科学史全集

第一一卷

辽宁教育出版社

2

李俨 钱宝琮科学史全集

2

第一卷

辽宁教育出版社

第二卷说明

本卷收入李俨的《中国古代数学史料》(1955年初版,1963年第二版)、《中算家的内插法研究》(1957年11月出版)、《十三、十四世纪中国民间数学》(1957年11月出版),钱宝琮的《中国数学史话》(1957年12月出版),李俨的《计算尺发展史》(1962年10月出版),均是二老本世纪五、六十年代的著作。

本卷目录

中国古代数学史料…… 李　俨　1
中算家的内插法研究…… 李　俨　283
十三、十四世纪中国民间数学 …… 李　俨　403
中国数学史话…… 钱宝琮　491
计算尺发展史…… 李　俨　641

已审阅
子居 09-10-26, 17:47

中国古代数学史料

李　俨

编 者 说 明

本书原为中国科学社1954年主编的《中国科学史料丛书》古代之部第一辑，专述中国远古至五代为止之数学文献及数学家成就之史迹。其资料采自传本算经以外的经、史、子、集各类典籍，还包括甲骨文、金文、汉简、敦煌卷子等出土文物。作者博综群书，在浩如烟海的古籍中搜炼数学史珍宝，其艰苦卓绝难以形诸文字，而后学获益又非言语所可比拟也。该书1954年由中国科学图书仪器公司印行，至1955年共三次印刷，1956年由科学技术出版社（上海）出版，1957年再次重印。前后印数达13000册，可见受欢迎之夥。1962年，作者又对初版作了修订，定名为《中国古代数学史料（第二版）》，增加了《夏侯阳算经新注》、《宋元类书（公元977年后）内中算史料》、《日本口游（公元970年）书内的中国古代数学史料》三节，其他各节的内容也作了增补与订正，并将原《印度历算与中国历算发生关系》一节改称《佛教与中国历数》，1963年1月由上海科学技术出版社出版。第二版较之原版扩充约$\frac{1}{3}$，虽然使用了宋元类书，但并未改变资料的主体至五代为止的界定。今谨依第二版排印，并尽可能核对了所引古文，校订了个别错字。

《李俨钱宝琮科学史全集》编辑委员会

初 版 序

中国有悠久的历史，不独政治如此，即各项科学在中国也有久远的历史。以往虽有不少科学家和历史家，有志研究科学历史的进展，以历史范围过广，分别深入钻研，逐渐积累，综合起来，工作十分繁重，此项资料又散见于各方面。关于中国数学史三十年来发展情况，虽曾于1947年介绍一次，题为《三十年来之中国算学史》[①]，但中国各项历史研究的造就，至今尚未成熟，其中以古代为特甚。

1953年十月中国科学社为整理我国古代科学发明，发扬其悠久而丰富的宝藏，以供教学及研究工作参考起见，决定编辑《中国科学史料丛书》，暂分现代之部与古代之部两编，而本书即为古代之部首先出版的第一册：《中国古代数学史料》。

中国原始文化为黑陶文化，约在公元前一千年左右。再经某一阶段即为殷文化。黑陶文化时期，陶器花纹已具有菱形、方形以及圆内容方各项几何图案。殷文化时期，甲骨文已有数字大小及十进数位概念。而数学专门著作，则始于汉代，后来代有作者。因其原

---

① 见李俨《三十年来之中国算学史》，《科学》，二十九卷四期(1947年)，第101～108页；并见：李俨《中算史论丛》第五集，第一版，第146～167页，北京，科学出版社(1955年)(见本书第八卷第517～538页)。

作未必一一保存，收集史料，实为必要；至历代数学家的收获，尚须各方集录，而数学家事迹，正史未必都有专传，亦须多方采集，以补遗缺。

至中国数学，在北宋以后另有创作。中国古代数学，则止于五代。因以五代周显德己未之明年（公元960年）禅位于宋以前之中国数学，称为中国古代数学。

1954年中国科学院决定扩充并加强历史研究机构，除现有的近代史研究所外，增设两个历史研究所，这样共有三个历史研究所。第一所研究从远古到南北朝的历史，第二所研究从隋唐到鸦片战争这段时期的历史。现有的近代史研究所，改为第三所，仍研究中国近代史，宗旨亦与前相同①。

