》二卷，以徐氏所拟缀术，治戴煦《外切密率》及明安图《割圜密率捷法》。

徐有壬于《测圜密率》卷一第五术，“圜径幂求圜周幂”称：

$$p^2=9d^2\left(1+\frac{1^2}{3\cdot 4}+\frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots\cdots\right)。$$

《测圜密率》卷二首述杜氏（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅶ），（ⅩⅢ）四术外，有“弦矢求弧背”、“正切求弧背”、“弧背求正切”三术，即：

$$a=\sin\alpha+\frac{2\ \mathrm{vers}^2\alpha}{3\cdot\sin\alpha}\left(1-\frac{\mathrm{vers}^2\alpha}{5\cdot\sin^2\alpha}+\frac{3\cdot\mathrm{vers}^2\alpha}{5\cdot 7\cdot\sin^2\alpha}\right.$$
$$\left.-\frac{3\cdot 5\cdot\mathrm{vers}^2\alpha}{5\cdot 7\cdot 9\sin^2\alpha}+\cdots\cdots\right),$$

$$a=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{3\cdot r^2}+\frac{3\cdot\tan^5\alpha}{3\cdot 5\cdot r^4}-\frac{3\cdot 5\cdot\tan^7\alpha}{3\cdot 5\cdot 7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

$$\tan\alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots,$$

$$=a+\frac{a^3}{3}+\frac{2a^5}{3\cdot 5}+\frac{17a^7}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{62a^9}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$
$$+\frac{1382a^{11}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}+\cdots\cdots,\qquad (r=1)$$

$$=a+\frac{2a^3}{2!\ r^2}+\frac{16a^5}{5!\cdot r^4}+\frac{272a^7}{7!\cdot r^6}+\cdots\cdots。$$

而　$T_1=a,$

$$T_2=\frac{T_1\cdot a^2}{3\cdot r^2},$$

$$T_3=\frac{T_2\cdot 2a^2}{5\cdot r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{T_3\cdot 2a^2+D_1}{7\cdot r^2},\qquad D_2=T_2\cdot T_3\cdot 2T_1,$$

$$T_5=\frac{T_4\cdot 2a^2+D_2}{9\cdot r^2},\qquad D_3=\left(T_2T_4+\frac{1}{2}T_3^2\right)\cdot 2T_1,$$

$$T_6=\frac{T_5\cdot 2a^2+D_3}{11\cdot r^2},\qquad D_4=(T_2T_5+T_3T_4)\cdot 2T_1。$$

以上三术都可用杜氏九术解析。

其卷三共立大小互求十八术，即：

(1)大矢求小矢：

$$\text{vers}\ \frac{\alpha}{m}=\frac{(\text{vers}\ \alpha)}{m^2}+\frac{(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(m^2-1)(4m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\ \alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots\cdots。$$

(2)小矢求大矢：

$$\text{vers}\ m\ \alpha=m^2(\text{vers}\ \alpha)-\frac{m^2(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-4)\cdot 2^2\cdot(\text{vers}\ \alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots\cdots。$$

(3)大弦求小弦：

$$\sin\frac{\alpha}{m}=\frac{\sin\alpha}{m}+\frac{m(m^2-1)\sin^3\alpha}{3!\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1)(9m^2-1)\sin^5\alpha}{5!\cdot m^5\cdot r^4}+\cdots\cdots。$$

(4)小弦求大弦：

$$\sin m\ \alpha=m\sin\alpha-\frac{m(m^2-1)\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4}-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6}+\cdots\cdots。$$

以上四术，本董祐诚法。

(5)大弦求小矢：

$$\text{vers}\,\frac{\alpha}{m}=T_1\left(=\frac{\sin^2\alpha}{2\cdot m^2\cdot r}\right)+\frac{2(4m^2-1)T_1^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{2(16m^2-1)T_1\cdot T_2}{5\cdot6\cdot r}+\frac{2(36m^2-1)T_1\cdot T_3}{7\cdot8\cdot r}+\cdots\cdots。$$

(6)小弦求大矢：

$$\text{vers}\,m\,\alpha=T_1\left(=\frac{m^2\sin^2\alpha}{2r}\right)-\frac{(m^2-4)\cdot T_1\cdot\sin\alpha}{3\cdot4\cdot r}+\frac{(m^2-16)\cdot T_2\cdot\sin^2\alpha}{5\cdot6\cdot r^2}-\frac{(m^2-36)\cdot T_3\cdot\sin^3\alpha}{7\cdot8\cdot r}+\cdots\cdots。$$

(7)大矢求小弦幂：

$$\sin\frac{\alpha}{m}=\left[r\left(\frac{2\text{vers}\,\alpha}{m^2}+\frac{(m^2-4)\ (2\text{vers}\,\alpha)^2}{3\cdot4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)\ (2\text{vers}\,\alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)(9m^2-4)\ (2\text{vers}\,\alpha)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}\right)+\cdots\cdots\right]^{\frac{1}{2}}。$$

(8)小矢求大弦幂：

$$\sin m\,\alpha=r\left[m^2(2\ \text{vers}\ \alpha)-\frac{m^2(4m^2-1)(2\ \text{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(2\ \text{vers}\ \alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(4m^2-9)(2\ \text{vers}\ \alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right]^{\frac{1}{2}}。$$

(9)大切求小弦：

$$\sin\frac{\alpha}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan\alpha}{m}-\frac{(2m^2+1)\tan^3\alpha}{3!\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(24m^4+20m^2+1)\tan^5\alpha}{5!\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6+784m^4+70m^2+1)\tan^7\alpha}{7!\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8+52352m^6+6384m^4+168m^2+1)\tan^9\alpha}{9!\cdot m^9\cdot r^8}-\cdots\cdots。$$

而 $T_1=\frac{\tan\alpha}{m}$， $t=\frac{\tan^4\alpha}{r^2}$

$T_2=\frac{(2m^2+1)T_1T_1^2}{2\cdot 3\cdot r^2}$， $D_1=1\cdot 2\cdot\frac{t\cdot T_1}{r^2}$，

$T_3=\frac{(18m^2+1)T_2\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2}-\frac{D_1}{4\cdot 5}$， $D_2=3\cdot 4\cdot\frac{t\cdot T_2}{r^2}$，

$T_4=\frac{(50m^2+1)T_3T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2}-\frac{D_2}{6\cdot 7}$， $D_3=5\cdot 6\cdot\frac{t\cdot T_3}{r^2}$，

$T_5=\frac{(98m^2+1)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2}-\frac{D_3}{8\cdot 9}$， $D_4=7\cdot 8\cdot\frac{t\cdot T_4}{r^2}$，

$T_6=\frac{(162m^2+1)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}-\frac{D_4}{10\cdot 11}$。

(10)小切求大弦：

$$\sin m\alpha=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=m\tan\alpha-\frac{(m^2+2)m\cdot\tan^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{(m^4+20m^2+24)m\tan^5\alpha}{5!\cdot r^4}$$
$$-\frac{(m^6+70m^4+784m^2+720)m\cdot\tan^7\alpha}{7!\cdot r^4}$$
$$+\frac{(m^8+168m^6+6384m^4+52352m^2+40320)\cdot m\tan^9\alpha}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而

$$T_1=m\tan\alpha,$$
$$T_2=\frac{(m^2+2)\cdot T_1\cdot\tan^2\alpha}{2\cdot3\cdot r},\qquad D_1=\frac{1\cdot2\cdot T_1\tan^2\alpha}{r^2},$$
$$T_3=\frac{(m^2+18)\cdot T_2\cdot\tan^2\alpha}{4\cdot5\cdot r^2}-\frac{D_1\tan^2\alpha}{4\cdot5\cdot r^2},\qquad D_2=\frac{3\cdot4\cdot T_2\tan^2\alpha}{r^2},$$
$$T_4=\frac{(m^2+50)\cdot T_3\cdot\tan^2\alpha}{6\cdot7\cdot r^2}-\frac{D_2\tan^2\alpha}{6\cdot7\cdot r^2},\qquad D_3=\frac{5\cdot6\cdot T_3\tan^2\alpha}{r^2},$$
$$T_5=\frac{(m^2+98)\cdot T_4\cdot\tan^2\alpha}{8\cdot9\cdot r^2}-\frac{D_3\tan^2\alpha}{8\cdot9\cdot r^2},\qquad D_4=\frac{7\cdot8\cdot T_4\tan^2\alpha}{r^2},$$
$$T_6=\frac{(m^2+162)\cdot T_5\cdot\tan^2\alpha}{10\cdot11\cdot r^2}-\frac{D_4\tan^2\alpha}{10\cdot11\cdot r^2}。$$

(11)大切求小矢：

$$\operatorname{vers}\frac{\alpha}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$
$$=\frac{\tan^2\alpha}{2!\cdot m^2\cdot r}-\frac{(8m^2+1)\tan^4\alpha}{4!\cdot m^4\cdot r^3}+\frac{(184m^4+40m^2+1)\tan^6\alpha}{6!\cdot m^6\cdot r^5}$$

$$-\frac{(6448m^6+2464m^4+112m^2+1)\tan^8\alpha}{8!\cdot m^8\cdot r^7}+\frac{(648574m^8+229760m^6+14448m^4+240m^2+1)\tan^{10}\alpha}{10!\cdot m^{10}\cdot r^9}-\cdots\cdots,$$

而

$$T_1=\frac{\tan^2\alpha}{2\cdot m^2\cdot r},\qquad t=\frac{\tan^4\alpha}{r^2},$$

$$T_2=\frac{(8m^2+1)T_1\cdot 2T_1}{3\cdot 4\cdot r},\qquad D_1=2\cdot 3\cdot\frac{t\cdot T_1}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(32m^2+1)T_2\cdot 2T_1}{5\cdot 6\cdot r}-\frac{D_1}{5\cdot 6},\qquad D_2=4\cdot 5\cdot\frac{t\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(72m^2+1)T_3\cdot 2T_1}{7\cdot 8\cdot r}-\frac{D_2}{7\cdot 8},\qquad D_3=6\cdot 7\cdot\frac{t\cdot T_3}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(128m^2+1)\cdot T_4\cdot 2T_1}{9\cdot 10\cdot r}-\frac{D_3}{9\cdot 10},\qquad D_4=8\cdot 9\cdot\frac{t\cdot T_4}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(200m^2+1)\cdot T_5\cdot 2T_1}{11\cdot 12\cdot r}-\frac{D_4}{11\cdot 12}。$$

(12)小切求大矢：

$$\mathrm{vers}\ m\alpha=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{m^2\tan^2\alpha}{2!\cdot r}-\frac{m^2(m^2+8)\tan^4\alpha}{4!\cdot r^3}+\frac{m^2(m^4+40m^2+184)\tan^6\alpha}{6!\cdot r^5}-\frac{m^2(m^6+112m^4+2464m^2+6448)\tan^8\alpha}{8!\cdot r^7}$$

$$+\frac{m^2(m^8+240m^6+14448m^4+229760m^2+648574)\tan^{10}\alpha}{10!\cdot r^9}-\cdots\cdots,$$

而

$$T_1=\frac{m^2\cdot\tan^2\alpha}{2\cdot r},$$

$$T_2=\frac{(m^2+8)T_1\tan^2\alpha}{3\cdot 4\cdot r^2},\qquad D_1=2\cdot 3\cdot\frac{T_1\cdot\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(m^2+32)\cdot T_2\cdot\tan^2\alpha}{5\cdot 6\cdot r^2}-\frac{D_1\tan^2\alpha}{5\cdot 6\cdot r^2},\qquad D_2=4\cdot 5\cdot\frac{T_2\cdot\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(m^2+72)\cdot T_3\cdot\tan^2\alpha}{7\cdot 8\cdot r^2}-\frac{D_2\tan^2\alpha}{7\cdot 8\cdot r^2},\qquad D_3=6\cdot 7\cdot\frac{T_3\cdot\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(m^2+128)\cdot T_4\cdot\tan^2\alpha}{9\cdot 10\cdot r^2}-\frac{D_3\tan^2\alpha}{9\cdot 10\cdot r^2},\qquad D_4=8\cdot 9\cdot\frac{T_4\cdot\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(m^2+200)\cdot T_5\cdot\tan^2\alpha}{11\cdot 12\cdot r^2}-\frac{D_4\tan^2\alpha}{11\cdot 12\cdot r^2}。$$

(13)大弦求小切：

$$\tan\frac{\alpha}{m}=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots,$$

$$=\frac{\sin\alpha}{m}+\frac{(m^2+2)\sin^3\alpha}{3!\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(9m^4+20m^2+16)\sin^5\alpha}{5!\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(225m^6+518m^4+560m^2+272)\sin^7\alpha}{7!\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(11025m^8+25832m^6+31584m^4+22848m^2+7936)\sin^9\alpha}{9!\cdot m^9\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

而 $$T_1=\frac{\sin\alpha}{m},$$

$$T_2=\frac{(m^2+2)T_1\cdot T_1^2}{2\cdot 3\cdot r^2},\qquad D_1=2\cdot\frac{T_1^3}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(9m^2+2)T_2\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2},\qquad D_2=2\cdot\frac{3\cdot T_1^2\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(25m^2+2)T_3\cdot T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2},\qquad D_3=2\cdot\frac{3(T_1^2\cdot T_3+T_2^2\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(49m^2+2)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2},\qquad D_4=2\cdot\frac{3T_1^2\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2^3}{r^2};$$

$$T_6=\frac{(81m^2+2)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}。$$

(14)小弦求大切：

$$\begin{aligned}\tan m\alpha&=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6\\&=m\sin\alpha+\frac{(2m^2+1)\sin^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{(16m^4+20m^2+9)\sin^5\alpha}{5!\cdot r^4},\\&\quad+\frac{(272m^6+560m^4+518m^2+225)\sin^7\alpha}{7!\cdot r^6},\\&\quad+\frac{(7936m^8+22848m^6+31584m^4+25832m^2+11025)\sin^9\alpha}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

而 $$T_1=m\sin\alpha,$$

$$T_2=\frac{(2m^2+1)\cdot T_1\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot 3\cdot r^2},\qquad D_1=2m^2\,\frac{T_1^3}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2+9)\cdot T_2\cdot\sin^2\alpha}{4\cdot 5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot\sin^2\alpha}{4\cdot 5\cdot r^2},\qquad D_2=2m^2\,\frac{3T_1^2\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(2m^2+25)\cdot T_3\cdot\sin^2\alpha}{6\cdot 7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot\sin^2\alpha}{6\cdot 7\cdot r^2},\qquad D_3=2m^2\,\frac{3(T_1^2\cdot T_3+T_2^2\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(2m^2+49)\cdot T_4\cdot\sin^2\alpha}{8\cdot 9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot\sin^2\alpha}{8\cdot 9\cdot r^2},\qquad D_4=2m^2\,\frac{3T_1^2\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2^3}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(2m^2+81)\cdot T_5\cdot\sin^2\alpha}{10\cdot 11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot\sin^2\alpha}{10\cdot 11\cdot r^2}。$$

(15)大矢求小切幂：

$$\tan\frac{\alpha}{m}=[r(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)]^{\frac{1}{2}},$$

$$=\Big[\frac{r(2\ \text{vers}\ \alpha)}{m^2}+\frac{(m^2+8)r^2(2\ \text{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(4m^4+40m^2+136)r^3(2\ \text{vers}\ \alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2},$$

$$+\frac{(36m^6+392m^4+1904m^2+3968)r^4(2\ \text{vers}\ \alpha)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(576m^8+6560m^6+37128m^4+119040m^2+176896)r^5(2\ \text{vers}\ \alpha)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot m^{10}\cdot r^4}$$

$$+\cdots\cdots\Big]^{\frac{1}{2}},$$

而 $$T_1=\frac{(2\ \text{vers}\ \alpha)}{m^2},$$

$$T_2=\frac{(m^2+8)T_1\cdot T_1}{3\cdot 4\cdot r},\qquad D_1=6m^2\,\frac{T_1^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(4m^2+8)T_2\cdot T_1}{5\cdot 6\cdot r}+\frac{D_1\cdot T_1}{5\cdot 6\cdot r},\qquad D_2=6m^2\,\frac{2T_1\cdot T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(9m^2+8)T_3\cdot T_1}{7\cdot 8\cdot r}+\frac{D_2\cdot T_1}{7\cdot 8\cdot r},\qquad D_3=6m^2\,\frac{2T_1T_3+T_2T_2}{r},$$

$$T_5=\frac{(16m^2+8)T_4\cdot T_1}{9\cdot 10\cdot r}+\frac{D_3\cdot T_1}{9\cdot 10\cdot r},\qquad D_4=6m^2\,\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r},$$

$$T_6=\frac{(25m^2+8)T_5\cdot T_1}{11\cdot 12\cdot r}+\frac{D_4\cdot T_1}{11\cdot 12\cdot r}。$$

(16)小矢求大切幂：

$$\tan m\,\alpha=[r(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)]^{\frac{1}{2}},$$

$$=\Big\{r\Big[m^2(2\text{ vers }\alpha)+\frac{(8m^2+1)\cdot m^2\cdot(2\text{ vers }\alpha)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{(136m^4+40m^2+4)m^2(2\text{ vers }\alpha)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(3968m^6+1904m^4+392m^2+36)m^2(2\text{ vers }\alpha)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(176896m^8+119040m^6+37128m^4+6560m^2+576)m^2(2\text{ vers }\alpha)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot r^4}$$

$$+\cdots\cdots\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

而 $\quad T_1=m^2(2\text{ vers }\alpha)$，

$$T_2=\frac{(8m^2+1)T_1(2\text{ vers }\alpha)}{3\cdot 4\cdot r},\qquad D_1=6m^2\frac{T_1^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(8m^2+4)T_2(2\text{ vers }\alpha)}{5\cdot 6\cdot r}+\frac{D_1(2\text{ vers }\alpha)}{5\cdot 6\cdot r},\qquad D_2=6m^2\frac{2T_1T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(8m^2+9)T_3(2\text{ vers }\alpha)}{7\cdot 8\cdot r}+\frac{D_2(2\text{ vers }\alpha)}{7\cdot 8\cdot r},\qquad D_3=6m^2\frac{2T_1T_3+T_2^2}{r},$$

$$T_5=\frac{(8m^2+16)T_4(2\text{ vers }\alpha)}{9\cdot 10\cdot r}+\frac{D_3(2\text{ vers }\alpha)}{9\cdot 10\cdot r},\qquad D_4=6m^2\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r},$$

$$T_6=\frac{(8m^2+25)T_5(2\text{ vers }\alpha)}{11\cdot 12\cdot r}+\frac{D_4(2\text{ vers }\alpha)}{11\cdot 12\cdot r}.$$

(17)大切求小切：

$$\tan\frac{\alpha}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\tan\alpha}{m}-\frac{(2m^2-2)\tan^3\alpha}{3!\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(24m^4-40m^2+16)\tan^5\alpha}{5!\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6-1568m^4+1120m^2+272)\tan^7\alpha}{7!\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8-104704m^6+102144m^4-45696m^2+7936)\tan^9\alpha}{9!\cdot m^9\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而 $$T_1=\frac{\tan\alpha}{m},$$

$$T_2=\frac{(m^2-1)T_1\cdot T_1^2}{3r^2},$$

$$T_3=\frac{(3m^2-2)T_2\cdot T_1^2}{5r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(5m^2-2)\cdot T_3\cdot T_1^2}{7r^2}-\frac{D_1}{7r^2},\qquad D_2=2T_2T_3T_1,$$

$$T_5=\frac{(7m^2-2)T_4\cdot T_1^2}{9r^2}-\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(9m^2-2)\cdot T_5\cdot T_1^2}{11r^2}-\frac{D_3}{11r^2},\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1。$$

(18)小切求大切：

$$\begin{aligned}\tan m\,\alpha&=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots\\&=m\tan\alpha-\frac{(2m^2-2)m\cdot\tan^3\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{(16m^4-40m^2+24)m\cdot\tan^5\alpha}{5!\cdot r^4}\\&\quad-\frac{(272m^6-1120m^4+1568m^2-720)m\cdot\tan^7\alpha}{7!\cdot r^6}\\&\quad+\frac{(7936m^8-45696m^6+102144m^4-104704m^2+40320)m\tan^9\alpha}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots,\end{aligned}$$

而

$$T_1=m\tan\alpha,$$

$$T_2=\frac{(m^2-1)\cdot T_1\cdot\tan^2\alpha}{3r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2-3)\cdot T_2\cdot\tan^2\alpha}{5r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(2m^2-5)\cdot T_3\cdot\tan^2\alpha}{7r^2}+\frac{D_1}{7r^2},\qquad D_2=2T_2\cdot T_3\cdot T_1,$$

$$T_5=\frac{(2m^2-7)\cdot T_4\cdot\tan^2\alpha}{9r^2}+\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(2m^2-9)\cdot T_5\cdot\tan^2\alpha}{11r^2}+\frac{D_3}{11r^2},\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1。$$

以上十八术见《割圜密率》卷三，其证见《割圜八线缀术》卷三，都用还原术或借径术入算。至大小割线互求式，仅得小割求大弦，与小割求大矢四术，余则未能求得差根（如 $D_1, D_2, \cdots\cdots$ 等），故无可立术。

《割圜八线缀术》卷四，胪列弦、切、矢、割、弧背求各线式，如：

（a） 弦求各线式：

$$\text{vers}\ \alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^9\alpha}{r^8}+\cdots\cdots,\qquad\text{（项名达）}$$

$$=\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}+\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\cdots\cdots,\qquad\text{（项名达）}$$

$$\sec\alpha=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,\qquad\text{（项名达）}$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,\qquad\text{（项名达）}$$

$$\cos\alpha=r-\text{vers}\ \alpha=r-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots\right),$$

$$\alpha=\sin\alpha+\frac{1^2}{3!}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{9!}\cdot\frac{\sin^9\alpha}{r^8}-\cdots\cdots。\qquad\text{（Ⅶ）}$$

(b) 切求各线式：

$$\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}-\cdots\cdots,$$

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\alpha=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$a=\tan\alpha-\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}-\frac{1}{7}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\cdots\cdots。$$

（戴煦）

(c) 矢求各线式：

$$\sin\alpha=2\operatorname{vers}\alpha-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{r},$$

$$\tan\alpha=(2\operatorname{vers}\alpha)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{r}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{r^2}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\alpha=r+\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{r^2}+\frac{2}{4\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{2!}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{r}+\frac{1^2}{4!}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{r^2}+\frac{1^2\cdot2^2}{6!}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^4}{r^3}+\frac{1^2\cdot2^23^2}{8!}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^5}{r^4}+\cdots\cdots。$$

(d) 割求各线式：

$$\sin^2\alpha=(\sec\alpha-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}$$
$$+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$
$$+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}$$
$$-\cdots\cdots,$$

$$\tan\alpha=(\sec\alpha-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r},$$

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2}\cdot(\sec\alpha-r)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}$$
$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$
$$+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{2!}(\sec\alpha-r)-\frac{5}{4!}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}$$
$$+\frac{64}{6!}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{1560}{8!}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$
$$+\cdots\cdots。$$

(e) 弧背求各线式：

$$\sin\alpha=a+\frac{a^3}{3!\cdot r^2}+\frac{a^5}{5!\cdot r^4}-\frac{a^7}{7!\cdot r^6}+\frac{a^9}{9!\cdot r^8}-\cdots\cdots,\qquad(\mathrm{I}),$$

$$\tan\alpha=a+\frac{2}{3!}\cdot\frac{a^3}{r^2}+\frac{16}{5!}\cdot\frac{a^5}{r^4}+\frac{272}{7!}\cdot\frac{a^7}{r^6}+\cdots,\qquad(\text{戴煦})$$

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^2}{r}-\frac{1}{4!}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{a^6}{r^5}-\frac{1}{8!}\cdot\frac{a^8}{r^7}+\cdots\cdots,\qquad(\mathrm{II})$$

$$\sec\alpha=r+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^2}{r}+\frac{5}{4!}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{61}{6!}\cdot\frac{a^6}{r^5}$$
$$+\frac{1385}{8!}\cdot\frac{a^8}{r^7}+\cdots\cdots。\qquad(\text{戴煦})$$

《割圜八线缀术》卷二载(a)“弦求各线式”内

$$\text{vers } \alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots$$

式的几何证法。

术曰： $\text{vers } \alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots\cdots$，

而 $T_1=\frac{\sin\alpha}{d}$， $T_2=\frac{T_1^2}{d}$， $T_3=\frac{(2T_1+T_2)T_1}{d}$，

$$T_4=\frac{[2(T_1+T_2)+T_3]T_3}{d}+\cdots\cdots,$$

如图 45，先作 AF 长方形，

令 $EK=$正矢，$KA=d-$正矢$=$余矢，

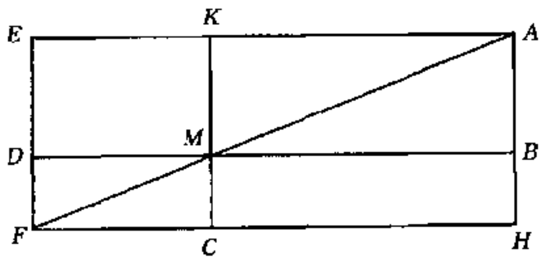


图 45

而 $KC=EK$。

又 $\square AC=$正矢$\times$余矢$=\sin^2\alpha$。

但 $\square AC=\square AD$，

$\therefore$ $\square AD=\sin^2\alpha$。

则 $ED=T_1=\frac{\sin^2\alpha}{d}$。

次取 $KL=KM$，作线交 BD 线于 N。次作 AC 对角线，此线必过 N 点。次作 AF 线此线必过 M' 点。

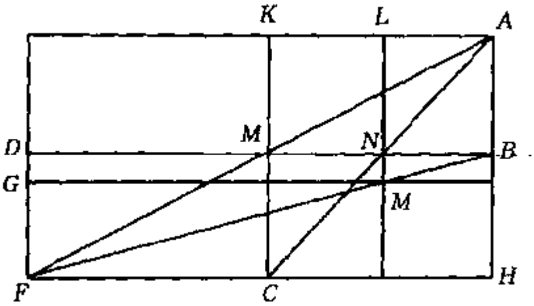


图 46

因 $KL=KM=T_1, T_1^2=\square KN=\square NH=BG,$

则 $DG=T_2=\dfrac{T_1^2}{d}$。

次取 $M'N'=M'N$，作 $N'H'$ 线。

次取 $MD'=N'H'$，作 $D'G'$ 线。

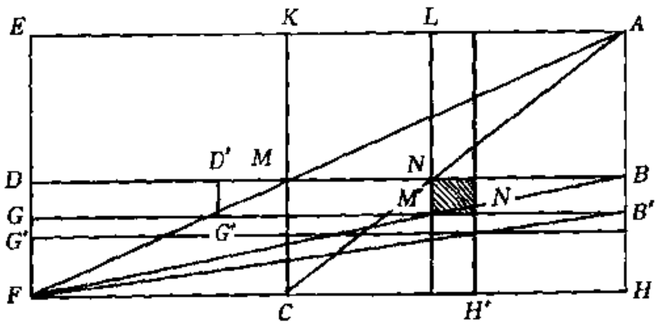


图 47

则 $\square LN'=(T_1+T_2)T_2=\square DG'$，

[因 $DM=LM'+N'H', MD'=N'H'$，$\therefore DD'=LM'$。]

又 $\square MM'=T_2T_1$，

$\therefore \quad \square DG' + \square MM' = (2T_1 + T_2)T_2$,

又 $\quad \square NG = \square M'H$,

则 $\quad (2T_1+T_2)T_3 = \square N'H = \square B'G'' = \dfrac{(2T_1+T_2)T_2}{d} = GG''$。

前图为徐有壬所设以证各线互求各式。今证前术,可先设比例式,如:

$$d : \sin\alpha = \sin\alpha : T_1, \tag{1}$$

$$d : T_1 = T_1 : T_2, \tag{2}$$

$$d : T_2 = 2T_1 + T_2 : T_3, \tag{3}$$

$$d : T_3 = 2(2T_1+T_2) + T_3 : T_4, \cdots\cdots \tag{4}$$

命 $\phi_1 = r$(为半径)$= \dfrac{d}{2}$, $\phi_2 = \sin\alpha, 2\phi_1 = d$,

故 $2\phi_1 : \phi_2 = \phi_2 : T_1, \qquad T_1 = \dfrac{\sin^2\alpha}{2r} = \dfrac{\sin^2\alpha}{d} = \dfrac{\phi_3}{2}$。 (1)

$$2\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \frac{\phi_3}{2} : T_2, \qquad T_2 = \frac{\sin^4\alpha}{2\cdot 4\cdot r^3} = \frac{\phi_5}{2\cdot 4}。 \tag{2}$$

$$2\phi_1 : \frac{\phi_5}{2\cdot 4} = \left(\frac{2\phi_3}{2} + \frac{\phi_4}{2\cdot 4}\right) : T_3, T_3 = \frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2} + \frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}, \tag{3}$$

$$2\phi_1 : \left(\frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2} + \frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}\right) = \left[2\left(\frac{\phi_3}{2} + \frac{\phi_5}{2\cdot 4}\right) + \frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2} + \frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}\right] : T_4, \tag{4}$$

$$\therefore \quad T_4 = \frac{4\phi_9}{2\cdot 4^3} + \frac{6\phi_{11}}{2\cdot 4^4} + \cdots\cdots,$$

同理, $T_5 = \dfrac{8\phi_{11}}{2\cdot 4^4} + \cdots\cdots$,

并之,得 $\operatorname{vers}\alpha = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \cdots\cdots$

$$= \frac{\phi_3}{2} + \frac{\phi_5}{2\cdot 4} + \frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2} + \frac{\phi_9}{2\cdot 4^3} + \left(\frac{4\phi_9}{2\cdot 4^3} + \frac{6\phi_{11}}{2\cdot 4^4}\right) + \left(\frac{8\phi_{11}}{2\cdot 4^4}\right) + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r} + \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3} + \frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots。$$ 证讫。

以后各式，徐有壬以"还原术"、"借径术"、"商除法"之代数法算之。左潜以为"还原术"在明氏通弦求弧背，及正矢求弧背法解，已经道及；而"借径术"即明氏借十分全弧通弦率，求百分全弧通弦率，及借百分全弧通弦率，求十分全弧通弦率也。而"商除法"及还原术之变法①。实则"商除法"在项氏《象数一原》，和戴氏《外切密率》中已屡有说述，而"借径术"即项氏所称的"易率法"。

切求正弦式

（证）既得弦求切式，用还原法入之，得切求弦式。

命 $$\phi_2'=\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}$$
$$+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^9\alpha}{r^8}+\cdots\cdots$$
$$=\phi_2+\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot 4}+\frac{10\phi_8}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4^3}+\cdots\cdots,$$

故 $$\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}=\phi_3+\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot 4}+\frac{32\phi_9}{2\cdot 4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot 4^3},$$
$$\phi_4'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\phi_4+\frac{3\phi_6}{2}+\frac{15\phi_8}{2\cdot 4}+\frac{70\phi_{10}}{2\cdot 4^2},$$
$$\phi_6'=\phi_6+\frac{5\phi_8}{2}-\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4},$$
$$\phi_8'=\phi_8+\frac{7\phi_{10}}{2},$$
$$\phi_{10}'=\phi_{10}。$$

故 $$\phi_2=\phi_2'-\frac{\phi_4'}{2}+\frac{3\phi_6'}{2\cdot 4}-\frac{10\phi_8'}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi_{10}'}{2\cdot 4^3}-\cdots\cdots,$$

即 $$\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{2r}+\frac{3\tan^5\alpha}{2\cdot 4\cdot r^4}-\frac{10\tan^7\alpha}{2\cdot 4^2\cdot r^6}$$

① 见《割圜八线缀术》，左潜，同治癸酉(1873年)刻。

$$+\frac{35\tan^9\alpha}{2\cdot 4^3\cdot r^8}+\cdots\cdots$$

$$=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}$$

$$-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}-\cdots。$$ 证讫。

割求正弦式

(证)既得弦求割式,用还原法入之,得割求弦式。

命 $$\phi_3'=2(\sec\alpha-r)=\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}$$

$$+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{10\phi_7}{4^2}+\frac{35\phi_9}{4^3}+\frac{126\phi_{11}}{4^4},$$

$$\phi_5'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}=\phi_5+\frac{3\phi_7}{4}+\frac{29\phi_9}{4^2}+\frac{130\phi_{11}}{4^3},$$

$$\phi_7'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_5'}{\phi_1}=\frac{2^3(\sec\alpha-r)^3}{r^2}=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{57\phi_{11}}{4^2},$$

$$\phi_9'=\frac{2^4(\sec\alpha-r)^4}{r^3}=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$$

$$\phi_{11}'=\phi_{11};$$

故 $$\phi_3=\phi_3'-\frac{3\phi_5'}{4}+\frac{8\phi_7'}{4^2}-\frac{20\phi_9'}{4^3}+\frac{48\phi_{11}'}{4^4},$$

即 $$\sin^2\alpha=(\sec\alpha-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}$$

$$-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots。$$ 证讫。

切求矢式

(证)有切求弦式,有弦求矢式,用借径术入之,得切求矢式。

由切求弦式,命

$$\phi_2'=\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}$$

$$-\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}-\cdots\cdots$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot 4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4^3}-\cdots\cdots,$$

$$\phi_3'=\frac{\phi_2'\cdot\phi_2'}{\phi_1}=\frac{\sin^2\alpha}{r}=\phi_3-\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot 4}-\frac{32\phi_9}{2\cdot 4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot 4^3},$$

$$\phi_5'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_3'}{\phi_1}=\frac{\sin^4\alpha}{r^3}=\phi_5-\frac{4\phi_7}{2}+\frac{24\phi_9}{2\cdot 4}-\frac{128\phi_{11}}{2\cdot 4^3},$$

$$\phi_7'=\frac{\phi_3'\cdot\phi_5'}{\phi_1}=\frac{\sin^6\alpha}{r^5}=\phi_7-\frac{6\phi_9}{2}+\frac{48\phi_{11}}{2\cdot 4},$$

$$\phi_9'=\frac{\sin^8\alpha}{r^7}=\phi_9-\frac{8\phi_{11}}{2},$$

$$\phi_{11}'=\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9}=\phi_{11}。$$

又由弦求矢式，知

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi_3'}{2}+\frac{\phi_5'}{2\cdot 4}+\frac{2\phi_7'}{2\cdot 4^2}+\frac{5\phi_9'}{2\cdot 4^3}+\frac{14\phi_{11}'}{2\cdot 4^4}。$$

齐其分母，相消，得

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{\phi_3}{2}-\frac{3\phi_5}{2\cdot 4}+\frac{10\phi_7}{2\cdot 4^2}-\frac{35\phi_9}{2\cdot 4^3}+\frac{126\phi_{11}}{2\cdot 4^4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots。$$

证讫。

矢求切式

(证)既得切求矢式，用还原法入之，得矢求切式，

$$\tan\alpha=(2\operatorname{vers}\alpha)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{r^2}$$

$$+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^4}{r^3}+\cdots\cdots。$$ 证讫。

切求割式

(证)有切求弦式，有弦求割式，用借径术入之，得切求割式。

由切求弦式，

命 $$\phi_2'=\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}$$

$$-\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}+\cdots\cdots$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4^3}-\cdots\cdots,$$

如前求得 $\phi_3',\phi_5',\phi_7',\phi_9',\phi_{11}',\cdots\cdots$；

又由弦求割式，知

$$(\sec\alpha-r)=\frac{\phi_3'}{2}+\frac{3\phi_5'}{2\cdot4}+\frac{10\phi_7'}{2\cdot4}+\frac{35\phi_9'}{2\cdot4^3}+\frac{126\phi_{11}'}{2\cdot4^4}+\cdots。$$

齐其分母，相消，得

$$\sec\alpha=r+\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi_7}{2\cdot4^2}-\frac{5\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi_{11}}{2\cdot4^4},$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots。$$ 证讫。

割求切式

(证)既得切求割式，用还原法入之，得割求切式，如：

$$\frac{\tan^2\alpha}{r}=2(\sec\alpha-r)+\frac{2^2}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}。$$ 证讫。

矢求割式

(证)有矢求切式，有切求割式，用借径术入之，得矢求割式。

由矢求切式，

命 $$\phi_3'=\tan\alpha=(2\text{ vers }\alpha)+\frac{3}{4}\,\frac{(2\text{ vers }\alpha)^2}{r}$$

$$+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^3}{r^2}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{8\phi_7}{4^2}+\frac{20\phi_9}{4^3}+\frac{48\phi_{11}}{4^4},$$

$$\phi_5'=\phi_5+\frac{6\phi_7}{4}+\frac{25\phi_9}{4^2}+\frac{88\phi_{11}}{4^3},$$

$$\phi_7'=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{51\phi_{11}}{4^2},$$

$$\phi_9'=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$$

$$\phi_{11}'=\phi_{11};$$

又由切求割式，知

$$\sec\alpha-r=\frac{\phi_3'}{2}-\frac{\phi_5'}{2\cdot4}+\frac{2\phi_7'}{2\cdot4^2}-\frac{5\phi_9'}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi_{11}'}{2\cdot4^4},$$

$$=\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{4}+\frac{\phi_7}{2\cdot4}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_{11}}{2\cdot4^3},$$

即

$$\sec\alpha=r+\frac{1}{2}(2\text{ vers }\alpha)+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^3}{r^2}+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(2\text{ vers }\alpha)^4}{r^3}+\cdots。$$ 证讫。

割求矢式

（证）既得矢求割式，用还原法入之，得割求矢式，如：

$$\text{vers }\alpha=\frac{1}{2}(\sec\alpha-r)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$

$$+\cdots。$$ 证讫。

切求弧背式

（证）有切求弦，有弦求弧背，用借径术入之，即得。

弧背求割式

（证）有弧背求弦，有弦求割，用借径术入之，即得。

割求弧背式

(证)有弧背求割式,用还原法入之,即得。

矢求弧背式

(证)有弧背求矢式,用还原法入之,即得。

以上见《割圜八线缀术》卷二,其余各式证法互见明氏、项氏、戴氏书中,兹不复载。

《割圜八线缀术》卷三,又证大小割与各线互求各式,如:

小割求大弦幂式

(证)有割求弦式,有小弦求大弦式,用借径术入之,即得。

小割求大弦幂式

命割求弦式内 $\sin^2\alpha$ 为三率,即,

$$\phi_3'=\sin^2\alpha=(\sec\alpha-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}+\frac{8}{4^2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{20}{4^3}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{48}{4^4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}-\cdots\cdots,$$

$$\phi_5'=\frac{\sin^4\alpha}{r}=\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}-\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}+\frac{25}{4^2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{88}{4^3}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_7'=\frac{\sin^6\alpha}{r^2}=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{51}{4^2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_9'=\frac{\sin^8\alpha}{r^3}=\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{12}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_{11}'=\frac{\sin^{10}\alpha}{r^4}=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}。$$

又将小弦求大弦式两边自乘,得

$$(\sin m\alpha)^2 = m^2\sin^2\alpha - \frac{(2m^4-2m^2)}{3!}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^2} + \frac{(16m^6-80m^4+64m^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^4}$$
$$-\frac{(16m^8-224m^6+784m^4-576m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^6}$$
$$+\frac{(256m^{10}-7680m^8+69888m^6-209920m^4+147456m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^8}-\cdots\cdots,$$

代入通分相消,得

$$(\sin m\alpha)^2 = m^2(\sec\alpha - r) - \frac{(4m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{m^2(\sec\alpha-r)^2}{r^2} + \frac{(16m^4+100m^2+64)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{m^2(\sec\alpha-r)^3}{r^4}$$
$$-\frac{(64m^6+1120m^4+3556m^2+1560)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{m^2(\sec\alpha-r)^4}{r^6}$$
$$+\frac{(256m^8+9600m^6+85008m^4+183200m^2+62136)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{m^2(\sec\alpha-r)^5}{r^8}$$

为小割求大弦幂式,倒置其乘数,即得大割求小弦幂式。

小割求大矢式

(证)有割较求矢式,有小矢求大矢式,用借径术入之,即得小割求大矢式。

命割较求矢式内 2 vers α 为三率,即,

$$\phi_3' = (2\text{ vers }\alpha) = (\sec\alpha - r) - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r} + \frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r} - \frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$
$$+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_5'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^2}{r}=\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_7'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^3}{r^2}=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_9'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^4}{r^3}=\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_{11}'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^5}{r^4}=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大矢式入之，即

$$\begin{aligned}\mathrm{vers}\ m\ \alpha=&\frac{m^2(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)}{2!}-\frac{(m^4-m^2)(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^2}{4!\cdot r}+\frac{(m^6-5m^4+4m^2)(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^3}{6!\cdot r^2}\\&-\frac{(m^8-14m^6+49m^4-36m^2)(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^4}{8!\cdot r^3}\\&+\frac{(m^{10}-30m^8+273m^6-820m^4+576m^2)(2\ \mathrm{vers}\ \alpha)^5}{10!\cdot r^4}\\=&\frac{m^2(\sec\alpha-r)}{2!}-\frac{(m^4+5m^2)(\sec\alpha-r)^2}{4!\cdot r}+\frac{(m^6+25m^4-64m^2)(\sec\alpha-r)^3}{6!\cdot r^2}\\&-\frac{(m^8+70m^6+889m^4+1560m^2)(\sec\alpha-r)^4}{8!\cdot r^3}\\&+\frac{(m^{10}+150m^8+5313m^6+45800m^4+62136m^2)(\sec\alpha-r)^5}{10!\cdot r^4}\end{aligned}$$

为小割求大矢式，倒置其乘数，即得大割求小矢式。

大矢求小割式

(证)既得小割求大矢式,用还原术入之,得大矢求小割式。

命
$$\phi_3'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ m\ \alpha)^2}{m^2}=(\sec\alpha-r)-\frac{(m^2+5)(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{(m^4+25m^2+64)(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$
$$-\frac{(m^6+70m^4+889m^2+1560)(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$
$$+\frac{(m^8+150m^6+5313m^4+45800m^2+62136)(\sec\alpha-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4},$$
$$\phi_5'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ m\ \alpha)^2}{m^4\cdot r}=\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}-\frac{(2m^2+10)(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot r^2}$$
$$+\frac{(9m^4+150m^2+381)(\sec\alpha-r)^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^3}$$
$$-\frac{(34m^6+1260m^4+10626m^2+18320)(\sec\alpha-r)^5}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^4},$$
$$\phi_7'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ m\ \alpha)^3}{m^6\cdot r^2}=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{(2m^2+10)(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot r^3}$$
$$+\frac{(21m^4+300m^2+759)(\sec\alpha-r)^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4},$$
$$\phi_9'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ m\ \alpha)^4}{m^8\cdot r^3}=\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{(4m^2+20)(\sec\alpha-r)^5}{3\cdot4\cdot r^4},$$
$$\phi_{11}'=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ m\ \alpha)^5}{m^{10}\cdot r^4}=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4};$$

即

$$(\sec\alpha-r)=\phi_3'+\frac{(m^2+5)\phi_5'}{3\cdot4}+\frac{(4m^4+25m^2+61)\phi_7'}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{(6m^6+245m^4+854m^2+1385)\phi_9'}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$$
$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)\phi_{11}'}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10},$$

$$(\sec\alpha-r)=\frac{(2\text{ vers }m\alpha)}{m^2}+\frac{(m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{(2\text{ vers }m\alpha)^2}{m^4\cdot r}+\frac{(4m^4+25m^2+61)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{(2\text{ vers }m\alpha)^4}{m^6\cdot r^2}$$
$$+\frac{(36m^6+245m^4+854m^2+1385)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{(2\text{ vers }m\alpha)^6}{m^8\cdot r^3}$$
$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{(2\text{ vers }m\alpha)^8}{m^{10}\cdot r^4}$$

为大矢求小割式，倒置其乘数，即得小矢求大割式。

小割求大割式

（证）有割求矢式，有小矢求大割式，用借径术入之，即得小割求大割式。

命割求矢式内$(2\text{ vers }\alpha)$为三率，即，

$$\phi_3'=(2\text{ vers }\alpha)=(\sec\alpha-r)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}$$
$$+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_5'=\frac{(2\text{ vers }\alpha)^2}{r}=\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_7'=\frac{(2\text{ vers }\alpha)^3}{r^2}=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_9'=\frac{(2\ \text{vers}\ \alpha)^4}{r^3}=\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}$$

$$\phi_{11}'=\frac{(2\ \text{vers}\ \alpha)^5}{r^4}=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大割式，

$$(\sec m\alpha-r)=m^2(2\ \text{vers}\ \alpha)+\frac{m^2(5m^2+1)(2\ \text{vers}\ \alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4+25m^2+4)(2\ \text{vers}\ \alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$
$$+\frac{m^2(1385m^6+854m^4+245m^2+36)(2\ \text{vers}\ \alpha)^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$
$$+\frac{m^2(50521m^8+41550m^6+16653m^4+4100m^2+576)(2\ \text{vers}\ \alpha)^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4},$$

代入通分相消，得

$$(\sec m\alpha-r)=m^2(\sec\alpha-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$
$$+\frac{m^2(1385m^6-4270m^4+4445m^2-1560)(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$
$$+\frac{m^2(50521m^8-207750m^6+324093m^4-229000m^2+62136)(\sec\alpha-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4},$$

为小割求大割式，倒置其乘数，即得大割求小割式。

小弦求大割式

（证）有弦求割式，有小割求大割式，用借径术入之，即得小弦求大割式。

命弦求割式内 $2(\sec\alpha-r)$ 为三率，即：

$$\phi'_3=(2\sec\alpha-r)=\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}=\frac{\sin^4\alpha}{r^3}-\frac{6}{4}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{29}{4^2}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}-\frac{130}{4^3}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec\alpha-r)^3}{r^3}=\frac{\sin^6\alpha}{r^5}-\frac{9}{4}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\frac{57}{4^2}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec\alpha-r)^4}{r^5}=\frac{\sin^8\alpha}{r^7}-\frac{12}{4}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec\alpha-r)^5}{r^7}=\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9},$$

乃依小割求大割式，代入通分相消，得

$$2(\sec m\alpha-r)=m^2(2)(\sec\alpha-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(2)^2(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(2)^3(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}+\cdots\cdots,$$

即

$$(\sec m\alpha-r)=\frac{m^2\sin^2\alpha}{2!\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-5)\sin^4\alpha}{4!\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4+100m^2+64)\sin^6\alpha}{6!\cdot r^5}+\frac{m^2(1385m^6+3416m^4+3920m^2+2304)\sin^8\alpha}{8!\cdot r^7}+\frac{m^2(50521m^8+167200m^6+266448m^4+262400m^2+47456)\sin^{10}\alpha}{10!\cdot r^9},$$

为小弦求大割式，倒置其乘数，即得大弦求小割式。

小切求大割式

（证）有切求割式，有小割求大割式，用借径术入之，即得小切求大割式。

命切求割式内 $2(\sec\alpha-r)$ 为三率，即：

$$\phi'_3=2(\sec\alpha-r)=\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{4^2}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{5}{4^3}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\frac{14}{4^4}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}=\frac{\tan^4\alpha}{r^3}-\frac{2}{4}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{4^2}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}-\frac{14}{4^3}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec\alpha-r)^3}{r^3}=\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\frac{9}{4^2}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec\alpha-r)^4}{r^4}-\frac{\tan^8\alpha}{r^7}-\frac{4}{4}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec\alpha-r)^5}{r^9}=\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9};$$

乃依小割求大割式，代入通分相消，得

$$(\sec m\alpha-r)=\frac{m^2\tan^2\alpha}{2!\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-8)\tan^4\alpha}{4!\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4-200m^2+184)\tan^6\alpha}{6!\cdot r^5}$$
$$+\frac{m^2(1385m^6-6832m^4+12320m^2-8448)\tan^8\alpha}{8!\cdot r^7}$$
$$+\frac{m^2(50521m^8-332400m^6+881328m^4-1148800m^2+648576)\tan^{10}\alpha}{10!\cdot r^9},$$

为小切求大割式，倒置其乘数，即得大切求小割式。

小割求大切幂

(证)有割求切式，有小切求大切式，用借径术入之，即得小割求大切幂式。

命割求切式内$\frac{\tan^2\alpha}{r}$为三率，即

$$\phi_3'=\frac{\tan^2\alpha}{r}=2(\sec\alpha-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r},$$

$$\phi_5'=\frac{\tan^4\alpha}{r^3}=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}+\frac{2^3}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}+\frac{2^4}{4^2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3},$$

$$\phi_7'=\frac{\tan^6\alpha}{r^5}=\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}+\frac{3\cdot 2^4}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{3\cdot 2^5}{4^2}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_9'=\frac{\tan^8\alpha}{r^7}=\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\frac{4\cdot 2^5}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4},$$

$$\phi_{11}'=\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9}=\frac{(\sec\alpha-r)^5}{r^4}$$

乃依小切求大切式，两边自乘，得

$$(\tan m\alpha)^2=m^2\tan^2\alpha+\frac{(4m^2-4)m^2\tan^4\alpha}{3!\cdot r^2}+\frac{(136m^4-320m^2+184)m^2\tan^6\alpha}{5!\cdot r^4}$$
$$+\frac{(992m^6-3808m^4+4928m^2-2112)m^2\tan^8\alpha}{7!\cdot r^6}$$
$$+\frac{(176896m^8-952320m^6+1964928m^4-1838080m^2+648576)m^2\tan^{10}\alpha}{9!\cdot r^8},$$

$$\frac{(\tan m\alpha)^2}{r}=m^2\cdot 2\cdot(\sec\alpha-r)+\frac{m^2\cdot(8m^2-5)\cdot 2^2(\sec\alpha-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(136m^4-200m^2+64)\cdot 2^3\cdot(\sec\alpha-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$
$$+\frac{m^2(3968m^6-9520m^4+7112m^2-1560)\cdot 2^4\cdot(\sec\alpha-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}$$
$$+\frac{m^2(176896m^8-595200m^6+722568m^4-366400m^2+62136)\cdot 2^5\cdot(\sec\alpha-r)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot r^4},$$