《中国古代数学史料》既应上述需要而编辑，而工作又相当繁重，且有与前此《畴人传》各书有相出入之处。查中算旧无专史，而中国数学家传记，则有阮元《畴人传》四十六卷（1799年），罗士琳《续畴人传》六卷（1840年），华世芳《近代畴人著述记》一卷（1884年），诸可宝《畴人传三编》七卷（1886年），黄钟骏《畴人传四编》十一卷（1898年）。前后百年，集录六十余万言，引用书籍四百余种。就中《续畴人传》以后所有补传，多系清代算家。而《畴人传》本身，又多部分传录各家著书序文，作为本传；而于各时代数学史事发展所需其他史料，则未加记录。《中国科学史料丛书》即为适应上述需要而编辑。不过工作是属创举，即举本书《中国古代数学史料》为例，因集录系属草创，征引有时失之冗长，有时失之简略。在中国古代数学史方面，尚可看到中国与亚洲各邦，即日本、朝鲜、越南、印

① 参看"中国科学院积极准备进一步加强历史研究工作"，《科学通报》，1954年1月号，第52页。

度各国的文化交流。至分数论、勾股弦定理、大衍求一术、方程论、几何学、圆周率计算，在中国古代都有贡献，因另有论文，此处亦未曾一一详列。

此书虽经上海中国科学社编辑委员会和严敦杰同志提供意见，两次多加校补；而全面修补，尚留待修订本再行办理。深望读者随时多加指教是幸。

一九五四年二月李俨序于兰州

第二版序

1954年曾应中国科学社之约，写成《中国古代数学史料》一册，共十四万字。该书在1955，1956，1957各年叠经重印，前后共印出13，000册，未及多加增订。经过八年，史料续有收集，其中有资料重要，需要传达的；有以前存疑，需要订正的，因于今年（1962年）初，全部重加增订，保存原名，称为《中国古代数学史料》（第二版），以符事实。

查八年前辑录《中国古代数学史料》，因系试作，诸多不备。又有各书记载互有不同，或由版本不一，或由传录错误，都要一一详加考订，期与史实相符。亦有书册史料，未记时期，必须间接寻求时代背景，使明真相。所以有时较多资料，采取只及一二事。又古代史事，多半由后人追记，所以此类史料，虽如前例，只记到公元十世纪，而宋元类书所记录的史料，亦逐一胪列，以便取用。

此次增补和订正事项，较前约多三分之一，不备之处尚望读者多加指正是幸。

此书曾经严敦杰同志，北京中国佛教协会和日本平山谛博士及儿玉明人先生提供意见，得以顺利完成第二版增订工作，特此志谢。

一九六二年四月李俨序于北京

目　录

初版序
第二版序
1. 古代数字和数的发展 …… 13
2. 规矩和古代几何学 …… 19
3. 黄帝隶首作数 …… 25
4. 九九 …… 27
5. 古九九表 …… 29
(一)“敦煌汉简”九九表 …… 31
(二)“居延汉简”九九表 …… 33
6. 记数方法 …… 35
7. 算学教育 …… 37
8. 算术 …… 39
9. 敦煌千佛洞算书和算表 …… 40
(一)敦煌千佛洞“算书” …… 41
(二)敦煌千佛洞(田积)算表 …… 45
(三)敦煌千佛洞《算经》一卷并序 …… 46
(四)敦煌千佛洞立成算经 …… 55
10. 九宫 …… 59
11. 魏刘徽注《九章》 …… 61
12. 中国古代数学家(一) …… 63
(一)张　苍　(二)耿寿昌　(三)许　商　(四)杜　忠

(五)尹　咸　(六)刘　歆　(七)张　衡　(八)刘　洪
(九)马　续　(十)郑　玄　(十一)蔡邕　(十二)徐岳
(十三)阚泽　(十四)赵爽　(十五)陆绩　(十六)王蕃
(十七)陈炽　(十八)王粲　(十九)刘徽
13. 南朝宋祖冲之著缀术 …… 78
14. 梁祖暅之开立圆术 …… 81
15. 中国古代数学家(二) …… 85
(一)孙　子　(二)张丘建和夏侯阳　(三)赵　爽
(五)何承天　(五)皮延宗　(六)祖冲之　(七)祖暅之
16. 后周甄鸾撰注算经 …… 95
17. 中国古代数学家(三) …… 98
(一)庾曼倩　(二)张　缵　(三)元延明　(四)殷绍(附成公兴)
(五)高　允　(六)信都芳　(七)甄　鸾
18. 古算解释 …… 103
(一)隋刘焯的招差术 …… 103
(二)唐王孝通分析仰观台等体积 …… 105
19. 中国古代数学家(四) …… 109
(一)刘　焯　(二)刘　炫　(三)刘　祎　(四)韩　延
(五)王孝通　(六)李淳风　(七)僧一行　(八)边　冈
(九)刘孝孙
20. 唐李淳风注十部算经 …… 117
21. 宋刊算经十书 …… 120
22. 算经十书佚文 …… 124
23. 九章算术补注(一) …… 131
24. 九章算术补注(二) …… 140
25. 孙子算经补注 …… 146
26. 海岛算经新注 …… 162