为小割求大切幂式，倒置其乘数，即得大割求小切幂式

以上割线与各线互求各式证法，并见徐有壬《割圜八线缀术》卷三、卷四。就中仅小割求大弦，与小割求大矢四术，可以立术，余则未能求得差根，故《割圜密率》卷三仅记十八术。

二十一、夏鸾翔、吴诚、蒋士栋、凌步芳

夏鸾翔(字紫笙，杭州人 1823～1864)为项名达弟子，于所著《致曲术》称：辛酉(1861 年)岁暮，偶用西人微积分推得：

$$\alpha^2=\sin^2\alpha+\frac{4\sin^4\alpha}{3\cdot 4\cdot r^2}+\frac{4^2\cdot 2^2\cdot\sin^6\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^4}+\frac{4^3\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\sin^8\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^6}+\cdots\cdots, \tag{1}$$

$$\alpha=r^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{vers}^{\frac{1}{2}}\alpha+T_1\frac{\mathrm{vers}\,\alpha}{2\cdot 2\cdot 3\cdot r}+T_2\frac{3^2\cdot\mathrm{vers}\,\alpha}{2\cdot 4\cdot 5\cdot r}+T_3\frac{5^2\,\mathrm{vers}\,\alpha}{2\cdot 6\cdot 7\cdot r}+\cdots\cdots,$$

$$=r^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{vers}^{\frac{1}{2}}\alpha+\frac{\mathrm{vers}^{3/2}\alpha}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3!\cdot r^{\frac{1}{2}}}+\frac{3^2\cdot\mathrm{vers}^{5/2}\alpha}{2^{3/2}\cdot 5!\cdot r^{3/2}}+\frac{3^2\cdot 5^2\cdot\mathrm{vers}^{7/2}\alpha}{2^{5/2}\cdot 7!\cdot r^{5/2}}+\cdots\cdots, \tag{2}$$

$$=r\left(\frac{2\ \text{vers}\ \alpha}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\text{vers}\ \alpha}{2\cdot 3!\cdot r}+\frac{3^2\ \text{vers}^2\ \alpha}{2^2\cdot 5!\cdot r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3^2\cdot 5^2\cdot\ \text{vers}^3\ \alpha}{2^3\cdot 7!\cdot r^3}+\cdots\cdots\right), \qquad (2)_b$$

$$a=r\left(\frac{2\ \text{vers}\ \alpha}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2^2\cdot\text{vers}\ \alpha}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\text{vers}^2\ \alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r}\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\text{vers}^3\ \alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right); \qquad (3)$$

夏鸾翔又撰《万象一原》九卷(1862年),用正弦微分式自乘后求积分,得

$$a=r\left(\frac{\sin^2\alpha}{r^2}+\frac{2^2\cdot\sin^4\alpha}{3\cdot 4\cdot r^4}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\sin^6\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^6}\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\sin^8\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}。 \qquad (1)_a$$

吴诚著《割圜通解》一卷,因董、项、戴、李、徐、夏各家之说,以代数演算,俾其义可以一贯。

此外蒋士栋(无锡人)之《弧矢释李》、《圆率释董》(1897年),则篇幅太简,未足以尽董、李之旨。凌步芳(字仲儒号贲南,番禺人,? ～1902)之《割圜捷术通义》四卷,则于杜术外增三十二术,并取径于《微积溯源》。其第三十术"弧求正切"自注称:"弧在半象限以下,切线甚小者,可用此术求之。"即

$$\tan\alpha=a+\frac{1\cdot a^3}{3\cdot r^2}+\frac{1\cdot 2\cdot a^5}{3\cdot 5\cdot r^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot r^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^9}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot r^8}$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot a^{11}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot r^{10}}+\cdots\cdots。 \qquad (近似值)$$

（四） 三角函数表计算法

二十二、明末三角函数表计算法的输入

明季耶稣会士输入三角函数表计算法。论此者有《大测》二卷，题修政历法极西耶稣会士邓玉函(Jean Terrenz，德干司但司人，1621 年来华，1576～1630)撰，汤若望(Johann Adam Schall von Bell，号道未，德哥伦人，1622 来华，1591～1666)订；门人郑洪猷、陈应登、陈于阶、周胤、潘国祥、刘有庆受法，徐光启(1592～1633)督修，崇祯四年(1631 年)正月二十八日呈进。《大测》卷一表原篇第三先言"六宗"率，表法篇第四，言"三要"法，及"二简"法，为计算三角函数表之用。惟仅能得最小之 45′函数，以后每越 45′，便得一率，直至 90°为止。

先设半径 $r=10000000$，作圆内切六种多边形，计算其边数，即得各弧之通弦，如：

宗率一　圜内六边等切形，求边数。从《几何原本》Ⅳ 15 得边 $=10000000$。

宗率二　内切圜直角方形，求边数。从《几何原本》Ⅳ 6，Ⅰ 47 得边 $=14142196$。

宗率三　圜内三边等切形，求边数。从《几何原本》XⅢ 12。因

$$DB^2=DC^2+BC^2=4\ AB^2,$$

$$\therefore \qquad BC^2=3\ AB^2,$$

知三边等形内切圆，其各边上方形，三倍于半径上方形。由是得边 $=17320508$。

宗率四　圜内十边等切形，求边数。从《几何原本》XⅢ 9，言以

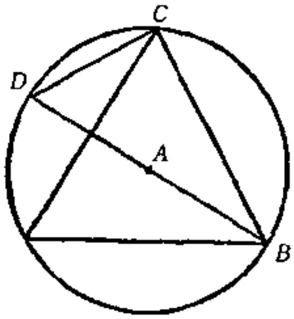


图　48

比例分半径为自分连比例(《几何原本》Ⅵ 30 称为理分中末线)，其大分即十边等形之一边。

如图 49，及图 50，$r=AB=EF=10000000$，用自分连比例法，分为大小分，其大分 DF 与十边形之 BC 相等。

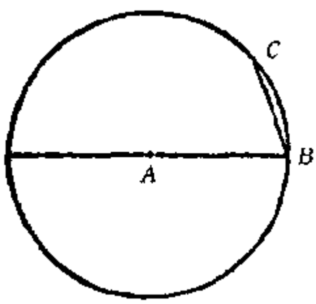


图　49

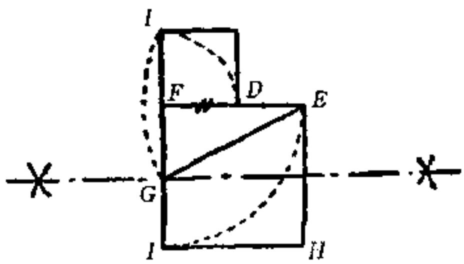


图　50

因
$$AB^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=EG^2,$$
$$\therefore \quad EG=11180340;$$

又
$$AB^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=EG^2,$$

假令有一 DF，可令：
$$AB(AB-DF)=DF^2,$$

则
$$EG^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2-AB\cdot DF=DF^2,$$
$$EG^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+AB\cdot DF+DF^2=\left(\frac{AB}{2}+DF\right)^2,$$
$$\therefore \quad DF=EG-\frac{AB}{2}=6180340。$$

由是得边＝6180340。

宗率五　圆内五边等切形，求边数。从《几何原本》XII 10，言圆内五边等切形，其一边上方形与六边等形、十边等形之各一边上方形并等。

即
$$AB^2=AC^2+AD^2,$$
$$\therefore \quad AB=11755704。$$

由是得边＝11755704。

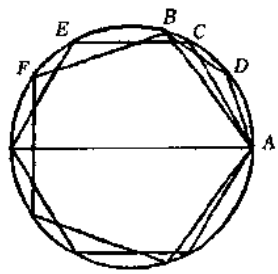


图　51

宗率六　圆内十五边等切形，求边数。从《几何原本》IX 16，知从圆内一点，作一三边等形，又作一五边等形，同以此点为其一角，从此角求两形相近之第一差弧，即十五边形之一边。

如图 52 ABC 三边等形，$ADEK$……五边等形之相近第一差弧为 BE，即十五边等形之一边。

因　$BC=17320508$，

$EK=11755704$，

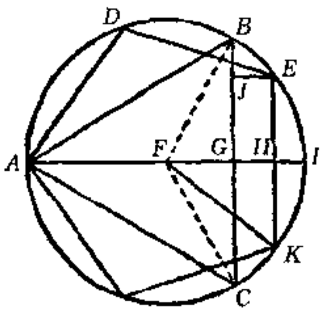


图 52

则 $$BJ=\frac{BC-EK}{2}=2782402;$$

又 $$FG=\sqrt{BF^2-BG^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$
$$=5000000,$$

$$FH=\sqrt{FK^2-HK^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{EK}{2}\right)^2}$$
$$=8090170,$$

则 $$EJ=GH=FH-FG=3090170,$$

$$\therefore \quad BE=\sqrt{BJ^2+EJ^2}=4158234。$$

由是得边＝4158234。

故“六题总表”： 半之得半弧之半弦：

边	弧　度	弦　数	弧度	半弦数	sine
3	120	17320508	60	8660254,	$\sin 60° = 0.8660254$,
4	90	14142196	45	7071098,	$\sin 45° = 0.7071098$,
5	72	11755704	36	5877852,	$\sin 36° = 0.5877852$,
6	60	10000000	30	5000000,	$\sin 30° = 0.5000000$,
10	36	6180340	18	3090170,	$\sin 18° = 0.3090170$,
15	24	4158234	12	2079117,	$\sin 12° = 0.2079117$。

要法一 前后两弦，其能等于半径。

如图 53，

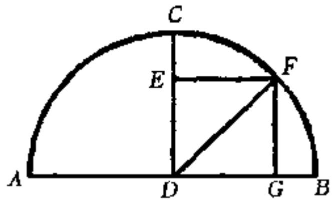


图 53

$$DF^2=r^2=FG^2+EF^2,$$

即
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

或
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}。$$

要法二 有各弧之前后两弦，求倍本弧之正弦。

如图 54，$\sin\alpha=EF$，

$$\cos\alpha=BF=BI,\frac{\sin 2\alpha}{2}=HJ,$$

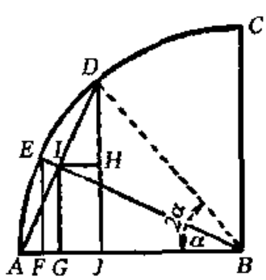


图 54

$$\triangle BEF = \triangle BAI,$$

故 $$BF = BI = \cos\alpha;$$

又 Δ, BEF, BIG 两形之比例等。

故 $$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{HJ};$$

又 $$\Delta AGI = \Delta IHD,$$

故 $$HJ = \frac{1}{2}DJ = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

即 $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha。$$

要法三 各弧之全弦上方，与其正半弦上，偕其矢上，两方并等。

如图 55，$DH^2 + AH^2 = AD^2$ 就是。

糸法。有一弧之正弦及其余弦，而求其半弧之正弦。

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha},$$

或 $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}。$$

简法一 两正弦之较，与六十度左右距等弧之正弦等。

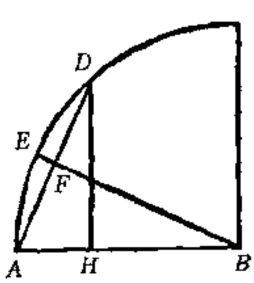


图 55

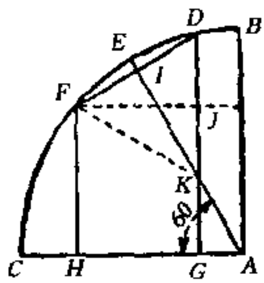


图 56

如图 56，$\triangle DFK$ 成三边等角形。FD，KD 底平分于 I，于 J。

即 $$DJ=JK=DI=IF$$

或 $$\sin\alpha=\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)。$$

简法二 $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta。$$

既有六宗率，三要法，二简法。试以 12°为例：

逐次半弧得

$\sin 12^\circ$，$\sin 6^\circ$，$\sin 3^\circ$，$\sin 1^\circ 30'$，$\sin 0^\circ 45'$；

前之余弧得

$\sin 78^\circ$，$\sin 84^\circ$，$\sin 87^\circ$，$\sin 88^\circ 30'$，$\sin 89^\circ 15'$；

前之余弧可半者半之，得

$\sin 42^\circ$，$\sin 21^\circ$，$\sin 10^\circ 30'$，$\sin 5^\circ 15'$，$\sin 43^\circ 30'$，
$\sin 21^\circ 45'$，$\sin 44^\circ 15'$；

前之余弧

$\sin 48^\circ$，$\sin 69^\circ$，$\sin 79^\circ 30'$，$\sin 84^\circ 45'$，$\sin 46^\circ 30'$，
$\sin 68^\circ 15'$，$\sin 45^\circ 45'$；

可半者半之，得

$\sin 24^\circ$，$\sin 34^\circ 30'$，$\sin 17^\circ 15'$，$\sin 39^\circ 45'$，$\sin 23^\circ 15'$；

前之余弧

$\sin 66^\circ$，$\sin 55^\circ 30'$，$\sin 72^\circ 45'$，$\sin 50^\circ 15'$，$\sin 66^\circ 45'$；

可半者半之，得

$\sin 33^\circ$，$\sin 16^\circ 30'$，$\sin 8^\circ 15'$，$\sin 27^\circ 45'$；

前之余弧

$\sin 57^\circ$，$\sin 73^\circ 30'$，$\sin 81^\circ 45'$，$\sin 62^\circ 15'$；

可半者半之，得

$\sin 28^\circ 30'$，$\sin 14^\circ 15'$，$\sin 36^\circ 45'$，

前之余弧　　$\sin 61°30'$, $\sin 75°45'$, $\sin 53°15'$;

可半者半之，得　$\sin 30°45'$;

前之余弧　　$\sin 59°15'$。

此皆 12°所生之率，其他并如前法，而表之大段可以立具，惟其所得最小之正弦确值，仅至 45′也。此外正切真数表，小于 45°之角，用 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$算之，正割真数表用 $\sec\alpha=\tan\alpha+\tan(45°-\frac{1}{2}\alpha)$公式算出。

清顺治间居于南京的穆尼阁(Jean Nicolas Smogolenski, 1611～1656)①，以对数表之说授诸薛凤祚，方中通，并兼论三角函数表。《天步真原》题大西穆尼阁撰，海岱薛凤祚增补，中有"三角八线表"及"旧表八线法原"说明三角函数表计算法，大致本诸《大测》。

又设　$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}[(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2]^{\frac{1}{2}}$

及　$\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{3}\right)=\sin\alpha+\frac{1}{6}\sin 2\alpha$(略数)，

后式设 α 为极小之角，故已知 $\sin 45'$及 $\sin 1°15'$可得 $\sin 1°$之值。

二十三、清初中算家的三角函数表计算法

清初中算家论三角函数表计算法的，有李子金、孔兴泰、杨作枚、梅文鼎。

李子金《算法通义》(1677 年)卷五有"径背求弦新法说"，《无弧象限表》(1683 年)，有"径背求弦法，可代象限表"。其径背求弦

① 据 Le Rèv Père Vanhée 及 David Eugene Smith 之说。其详传见：Le P. Louis Pfister, S. J., *Notices Biographiques et Bibliographiques sur Les Jésuites de l'ancienne mission de Chine* pp. 262～265, 1932, *Chang-Hai*.

新法创立“立，平，定”三差及“立，曲，平，定”四差，以求各弧之正弦，其法如次：

(1)创立三差通用法

令　　半径，$\frac{d}{2}=100000000$，弧，$a=157080000$。

则　定差$=\frac{157080000}{90}=1745333$，

$$平差=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}$$
$$=3523.455,$$

$$立差=\frac{1}{90}\times3523.455=39.1495。$$

因其畸零太多，令立差$=39$，反求之，得

$$平差=2\times3523.455-90\times39=3536.91 或 3537,$$

$$定差=90[3537+(3510)]+\frac{100000000}{90}=1745340。$$

以上述三差所推之数，有少至$\frac{45}{100}$者，李子金另设三差为38，3600，1770000，所推之数，差在$\frac{2}{100}$，较为密合。

(2)创立四差通用法

如前令　$\frac{d}{2}=100000000$，$a=157080000$。

则　定差$=\frac{157080000}{90}=1745333$，

$$平差=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}=2347,$$

$$曲差=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{90}(7046.91-2347)\right]=17.40;$$

而　$7046.91=\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]$，

$$\frac{1}{90}(7046.91-2347)=52.22,$$

$$立差=\frac{1}{90}(52.22-17.40)=0.3869。$$

因其畸零太多，令立差＝0.38，反求之，得

$$曲差=52.22-90\times0.38=18.02，或 18，$$

$$平差=7046.91-90\times\{18+34.20\}$$

$$=2348.91 或 2350，$$

$$定差=90\{2350+4699.91\}+\frac{100000000}{90}$$

$$=1745600。$$

李子金又设“三差法合象限表之图”而说明之：

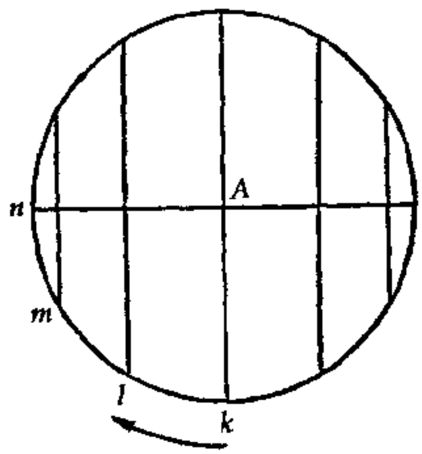


图 57

如图 57，$klmn$ 象限弧平分为三节，自 k 至 l，似在平行，故谓之平差。自 l 至 m，正当弯曲之处，故谓之曲差。自 m 至 n，其象有似直立，故谓之立差。其四差法求正弦公式为：

$$\sin m=(1745600m-2350m^2-18m^3-0.38m^4)$$

$$\div100000000\left(=\frac{d}{2}\right)。$$

其“径背求弦法，可代象限表”内，求正余弦公式为：

$$\cos A=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\left\{[(a^2+a'^2)-d^2]\times\frac{a^2+a^3+\frac{a^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right\}}\div\frac{d}{2},$$

$$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{a'^2-\left\{[(a'^2+a'^2)-d^2]\times\frac{a^2+a^3+\frac{a'^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right\}}\div\frac{d}{2};$$

而 $10\times\frac{3.141}{180^\circ}=0.1745, 0.1745\,A=a, 0.1745(180^\circ-A)=a',\quad d=20$。

*　　*　　*

孔兴泰著《大测精义》说明半弧正弦求法。

杨作枚著《解割圜之根》一卷，以《几何》前六卷之法，证明《大测》中六宗、三要、二简法诸条之公式，又另创“圜内作九等边内切形，求得40度之通弦”之法（1772年），是在《数理精蕴》（1723年）之后。

梅文鼎（1633～1721）著《平三角举要》五卷、《环中黍尺》五卷。其《平三角举要》卷五，及《环中黍尺》卷五，以几何法证。

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B,$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B,$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B。$$

二十四、清初三角函数表计算法的输入

明季输入六宗、三要、二简法见于《大测》(1631 年)的，可算得正弦一百二十个，其最小者 45′，递加至 90°，其 45′以下以比例得之。至《数理精蕴》(1723 年刻)下编卷十六又新增四法，即求圆内 18，9，14，7 边之法，与六宗相参伍，可得正弦三百六十个，其最小者 15′，又有“新增有小弧之正弦，求其三分之一弧之正弦”，即求 $\sin\frac{\alpha}{3}$，可得最小者 5′，其 5′以下，以比例得之。

(1)求内容十八边形之一边几何。

先设“新增按分作相连比例四率”甲，即“设如以十万为一率，作相连比例四率，使一率与四率相加，与二率三倍等，问二率三率四率各几何？”

盖由 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4;\phi_1+\phi_4=3\phi_2$，

可得方程

$$\phi_2^3-3\phi_1^2\phi_2+\phi_1^3=0，而\ \phi_1=100000，$$

次解此方程，得 $\phi_2=34729$，

代入得 $\phi_3=12061，\phi_4=4187$。

《数理精蕴》中所示之方程解法，乃 1660 年之 Vieta 旧法，称为“益实归除法”。即令 $\phi_2=\frac{\phi_1^3}{3\phi_1^2}$，取其略小之首位而得。其后牛顿和涅二氏改良方法，是时尚未发明。既得 ϕ_2,ϕ_3,ϕ_4，便可应用以求内容十八边形之一边。如图 $BC=CD=DE$ 为十八边形之一边，A 为中心，又作 CL 平行于 AD，联各线。则 Δ，ABC，BKC，CKL 为相似。

又 $BE=3BC-KL$，

即得 $AB:BC=BC:CK=CK:KL$；

又 $$AB+KL=3BC,$$

故已知 AB 及上二式之关系，即可得十八边形之一边 BC。

(2)求内容九边形之一边几何。

如图 58，联边即得。

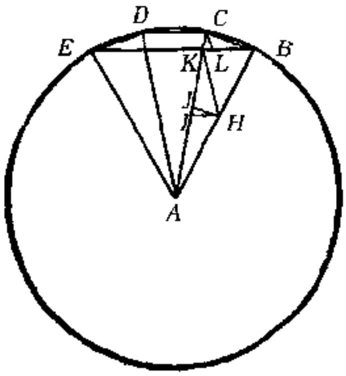


图 58

(3)求内容十四边形之一边几何。

先设"新增按分作相连比例四率法"乙，即"设如以十万为一率，作相连比例四率，使一率与四率相加，与二率两倍再加一率之数等，问二率三率四率各几何？"

如上例由 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4$$

及 $$\phi_1+\phi_4=2\phi_2+\phi_3,$$

可得方程 $$\phi_2^3-\phi_1\cdot\phi_2^2-2\phi_1^2\cdot\phi_2+\phi_1^3=0$$

而 $$a=100000,$$

次解此方程，得： $$\phi_2=44504,$$

代入得 $$\phi_3=19806,\quad \phi_4=8814。$$

这是用 1660 年的 Vieta 旧法，即令 $\phi_2=\dfrac{\phi_1^3}{2\phi_1^2}$ 取其略小之首位而得。既得 ϕ_2,ϕ_3,ϕ_4，便可应用以求内容十四边形之一边。

如图 59,$BC=CD=DE$ 为十四边形之一边,A 为中心,又作 CL 平行于 AD,联各线。则$\triangle ABC$,BKC,CKL 为相似。又自 K 作 KH 平行于 AD,交 AB 于 H;自 H 作 HI,HJ,平行于 BE,BC。

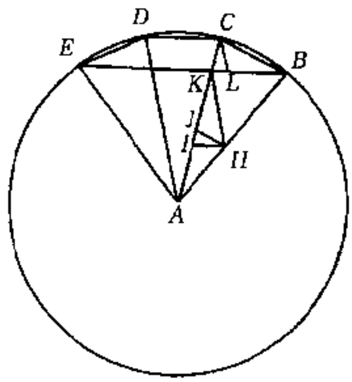


图 59

则 $$\triangle AHJ=\triangle KHI,$$

又 $$\triangle AIJ=\triangle CKL。$$

则 $$AB-AK+KC=2BC+CK-KL,$$

即 $$AB+KL=2BC+CK。$$

故已知 AB 和上二式之关系,即可得十四边形的一边 BC。

(4)求内容七边形之一边几何。

如图 59,联 BD 边即得。

* * *

"新增有本弧之正弦,求其三分之一弧之正弦。"

如图 60,$\angle OAB=\angle\alpha$,

$$\angle EAB=\angle 2\alpha$$

又 $$\angle QAB=\angle\frac{1}{3}\alpha,$$

$$\angle CAB=\angle\frac{2}{3}\alpha。$$

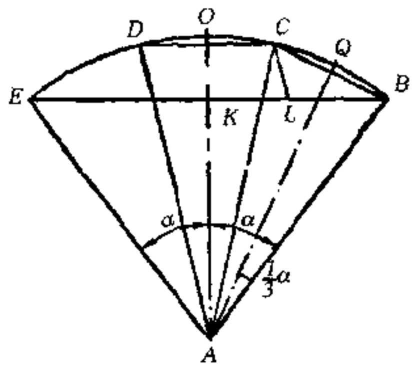


图 60

如图 60，$BC=CD=DE$ 为 $\frac{2}{3}\alpha$ 之弧，A 为中心，又作 CL 平行于 AD，联各线。则△ ABC，BKC，CKL 为相似。

又 $$BE=3BC-KL,$$

即得 $$AB:BC=BC:CK=CK:KL。$$

令 $$r=1,$$

则 $$1:2\sin\frac{1}{3}\alpha=\left(2\sin\frac{1}{3}\alpha\right)^2:\left[3\left(2\sin\frac{1}{3}\alpha\right)-2\sin\alpha\right],$$

$$\therefore\quad \left(2\sin\frac{1}{3}\alpha\right)^3-3\left(2\sin\frac{1}{3}\alpha\right)+2\sin\alpha=0,$$

$$\sin\alpha=3\sin\frac{1}{3}\alpha-4\sin^3\frac{1}{3}\alpha。$$

或 $$x^3-3x+2\sin\alpha=0,\text{而}\quad x=2\sin\frac{1}{3}\alpha。$$

其 x 之同数，可由益实归除法求得。

其后余熙（字晋斋，桐城人）著《八线测表图说》一卷，见《四库全书总目》卷一〇七子部天文算法类存目；何梦瑶（字报之，南海人，雍正庚戌，1730 进士）著《算迪》十二卷，其卷三有“割圜作八线表法”；屈曾发（字省园，虞山人）著《数学精详》十三卷（1772 年自

序），其卷十一有“六宗三要二简法说”；厉之锷（字宝青；钱塘人）著《毖纬琐言》（1800年）；并本《数理精蕴》之说。

二十五、汪莱、安清翘的五分取一法

割圆非八线不可，而八线所由来，旧有六宗三要二简法，然所得仅五分弧耳。每得五分，而得一通弦。其间二百九十九秒之八线，皆由中比例而得。且其以小弧求大弧，仅有求倍弧一法。以大弧求小弧，仅有求半弧，求三分之一之弧二法。其三分取一一法，已须用益实归除。详《数理精蕴》下编卷十六，罗茗香（士琳1789～1853）实曰：益实归除即是元人正负开方之法，甚属不易。更无五分取一，七分取一之法。歙县汪孝婴莱（1768～1813）创为五分取一法，且曰，由是而通变之，可得七分取一等法，其意盖欲以补六宗三要所未备也①。

其所著《衡斋算学》第三册（1798年）“平圆形”有：

“有圆内若干度之通弦，求其度五分之一通弦。”

如图61，如前各家之例，先联各线，次作 $CL/\!/DA$，$EH/\!/DA$，则得前三△之大△ABC、小△BCK，又小△CKL。又得次设△BMJ，和后设二△之大 BEH，小△EHI：此六△都是相似。

令 $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4$，为比例式之1，2，3，4率，

则
$$AB=r=1=\phi_1,$$
$$BC=2\sin\alpha=\phi_2,$$
$$CK=\phi_3,KL=\frac{\phi_2{}^3}{\phi_1{}^2}=\phi_4;$$
$$BE=2\sin3\alpha=3\phi_2-\phi_4,$$

① 见陈杰《算法大成》上编卷三，第56页，浙江书局重刊本。

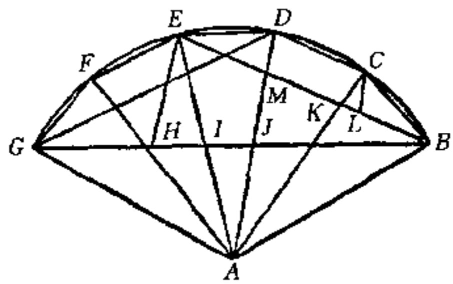


图 61

$$BG=2\sin 5\alpha。$$

又 $$BJ=BM=GI=2BC-KL=2\phi_2-\phi_4,$$

$$IJ=DE-HI=BC-HI。$$

$$\therefore\quad BG=5BC-HI-2KL,$$

由此可求得方程

$$\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha。$$

惟汪莱不径求以上的方程，而设以下解法：

即因 $$\frac{BC}{KL}=\frac{BE}{HI},$$

已知 $$BC=\phi_2, KL=\phi_4, EB=3\phi_2-\phi_4,$$

则 $$HI=3\phi_4-\phi_6，而\ \phi_6=\frac{\phi_4^2}{\phi_2}。$$

故 $$BG=2\sin 5\alpha=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6。$$

（此与明安图 I°，d°之说相同）①。

或 $$\frac{2\sin 5\alpha}{5}=\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}。$$

而称：$\frac{2\sin 5\alpha}{5}$为第一数，ϕ_2 为第二（率）数，ϕ_4 为第三（率）数，$\frac{\phi_6}{5}$为

① 见本文十四、十七节。

第四数，$\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}$为第五数。其法假设一 b 数，使

$$\frac{2\sin 5\alpha}{5}+b=\phi_2,$$

就中
$$\phi_4=\frac{\phi_2^3}{\phi_1^2},\quad \frac{\phi_6}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\phi_4^2}{\phi_2},$$

则前之方程并化为 ϕ_2 之同数。如代入之 b 数，可使

第五数
$$\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}=\frac{2\sin 5\alpha}{5},$$

则 $\phi_2=2\sin\alpha$ 为所求密数。反之，若第五数少于第一数，则如前法加位求之；若第五数多于第一数，则退次位求之，三位以下仿此。是处脱胎于《数理精蕴》中“益实归除”的代入法。其时四次式以上解法，在国中尚无善法，汪莱因设为此例。

焦循（1763～1820）《里堂道听录》卷十六“求五分之一通弦法”条，称：

> 汪孝婴（莱）《衡斋算学》第三册有圆内若干度之通弦，求其度五分之一通弦，法曰：……，论曰五分之三通弦……以俟后之君子。
>
> 孝婴尝手写此稿，自歙寄余，已而此册付诸梓，学者多苦其艰奥难读，甲戌（1814 年）冬，孝婴之高足胡孝廉培翬，以书属为孝婴作别传，将上之史馆，因取此细注之，标以甲，乙…（A，B，…）等目，庶几说与图相比附。又补入一六率图，遂录于此，时嘉庆乙亥（1815 年）正月十二日灯下。（图略去）。

安清翘（1759～1830）《矩线原本》（1818 年）以几何法证 $\sin 3\alpha$，$\sin 5\alpha$。其 $\sin 5\alpha$ 的证法如下：

如图 62，
$$\angle GAB=10\alpha,\ \sin 5\alpha=GR;$$
$$\angle GAP=\alpha,\ \sin\alpha=GQ。$$

自 F 作 GB 之垂线 FN，

又作　$\triangle FNG' = \triangle FNG, G'O = FG'$。

因　$\angle FGB = 4\alpha$,

$\therefore$　$\angle GOF = 2\alpha$,

又　$\angle OFB = \alpha$。

而　$GF^2 - GN^2 = FO^2 - NO^2$,或$NO^2 - GN^2 = FO^2 - GF^2$,

即　$(\sin 5\alpha - \sin \alpha + 4\sin^3\alpha)^2 - (\sin 5\alpha - 3\sin \alpha + 4\sin^3\alpha)^2$

$$= 4(\sin \alpha - 8\sin^3 \alpha)^2 - (2 \sin \alpha)^2,$$

或　$$\sin 5\alpha = 5\sin \alpha - 20\sin^3 \alpha + 16\sin^5 \alpha。$$　证讫。

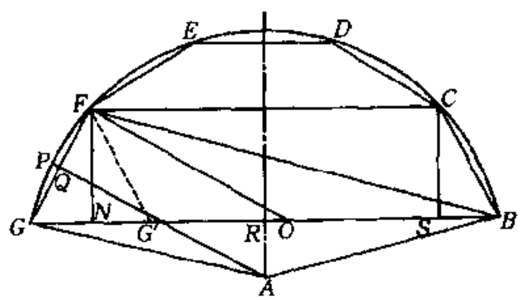


图　62

以后陈维祺纂辑《中西算学大成》一百卷,(1889 年自识),杨兆鋆著《须曼精庐算学》(1898 年江衡序),虽亦论述倍数正弦算法,则多因袭旧说,且是在清季造三角比例表法输入之后。

在前则董祐诚之圜率解析法,实受汪莱的影响。董于《割圜连比例图解》,曾自称:"旧法求弦矢,……用益实归除,汪氏莱更补求五分之一通弦术,商除进退,皆难遽定。"乃立"弦矢互求四术"。

二十六、清季造三角比例表法的输入

光绪三年(1877 年),华蘅芳,傅兰雅(John Fryer 1839～?)共译英海麻士(John Hymers,1803～1877)《三角数理》十二卷,其卷

三论造三角比例表之法，有以下各款：

(59)款。 设 $\theta<\frac{1}{2}\pi$，

则 $$\sin\theta<\theta<\tan\theta。$$

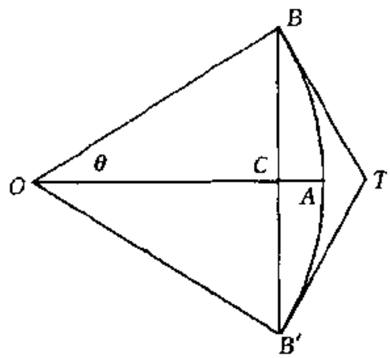


图 63

如图 $$\frac{BC}{OB}<\frac{BA}{OB}<\frac{BT}{OB},$$

但 $$\frac{BC}{OB}=\sin\theta,\frac{BA}{OB}=\theta,$$

$$\frac{BT}{OB}=\tan\theta。$$

故 $$\sin\theta<\theta<\tan\theta。$$ 证讫。

(60)款。设 θ 渐变小至 0，则 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 与 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ 必渐近于 1，而其值为 1。

因 θ 在 $\sin\theta$，$\tan\theta$ 之间，则 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 比 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$ 或 $\frac{1}{\cos\theta}$ 更近于 1。

因 $$\frac{\sin\theta}{\theta}<1<\frac{1}{\cos\theta}$$

故也。但 θ 变至甚小，则 $\frac{1}{\cos\theta}$ 之限为 1，所以 θ 变至甚小 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 之限亦必为 1；

又因 $$\frac{\tan\theta}{\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos\theta},$$

所以 θ 变至甚小，$\frac{\tan\theta}{\theta}$之限亦必为 1。

(61)款。依前款之例，知 $\theta<\frac{1}{2}\pi$，

则 $$\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{4}。$$

盖 $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}>2\times\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

而 $$\frac{\theta}{2}<\tan\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}>\sin\frac{\theta}{2},$$

故 $$\sin\theta>\theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)。$$

(62)款。求 $\sin 10''$，$\cos 10''$。

命 $$\theta=\frac{\pi}{64800}为 10''角之真弧。$$

因 $$\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4},\sin 10''<\theta,\theta=0.000048481368110,$$
$$\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4}>\theta-\frac{(0.00005)^3}{4},$$

即 $$\sin 10''>0.000048481368078,$$

而 $$\sin 10''<\theta<0.000048481368110。$$

故可令 $$\sin 10''=0.000048481368,$$

代入得 $$\cos 10''=0.9999999988248。$$

有此则每 10″距离之正余弦，可以 $\sin(A+\theta)$，$\cos(A+\theta)$两公式求之。

(64)款以后又设下列公式为算表之用：

$$\sin(60^\circ+A)=\sin A+\sin(60^\circ-A),$$ （《大测》简法一）

$$\tan(45^\circ+A)=2\tan 2A+\tan(45^\circ-A), \qquad \text{(Cagnoli)}$$

$$\sec A=\frac{1}{2}\left[\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)+\cot\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)\right],$$

$$\sin A+\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)$$
$$=\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A), \qquad \text{(Euler)}$$

$$\cos A+\cos(72^\circ+A)+\cos(72^\circ-A)$$
$$=\cos(36^\circ+A)+\cos(36^\circ-A)。 \qquad \text{(Euler)}$$

至徐有壬著《造各表简法》,所述造正弦全表,造正矢全表,造正切全表,造八线对数全表四术,则系级数演算法(calculation by series),其术与证,已见前章,现不再赘述。

日本林鹤一《和算研究集录》之内尚有一文题:《中国之弧背缀术和圆周率研究》,现亦不再赘述。

中算家的九九加减术*

目　次

一、九 九 乘 法

中算家对于乘数方法十分注意，上古称为九九，并设有乘数表，以备初学学习，一如现在之例。不过上古的乘法表，是由九九自上而下，而至一一。不若现在的乘法表，是由一一自下而上，而至九九。汉代还是如此，这由现存居延、敦煌各处汉简可以证明①。如超出九九，则须逐一步算，中算家又设简表，用代乘法，唐宋之间尚有流传，这在现存敦煌广顺二年（公元952年）写本“田亩算表”可以

---

* 本文原载《学艺》第21卷（1952年）第4期第7～8页，1955年收入《中算史论丛》第三集第513～518页。

① 李俨《上古算学史》，《科学》，1944，27卷，7～12期，第16～24页。和《中算史论丛》第五集第1～14页内“上古算学史”，1955年（*见本书第八卷第369～381页。——编者）。

看到①。至如何简化乘法，则中外算家积思千余年，欧洲在十七世纪初叶，尚只设备三位乘法表②，用以代替多位乘除，这不过根据下列原则，即

$$(a+x)(b+y)=ab+bx+ay+xy$$

来计算。如：乘数，

235987×789654＝185415000000	因检表得	235×789＝185415
778743000	因检表得	789×987＝778743
153690000	因检表得	235×654＝153690
645498	因检表得	987×654＝645498

故　　235987×789654＝186348078498。

反之，除法亦可同样算得，如：除数，

186348078498÷235987

即　　186348078498 | 235987 / 789654

185415	因检表得：	235×789＝185415<186348
933078	因检表得：	789×987＝778743<933078
778743		
154335498		
153690	又因检表得：	235×654＝153690<153690
645498	又因检表得：	654×987＝645498＝645498
645498		
0		

故　　186348078498÷235987＝789654。

① 李俨《中国算学史》，第53～54页，1937年（＊见本书第一卷第406～407页。——编者）。

② Herwarth Von Hohenburg, *Tabulae arithmeticae prosthaphaeresis universales*, 1610.

十七世纪发明对数，方解决这问题[①]。在对数术发明的前夜，西方有积化和差术[②]，中算家有加减术，加减法，总较法，矢较法等，都以加减代乘除。

二、加减术，加减法

《崇祯历书》内《测量全义》[③]（约1631年）卷七称："古法用弦数以推步七政，必须勾股，开平立方，三乘方等术，至繁而易紊，用力多而见功少，今悉置不用，独用乘除简矣。此卷中并除法不用，而独用乘法，更简也，又有'加减术'，并乘除俱不用。"同书卷一称："（正弧）三角形有锐角及直角之对边，求余边。用'加减法'。"

即
$$\sin a=\sin A\sin c \tag{A}$$

又
$$\sin A\sin c=\frac{1}{2}[\cos(A-c)-\cos(A+c)] \tag{B}$$

故
$$\sin a=\sin A\sin c=\frac{1}{2}[\cos(A-c)-\cos(A+c)] \tag{C}$$

就中(A)式为正弧三角形互求公式之一，元代郭守敬（1231～1316）已有详细的记载和解说[④]，(B)式为平面三角形公式之一，清初各算家亦已明瞭，由此二式会合成(C)式，事甚简单。但《测量全义》未曾详细解析，故梅文鼎[⑤]于《勿庵历算书目》称："至于加减代

---

① 李俨《对数的发明和东来》，本集第69～190页（＊本卷第82～191页。——编者）。

② 严敦杰另有：《中算家的积化和差术(Prosthaphaeresis)研究》一文。

③ 罗雅谷《测量全义》(约1631年)，《崇祯历书》本。

④ 李俨《中国算学史》，第145～148页，1937年（＊见本书第一卷第482～484页。——编者）。

⑤ 李俨《梅文鼎年谱》，本集第544～576页（＊见本卷第515～545页。——编者）。

乘除之用,《(崇祯)历书》(《测量全义》)仅举其名,不详其说,意若有所珍惜者,盖尝疑之数十年,而后乃今得其条贯,即初数,次数,甲数,乙数诸法,并书砉然以解(《环中黍尺》)[①②],书凡五卷(1700年)”。明末清初西人输入的割圜术[③],对数术[④]多不详其说。必由中算家自行研究,加以说明。加减术亦是一例。

三、加减法,总较法

梅文鼎深悉(B)式原则,并演为四式,即:

$$\sin a \sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \quad (B)_1 \text{ 称为初数}$$

$$\cos a \cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \quad (B)_2 \text{ 称为次数}$$

$$\sin a \cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \quad (B)_3 \text{ 称为甲数}$$

$$\cos a \sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)] \quad (B)_4 \text{ 称为乙数}$$

就中 $a+b$:《测量全义》(约1631年),《环中黍尺》(1700年)称为总弧,《历象考成》[⑤](1723年)称为总弧,《勾股割圜记》(1755年)称为和度。

又 $a-b$:《测量全义》,《环中黍尺》称为存弧,《历象考成》称为

① 李俨《明清算家的割圜术研究》,本集第254~512页(*本卷第254~484页。——编者)。及《三角术和三角函数表的东来》,本集第191~253页(*本卷第192~253页。——编者)。

② 梅文鼎《勿庵历算书目》,和《环中黍尺》,1700年。

③ 同①。

④ 李俨《对数的发明和东来》,本集第69~190页(*本卷第82~191页。——编者)。

⑤ 《历象考成》,1723年。

较弧,《勾股割圜记》称为较度。

关于$(B)_1$,$(B)_2$,$(B)_3$,$(B)_4$各式,梅氏虽未说明其来源,无疑是由下列

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b, \tag{1}$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b, \tag{2}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b, \tag{3}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \tag{4}$$

四式互相加减得来。

梅氏说明,$\sin a=\cos(90-a)$,又$\cos a=\sin(90-a)$,故$(B)_1$,$(B)_2$与$(B)_3$,$(B)_4$可以互换,就中$(B)_1$,因:

$\cos 0°=1$,故$a-b=0°$时,则$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[1-\cos(a+b)]$,

$\cos 90°=0$, 故$a-b=90°$ 时,则$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\cos(a+b)$,

$a+b=90°$ 时,则$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)$,

$\cos 180°=-1$,故$a+b=180°$时,则$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+1]$,

$\cos 270°=0$, 故$a+b=270°$时,则$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)$。

梅氏并分别举例加以说明,从此薛凤祚《天学会通》① 致用部:《三角算法》(1653)所举正弧三角形公式第一项:

1. 1. $\cos c=\cos a\cos b$ 而$c=\frac{\pi}{2}$

2. $\cos c=\cot A\cot B$

① 李俨《中国算学史》,第214~216页,1937年(*见本书第一卷第543~547页。——编者)。

3. $\cos A=\cos a \sin B$

4. $\cos A=\tan b \cot c$

5. $\sin b=\sin c \sin B$

6. $\sin b=\tan a \cot A$

各乘法都可以加减法代算,又薛氏同书所举正弧三角形公式第三项:

Ⅲ. $\cos a=\cos b \cos c+\sin b \sin c \cos A$。

亦可改书为 $\cos A=\dfrac{\cos a-\sin (90-b)\cos c}{\cos (90-b)\sin c}$,

又可改书为 $\operatorname{vers} A=\dfrac{\operatorname{vers} a-\operatorname{vers} (b-c)}{\frac{1}{2}[\cos(b-c)-\cos(b+c)]}$。

此即《历象考成》[①] (1723 年)所称的总较法,就中:

$\operatorname{vers} a-\operatorname{vers} (b-c)$ 称为矢较,

$\frac{1}{2}[\cos(b-c)-\cos(b+c)]$ 称为中数。

戴震(1724~1777)《勾股割圜记》[②] (1755 年)又改书上式为

$$\operatorname{vers} A=\frac{\operatorname{vers} a-\operatorname{vers} (b-c)}{\frac{1}{2}[\operatorname{vers}(b+c)-\operatorname{vers}(b-c)]},$$

而称 $\frac{1}{2}[\operatorname{vers}(b+c)-\operatorname{vers}(b-c)]$ 为矢半较。

上述加减术,加减法,总较法等,在欧洲统称为积化和差术(Prosthaphaeresis)[③]。不过当时来华教士,未曾详细解说,尚留待中算家多次演述耳。

---

① 《历象考成》,1723 年。

② 戴震《勾股割圜记》,1755 年。

③ 严敦杰另有:《中算家的积化和差术(Prosthaphaeresis)研究》一文。

中算家的圆锥曲线说*

目　次

一、圆锥曲线说的输入

中国旧无几何圆锥曲线说，明末清初随历法输入。《测量全义》(1631 年)卷六指明圆锥曲线有(一)三角形，(二)平圆形，(三)圭窦形(抛物线)，(四)陶丘形(双曲线)，(五)椭圆形五种，并附图说明。即以椭圆而论，说理既不详尽，名称亦不一致，如椭圆上各名称如表 1。

又从《交食历指》(1632)"以长圆形求日食方法"节内知当日曾输入(1)椭圆作法，及(2)椭圆基本定理，即：

(1)在椭圆上之大小辅圆作半径，于交点上作两轴平行线，其交点在椭圆上。

(2)椭圆与辅圆对应弦之比，如辅圆长短轴之比。

《测天约说》(1633)称："长圆形有一线作圈，而首至尾之径，大

---

* 本文原载《科学》第 29 卷(1947 年)第 4 期第 115～120 页，1955 年收入《中算史论丛》第三集第 519～537 页。

于腰间径，亦名曰瘦圈界，亦名曰椭圈。”①

表 1

测量全义(1631年)	长圆 椭圆形	长径	短径		
《恒星历指》(1631年)	椭圆 斜圆				
《交食历指》(1632年)	长圆形	大径	小径	外大圈	中小圈
《测天约说》(1633年)	长圆形 椭圈 瘦圈界		—	—	—
《数理精蕴》(1723年)	椭圆形 鸭蛋形	大径	小径	—	—
《历象考成后编》(1742年)	椭圆	大半径	小半径	平圆	—
现在名称	椭圆	长轴	短轴	大辅圆	小辅圆

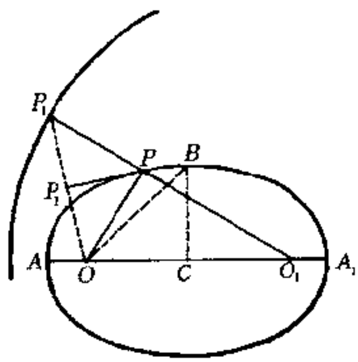


图 1

而南怀仁(Ferdinard Verbiest，1623～1688)《灵台仪象志》(1674年)于第16，55，59各图，叠言椭圆之机械作图法，即应用$OP+O_1P=AA_1$，及$CB^2=OA\times OA_1$，定理：“以O，O_1两点各为心，P为界，各用一针钉之，围以丝线，末以铅笔代P针，引而旋转，即成APA_1椭圆形。”如图1。

《数理精蕴》(1723年)于上编卷三，下编卷二十内同样说述“椭圆之面积，等于πab，而a=长轴，b=短轴”。但因未先证明“椭圆与辅圆对应弦之比，如辅圆长短轴之比”，故读者无由详知究竟。

乾隆二年(1737年)开始编辑《历象考成后编》，七年(1742年)

① 见《新法历书》，及《古今图书集成》，历法典第一〇五卷。

编成。其卷一“日躔数理”,内有(1)用椭圆面积为平行,(2)求两心差,及椭圆与平圆之比例,(3)求椭圆大小径之中率,(4)椭圆角度与面积相求,并论及椭圆,其中第(1)节、第(4)节说明椭圆作法,除《灵台仪象志》所举外,并应用切线定理:“已知 O,O_1 方位,以 O_1 为心,$O_1P_1=2a$ 为半径作圆,又自 O 出线至圆周,折半作垂线 PP_2,则 P 为椭圆界,依法逐度作点连之,则成椭圆周。”因 PP_2 又为椭圆之切线,如图 1。

《历象考成后编》(1742 年)卷一第(4)节又说明椭圆角度与正圆角度之关系,有(a)以角求积,(b)以积求角,(c)借积求积,(d)借角求角。其(a)以角求积法内,如图 2。

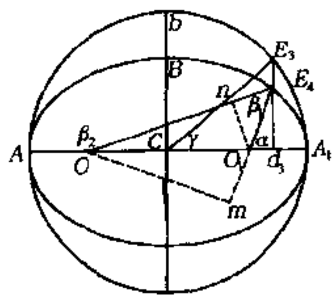


图 2

令 $\alpha=$(椭圆)实引角,$\gamma=$(正圆)借积角,

$$a=CA=CA'=\text{长轴}/2,$$

$$b=CB=\text{短轴}/2,$$

$$c=CO=CO_1=\text{焦点距}/2。$$

C 为椭圆中心(center of the ellipse);AA' 圆为辅圆,或辅助圆(auxiliary circle);E_3,E_4 为对应点,或相当点(corresponding points)。

延长 O_1E_4 至 m,自 O 作 mE_4 线之直垂线 Om。

因
$$\sin\alpha=\frac{Om}{2c},\quad \cos\alpha=\frac{O_1m}{2c}$$

$$Om=2c\sin\alpha,\qquad O_1m=2c\cos\alpha。$$

$$OE_4+mE_4=2a+O_1m=2a+2c\cos\alpha。$$

$$OE_4-mE_4=\frac{Om^2}{OE_4+mE_4}=\frac{Om^2}{2a+2c\cos\alpha}$$

$$OE_4=\frac{c^2+a^2+2\ ca\ \cos\alpha}{a+c\ \cos\alpha}$$

$$O_1E_4=2a-OE_4=2a-\frac{c^2+a^2+2\ ca\ \cos\alpha}{a+c\ \cos\alpha}$$

$$=\frac{a^2-c^2}{a+c\ \cos\alpha}=\frac{b^2}{a+c\ \cos\alpha}。$$

又 $$d_3E_3=a\ \sin\gamma=\frac{a}{b}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{b^2}{a+c\ \cos\alpha},$$

$$\therefore\frac{\sin\gamma}{b}=\frac{\sin\alpha}{a+c\ \cos\alpha},\ \sin\gamma=\frac{b\ \sin\alpha}{a+c\ \cos\alpha}。\qquad (A)$$

其(c)借积求积法内，如图 2。

令 β_2=(椭圆)平引角，α=(椭圆)实引角，γ=(正圆)借积角。自 O_1 作 OE_4 线之直垂线 O_1n，

因 $$\sin\beta_2=\frac{o_1n}{2c},\cos\beta_2=\frac{on}{2c};$$

$$O_1n=2c\cdot\sin\beta_2,\quad On=2c\cdot\cos\beta_2;$$

$$O_1E_4+nE_4=2a-2c\cdot\cos\beta_2,$$

$$O_1E_4-nE_4=\frac{(2c\cdot\sin\beta_2)^2}{2a-2c\cdot\cos\beta_2},$$

$$O_1E_4=\frac{a^2+c^2-2c\cdot a\cdot\cos\beta_2}{a-c\cdot\cos\beta_2},$$

$$nE_4=\frac{a^2-c^2+2c^2\cdot\cos^2\beta_2-2c\cdot a\cdot\cos\beta_2}{a-c\cdot\cos\beta_2},$$

$$\sin\alpha=\sin(\beta_1+\beta_2)$$

$$=\frac{2c\ \sin\beta_2\cos\beta_2(a-c\ \cos\beta_2)+\sin\beta_2(a^2-c^2+2c^2\cos^2\beta_2-2ca\ \cos\beta_2)}{a^2+c^2-2ca\ \cos\beta_2}$$

$$=\frac{b^2\cdot\sin\beta_2}{a^2+c^2-2ca\ \cos\beta_2},$$

$$d_3E_4=\frac{b^2\ \sin\beta_2}{a-c\ \cos\beta_2},$$

$$d_3E_3=\frac{a\ b\ \sin\beta_2}{a-c\ \cos\beta_2},$$

$$\therefore \qquad \sin\gamma=\frac{b\ \sin\beta_2}{a-c\ \cos\beta_2}。\tag{B}$$

上述二法既求得 γ 角，则可先求 E_3CA_1 平圆（弧）面积，次可求 E_4CA_1 及 $E_4O_1A_1$ 椭圆（弧）面积。此项椭圆（弧）近似面积，因是时微积分学尚未输入，仅求其约数。其后徐有壬（1800～1860），李善兰（1811～1882），并有演述。徐有《椭圆正术》一卷、《椭圆求周术》一卷，在《务民义斋算学》之内。李有《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷，在《则古昔斋算学》之内。

二、清代中算家的椭圆求周术研究

清初椭圆学说输入之时，天文学据以计算日躔、月躔，就中惟西洋人戴进贤（Ignace Kogler，1680～1746）、徐懋德（Andreas Pereira，1690～1743）和明安图三人能解此术，因于乾隆二年（1737年）由戴进贤、徐懋德、明安图，以及何国宗、梅瑴成、何国栋诸人共编《日躔数理》等篇，续成《历象考成后编》十卷，乾隆七年（1742年）成书，该书于“平圆与椭圆正弦之比例，同于大径与小径之比例”，即“椭圆与辅圆对应弦之比，如辅圆长短轴之比”，加以几何说明，而椭圆面积则如《数理精蕴》（1723年）之例认为 $S=\pi ab$。对于椭圆的片段弧线长度和其面积，仅求其约数，而于椭圆的长度和其理论，则初未详述。清之中叶，中算家辈出，而董祐诚（1791～1823）所著的《椭圜求周术》，尚于术未合。其中最有成就的，当推项名达（1789～1850），戴煦（1805～1860）二氏，项氏著有《椭圜求周术》一书，并于戊申冬（1848年）致书戴煦称：“弦矢互求，椭圜求周二种，为惬意之作，恐病躯不及蒇事，乞代整理。”逾年项名达死。戴

煦就原术补成《椭圜求周图解》，该书题“钱塘项名达著，钱塘戴煦补图解”，后附咸丰丁巳（1875 年）二月钱塘戴煦跋，计原书及图解共二万五千余言。《图解》附图大小凡十一幅，原书于“椭圜求周术”称：

法以大径（即全长轴 d）为径，求得平圜周（πd）为第一数。次以椭圆大半径（即半长轴 a）为第一率，小半径（即半短轴 b）自乘，大半径除之，转减大半径为第三率，乃置第一数，以三率乘之，一率除之〔即 $\frac{a^2-b^2}{a}\div a=\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)^2=e^2$，而 e 为离心率，eccentricity〕，二自乘除之，为第二数。次置第二数，以三率乘之，一率除之，三乘之，四自乘除之，为第三数。次置第三数，以三率乘之，一率除之，三乘之，五乘之，六自乘除之，为第四数。次置第四数，以三率乘之，一率除之，五乘之，七乘之，八自乘除之，为第五数。次置第五数，以三率乘之，一率除之，七乘之，九乘之，十自乘除之，为第六数。依次递乘递除，得数渐小至单位下止。第一数正，第二数下皆负，正负相减，即椭圜周。

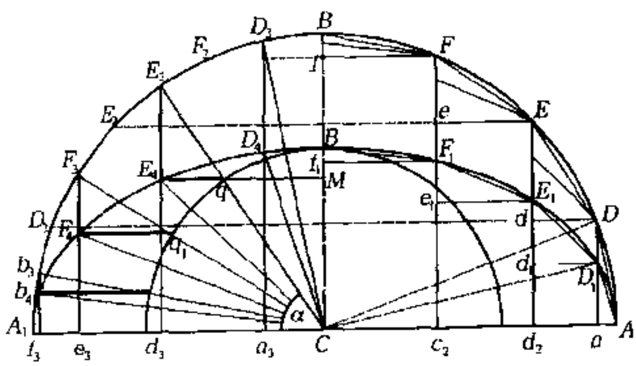


图 3

依术列式,应作:

椭圆周长

$$L=\pi d\left(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}e^8-\cdots\right),$$

即

$$L=\pi d\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2-\cdots\right],$$

而

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}。$$

和近代算式相符,但近代算式系按高等数学原理演算;而项、戴二氏则按初等数学方法演算。兹按原义,简约图说,演述如下:按椭圆定理知:"椭圆与辅圆(auxiliary circles)对应弦(corresponding chords)之比,如辅圆长短轴(major axis,minor axis)之比。"如图3:

$$d_3E_4:d_3E_3=qC:E_3C=CB(b):CA(a).$$

$$Mq:ME_4=CA(a):CB(b) \qquad \text{(定理 1)}$$

又按椭圆定理,知:"在椭圆上之大小辅圆作半径,于交点上作两轴平行线,其交点在椭圆上。"

如图3:CqE_3 半径交大小辅圆于 E_3,于 q,由此作 CB,CA 之平行线,交 E_4 点,则 E_4 点在椭圆上。 (定理 2)

定理 1 证法　如图3在椭圆外切平圆中一象限 CAb 分为若干分弧,如 AD、DE,EF,Fb,长度相等,椭圆中一象限 CAB 亦分若干弧,如 AD_1,D_1E_1,E_1F_1,F_1B,长度不相等,并作纵横线,使成若干组直角三角形。

其第一组为　$\triangle_s\, aAD_1$,aAD;

第二组为　$\triangle_s\, d_1D_1E_1$,dDE;

第三组为　$\triangle_s\ e_1E_1F_1, eEF$；

第四组为　$\triangle_s\ f_1F_1B, fFb$。

各组直角三角形，底边相等，而高之比，如长短轴之比，如第一组 $\triangle_s aAD_1, aAD$ 中 $Aa=Aa, aD_1 : aD=CB : CA$。

又按比例原理，知

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2} \text{ 时 } \frac{m}{n}=\frac{m_2-m_1}{m_2-n_1},$$

故第二组 $\triangle_s\ d_1D_1E_1, dDE$ 中 $D_1d_1=Dd$。

又　$$\frac{CB}{CA}=\frac{aD_1}{aD}=\frac{d_2E_1}{d_2E}, \frac{CB}{CA}=\frac{d_2E_1-aD_1}{d_2E-aD}=\frac{d_1E_1}{dE},$$

即　$$d_1E_1 : dE=CB : CA。$$

同理　第三组 $\triangle_s\ e_1E_1F_1, eEF$ 中

$$E_1e_1=Ee, e_1F_1 : eF=CB : CA。$$

第四组 $\triangle_s\ f_1F_1B, fFb$ 中

$$F_1f_1=Ff, f_1B : fb=CB : CA。$$

如在椭圆内切平圆中，一象限分为若干分弧，证法亦同。

因椭圆求周，生于开平方捷法，而开平方捷法，则项名达、戴煦的《开诸乘方捷术》已经详述①。

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$$
$$=P^{\frac{1}{n}}-\left(\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\right)。$$

项名达(1)，戴煦七术

又　$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$$
$$=P^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\right)。$$

---

① 见李俨《中算史论丛》(二)，第162，163页，和《中算史论丛》第一集，第281，282页(＊见本书第六卷第259～261页。——编者)。

Newton，1676 年，戴煦(1)

如 $n=2$，则

$$N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$$
$$=P^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\right)。$$

“借大积术”

又 $$N^{\frac{1}{2}}=(P+Q)^{\frac{1}{2}}$$
$$=P^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots。$$

“借小积术”

而 $A,B,C,\cdots$ 为第一，第二，第三数，…

如图 3 和图 4。

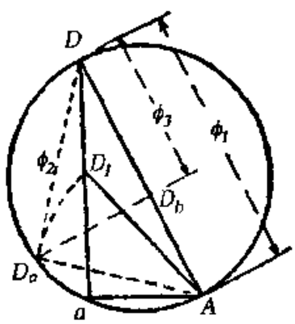


图 4

$$AD^2=Aa^2+aD^2,$$
$$AD_1^2=Aa^2+aD_1^2,$$
$$AD^2-AD_1^2=aD^2-aD_1^2,$$
$$AD_1^2=AD^2-(aD^2-aD_1^2);$$

假令 $$\phi_2^2=aD^2-aD_1^2,\phi_1=AD。$$

而 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$$

为 AD_aD 连比例三角形的比例式，就中 ϕ_3 称为“椭圜通弦之三

率”。由“借大积术”知：

$$AD_1=\phi_1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_2^{\,2}}{\phi_1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\phi_2^{\,4}}{\phi_1^{\,3}}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\phi_2^{\,6}}{\phi_1^{\,5}}+\cdots\right)$$

或
$$AD_1=\phi_1-\left(\frac{1}{2}\phi_3+\frac{1}{4}B\cdot\frac{\phi_3}{\phi_1}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{\phi_3}{\phi_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{\phi_3}{\phi_1}+\cdots\right),$$

而
$$\phi_1=AD,\phi_2=\sqrt{aD^2-aD_1^{\,2}},$$
$$\phi_3=\frac{\phi_2^{\,2}}{\phi_1}=\frac{aD^2-aD_1^{\,2}}{AD}=DD_b;$$

$B,C,D,\cdots$为第二，第三，第四数。

又如图 3：

$$CD^2=Ca^2+aD^2$$
$$CD_1^{\,2}=Ca^2+aD_1^{\,2}$$
$$CD^2-CD_1^{\,2}=aD^2-aD_1^{\,2}$$
$$CD_1^{\,2}=CD^2(=CA^2)-(aD^2-aD_1^{\,2})$$

假令 $\phi_2^{\,2}=aD^2-aD_1^{\,2},\phi_{101}=CA,$

而 $\phi_{101}:\phi_2=\phi_2:\phi_{301}$

为又一连比例三角形的比例式，就中ϕ,ϕ_{301}称为：“椭圜抵周线之三率”。

由“借大积术”知：

$$CD_1=\phi_{101}-\left(\frac{1}{2}\phi_{301}+\frac{1}{4}B\frac{\phi_{301}}{\phi_{101}}+\frac{3}{6}C\cdot\frac{\phi_{301}}{\phi_{101}}\right.$$
$$\left.+\frac{5}{8}D\frac{\phi_{301}}{\phi_{101}}+\cdots\right),$$

$$\phi_{101}=CA,\phi_2=\sqrt{aD_2-aD_1^{\,2}},$$

而
$$\phi_{301}=\frac{\phi_2^{\,2}}{\phi_{101}}=\frac{aD^2-aD_1^{\,2}}{CA};$$

$B, C, D, \cdots$为第二，第三，第四等数。

又如图 3 内 D_2, E_2, F_2 点，与 D, E, F 点相对称，另于 bF_2，F_2E_2，E_2D_2，D_2A_1 中间，取 D_3, E_3, F_3, b_3，各中点，自 D_3, E_3, F_3, b_3 作横轴 Cb 或 $CB(=b)$之平行线 $D_3a_3, E_3d_3, F_3e_3, b_3f_3$ 交椭圆周于 D_4, E_4, F_4, b_4 各点，以上各点与椭圆心 C 相联，所成三角形：

$$\triangle_s a_3CD_3, d_3CE_3, e_3CF_3, f_3Cb_3,$$

与

$$\triangle_s aAD, \quad dDE, \quad eEF, \quad fFb$$

为相似，而 $CD_4 /\!/ AD_1, CE_4 /\!/ D_1E_1, CF_4 /\!/ E_1F_1, Cb_4 /\!/ F_1B$。因据《几何原本》："圆内之心角，大于界角一倍。"即界角对弧之半，等于心角对弧，如图 3：

$$CD_3 /\!/ AD，则\frac{1}{2}DA_1 弧 = D_3A_1 弧 = DD_3 弧$$

$$\angle CAD = \angle a_3CD_3，故\triangle_s aAD, a_3CD_3 为相似。$$

又 $$CE_3 /\!/ DE，则\frac{1}{2}ED_2 弧 = E_3A_1 弧 = EE_3 弧$$

$$\angle dDE = \angle d_3CE_3，故\triangle_s dDE, d_3CE 为相似。$$

又 $$CF_3 /\!/ EF，则\frac{1}{2}FE_2 弧 = F_3A_1 弧 = F_2F_3 弧$$

$$\angle eEF = \angle e_3CF_4，故\triangle_s eEF, e_3CF_3 为相似。$$

又 $$Cb_3 /\!/ Fb，则\frac{1}{2}b_2F_2 弧 = b_3A_1 弧 = Db_3 弧$$

$$\angle fFb = \angle f_3Cb_3，故\triangle_s fFb, f_3Cb_3 为相似。$$

例如：分圆象限为四等分弧各"界角"的角度如下：

即 $$\angle aAD = \angle a_3CD_3 = \frac{7}{8} \times 90^\circ = \alpha_1,$$

$$\angle dDE = \angle d_3CE_3 = \frac{5}{8} \times 90^\circ = \alpha_2,$$

$$\angle eEF = \angle e_3CF_3 = \frac{3}{8} \times 90^\circ = \alpha_3,$$

$$\angle fFb=\angle f_3Cb_3=\frac{1}{8}\times 90^\circ=\alpha_4。$$

因 $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\text{vers }2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$,

故 $\sin^2\alpha_1=\sin^2\alpha AD=\sin^2\alpha_3CD_3$

$$=\frac{1}{2}\text{vers}\left(2\times\frac{7}{8}\times 90^\circ\right)=\frac{1}{2}\text{vers }157.5^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 157.5^\circ)=\frac{1}{2}(1+\sin 67.5^\circ)$$

余类推。

故分圆象限为二等分,则:

$$\text{vers }2\alpha_1=\text{vers}\left(2\times\frac{3}{4}\times 90\right)$$

$$=\text{vers }135^\circ=1-\cos 135^\circ=1+\sin 45^\circ$$

$$\text{vers }2\alpha_2=\text{vers}\left(2\times\frac{1}{4}\times 90\right)$$

$$=\text{vers }45^\circ=1-\cos 45^\circ=\underline{1-\sin 45^\circ}$$

总和$=2$。

分圆象限为三等分,则

$$\text{vers }2\alpha_1=\text{vers}\left(2\times\frac{5}{6}\times 90\right)$$

$$=\text{vers }150^\circ=1-\cos 150^\circ=1+\sin 60^\circ$$

$$\text{vers }2\alpha_2=\text{vers}\left(2\times\frac{3}{6}\times 90\right)$$

$$=\text{vers }90^\circ=1-\cos 90^\circ=1$$

$$\text{vers }2\alpha_3=\text{vers}\left(2\times\frac{1}{6}\times 90\right)=\text{vers }30^\circ$$

$$=1-\cos 30^\circ=\underline{1-\sin 60^\circ}$$

总和$=3$。

分圆象限为四等分,则

$$\text{vers }2\alpha_1=\text{vers}\left(2\times\frac{7}{8}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 157^\circ\frac{1}{2}=1-\cos 157^\circ\frac{1}{2}=1+\sin 67^\circ\frac{1}{2}$$

$$\text{vers } 2\alpha_2=\text{vers}\left(2\times\frac{5}{8}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 112^\circ\frac{1}{2}=1-\cos 112^\circ\frac{1}{2}=1+\sin 22^\circ\frac{1}{2}$$

$$\text{vers } 2\alpha_3=\text{vers}\left(2\times\frac{3}{8}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 67^\circ\frac{1}{2}=1-\cos 67^\circ\frac{1}{2}=1-\sin 22^\circ\frac{1}{2}$$

$$\text{vers } 2\alpha_4=\text{vers}\left(2\times\frac{1}{8}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 22^\circ\frac{1}{2}=1-\cos 22^\circ\frac{1}{2}=\underline{1-\sin 67^\circ\frac{1}{2}}$$

总和=4。

分圆象限为五等分，则

$$\text{vers } 2\alpha_1=\text{vers}\left(2\times\frac{9}{10}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 162^\circ=1-\cos 162^\circ=1+\sin 72^\circ$$

$$\text{vers } 2\alpha_2=\text{vers}\left(2\times\frac{7}{10}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 126^\circ=1-\cos 126^\circ=1+\sin 36^\circ$$

$$\text{vers } 2\alpha_3=\text{vers}\left(2\times\frac{5}{10}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 90^\circ=1-\cos 90^\circ=1$$

$$\text{vers } 2\alpha_4=\text{vers}\left(1\times\frac{8}{10}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 54^\circ=1-\cos 54^\circ=1-\sin 36^\circ$$

$$\text{vers } 2\alpha_5=\text{vers}\left(2\times\frac{1}{10}\times 90\right)$$

$$=\text{vers } 18^\circ=1-\cos 18^\circ=\underline{1-\sin 72^\circ}$$

总和=5。

分圆象限为六等分，则

$$\begin{aligned}
\operatorname{vers} 2\alpha_1 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{11}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 165^\circ = 1-\cos 165^\circ = 1+\sin 75^\circ\\
\operatorname{vers} 2\alpha_2 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{9}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 135^\circ = 1-\cos 135^\circ = 1+\sin 45^\circ\\
\operatorname{vers} 2\alpha_3 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{7}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 105^\circ = 1-\cos 105^\circ = 1+\sin 15^\circ\\
\operatorname{vers} 2\alpha_4 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{5}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 75^\circ = 1-\cos 75^\circ = 1-\sin 15^\circ\\
\operatorname{vers} 2\alpha_5 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{3}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 45^\circ = 1-\cos 45^\circ = 1-\sin 45^\circ\\
\operatorname{vers} 2\alpha_6 &= \operatorname{vers}\left(2\times\frac{1}{12}\times 90\right)\\
&= \operatorname{vers} 15^\circ = 1-\cos 15^\circ = \underline{1-\sin 75^\circ}
\end{aligned}$$

总和＝6。

故分圆象限为 n 等分，再用归纳法证明其普遍性，即得：

$$\operatorname{vers} 2\alpha_1+\operatorname{vers} 2\alpha_2+\operatorname{vers} 2\alpha_3+\cdots+\operatorname{vers} 2\alpha_n=n,$$

又 $$(\operatorname{vers} 2\alpha_1)^2+(\operatorname{vers} 2\alpha_2)^2+(\operatorname{vers} 2\alpha_3)^2+\cdots+(\operatorname{vers} 2\alpha_n)^2=\frac{3}{2}n,$$

及 $$(\operatorname{vers} 2\alpha_1)^3+(\operatorname{vers} 2\alpha_2)^3+(\operatorname{vers} 2\alpha_3)^3+\cdots+(\operatorname{vers} 2\alpha_n)^3=\frac{5}{2}n$$

等，亦可用归纳法证明其普遍性，兹再举例说明如下：

例如，分圆象限为五等分，各项平方式如下：

$$(\text{vers } 2\alpha_1)^2=\left(1+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$=1+\frac{10+2\sqrt{5}}{16}+2\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$(\text{vers } 2\alpha_2)^2=\left(1+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$=1+\frac{10-2\sqrt{5}}{16}+2\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$(\text{vers } 2\alpha_3)^2=1,$$

$$(\text{vers } 2\alpha_4)^2=\left(1-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$=1+\frac{10-2\sqrt{5}}{16}-2\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$(\text{vers } 2\alpha_5)^2=\left(1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$$

$$=1+\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-2\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{总和}=5+4\times\frac{16}{16}=7.5。$$

$$\text{或 } n=5\quad\text{总和}=\frac{3}{2}\times5=\frac{3}{2}n。$$

又分圆象限为五等分,各项立方式如下:

$$(\text{vers } 2\,\alpha_1)^3=1+3\times\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$+3\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^3$$

$$(\text{vers } 2\,\alpha_2)^3=1+3\times\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$+3\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^3$$

$$(\text{vers }2\alpha_3)^3=1$$

$$(\text{vers }2\alpha_4)^3=1+3\times\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$-3\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^3$$

$$(\text{vers }2\alpha_5)^3=1+3\times\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$-3\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}-\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^3$$

$$\text{总和}=5+3\times\frac{40}{16}=12.5。$$

或 $n=5$，　　总和 $=\frac{5}{2}\times 5=\frac{5}{2}n$。

又如图 3

$$\frac{CE_3}{d_3E_3{}^2-d_3E_4{}^2}=\frac{1}{\phi_{301}},$$

又
$$\frac{CA^2}{CA^2-CB^2}=\frac{d_3E_3}{d_3E_3{}^2-d_3E_4{}^2};$$

因
$$\frac{\sqrt{CA^2-CB^2}}{CA^2}-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}=e,$$

故
$$\frac{1}{e^2}=\frac{d_3E_3{}^2}{d_3E_3{}^2-d_3E_4{}^2}=\frac{\frac{d_3E_3{}^2}{CA^2}}{\frac{d_3E_3{}^2-d_3E_4{}^2}{CA^2}}=\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\phi_{301}}{\phi_{301}}}。$$

∴
$$\frac{\phi_{301}}{e^2\cdot\phi_1}=\sin^2\alpha=\frac{\text{vers }2\alpha}{2},$$

$$\phi_{301}=\phi_{101}\cdot e^2\cdot\frac{\text{vers }2\alpha}{2} \tag{1}$$

因$CD_4{}^2=\phi_{101}^2-(a_3D_3{}^2-a_3D_4{}^2)=\phi_{101}^2-\phi_{201}$，按"借大积术"

$$CD_4=\phi_{101}-\left(\frac{1}{2}\phi_{301}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\phi_{301}{}^2}{\phi_{101}}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\phi_{301}{}^3}{\phi_{101}{}^2}+\cdots\right), \tag{2}$$

又因 $$\frac{AD_1}{AD}=\frac{CD_4}{\phi_{101}}，即\ AD_1=\frac{AD}{\phi_{101}}\cdot CD_4, \tag{3}$$

以(1)，(2)式代入(3)式，得：

$$AD_1=AD\left\{1+\left[\frac{1}{2}e^2\left(\frac{\text{vers }2\alpha}{2}\right)+\frac{1}{8}e^4\left(\frac{\text{vers }2\alpha}{2}\right)^2+\frac{1}{16}e^6\left(\frac{\text{vers }2\alpha}{2}\right)^3+\cdots\right]\right\};$$

而椭圆周长，

$$\begin{aligned}L&=\pi d\left\{1-\left[\frac{1}{2}e^2(\text{vers }2\alpha_1+\text{vers }2\alpha_2+\text{vers }2\alpha_3+\cdots+\text{vers }2\alpha_n)\frac{1}{2}\right.\right.\\&\quad+\frac{1}{8}e^4(\text{vers}^2\,2\alpha_1+\text{vers}^2\,2\alpha_2+\text{vers}^2\,2\alpha_3+\cdots+\text{vers}^2\,2\alpha_n)\frac{1}{4}\\&\quad\left.\left.+\frac{1}{16}e^6(\text{vers}^3\,2\alpha_1+\text{vers}^3\,2\alpha_2+\text{vers}^3\,2\alpha_3+\cdots+\text{vers}^3\,2\alpha_n)\frac{1}{8}+\cdots\right]\right\}\\&=\pi d\left[1-\left(\frac{1}{2}\cdot e^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot e^4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\cdot e^6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}+\cdots\right)\right]\\&=\pi d\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2-\cdots\right]\end{aligned}$$

$$=\pi d\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}\cdot e^4-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot e^6\right.$$
$$\left.-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot e^8-\cdots\right)$$
$$=\pi d\left[1-\frac{1}{2^2}\cdot e^2-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2}\cdot e^4-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot e^6\right.$$
$$\left.-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot e^8-\cdots\right]。$$

附：日算椭圆周术*

《中算家的圆锥曲线说》曾于《科学》第二十九卷第四期介绍于读者，其最有成就的，当推项名达（1789～1850）、戴煦（1805～1860）二氏，所算

$$\text{椭圆周全长}=\pi d\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}\cdot e^4-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot e^6\right.$$
$$\left.-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}\cdot e^8-\cdots\cdots\right)$$

和理论全相符合。

但事有巧合的，则在项、戴二氏十年前，日人和田宁（1845年卒）亦同样算出上式，而取径不同，但应用安岛直圆（1739～1798）弧背术两公式，即

$$(1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r)\times\frac{1}{n^{r+1}}=\frac{1}{r+1}\qquad(\text{I})\text{安岛直圆}$$

和

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1^2}{3!}+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}+\cdots$$
$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2r-3)^2}{(2r-1)!}+\cdots。\qquad(\text{II})\text{安岛直圆}$$

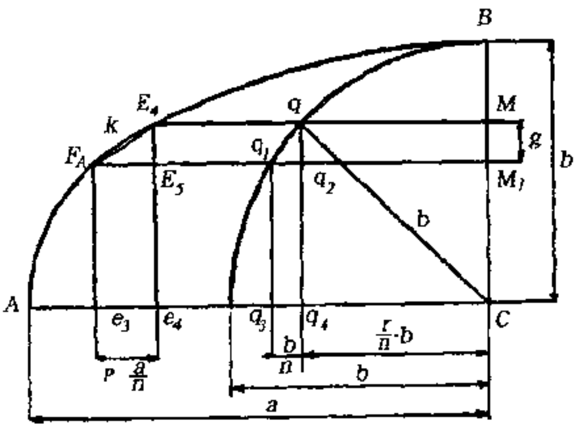
而开始论述所设假定，亦有可议之处，不若项名达、戴煦二氏的简单明显。现为介绍日本旧算法起见，亦妥为引述，并应用前图，以便校读。和田宁系将椭圆的大小半径 a,b 分为若干微分，每段为$\frac{a}{n}$，

---

* 本文原载《科学》第31卷（1949年）第10期第297～299页，1955年收入《中算史论丛》第三集第538～543页。

$\frac{b}{n}$，如大小半径上的某一段为$\frac{a}{n}\cdot r$，$\frac{b}{n}\cdot r$，或$\frac{r}{n}\cdot a$，$\frac{r}{n}\cdot b$，则相邻的某一段为$\frac{a}{n}(r-1)$，$\frac{b}{n}(r-1)$和$\frac{a}{n}(r+1)$，$\frac{b}{n}(r+1)$。并假定某一段$\frac{r}{n}\cdot b$和$\frac{b}{n}$所组成的两三角形$\triangle_s qq_4C$，q_1q_2q为相似，如图：

$$qq_4 : q_4C = q_1q_2 : q_2q = q_3q_4 : MM_1 = \frac{b}{n} : g。$$



图

因 $$qq_4=\sqrt{b^2-\frac{r^2}{n^2}\cdot b^2}=b\sqrt{1-\frac{r^2}{n^2}}=b\sqrt{h},$$

而 $$h=1-\frac{r^2}{n^2}=1-t^2;$$

即 $$b\sqrt{h} : \frac{r}{n}\cdot b=\frac{b}{n} : g,\quad g^2=\frac{\frac{r^2}{n^2}\cdot b}{h}。$$

按椭圆定理知："椭圆与辅圆(auxiliary circles)对应弦(corresponding chords)之比，如辅圆长短轴(major axis，minor axis)之比"，即$F_4E_4 : q_1q_2=a : b$。

$$p : \frac{b}{n}=a : b,\qquad \therefore p=\frac{a}{n}。$$

在直角三角形 $E_4F_4E_5$ 内，

$$E_4F_4{}^2=E_4E_5{}^2+F_4E_5{}^2,\text{即 } K^2=g^2+p^2=\frac{\frac{r^2}{n^4}b^2+h\,\frac{a^2}{n^2}}{h},$$

或
$$K^2=\frac{\frac{r^2}{n^4}b^2+\left(1-\frac{r^2}{n^2}\right)\frac{a^2}{n^2}}{h}=\frac{\frac{a^2}{n^2}\left[1-\frac{r^2}{n^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]}{h}$$

$$=\frac{\frac{a^2}{n^2}\left(1-\frac{r^2}{n^2}m\right)}{h}。$$

而
$$m=1-\frac{b^2}{a^2}=e^2,$$

即
$$K=\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{h}}\left(1-\frac{r^2}{n^2}m\right)^{\frac{1}{2}}。$$

按二项式定理：

$$K=\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{h}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2}m-\frac{1}{8}\frac{r^4}{n^4}m^2-\frac{3}{48}\frac{r^6}{n^6}m^3\right.$$
$$\left.-\frac{15}{382}\frac{r^8}{n^8}m^4-\cdots\right),$$

因 $\frac{r}{n}=t$，故 $\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\frac{15}{48}t^6+\cdots$，

$$K=\left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\frac{15}{48}t^6+\cdots\cdots\right)\frac{a}{n}$$
$$-\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2\cdot2}t^4+\frac{3}{2\cdot8}t^6+\frac{15}{2\cdot48}t^8+\cdots\cdots\right)\frac{a}{n}m$$
$$-\left(\frac{1}{8}t^4+\frac{1}{8\cdot2}t^6+\frac{3}{8\cdot8}t^8+\frac{15}{8\cdot48}t^{10}+\cdots\cdots\right)\frac{a}{n}m^2$$
$$-\left(\frac{1}{16}t^6+\frac{1}{16\cdot2}t^8+\frac{3}{16\cdot8}t^{10}\right.$$
$$\left.+\frac{15}{16\cdot48}t^{12}+\cdots\cdots\right)\frac{a}{n}m^3-\cdots\cdots$$

又因 $\frac{1}{n}\sum p^r=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^r}+\frac{2^r}{n^r}+\frac{3^r}{n^r}+\cdots\cdots\right)_{n=\infty}=\frac{1}{r+1}$,

(Ⅰ)安岛直圆和田宁是应用安岛直圆弧背术的第一式,即柏努里式的第一数[①]。

如 $$\frac{\text{椭圆周}}{4}=\sum d$$

$$=\left(1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{3}{8\cdot5}+\frac{15}{48\cdot7}+\cdots\cdots\right)a$$

$$-\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot2\cdot5}+\frac{3}{2\cdot8\cdot7}+\frac{15}{2\cdot48\cdot9}+\cdots\cdots\right)a\ m$$

$$-\left(\frac{1}{8\cdot5}+\frac{1}{8\cdot2\cdot7}+\frac{3}{8\cdot8\cdot9}+\frac{15}{8\cdot48\cdot11}+\cdots\cdots\right)a\ m^2$$

$$-\left(\frac{1}{16\cdot7}+\frac{1}{16\cdot2\cdot9}+\frac{3}{16\cdot8\cdot11}+\frac{15}{16\cdot48\cdot13}+\cdots\cdots\right)a\ m^3-\cdots\cdots$$

$$=\mathrm{I}\ a-\mathrm{II}\ a\ m-\mathrm{III}\ a\ m^2-\mathrm{IV}\ a\ m^3-\mathrm{V}\ a\ m^4-\mathrm{VI}\ a\ m^5-\cdots\cdots。$$

又 $$\mathrm{I}=1+\frac{1}{3!}+\frac{3^2}{5!}+\frac{3^2\cdot5^2}{7!}+\frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2}{9!}+\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{3^2}{5!}+\frac{3^2\cdot5^2}{7!}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3}{48}-\frac{5}{382}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\mathrm{I}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-1)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{I}\times\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{III}=\mathrm{II}\times\frac{3}{4^2}-\frac{1}{4^2\cdot2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3}{48}-\cdots\cdots\right)$$

① 参看李俨《中算史论丛》第一集第 323～326 页(＊见本书第六卷第 294～296 页。——编者)。

$$=\text{Ⅱ}\times\frac{3}{4^2}=\text{Ⅰ}\times\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4^2};$$

同理 $$\text{Ⅳ}=\text{Ⅲ}\times\frac{3\times5}{6^2};$$

$$\text{Ⅴ}=\text{Ⅵ}\times\frac{5\times7}{8^2};$$

$$\text{Ⅳ}=\text{Ⅴ}\times\frac{7\times9}{10^2};$$

故 $$\frac{\text{椭圆周}}{4}=\text{Ⅰ}\left(1-\frac{1}{4}m-\frac{1\cdot3}{4\cdot4^2}\cdot m^2-\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4\cdot4^2\cdot6^2}m^3-\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}m^4-\cdots\cdots\right)a,$$

而 $$\text{Ⅰ}=\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{3^2}{51}+\frac{3^2\cdot5^2}{7!}+\frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2}{9!}+\cdots\cdots+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2r-3)^2}{|(2r-1)!}+\cdots\cdots\right)=\frac{\pi}{2}。$$

（Ⅱ）安岛直圆

这是根据安岛直圆的弧背术第二公式。过去中外算家多由圆内容外切多边形因而累求得 π 的级数值公式，安岛直圆则另设新法，容当专篇介绍。

故 $$\frac{\text{椭圆周}}{4}=\frac{\pi a}{2}\left(1-\frac{1}{4}m-\frac{1\cdot3}{4\cdot4^2}m^2-\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4\cdot4^2\cdot6^2}m^3-\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}m^4-\cdots\right)$$

因 $$m=e^2$$

即 $$\text{椭圆周}=2\pi a\left(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2}e^4-\frac{3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}e^6-\frac{3\cdot5^2\cdot7}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}e^8-\cdots\cdots\right)。$$

但图中系假定　椭圆大半径 $=a$，小半径 $=b$。

如令　椭圆大全径 $=d$，小全径 $=2b$。

则上式应书为：

$$椭圆全周=\pi d\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}e^8-\cdots\cdots\right),$$

与西式和项、戴二氏公式相同。

梅文鼎年谱*

序

《梅文鼎年谱》始修于1925年，曾发表于《清华学报》二卷二期，1928年收入《中算史论丛》(一)。近年继续搜求史料，于1946年将《梅文鼎年谱补录》发表于前《中央日报》"文史周刊"第十四期和十五期。钱宝琮、商鸿逵先生各另编有年谱。钱宝琮《梅勿庵先生年谱》载于1932年1月《国立浙江大学季刊》一卷一期内**，商鸿逵《梅定九年谱》载于1932年11月北京《中法大学月刊》一卷一号内。兹参照上述资料，并据严敦杰最近续收各条，重加整理汇编，以便参考。

其明清之际，西算逐年输入中国事迹，则另文汇记，不复列于此年谱内。同时国中算学家著述大略，和历算大事，附记另行的，都冠单圈为志。

1953年10月记于兰州

---

* 本文原载《清华学报》第2卷(1925年)第2号第609～634页，1931年收入《中算史论丛》(一)第363～408页，后经作者修订于1955年收入《中算史论丛》第三集第544～576页。

** 见本书第九卷。

年谱

明崇祯六年癸酉(1633 年)梅文鼎[①] 一岁。

是年夏历二月初七日亥时,梅文鼎生于安徽宣城。[②]

梅文鼎祖瑞祚,号悬符。父士昌(1569~?),一作世昌,号缴瞿,字期生,又字大千。明亡,隐居,治《易》、《春秋》,年六十五,生文鼎。士昌正妻鲍氏,妾胡氏、陈氏,见《梅氏宗谱》。梅文鼎庶出,母胡氏[③]。

崇祯七年甲戌(1634 年)二岁。

是年明朝以李天经(1579~1659)[④] 继徐光启(1562~1633)[⑤] 督修历法。是年成《历书》六十一卷,前后共成书一百三十七卷(内有一架,一折并称卷)。《明史·艺文志》作一百二十六卷,即《崇祯历书》。

崇祯十四年辛巳(1641 年)九岁。

---

① "梅定九,名文鼎,号勿庵,宣城人。专精历算之学,为(清)国朝第一,著有《历算全书》。"见陆耀《切问斋文钞》第二十四卷,第 4 页,乾隆四十年(1775 年)自序刻本。及吴修《昭代名人尺牍小传》卷八,道光八年(1826 年)自序,《翠琅玕馆丛书》本,或参看李俨《中国算学史》,第 248~249 页(1937 年初版,* 见本书第一卷第 574 页,——编者)。

② 1918 年由宣城教育会刘至纯君寄来宁国县梅柏溪君所藏《梅氏宗谱》内《(梅)文鼎公本传》、《毅成公事略》,和《宣城县志》中《梅文鼎传》。本条即据《梅氏宗谱》内本传。

梅氏世居宣城县东南七十里之柏枧山口,厥后析居蒲田等三十余村(据《绩学堂诗钞》卷四,《文钞》卷四,内"重建梅氏宗祠碑记",和《宣城县志》)。

③ 据方苞"梅征君墓表"称:"梅文鼎母胡氏。"见《方望溪先生全集》卷十二,第 4~6 页,《四部丛书》本。梅曾亮《柏枧山房文集》卷四《(梅氏)家谱约书》内称:"梅期生…室鲍氏,側室胡氏,陈氏。"《续古文辞类纂》卷七收有《梅伯言家谱约书》。又据杭世骏《梅文鼎传上》,《道古堂文集》第三十卷,第七册第 1 页,光绪十四年(1888 年)汪氏振绮堂补刻本。

又见梅文鼎,《绩学堂诗钞》卷四,丙申(1716 年)"二月七日诞辰偶作"自注。

④ 李天经生死年,系据康熙十二年(1673 年)《吴桥县志》卷六。

⑤ 参看方豪《徐光启》(1944 年,胜利出版社出版)。

文鼎仲弟文鼐[①],季弟文鼏[②] 都通数学。文鼏是年生[③]。

文鼎儿时侍父(士昌),及塾师罗王宾,仰观星气,辄了然于次舍运旋大意[④]。文鼎九岁熟五经,通史事,有神童之目[⑤]。

清顺治元年甲申(1644年)十二岁。

是年受业于石龙陈明卿,和陈蜚伯[⑥]。是年陕西王征(1571~1644)死。王征有《奇器图说》三卷,天启七年(1627年)刻于扬州又有《额辣济亚牖造诸器图说》一卷(1640年自序)[⑦]。后来梅文鼎《勿庵历算书目》"奇器补注"条称:"若关中王公征,《奇器图说》所述引重转水诸制,并有裨于民生日用。而又本诸西人重学,以明其意,可谓有用之学矣。"

顺治三年丙戌(1646年)十四岁。

是年入学。据梅文鼎"先王父研铭序"称:"已而(文)鼎伴游,时年十四。"

顺治四年丁亥(1647年)十五岁。

文鼎是年补博士弟子员[⑧]。

顺治五年戊子(1648年)十六岁。

是年同时名算家薛凤祚(约1620~1680)始撰《天步真原》[⑨]。

---

① "梅文鼐字和仲,与兄文鼎共成《步五星式》六卷,早卒。"见杭世骏《道古堂文集》第三十一卷,第9页。

② "梅文鼏字尔素,辑《中西经星同异考》一卷、《授时步交食式》一卷。"见杭世骏《道古堂文集》第三十一卷,第9页。

③ 据梅文鼎《绩学堂诗钞》"尔素年六十"推得。

④ 见杭世骏《梅文鼎传上》,《道古堂文集》第三十卷,和《中西经星同异考》序。

⑤ 语见《梅氏宗谱》。

⑥ 按梅文鼎《绩学堂诗钞》卷四"喜石龙陈兆先过访序"称:"兆先先生父明卿先生,及其世父蜚伯先生,并某童时塾师也。计其时为甲申,乙酉。"

⑦ 《额辣济亚牖造诸器图说》一卷,现藏钞本无图,有1640年王征自序,是《奇器图说》的续篇。

⑧ 语见《梅氏宗谱》。

⑨ 清 阮元《畴人传》三十六《王锡阐传》论曰:"国初算学,南王(锡阐)(1628~1682),北薛(凤祚)(1600~1680)并称。"据薛凤祚,"考验叙"称:"薛凤祚从穆尼阁(Jean Nicolas Smogelenski,1611~1656)学,顺治戊子(1648年)著《天步真原》。"

顺治十一年甲午(1654 年)二十二岁。

是年文鼎祖父端祚死,年八十六①。

是年文鼎子以燕生,文鼎妻陈氏②。

顺治十六年己亥(1659 年)二十七岁。

遂安毛际可(1633～1708),《梅先生传》称:文鼎"年二十七,师事前代逸民竹冠道士倪(正)观湖(字方公,宣城人),受麻孟璇所藏《台官(通轨)》、《(大统历算)交食法》,即为订补注释,成《历学骈枝》四卷,竹冠叹服,以为智过于师云。"③

是年李长茂自序《算法说详》九卷,梅文鼎《勿庵历算书目》,曾记录是书④。

顺治十八年辛丑(1661 年)二十九岁。

文鼎称:是年"始从同里倪(正)竹冠先生受《(大统历算)交食(法)》、《(台

---

① 据梅文鼎"先王父研铭序"。

② 《宣城县志》称:"以燕年五十二,先文鼎卒"。

钱宝琮君因梅文鼎有:"(李钟伦)世得(1663～1706)亡儿(以燕)相继亡去"之语,假定以燕亦在丙戌年(1706 年)死去,则以燕当生于顺治十二年乙未,文鼎年二十三岁。语见钱宝琮,《梅勿庵先生年谱》,《国立浙江大学季刊》一卷一期,1932 年 1 月(* 见本书第九卷. ——编者)。

但商鸿逵君因梅文鼎,《绩学堂文钞》有"乙酉(1705 年)子以燕卒"之语,定以燕死于乙酉年(1705 年),则以燕当生于顺治十一年甲午,文鼎年二十二岁。语见商鸿逵《梅定九年谱》,(北京)《中法大学月刊》二卷一号,1932 年 11 月。

现从商君之说,定以燕生于顺治十一年(1654 年)。

又方苞《梅征君墓表》称:"文鼎妻陈氏。"

③ 《传》附梅文鼎《勿庵历算书目》后,《知不足斋丛书》第十七集本。

④ 前北京故宫博物院,藏《算法说详》九卷六册。前有顺治己亥(1659 年)自序,和康熙元年(1662 年)沈世奕序。

按梅文鼎《勿庵历算书目》记录是书,误作《算海说详》。又道光二十四年(1844 年)《济南府志》卷六十四经籍志亦误作:"章邱人李长茂撰《算海说详》。"

官)通轨》,归与文鼐、文鼏两弟习之,稍稍发明其所以立法之故,并为订其讹误,补其遗缺,得《《历学骈枝》》书二卷①,以质倪师,颇为之首肯,自此遂益有学历之志"②。

是年方中通作《数度衍》凡例③,以后编成二十五卷④。文鼎作《方程论》,曾就质于方中通⑤。

康熙元年壬寅(1662)三十岁。

是年成《历学骈枝》四卷,自序于陵阳之东楼⑥。

梅文鼎《历学骈枝》,康熙元年(1662)序称:壬寅(1662)之夏,获从竹冠,倪先生,受《台官通轨》、《大统历算交食法》⑦。

梅文鼎《中西经星同异考》称:"盖自束发受经于先君子,塾师罗王宾先生,往往于课余晚步时,指示以三垣列舍之状。余小子自是知星之可识,而天为动物;寻以从事制义,未遑精究,然心窃好之。不幸先君子见背,营求葬地,不暇以他为。无何余小子忽忽年近三十。"⑧是文鼎父士昌死于文鼎三十岁以前。

康熙二年癸卯(1663年)三十一岁

① 魏刻《历算全书》、毛际可《梅先生传》作四卷,《道古堂文集》卷三十、《勿庵历算书目》作二卷。《畴人传》第三十七卷因称:"《历学骈枝》二卷,后增为四卷"。

《梅氏丛书辑要》卷首"校阅助刻姓名"列:"三韩贵州巡抚,金公铁山,世扬校刊《历学骈枝》、《笔算》于保定"。

② 见《知不足斋丛书》本《勿庵历算书目》第1页。

③ 《数度衍》凡例作于顺治辛丑(1661年),藏簏中者近三十年,康熙丁卯(1687年)岁,其婿胡正宗为刻于粤之恩州。

④ 梅文鼎《中西算法通》称:"(方中通)位伯著《数度衍》二十五卷。"《道古堂文集》亦作二十五卷。两江总督采进本作二十四卷,附录一卷。通行本作二十四卷。

⑤ 见梅文鼎《绩学堂诗钞》。

⑥ 陵阳山在安徽宣城县城内。

⑦ 《历学骈枝》自序第1页,宣城梅定九先生著,《历算全书》,柏乡魏念庭辑刊,雍正元年(1723)。

⑧ 见《中西经星同异考》。

是年同时名算家王锡阐(1628～1682)始撰《晓庵新法》六卷①。

康熙三年甲辰(1664年)三十二岁。

梅文鼎甲辰(1664年)《方田通法序》称:"客岁之冬,从竹冠先生,饮令弟乐翁所。得观先生《捷田歌括》,离奇出没。……今年春,里中有事履亩,或见问桐陵② 法,遂出斯编相质,命曰《方田通法》云。"③

仲弟文鼐入城读书,送之以序。

是年冬纂修家谱④。

康熙五年丙午(1666年)三十四岁。

是年秋在南京。

按梅文鼎《书钞本〈星度〉后》称:"丙午秋余在金陵,收得俞氏书肆中刻本,内有星图,各系以入宿去极之度。"

康熙八年己酉(1669年)三十七岁。

是年作诗有"同(宣城)倪(正)观湖先生登柏枧山绝顶望仙人台"之语(据《诗钞》卷一)。文鼎称:"忆岁己酉桐城方(中通)位伯言筹算之善,然未见其书。无何家澹如兄至自都门,有所携算筹一握,而缺算例,余为补之。澹如大喜,因问余曰:能易之以直写,不更便乎?子彦侄亦以为然,遂如言作之,凡三易稿而后成。"⑤

康熙十年辛亥(1671年)三十九岁。

方以智来书征文鼎所著象数之书(据《诗钞》卷一)。

按方以智字密之,桐城人,是年冬死去。

---

① 见《晓庵新法自序》,并参看李俨《中国算学史》第248页(1937年初版。*见本书第一卷第263页。——编者)。

② 日本关孝和遗著《括要算法》(1709年)卷首《求周径率》谓:桐陵法周率六三,径率二〇,周数三一五整。疑与此处所题同属一人,而为明季隐者。并看本集第267页注1(*本卷第266页。——编者)。

③ 《方田通法序》,附《笔算》,《梅氏丛书辑要》第五卷,第4页。

④ 据宁国县南阳胡氏谱《小引》。

⑤ 见《勿庵历算书目》第38页。

康熙十一年壬子(1672年)四十岁。

妻陈氏死,更不复娶①。

《方程论》六卷,成于是年之冬②。

《方程论》有潘耒(1646～1708)序,在《遂初堂文集》(七)之内。

按《中西经星同异考序》称:"年近三十,始从倪(正)观湖先生受《台官通轨》、《(大统历)算交食法》,…如是者凡数年……,而(文鼐)仲弟不幸已前卒久矣。"③ 文鼐是死于文鼎四十岁前数年。

康熙十二年癸丑(1673年)四十一岁。

"康熙癸丑(1673年),宣城施副使闰章(1618～1683)④总裁郡邑之志,以分野一门相属,《郡邑志》中所刻,皆其稿也。"⑤

是年成"《宁国府志分野稿》一卷(已刻《志》中)。""康熙癸丑奉同侍讲施愚山先生纂修郡乘,诸友人咸以此项见属,因具录历代宿度分宫之同异,及各种分野之法,皆以诸史为征。"是年又成"《宣城县志分野稿》一卷(已刻《志》中),大体同府志"⑥。

施愚山《文集》卷七有《梅定九诗序》,未题年月⑦。

是年文鼎有悼方以智的诗作"浮山大师哀辞"。

康熙十三年甲寅(1674年)四十二岁。

---

① 《历算全书·方程论》第一卷发凡,第4～5页称:"岁壬子,拙荆见背。"

毛际可称:"(梅文鼎)中年丧妻,更不复娶。"见《勿庵历算书目》附"梅先生传"第2页。

方苞《梅征君墓表》称:"文鼎妻陈氏"。见《方望溪先生文集》卷十二。

② 《历算全书·方程论》第一卷文鼎自序,第1页称:"《论》成于壬子之冬。"

③ 见《中西经星异同考》。

④ 施闰章,号愚山,宣城人,《清代学者象传》有传。又有"施愚山先生年谱",在《施愚山全集》,国学扶轮社印本之内。

⑤ 见杭世骏《道古堂文集》第三十卷,第8页。

⑥ 见《勿庵历算书目》第5～6页。

⑦ 见《施愚山全集》内《施愚山文集》卷七。

《方程论》六卷，是年之夏乃写成帙①。

同时黄虞稷(1629～1691)、方中通、王若先、蔡璿曾钞副墨②。

康熙十四年乙卯(1675年)四十三岁。

文鼎尝从金陵顾昭借钞穆尼阁《天步真原》(1648年)③，及薛凤祚《天学会通》(1664年)迄未获交薛氏。乙卯(1675年)晤马德称(儒骥)诸君，始知其刻书南都，则薛氏归已久④。

是年文鼎始购得《(崇祯)历书》于吴门姚氏，偶缺是《(比例规)解》⑤。

"勿庵揆日器一卷，……乙卯年偶为斯制"⑥。

梅庚⑦《绩学斋诗钞序》称："(文鼎)应乡试，得泰西历算书盈尺，穷日夜不舍。"文鼎以前学习旧法，以后学习西洋新法。

梅文鼎自称："(乙)卯，(丙)辰间，与(方中通)同客秦淮八月。"⑧

陆陇其(1630～1692)在北京，访利类思⑨。

康熙十五年丙辰(1676年)四十四岁。

是年在南京。

康熙十六年丁巳(1677年)四十五岁。

是年尚在南京。

---

① 见《历算全书·方程论》第一卷自序。

② 见《方程论》发凡。

③ 焦循《雕菰集》卷十八《书西镜录后》条称："明年辛酉(1801年)在金陵市中买得写本《天步真原》一册，不完。末有朱书'鼎按'云云；然则勿庵之书，散失多矣。"按疑此即梅文鼎所手钞的穆尼阁《天步真原》(1648年)。

④ 参看《勿庵历算书目》第33～34页。

⑤ 《历算全书·算释例》第一卷原序，第3页，并参看《勿庵历算书目》，第38～39页；"与刘望之书"。

⑥ 参看《勿庵历算书目》，第30页。

⑦ "梅庚，字耦长，一字子长，宣城人，康熙辛酉(1681年)举人，有《天逸阁集》"见《碑传集》卷首下。

⑧ 见《绩学堂诗钞》卷二。

⑨ 见《陆稼书(陇其)先生年谱》(1725年)。

按丁卯(1687年)年方中通与梅定九书称:"目不睹足下者十年于兹。……初遇晤金陵者四。"①

康熙十七年戊午(1678年)四十六岁。

是年(施闰章)愚山侍讲,欲偕之入都,不果②。文鼎"初购《(崇祯)历书》,佚此卷(即《比例规解》),戊午(1678年)黄(虞稷)俞邰(1618~1683)太史为借到皖江刘潜柱先生本,乃钞得之,颇多讹误,殊不易读。盖携之行笈半年,而通其旨趣"③。

"戊午黄俞邰太史(虞稷)为借到皖江刘潜柱先生本(《比例规解》)乃钞得之。"盖逾时而后能通其条贯,以是正其讹阙④。

"古算书载程大位《算法统宗》(1592年)者,惟刘徽《九章》,尚有宋版。鼎尝于黄(虞稷)俞邰处见其《方田》一章,算书中此为最古。"⑤

是年九月梅文鼎自序所著《筹算》二卷⑥。

康熙十八年己未(1679年)四十七岁。

文鼎称:"己未(施闰章)愚山奉命纂修《明史》,寄书相讯,欲余为历志属稿。而余方应臬台金长真先生之召,授经官署,因作此(即《历志赘言》一卷)寄之。"⑦

"己未与山阴友人何奕美言测算之理,为作浑盖地盘。而苦乏铜工,爰作此(璇玑)尺以代天盘。"⑧

---

① 见《数度衍》卷首,与梅定九书,第1页。

② 《勿庵历算书目》第6页。

③ 《历算全书·度算释例》第一卷原序,第4页。

④ 《勿庵历算书目》第38~39页。

⑤ 见《勿庵历算书目》第44页。黄虞稷所藏宋元丰七年(1084年)本《九章》,后归毛晋(1599~1659)第五子毛扆(1640~?)。见康熙甲子(1684年)毛扆《算经跋》,附《缉古算经》后,《知不足斋丛书》第八集。戴敦元《九章算术细草图说序》以为定九未见《九章》,盖属失考。

并参看黄虞稷、周在俊《征刻唐宋秘本书目》第17页,长沙叶氏刻本。

⑥ 《历算全书·筹算》第一卷,自序,第1页。

⑦ 《勿庵历算书目》第6页;参看《诗钞》卷二。

⑧ 见《勿庵历算书目》第31页,"《璇玑尺解》一卷"条。

"己未始为山阴友人何奕美作尺，亦稍以己意增损推广之，而未暇为立假如。"①

康熙十九年庚申(1680年)四十八岁。

是年在南京，下榻于蔡璿(玑先)之观行堂，病痔四阅月，冬始由南京归里。是年蔡璿为梅文鼎所著《中西算学通》作序，题："康熙庚申，石城同学弟蔡璿玑先识。"②

同时方中通亦为《中西算学通》作序③。

同时名流题及《中西算学通》的，有王士祯(1634～1711)的《说部精华》卷六"《中西算学通》"条称："梅文鼎字定九，宣城诸生也，著《中西算学通》若干卷。梅精于历学，尝合七十余家，著《历学通考》，亦今之异人也。"④ 又刘纪庄(1648～1695)的《广阳杂记》卷二称："我友梅定九，中华算学，无有过之者，著有《中西算学通》一种，凡若干卷。易泰西横行之术，为直行筹，甚简明也。"

按《中西算学通》一书亦作《中西算法通》，乾隆元年(1736年)《江南通志》卷一九二，即作《中西算法通》。又沈吉斋，道光辛丑(1841年)传钞倪氏带经楼钞本《梅氏丛书》，引《中西算学通》次序：(一)筹算，(二)笔算，(三)度算，(四)比例算，(五)几何摘要，(六)三角法、(七)方程，(八)勾股测量，(九)九数⑤。

文鼎称："表景生于日轨之高下，而日轨又因于里差，独四省者陕西、河南、北直、江南也。……或当初只此四处耶。然其中亦有传讹之处，庚申岁，余

---

① 见《历算全书·度算释例》，第一卷原序，第3～4页。

② 原文见李俨藏旧钞本《中西算学通》。

③ 据《病余杂著序》："寄怀桐城方素伯(中履)，寄方位伯(中通)二诗"自注。
按"方中履字素伯，中通三弟，曾序《数度衍》"，见《数度衍》卷首，家序，第1～3页。

④ 据《啸园丛书》本，渔洋山人原著《说部精华》。

⑤ 现有本《勿庵历算书目》(1702年)梅文鼎自拟次序是：(一)筹算，(二)笔算，(三)度算，(四)比例算，(五)三角算，(六)方程，(七)几可摘要，(八)勾股测望，(九)九数。

养痾白下，西域友人马德称儒骥以此致询。遂为订定，并附用法，以补其缺。"①

文鼎又称："岁庚申晤桐城方素伯中履（中通三弟），见鼎所作（度算）尺，惊问曰：君何从得此。盖家兄（方中通）久欲为此而未能。履游豫章，拾得遗本，寄之，乃明厥制耳。"② 梅文鼎薛凤祚本"不相闻知"③。是年因"汪发若先生燦作宰缁川，托致一书，而薛（凤祚）方病革，遂未奉其回示"④。

是年文鼎有《寄怀青州薛仪甫（凤祚）先生诗》，见《绩学堂诗钞》。

康熙二十年辛酉（1681 年）四十九岁。

是年夏历四月初二日亥时，长孙瑴成生⑤。

杜知耕⑥ 是年著《数学钥》六卷（1681 年），又作《几何论约》七卷（1700 年）。梅文鼎称："杜（知耕）端甫《数学钥》图注《九章》，颇中肯綮。"⑦

梅文鼎著《方程论》，曾和杜知耕、孔兴泰⑧、袁士龙⑨共相质正，因重加缮录，以为定本。

康熙二十一年壬戌（1682 年）五十岁。

---

① 《勿庵历算书目》第 12～13 页，"《四省表景立成》一卷"条。

② 《勿庵历算书目》第 38～39 页。

③ 《勿庵历算书目》第 34 页。

④ 同上。

⑤ 语见《梅氏宗谱》。

⑥ "杜知耕字端甫，康熙丁卯（1687 年）举人，…好读书，尤精数学。著有《数学钥》六卷，李子金序而传之。"见何焻《柘城县志》第十卷，第 10～11 页，乾隆三十八年（1773 年）官修刻本。

⑦ 《勿庵历算书目》第 45 页。

⑧ "孔兴泰字林宗，睢州人，著《大测精义》，求半弧正弦法，与梅氏正弦简法补说，不谋而合。"见杭世骏《道古堂文集》第三十一卷第 31 页。并参看《勿庵历算书目》第 47～48 页。

⑨ "袁士龙字惠子，钱塘人，受星学于黄弘宪。西域天文有三十杂星之占，未译中土星名。士龙有考，与梅氏不谋而合。"见杭氏前书第 31 页。并参看《勿庵历算书目》第 12～22 页。

是年九月十八日王锡阐(1628～1682)死,年五十五①。文鼎引为憾事。《勿庵历算书目》称:"吴江王寅旭先生锡阐,深明历术,著撰极富。初太史潘稼堂先生(耒)为鼎称述之。……鼎尝评近代历学以吴江为最,识解在青州(薛凤祚)以上,惜乎不能蚤知其人,与之极论此事。稼堂屡相期订,欲尽致王书,属余为之图注,以发其义类,而皆成虚约,生平之一憾事也。"②

潘耒(1646～1708)字次耕,号稼堂,吴江人,《清代学者象传》有传,潘曾为梅文鼎《方程论》撰序③。潘耒又为张雍敬《宣域游学记》撰序。

《勿庵筹算》七卷,宣城梅定九先生著。康熙□□年蔡(璿)玑先刻于金陵。后江常镇道魏公荔彤重刻于《历算全书》内④。文鼎称:"友人蔡玑先见而悦之,为雕版于金陵"⑤。"金陵文学蔡君玑先璇于康熙二十□年,首刻《筹算》于金陵。"⑥

"蔡璿字玑先,江宁人,从文鼎学算,为刻《中西算学通》。"⑦

按施闰章子施彦恪征刻《历算全书》启亦称:"惟昔玑先蔡子,首锓《筹算》于白门。"⑧,观此则梅氏算籍见于刻本的,《筹算》为最先,时在康熙二十年以后。

---

① 王锡阐生崇祯元年六月十日,死康熙二十一年九月,见王济《王晓庵先生墓志》,据王勤堉《刘继庄年谱》引《松陵文录》卷十六。

② 见《勿庵历算书目》第34～35页。

③ 见原书和《遂初堂文集》(七)二十五上。并参看《道古堂文集》第三十一卷第13页,《切问斋文钞》第一五卷,第16页。

④ 见梅瑴成《增删算法统宗》卷首,古今算学书目第11页,江苏书局校刊,光绪戊戌(1898年),又见梅瑴成《兼济堂历算书刊缪》(1739年)。

⑤ 见《勿庵历算书目》第38页。

⑥ 见《梅氏丛书辑要》卷首,校阅助刻姓氏。

⑦ 见杭世骏《道古堂文集》第三十一卷,第14页。

按《中西算学通》共九种,次序见康熙十九年条:蔡璿所刻,只《中西算学通》的第一种。

⑧ 见《勿庵历算书目》,启,第3页。

是年长夏述《轻重比例三线法》①。

是年嘉兴徐发撰《天元历理全书》十二卷（内：原理六卷，考古四卷，定法二卷）刊成（书名题：《天文历理大全》）。按《天元历理全书》原理卷五：原数系论算学。

按徐发字圃臣，是徐善（1634～1690）之兄。《天元历理全书》，发自识云："乃相与杨榷为功者，则陈献可荩谟、王寅旭锡阐、胡次史公裔，家季敬可善，及门姚乾二东明诸君，皆于历理素娴者云。"

康熙二十二年癸亥（1683 年）五十一岁。

是年再参加纂修《府志》。因《梅节母行略》云："癸丑（1673 年）、癸亥（1683 年）两修郡志。"是年八月病（据《绩学堂诗钞》卷二）。

张潮（1650～？）是年（1683 年）自序所著《虞初新志》卷六"黄履庄小传"附《奇器目略》称："张山来（潮）曰：泰西人巧思百倍中华，岂天地灵秀之气，独钟厚彼方耶？予友梅子定九，吴子师邵，皆能通乎其术。"

康熙二十三年甲子（1684 年）五十二岁。

是年冬在南京。"送袁士旦（启旭）归芜湖序"称："余癖嗜历学，刻有《中西算学通》，诗文家迂而畏之，不以寓目，顾袁子独好焉。"②

文鼎称："康熙甲子（1684 年）制府于（成龙，1618～1684）③ 公檄修《（江南）通志》，鼎以事辞，未往。皖江太史陈默公先生焯，专函致书，以江南分野稿见商，介家叔瞿山（梅）清（1623～1697）督促至再。余方病虐小愈，力疾为之删润，颇费经营，无何，默翁亦辞志局矣。聊存兹稿。"④（即《江南通志》内《分野拟稿》一卷）。

《道古堂文集·梅文鼎传》于康熙癸丑（1673 年）句下称："明年制府于成

① 见《历算全书·度算释例》第二卷，第 50 页。

② 按"袁士旦名启旭，宣城人。著《中江纪年稿》"。李桓，《国朝耆献类征》（湘阴李氏版）卷四三〇有传。

③ "于北溟名成龙，永宁人。官两江总督，谥清端，有《政书》。"见陆耀《切问斋文钞》第十一卷，第 5 页。陆心源按《经义斋集》有《墓志》。

④ 见《勿庵历算书目》第 7 页。

龙缴修《通志》，亦以《分野》相属，力疾成稿，而志局易人，（稿）存于家。"[1] 实系误记。

是年自序《弧三角举要》于柏枧山中[2]。

康熙二十五年丙寅(1686 年)五十四岁。

潘耒序《方程论》称："吾邑有隐君子曰：王寅旭（锡阐）先生，深明历理，兼通中西之学，余少尝问历焉[3]。……今寅旭(1628～1682)亡久矣。余遍行天下，求仿佛其人者，而不可得。岁丙寅过宣城，始得梅子。"[4]

是年四月到太平县（宁国府属）游黄山。（据《绩学堂诗钞》卷三）。

康熙二十六年丁卯(1687 年)五十五岁。

是年李鼎征刻梅文鼎《方程论》于泉州。

文鼎于《方程论》校刻缘起称："岁丁卯(1687 年)薄游钱塘，同里阮于岳鸿胪付赀授梓，属以理装北上，未遂杀青。"[5]。

又《勿庵历算书目》称："初稼堂（即潘耒）赏余此书（即《方程论》），阮副宪于岳为付刻赀，而余未及焉。嘉鱼明府李安卿鼎征[6]乃刻于泉州。"[7] 又《绩学堂诗钞》卷四称："李鼎征刻《方程（论）》于安溪，文鼎有诗四章寄谢。"

是年仲冬去杭州，作贾鼎玉诗序（见《文钞》卷三）。是年方中通有与梅定九书[8]。

《勿庵历算书目》"西国月日考"条注云："尝于武林遇殷铎德（即殷铎泽

---

① 见《道古堂文集》第三十卷，第 8 页。

按"康熙二十年(1681 年)于成龙自直隶巡抚，迁为江南，江西总督"。见《东华录》"康熙二八"，第 8 页。缴修《通志》，当不在癸丑(1673 年)的明年，而在癸亥(1683 年)的明年。

② 见《历算全书·弧三角举要》旧序，第 1～2 页。

③ "潘耒，字次耕，吴江人，王锡阐与其兄柽善。馆于其家，讲论常穷日夜，劝其学历。"见《道古堂文集》第三十一卷，第 13 页。

④ 见《梅氏丛书辑要》第十一卷，《方程论叙》，第 1 页。

⑤ 见《历算全书·方程论》第一卷发凡，第 4 页。

⑥ "李鼎征，字安卿，文贞公（李光地）次弟，举人，嘉鱼令。为梅氏刻《方程论》于泉州。《几何补编》成，手为誊写。"见《道古堂文集》第三十一卷，第 13 页。

⑦ 见《勿庵历算书目》第 423 页。

⑧ 见方中通《数度衍》卷首"与友书"第 1～4 页。

Prospev Intorcetta)[①]。言彼国月日,以与斋日互异。"又于《西国月日考》说到"康熙戊辰(1688 年)赠礼单"。则遇殷铎德当在康熙乙卯(1687 年)或戊辰年(1688 年)。

康熙二十七年戊辰(1688 年)五十六岁。

毛际可称:"曩者岁在戊辰,余与梅定九先生晤于西湖。遂倾盖定交,日载酒赋诗,余为题其《饮酒读书图》而别。"[②]

梅文鼎《中西经星同异考》称:"岁在戊辰,余归自武林,武林友人张慎,硕忱能制西器,……余乃依岁差考定平仪所用大星,属硕忱施之浑盖,而属吾弟为作恒星黄赤二新图。"[③]

康熙二十八年己巳(1689 年)五十七岁。

是年以访南怀仁(Ferdinand Verbiest,1623～1688)到北京,时南已死,因获交李光地(1642～1718)[④]。

按梅瑴成序李光地《历象本要》(1742 年)称:"先征君(文鼎)于康熙己巳(1689 年)至都门,主家侍郎桐崖先生。(李光地)公闻而先之,且设馆焉。"[⑤]李光地《榕村语录续集》[⑥] 卷十六称:"梅定老客予(李光地)家,见其无一刻暇,虽无事时掩户一室中如伏气,无非思历算之事。算学中国竟绝,自定老作九种书,筹算,笔算,度算,三角形,比例法,方程论,勾股测量,算法存古,几何摘要。而古法

① 据郭慕天《梅文鼎与耶稣会士之关系》考知:"殷铎德于康熙十三年迄三十五年(1674～1696)在杭州。梅文鼎遇殷铎德当在戊辰年(1688 年)。"《上智编译馆馆刊》三卷六期,第 234 页 1948 年 6 月,北京。

② 见《勿庵历算书目》传第 1 页。又毛际可,《安序堂文钞》(1684～1689)卷二十六有《题梅定九饮酒读书图》一文。

③ 见《中西经星同异考》并参看刘献廷《广阳杂记》上。

④ 见《勿庵历算书目》第 14 页,并参看《历学疑问》。

"李晋卿名光地(1642～1718),号厚庵,安溪人。康熙庚戌(1670 年)进士,官大学士,谥文贞,有《榕邨集》。"见陆耀《切问斋文钞》第一卷,第 13 页。李光地又著《历象本要》二卷。

⑤ 参看《历象本要》,《榕村全书》,道光年刊本,梅瑴成乾隆七年(1742 年)序。

⑥ 见傅沅叔原藏缪艺风钞本:李光地,《榕村语录续集》,1894 年黄家鼎校录。

竟可复还三代之旧，此间代奇人也。历书有六十余本，不能刻，七十二家之历，无不穷其源流而论之，可谓集大成者矣。”

“李文贞（光地）公……与顾亭林、梅勿庵二先生游，通律算、音韵之学。”① 梅文鼎在北京续遇无锡顾景范（祖禹，1624～1680）、嘉禾朱竹垞（彝尊，1629～1709）、嘉禾徐敬可（善，1634～1690）、淮河阎百诗（若璩，1636～1704）、宁波万季野（斯同，1638～1702）、北直刘纪庄（献廷，1648～1695）②。

是年文鼎："始从嘉禾，徐敬可，善，钞得其（王锡阐）《圜解》一册，为之订其缺误"。又续读其《测食》诸稿，《历法书》二卷，并其所定《大统法》，及《三辰仪晷》。加以讨论，成《王寅旭书补注》③。

在北京成《明史历志拟稿》三卷④，手自步算，凡篝灯不寝者二月。黄宗羲（1610～1695）次子百家于此时从问历法⑤。

方苞作《文鼎墓表》称："刘辉祖尝与同舍馆告苞曰：吾每寐，觉漏鼓四五下，梅君犹篝灯夜诵，昧爽则已兴矣。"⑥

是年与广昌揭暄通讯，摘录其所寄《写天新悟》草稿，成《写天新语钞存》一卷⑦。

揭暄《璇玑遗述》卷五"历理当知"条内称："余于写天言及占验，辄大施距辟，以张禁令。不意得定九《勿庵集》，更加详明，未免敲残。"按梅文鼎有《写天新语钞存》一卷。上所云云当指此书。北京中国科学院图书馆（前人文科学图

① 见《榕村全书》，道光年刊本，有陈寿祺道光九年（1829）总序。

② 参看《历算全书》内《方程论》，第一卷，发凡，第4页。

③ 参看《勿庵历算书目》，第34～35页，及《续学堂文钞》（二）三十六下，（五）十上。

④ 按《大统历志》，四库本作八卷，附录一卷。刊入《明史》作四卷。而《勿庵历算书目》作《明史历志拟稿》三卷。

⑤ 参看《勿庵历算书目》，第7～8页。时黄百家已著有《勾股矩测解原》二卷。

⑥ 《望溪堂文集》第三十一卷，第8页引。

⑦ 参看《勿庵历算书目》第36页。揭暄《写天新语》即《璇玑遗述》六卷，附图一卷《刻鹄斋丛书》本（1898年）三册（前南京国学图书馆藏）。书前有1765年万年茂序，1725年邱维屏序称年已五十。揭暄字子宣，号韦纶，别号半斋，广昌人。

书馆)藏有钞本:"《明史历志》二卷。余姚来史黄百家纂"。有学林堂,燕喜堂,蟫盦诸印记。首云:"自古圣人致治,历数为先。然大易之义,取象乎革。历代推验,未有久而不变者。……"和今本《明史》不同。按《勿庵历算书目》"《明志历志拟稿》"条,引梨洲季子主一,百家稿云云,当即此书。

是年梅文鼎馆李光地家。

按李光地曾问算于梅文鼎。

《榕村语录续集》卷十六:"某李光地自称天资极钝,向曾学筹算于潘次耕,渠性急,某不懂。今得梅先生和缓善诱方得明白。"

康熙二十九年庚午(1690 年)五十八岁。

是年潘耒序文鼎所著《方程论》①。

梅文鼎称:"庚午(1690 年)晤(陆陇其 1630~1692)先生于京邸。出所藏灵寿县朱仲福《折中历法》示余(梅文鼎)。余受而读之,则摘录郑端清世子载堉书也。……当正其名曰《历学新说钞》。"(据"书陆稼书先生谏言后")

陆陇其《三鱼堂日记》亦称:"庚午(1690 年)七月二十四日万季野(斯同,1638~1702)同宣城梅定九名文鼎来,梅长于历法"云。

梅文鼎自言:"庚午腊月既望,晤远西安先生,谈及算数,云量田可以不用履亩。"②

梅文鼎所称安先生,当系安多(Le P. Antoine Thomas,1644~1709),时安在北京,和徐日升、张诚、白晋等轮流到内廷,以清语授清帝以量法等西学③。

康熙三十年辛未(1691 年)五十九岁。

陆陇其《三鱼堂日记》续称:"辛未(1691 年)正月初六日,从梅定九借郑世子《历学新说》。"又称:"辛未三月十三日会万季野(斯同)言《明史·历志》,吴志伊纂修者,今付梅定九重修。"又称:"辛未九月十五日至天津舍。梅定九言李厚庵家教子弟,先读九经,然后学举业文字。又言本朝言历者有吴江王寅

① 见《梅氏丛书辑要》第十一卷,第 1 页,和《遂初堂文集》(七)二十五上。

② 见《历算丛书·勾股阐征》,第四卷,第 21 页。

③ 见《正教奉褒》,康熙二十八年(1689 年)条。

旭，其历法高于陈献可(1630～1692)。"是年夏，"移榻于中街李光地寓邸，始克为之……如是数月，得稿三十余篇，授徒直沽又陆续成其半。"①

是年与沧州老儒刘介锡同客天津②。

"梅文鼎(1633～1721)他只读了徐光启译的六卷本《几何原本》，便写了一部《几何补编》四卷(1692年)。根据黄金分割(理分中末线)补了许多有关四等面体、八等面体、二十等面体、十二等面体的定理，大部分和《几何原本》第十三卷到第十五卷各定理相同。他说：'言西学者以《几何》为第一义，而传只六卷，其有所秘耶。……《几何》六卷言理分中末线，为用甚广，其义引而未发，故虽有此线，莫适所用，疑之者十余年，辛未岁(1691年)养病山阿，游心算学，……反复推求，了无疑滞，始信几何诸法，可以理解，而彼之秘为神授，及吾之屏为异学者，皆非得其平也。'他用六种方法来求理分中末线，其中有一法，和1850年英国剑桥大学的试题相似。"③

《绩学堂文钞》卷九《书徐敬可〈圜解〉序后》云："忆庚午人日(1690年2月15日)钞得王寅旭先生《圜解》中有错简，而无公序……时余入都未久，欲稍需之，属有他务，遂不果。逮明年得黄俞邰太史书，则敬可亦溘然逝矣。"

是年四月，陆陇其往见李光地，李言顾宁人之韵书，梅定九之历书，皆从前所未有④。

是年徐善(？～1691)死。

康熙三十一年壬申(1692年)六十岁。

文鼎称："刘文学介锡，沧州老儒也。颇留心象数。辛未、壬申与余同客天津。承有所问，并据历法正理告之。"成《答刘文学问天象》一卷⑤。

---

① 见《勿庵历算书目》，第14～15页。

② 见《勿庵历算书目》，第13页。

③ 见严敦杰《〈几何原本〉到中国来的历史》。

④ 见陆稼书先生年谱(1725年)，李光地《榕村语录续集》卷十六，和陆陇其《三鱼堂日记》辛未(1691年4月29日条。

⑤ 见《勿庵历算书目》，第13页。

壬申春月,文鼎偶见馆童屈篾为灯,诧其为有法之形。因以《测量全义》①,《几何原本》② 量体诸率,考其根源,成《几何补编》四卷③。文鼎称:“岁壬申,余在都门,有三韩林□□寄讯杨时可及丁令调,属问四乘方、十乘方法,因稍为推演,至十二乘方,亦有条而不紊。”成《少广拾遗》一卷④。

文鼎称:“尝见(吴敬)《九章比类》(1450 年)⑤,(周述学)《历宗算会》(1558 年)⑥,(程大位)《算法统宗》(1592 年),俱载有开方作法本原之图(即巴斯噶三角形),而仅及五乘。……《同文算指》(1613 年)⑦ 稍变其图,具七乘方算法。……《西镜录》演其图为十乘方。……康熙壬申(1692 年)余在都门,有友人传远问,属询四乘方、十乘方法。”⑧ 文鼎又称:“《西镜录》不知谁作,然其书当在《天学初函》之后知者,……写本殊多鲁鱼,因稍为之订。”⑨

《(钱)竹汀先生日记钞》称:“李尚之(锐,1773~1817)得欧逻巴《西镜录》钞本,中有‘鼎按’数条,盖勿庵手迹也。”⑩

现在北京大学图书馆发现的欧逻巴《西镜录》是焦循钞本,系李盛铎旧藏本。此书曾经梅文鼎校过。书前有焦循(1763~1820)序。原文已见《雕菰集》,

---

① 《测量全义》十卷,明徐光启,和罗雅谷,汤若望共编。明崇祯四年(1631 年)八月第二次进呈,为《崇祯历书》之一。

② 《几何原本》六卷,明徐光启和利玛窦共译,万历三十五年(1607 年)春译成,都在北京出版。

③ 参看《勿庵历算书目》第 46 页,和《历算全书·几何补编》,自序第 1 页。

④ 见《勿庵历算书目》第 45 页。

⑤ 文鼎称:“钱塘吴信民(敬)《九章比类》,西域伍尔章遵韬有其书,余从借读焉。”见《勿庵历算书目》第 44 页。

⑥ 文鼎称:“山阴周述学著《历宗算会》,于开方、弧矢颇详。”见《勿庵历算书目》第 44 页。

⑦ 《同文算指前编》二卷,《通编》八卷,《别编》一卷,题利玛窦授,李之藻演。刻于《天学初函》。《前编》有万历癸丑(1613 年)李之藻序。及万历甲寅(1614 年)徐光启序。

⑧ 见《历算全书·少广补遗》,第一卷,小引第 1 页。

⑨ 见《勿庵历算书目》第 46~47 页。

⑩ 见《竹汀先生日记钞》卷一,滂喜斋刻本(北善藏)。

书后题嘉庆五年庚申(1800年)冬十一月江都焦循录于武林节署。《西镜录》全书共四十四页(不包括蒋友仁《地球图说》,用紫阳书院课题纸钞写半页十行,行二十五字)。

钱大昕题记全文在卷后,如下:"尚之文学于吴市得此册,中有'鼎按'数条,盖梅勿庵先生手迹也。《西镜录》不见于《天学初函》,亦无撰人名氏。唯梅氏书中屡见之。梅所著书目中有《西镜录订注》一卷,今已失传。此殆其初稿与。嘉庆庚申(1800年)十月七日丙辰钱大昕记"。

文鼎所按数条。第一、二、三、四、五条在"金法"之后称:

(一)"鼎按:此在衰分自有本法。甲一衰,乙二衰,丙六衰,并得九衰为法,以除二千七百,得三百为甲数,二乘之得乙,六百六乘之得丙一千八百。"

(二)"鼎按:五乘一百三十二是六百六十非六十六也。虽法实各降一位,未尝不合,然非所以明算理开来学也。"

(五)"鼎按:原法不谬,但文理不畅,以致惑目,西书出于翻译,多有此等耳。"

第六条在"双法"之后称:

(六)"鼎按:算家定位之法不明,每见因乘骤于。辄骇其数之多,而以意名之,以百名亿,以单六名六万,后之学者,又何以得其根元乎。"①

是年秋在北京,晤袁士龙②。

康熙三十二年癸酉(1693年)六十一岁。

是年二月文鼎自序所撰《笔算》五卷③。

是年四月李光地序所著《历学疑问》④。

---

① 1950年12月严敦杰在北京大学图书馆发现李盛铎旧藏欧逻巴《西镜录》。严君将另文考证。现在这里仅录"梅按"的数条。

② 见《梅氏丛书辑要》第六十卷杂著《西国三十杂星》考,或《历算全书·揆日候星纪要》,第一卷,第40页。

③ 见《历算全书·笔算》自序第1~2页。

④ 见《历算全书·历学疑问》序,第1~3页。

子以燕中癸酉科举人[①]。

是年南回，计去京师凡五载[②]。即康熙二十八年(1689 年)到北京，今年返。

是年南回，万季野作序送他[③]。

康熙三十三年甲戌(1694 年)六十二岁。

是年仲秋，序其季弟文鼏所著《中西经星同异考》，后来此书收入《四库》[④]。文鼏又撰《南极诸星考》一卷，刻入《檀几丛书》[⑤]。又刊刻利玛窦(?)所译《经天该》及附图[⑥]。

康熙三十四年乙亥(1695 年)六十三岁。

是年文鼎由郡廪生应岁贡[⑦]。

…… …… …… …… ……

康熙三十六年丁丑(1697 年)六十五岁。

是年张潮《友声新集》卷一第三十九页，宣城沈善贞乐山与张山来(潮)书称："丁丑(1697 年)春善游真州，假榻洪去芜斋头，阅所辑《昭代丛书》，…而敝地吴衔南(肃公 1626～?)、梅勿庵(文鼎)两铭伯，俱籍光不朽，获而公诸海内。"康熙丁丑(1697 年)刻本《昭代丛书》卷四列梅文鼎《学历说》。张潮有小引称："定九聪明独绝，举凡勾股乘除之学，咸能辩析秋毫。盖既擅天生之资，而复深之以人力之学，宜其说如数家珍也。"

① 见《梅氏宗谱》及梅瑴成《增删算法统宗·凡例》第 1 页，江苏书局校刊，光绪戊戌(1898 年)；和《江南通志》卷 132，选举志(1936 年)。

② 见《勿庵历算书目》第 15 页。

③ 见稿本万季野《石园藏稿》(严敦杰征得)，又《四明丛书》内八卷本《石园文集》卷七内有"送梅定九南还序"。

④ 《中西经星同异考》一卷一册，见壬子文渊阁《所存书目》第三卷，第 20 页。《指海》本同。

⑤ 《檀几丛书》，武林王丹麓(晫，1636～?)编刻。《顾氏家藏尺牍》姓名考称"王晫初名棐，字丹麓，又字木菴，一字松溪，浙江仁和人，有……《檀几丛书》。"

⑥ 刘铎《古今算学书录》天文第七第 3 页载："《经天该》附图，明利玛窦译，康熙年梅文鼐刊本"。按文鼐是文鼏之误。

⑦ 见《梅氏宗谱》。

康熙三十八年己卯(1699 年)六十七岁。

是年文鼎在闽,遇林同人(侗,1627～1714)[1],借钞其写本《古历列星距度》,因成《古历列星距度考》一卷[2]。是年自闽中北归,游西湖[3]。

是年冬十月,文鼎自闽北归,途次嘉兴,会朱彝尊(1629～1709)于寓。《曝书亭集诗注》卷十八:"(己卯)十月二十一日丧子,老友梅君文鼎,归自闽中,扁舟过慰,携别后所著书见示,部帙甚富,余亦以《经义考》相质,并出亡儿《摭韵遗稿》观之,成诗百韵,次日送之还宣城,兼寄孝廉(梅庚)。"诗云:"……延至西窗坐,试话睽离情,与叟别八霜,踪迹如浮萍,或淹津门居,或栖皖口城,北书雁翮巻,南书鱼尾赪,兹从闽江至,获逐合并青。……"据此知文鼎是在康熙壬申(1692 年)获交朱彝尊,且过从甚密,文鼎行踪随时告知竹垞。施愚山《诗集》卷三十有"送梅定九重赴皖口"诗,据朱诗当在是年之前。(严敦杰补注)

瑴成亦称其祖"南至闽,北抵上谷,金台,中历齐,楚,吴,越"[4]。

是年同里施彦恪撰《征刻历算全书启》时,文鼎已著历法书五十八种,算法书二十二种,共成八十种[5]。《勿庵历算书目》(1762 年)外历学书六十二种。内已刻者十七种,算学书共二十六种,内已刻者十六种。

是年施彦恪《征刻历算全书启》又称:"《(历学)疑问》三卷,见燕山节度之新刊。《方程(论)》一编,得泉郡孝廉而广布。"[6]

按丁卯(1687 年)李鼎征刻《方程论》于泉州已见康熙二十六年丁卯条。至己卯(1699 年)冬十月李光地刻《历学疑问》于大名,则见《文贞公年谱》。

是年陈克谐为文鼎造象(见《诗钞》卷四)。

冬毛际可撰梅先生传(在《勿庵历算书目》前)。

康熙三十九年庚辰(1700 年)六十八岁。

---

① 据《福建通志》,及《年谱》。

② 参看《勿庵历算书目》,第 36～37 页。

③ 见《勿庵历算书目》,第 1 页。

④ 见《勿庵历算书目》传,第 1 页。

⑤ 见《勿庵历算书目》,启,第 3 页。彦恪,施闰章子。

⑥ 见《勿庵历算书目》,启,第 3 页。

是年庚辰二月养痾坐吉山中……详为核定《星度》书①。

是年仲秋，偶沾寒疾，诸务屏绝，成《环中黍尺》五卷，重九前七日自序其书②。

文鼎称“十余年前曾作《弧三角》，所成《勾股书》一册，稿存儿辈行笈中，觅之不可得也。庚辰年，乃复作此。（即《正弧勾股》）”③

梅文鼎自闽南回后时和张潮（山来，1650～?）通讯，列在张潮《友声新集》、《友声后集》之内 。计：

（一）“刻古人书者多矣，同时之人，而不惮表章且久而靡倦者，几人哉？虽欲不以古人位置足下不可得矣。弟去岁在闽一载，时从北来友人，问讯兴居，或言顷有小累损赀。然吾窃知决不能以累好善苦渴之心也。决不能以少阻与人为善之勇也。轮扁曰臣也以臣之事知之，弟之信足下亦如此矣，兹以舍弟往宿敬候兴居，不恭不备，惟谅宥是荷。”见《友声新集》卷一，第1至2页。

（二）“世之学者，贵远贱近，以为难得之货也。则震于其名而宝之，耳目所及，以为常也。狎而弃之，恒情固然，不足为怪。向在武林，王丹麓（倬 1636～?）兄钞录近人有关系文字甚多，服其远见，乃先生竟能寿之梨枣，岂不尤为难得哉。舍亲吴衔南（肃公，1626～?）《读书论世》一书，持论平允，视他著撰尤善，今得藉大力可以公诸海内，真大快事。弟半生精力为历算之学论列颇多，然其中亦有小本可以分刻专行者，当录副奉寄请正，倘获蒙采收，附存大刻之末，亦可以备一种也何如？兹因舍弟尔素住宿迁馆，肃此寄候近履，兼布其私，临启曷胜驰溯。”见《友声后集》辛集，第35页。

（三）“向在武陵，见王（倬）丹麓所辑《昭代丛书》，多经济实用之言，曾钞其目录，今所藏小本，强半为先生搜集梓行，岂非快事。具此大愿力，又何患奇文之湮没耶？《读书论世》在舍亲情岩著撰中，为扯平允之论，必传无疑，然非大力，安能速公海内乎？《学历》一篇，厕大刻中，甚感大匠雕琢丹黄，使沟中之

① 见书钞本“《星度》”后。

② 见《梅氏丛书辑要》第三十四卷，《环中黍尺》小引，第1页。

③ 见《历算全书·弧三角举要》，第二卷，第5页。

断,比于文木矣。尚有历学中小品,及舍亲聋志等作,容当录正,临颖主臣。"见《友声后集》壬集,第27～28页。

康熙四十年辛巳(1701年)六十九岁。

文鼎《再寄李安卿孝廉书》称:"辛巳首春,戒装入闽,频行疾作,又不果行。"梅瑴成称:"《筹算》七卷,……《笔算》五卷,《平三角法》五卷,《弧三角法》五卷,《堑堵测量》二卷,《环中黍尺》五卷,《方程论》六卷,以上六种俱宣城梅先生著。安溪李文贞(光地)公并《历学疑问》(三卷),《历学骈枝》(四卷),《交食蒙求》(三卷),俱刻于上谷。"①

瑴成又称:"安溪相国李文贞公厚庵督学畿辅,校刊《历学疑问》,进呈御览,有《恭纪》刻于本卷。又巡抚直隶,校刊《三角法举要》、《环中黍尺》、《堑堵测量》等书九种于上谷。"②

文鼎于《弧三角举要》有康熙辛巳七夕前二日识语一则,是上谷九种刻本,至早在辛巳年③。

康熙四十一年壬午(1702年)七十岁。

是年十月李光地以抚臣扈跸德州,进所刻《历学疑问》三卷,文鼎以是知名④。

《皇朝通考》记录:(一)《历算全书》六十卷,(二)《大统书志》十七卷,(三)《勿庵历算书记》一卷。又称:"梅文鼎撰,文鼎字定九,宣城人,康熙四十一年大学士李光地尝以其所著《历学(疑问)》进呈。圣祖仁皇帝南巡,于德州召见,御书'积学参徽'四字赐之,后奉诏修乐律历算等书"。

是年自序所著《勿庵历算书目》于坐吉山中,孙瑴成校正。计有历学书六

---

① 见梅瑴成《增删算法统宗》卷首"书目"第11页。惟方苞,"梅瑴君墓表"不列《筹算》及《方程论》。

② 见《梅氏丛书辑要》卷首,《校阅助刻姓氏》。

③ 见《历算全书·弧三角举要》第二卷,第5页,现北大所藏《梅氏历算全书》,北京图书馆所藏《梅勿庵算书》五种,都是残本。

④ 见《勿庵历算书目》第15页,及《历算全书·历学疑问恭纪》,第1页,并参看章梫《康熙政要》第十八,引"碑传集"。

十二种，算学书二十六种，共八十八种[①]。校施彦恪《征刻历算全书启》。

康熙四十二年癸未(1703年)七十一岁。

文鼎称："岁癸未，匡山隐者(南康)毛心易(乾乾，1653～1709)，惠访山居，偶论周径之理，因复推论及方圆相容相变诸率，益觉精明。"[②]

文鼎又称："癸未岁匡山隐者毛心易(乾乾)，偕其婿中州谢野臣(廷逸)，惠访山居，共论周径之理，自反复推论方圆相容相变诸率。"[③]

"毛乾乾字用九，初名惕，江西南康人，明诸生，……康熙四十八年(1709年)卒，著有《测天偶述》、《推算偶述》等书凡二卷，六易稿乃成。"[④]

"毛乾乾，字心易，江西南康人。……文鼎以师事之，著律历学若干卷，以杂著二卷，子磐，于算数甚有精思，世传其学。"[⑤]

"癸未二月(李光地)公蒙赐《几何原本》、《算法原本》二书，……未能尽通，乃延梅定九至署，于公暇讨论其说。"[⑥]

文鼎称："康熙癸未，季弟尔素有《比例规用法假如》之作。""方尔素撰此书时，安溪相国以冢宰开府上谷，公子世得(钟伦，1663～1706)[⑦]，锐意历算之学，余兄弟及儿以燕下榻芝轩。"[⑧]

梅瑴成序李光地《历象本要》(1742年)称："(李光地)旋开府上谷，复迎先征君至署，为刊所撰历算诸书，余小子实侍杖履，事校雠之役，时癸未岁

---

① 见《勿庵历算书目》自序，第1页。《江南通志》卷192，艺文志(1726年)亦列梅氏著历算书八十八种。

② 见《勿庵历算书目》，第51页，疑壬午以后所记。

③ 见《梅氏丛书辑要》第二十四卷、《方圆幂积说》第1页。

④ 见《清史列传》卷七十，第13页。

⑤ 见江藩《炳烛室杂文》内"毛乾乾传"。毛乾乾字心易，江西南康人。又萧一山《清代学者著述录》(1943年)第51页称毛乾乾曾著《测天偶述》、《推算偶述》。

⑥ 见《文贞公(李光地)年谱》。孙清植撰，梅瑴成、王岗生、徐用锡、魏廷珍参订。

⑦ "李钟伦字世德，文贞公(长)子，康熙癸酉(1693年)举人，……甲数乙数用法甚奇，本以赤道求黄道。钟伦准其法以黄求赤，作为图论，又制器以象之。"见《道古堂文集》第三十一卷，第13页。

⑧ 见《历算全书·度算释例》，第一卷原序，第3～4页。

(1703 年)也。""(李光地)公当世大儒,门下皆一时知名士,如景州魏公廷珍(字君璧),交河王公兰生(字振声),河间王公之锐(字仲颖,一作仲退),晋江陈公万策(字对初,一作谦季),宿迁徐公用锡(字公坛)咸在署,公子钟伦(字世得)以定省至。(李光地)公悉令受业于(文鼎)先征君。"①

是年(锡三)秦二南来书问学。文鼎答书,并寄与《方程论》②。

李光地《榕村语录续集》③ 卷十三"理气"条,又提到当时清帝对梅文鼎《历学疑问》是十分钦佩的。

康熙四十三年甲申(1704 年)七十二岁。

是年十月,自序《平立定三差详说》称:

"授时历于日躔盈缩,月离迟疾,并云以算术垛积招差之算,而今所传《九章》诸书无此术也。……余因李世得之疑,而试为思之。其中原委,亦自历然。爰命孙瑴成衍为垛积之图,得书(《平立定三差详说》)一卷。"④

梅文鼎《历问疑问》书内有李光地甲申(1704 年)五月序。

康熙四十四年乙酉(1705 年)七十三岁。

是年夏闰四月清圣祖南巡,三次召见文鼎于临清德州水舟中。文鼎进《三角法举要》五卷⑤。是年秋子以燕死⑥。

是年撰《交会管见》,自题:"康熙四十四年……时年七十有三。"(严敦杰补注)

康熙四十五年丙戌(1706 年)七十四岁。

文鼎称:"方尔素撰此(《比例规用法假如》)书时,安溪相国以冢宰开府上谷,……,无何尔素挈儿燕南归,相国入参密勿。而世得亡儿相继亡去,余亦大

① 参看《历象本要》、《榕村全书》本,道光年刊。
按《历象本要序》所称:"王兰生,徐用锡",钱仪吉《碑传集》有传。

② 据"与二南书"和"复锡山秦二南书"。

③ 见傅沅叔原藏缪艺风钞本李光地《榕村语录续集》。

④ 见《勿庵历算书目》,第 25~26 页。

⑤ 参看《梅氏宗谱》,《诗钞》卷四和《勿庵历算书目》第 41 页。

⑥ 见顺治十一年甲午条注。

病濒死"[1]。

是年六月自保定归。(据《诗钞》卷四)

梅文鼎,康熙丙戌年岁贡[2]。

是年李钟伦死,年四十四岁[3]。

康熙四十六年丁亥(1707 年)七十五岁。

文鼎称:"尔素有《比例规用法假如》之作,又五年丁亥(1717 年)重加校录,示余属为序。"[4]

是年二月既望梅庚题:"书梅征君传后。"[5]

康熙四十八年己丑(1709 年)七十七岁。

是年四月二十三日清圣祖召见陈厚耀(1648~1722),问及梅文鼎。陈厚耀以曾师事梅文鼎对。圣祖以为梅文鼎算法,也只晓得一半云云[6]。

康熙四十九年庚寅(1710 年)七十八岁。

文鼎称:"庚寅在吴门,又得锡山(无锡)友人杨昆生(定三)《方圆订注图说》,益觉精明。"[7]

文鼎又称:"庚寅之冬,偶有吴门之游。(无锡)(杨)学三(即学山,名作枚)[8] 同吾友(锡三)秦子二南,挐舟过访于陈泗源(厚耀)学署,出示此(《杨学山历算书》)书。余亦以《几何补编》相质。"[9]

杨学山以《溯源星海》四册、《王寅旭历书图注》二册、《三角法会编》二册

---

① 见《历算全书・度算释例》,第一卷,原序第 4 页。

② 见重修《安徽通志》卷一五三。

③ 据陆心源《三续疑年录》第九卷第 4 页引《榕村集》。

④ 见《历算全书・度算释例》,第一卷,原序第 3 页。

⑤ 见《碑传集》卷首下及卷一三二,引。

⑥ 见焦循《里堂道德录》卷八(北京图书馆藏稿本)内引"召对纪言"。

⑦ 见《梅氏丛书辑要》第二十四卷,《方圆幂积说》第 1 页。

⑧ 梅作枚字学山,定三之孙,著有《解割圜之根》一卷,刻入《历算全书》,并为魏荔彤订补梅勿庵《历算全书》。

⑨ 见《历算全书・锡山友人杨学山历算书序》,第 1 页。

借文鼎①。

是年撰《仪铭补注》。文鼎称："庚寅莫春，真州友人以二铭见寄，属疏其义，余受而读之，……爰据其本，以为之释。"②

康熙五十一年壬辰(1712年)八十岁。

"壬辰(清圣祖)诏开蒙养斋，修乐律历算书。下江南制府，征其孙瑴成入侍。《律吕正义》成，驿致命校勘。"③

"孙瑴成供奉内廷，钦赐监生。"④

是年腊月序锡山友人杨学山(作枚)《历算书》于坐吉山中⑤。

康熙五十二年癸巳(1713年)八十一岁。

孙瑴成赐举人，汇编《律历渊源》⑥。

瑴成亦称："余于康熙五十二年间充蒙养斋汇编官。"⑦

是年杨文言，字道声(武进人，？～1713年)死。

陈梦雷《松鹤山房文集》，是年题有"祭杨道声文"，是道声当死于是年。

梅文鼎《绩学堂诗钞卷三》，"为徐敬可(名善，1634～1690)先生题箑，即送归南四首。"第四首有云："落落同心天地内，合并宁悍远近攀，凭君好寄杨云语，待我三吴山水间。敬可为余言杨道声，余亦素闻其人"。按徐善、杨文言曾同修《明史·历志》，见《勿庵历算书目》。

康熙五十四年乙未(1715年)八十三岁。

门人刘湘煃(字允恭，江夏人)著有《历学疑问订补》等书，是年归江陵，文

---

① 见《历算全书·锡山友人杨学山历算书序》，第1～2页。

② 见《梅氏丛书辑要》卷六十，杂著。(严敦杰补注)

③ 见方苞《梅征君墓表》引："谢赐律吕正义劄子"。

④ 见《梅氏宗谱》。

⑤ 见《历算全书》第一册，卷首，题《三角法会编》，梅序，第1～2页。

⑥ 见《梅氏宗谱》。按《律历渊源》一百卷，计《历象考成》上编十六卷，下编十卷，表十六卷。《律吕正义》上编二卷，下编二卷，续编一卷。《数理精蕴》上编五卷，下编四十卷，表八卷。

⑦ 见《梅氏丛书辑要》第六十二卷，《操缦卮言》。

鼎送以诗(据《诗钞》卷四)。

是年三月十九日,文鼎寄书与杨学山[①]。

孙榖成赐进士,给假省亲,赐第于(北京)宣武门外之日南坊[②]。

康熙五十五年丙申(1716年)八十四岁。

本年曾在南京。重建梅氏宗祠落成,作"重建梅氏宗祠碑记"[③]。

康熙五十六年丁酉(1717年)八十五岁。

是年住南京。(据《诗钞》)

是年仲冬文鼎自序所著《度算释例》二卷,盖因年希尧[④] 谈及尺算,乃以旧稿,并其弟文鼐所作算例,重加参校,比校整齐,而授梓人[⑤]。

广宁年希尧为序《度算释例》于金陵藩署[⑥]。梅文鼎亦为年希尧"《测算刀圭》"撰序。文见《绩学堂文钞》(二)三十四下。但原书未录梅序。

康熙五十七年戊戌(1718年)八十六岁。

魏荔彤称:"岁在戊戌偶摄法司,因与诸同人设馆白下,延致(文鼎)先生,订正所著,欲共输资刊行。先生既以宁澹为志,不乐与俗吏久处,而世会迁变,云散蓬飞,竟未卒事。阅二载,僻居海中,官斋阒寂,复驰函敬求存稿得十余种,……不意哲人遂萎矣。"[⑦]

是年年希尧自序《测算刀圭》三卷。

是年陈万策成进士[⑧]。按陈万策与魏廷珍、王兰生(1679~1737)、王之

---

① 见《历算全书·历学问答》第一卷,第34~35页。

② 见《梅氏宗谱》。

③ 据《绩学堂诗钞》卷四:"作家书后偶成"后。同书卷四丙申又有"二月七日诞辰偶作"。

④ "广宁广东巡抚,年公允恭(希尧)校刊《方程》,《度算》于江宁藩署",见《梅氏丛书辑要》卷首,《校阅助刻姓氏》。

⑤ 见《历算全书·度算释例》第一卷,自序,第1页。

⑥ 见《历算全书·度算释例》第一卷,年序,第1页。

⑦ 见《历算全书》卷首,魏序,第1~2页。

⑧ "陈对初名万策,又字谦季,晋江人。康熙戊戌进士,官詹事府詹事。有《近道斋集》",见《切问斋文钞》第二十四卷,第10页。

锐、徐用锡(1657～?)同在李光地署中师事梅文鼎[①],并同校文鼎历算书[②]。

是年五月李光地卒年七十七。

康熙五十八年己亥(1719年)八十七岁。

是年冬文鼎序《读史记十表》称:“梅子方卧疴坐吉山中,得汪子师退所纂《读史记十表》,而霍然兴也,……康熙己亥长至同郡眷弟梅文鼎,时年八十有七[③]。

康熙五十九年庚子(1720年)八十八岁。

是年腊月李塨(1659～1733)来见梅文鼎[④]。

康熙六十年辛丑(1721年)八十九岁。

是年文鼎死[⑤]。

“辛丑夏历算书(即《律历渊源》)成,瑴成请假归省,逾月而(文鼎)君卒。”[⑥]

“瑴成内廷供奉,越数年,给假归省,值公病,得侍疾,数月而卒。特命江宁织造曹君治丧事,营葬地。”[⑦]。

按文鼎死时,孙瑴成、玕成尚在,瑴成死于乾隆二十八年癸未(1763年)十月十六日,时年八十三[⑧]。

玕成死年未详。《宗谱》称年七十四死[⑨]。

---

① 见康熙四十二年癸未条。

② 参看《勿庵历算书目》,第50页,《梅氏丛书辑要》卷首,“校阅助刻姓氏”,和《道古堂文集》第三十一卷,第8页。

③ 此条由严敦杰征得,《开明》本《二十五史补编》误作八十有九。

④ 据《李恕谷年谱》。

⑤ 见《梅氏宗谱》。

⑥ 据方苞《梅征君墓表》。

⑦ 见“梅氏宗谱”。

⑧ 见《梅氏宗谱》。

⑨ 见《梅氏宗谱》。

按魏荔彤,雍正癸卯(1723年)兼济堂刻《历算全书》序尚称玉汝昆季。乾隆辛巳(1761年)瑴成所辑《梅氏丛书辑要》,除第1～5卷,第55～56卷及第60～62卷外,均与玕成同校辑。又庚辰(1760年)所作《增删算法统宗》,亦有玕成校字。是玕成于乾隆辛巳(1761年)尚在。

瑴成长子钤,四子钫,各年二十六,先瑴成死[1]。瑴成季子镠[2] ……。

梅文鼎尚有故事数则,未记年月:

(一)吴陈琰《旷园杂志》云:"黄履庄精西洋轮捩之学,尝制木狗置门侧,卷卧如常,遇客至触机而起,吠不止,一时莫辨其伪。宣城梅定九与柴陛升言"。见铢庵《人物风俗制度丛谈》甲集,"机师"条列。1948 年 12 月出版。

(二)刘南英字宇千,工诗,尤精琴理,著《琴学集成》十卷,梅文鼎曾为制序。

(三)李光地,《榕村语录》(1743 年)卷二十四,又记有梅文鼎故事数则。

① 见《增删算法统宗·凡例》,第 5 页。

② 瑴成季子镠,见包世臣《艺舟双楫》,"完白山人传"。

文鼎曾孙钤、钤、鈖、钫、镠、鍼都通数学。