27. 夏侯阳算经新注 …… 172
28. 缉古算术佚文校补 …… 194
29. 筹算制度 …… 197
30. 佛教与中国历数 …… 204
31. 七曜名义 …… 214
32. 九执名义 …… 223
33. 三等数法 …… 227
34. 天竺小数记法 …… 238
35. 瞿昙氏历 …… 241
附：古代三角函数表 …… 245
36. 中国古代数学家(五) …… 249
(一)陈从运　(二)江　本　(三)龙受益　(四)宋延美
(五)薛崇誉
37. 中国古代数学家之成就 …… 252
38. 宋元类书(公元977年～　)内中算史料 …… 255
(一)数(太平御览)　(二)明算(《册府元龟》)　(三)算术[竺国算法]
(《通志》)　(四)九九数等(《玉海》)　(五)历算等(《文献通考》)
39. 日本口游(公元970年)书内的中国古代数学史料 …… 271

1. 古代数字和数的发展

殷墟甲骨文字 从1899年起，在河南安阳县发现了甲骨文，内有二、三、五诸字，殷墟陶器文字有一、三、四、五、七诸字[1]。殷墟甲骨文字著录数字始为齐备。今知除一、二、三、四、五、六、七、八、九、十诸单位数外，还包含有十一、十二、十三、十四、十五、二十、二十五、三十、三十三、三十七、四十、四十一、五十、五十六、六十等数，百以上的数字有[2]：

一百 《殷墟文字乙编》3024："方登人百。"

二百 《殷墟摭遗续编》62："二百人王。"

三百 《殷墟书契前编》3.31.2："左右中人三百。"

四百 《殷墟卜辞》1517："四百。"

五百 《殷墟书契前编》7.92："㱿贞五百宰⊿。"

六百 《殷墟书契后编》下43："六百。"

八百 《殷契粹编》1079："㠯方征……八百。"

九百 《殷墟卜辞》832："乎……九百人。"

---

① 均为前中央研究院历史语言研究所发掘殷墟所得；见胡厚宣《五十年来甲骨文发现的总结》，第73～74页(1951年)。

② 引见朱芳圃《甲骨学文字编》(1933年)。

一千 《殷契佚存》324："丁未卜……王登千人。"

三千 《殷契粹编》1078："……三千，乎伐㠯。"

四千 《铁云藏龟》258："四千。"

五千 《殷墟书契续编》1，13，5："贞登人五千。"

八千 《殷契粹编》119："□人八千在驭。"

一万 《库方藏甲骨卜辞》310："登妇好三千，登旅万。"

三万 《殷契粹编》1171："癸卯卜……其□三万。"

甲骨文的数字记载，三万是最高的记录，又甲骨文三位以上复位数的记载，如：

《卜辞通纂》19："允戈伐二千六百五十六人。"

又 24："允卑三百又卌八。"

《殷墟文字乙编》2908："犭一百六十四，兔一百五十七。"

又 764："壬申允狩……获……兔……一百业九业九。"

这些数字有的连写，如上所引"二千六百五十六"写作"丰㐭文八"，有的分写，如《殷墟文字甲编》2491 的"三十"写作"三丨"，《殷墟书契编》4.23 的"五十"写作"又丨"，《卜辞通纂》34 的"五千"写作"又千"，又有的在数字中间加又或业字，如上面所举两例[1]。

《周官》："十夫有沟，……百夫有洫，千夫有浍，……万夫有川"，也是十进。

金文内记载的复位数如[2]：

《盂鼎铭》："自驭至于庶人六百又五十又九夫。"

《齐侯镈》："厘仆三百又五十家。"

---

① 参看管燮初《殷墟甲骨刻辞的语法研究》，中国科学院(1953 年 10 月)。

② 引见郭沫若《两周金文辞大系图像考释》(六)，第 35～36 页。郭沫若，《中国古代社会研究》(1947 年)。侯外庐，《中国古代社会史论》，第 105 页(1955 年 6 月)。

《子仲姜镈》:“二百又九十又九邑。”

《小盂鼎》:“……孚人万三千八十一人。”

记数法和甲骨文相同,如上“六百又五十又九”写作“[illegible]”。金文的“五十”和甲骨文的“五十”形体不同。

自然数产生后,必然要运算,运算离不了加减乘除,减不了便产生负数,除不尽便产生分数、正整数。分数、负数构成了有理数系。在中国周、秦间已具备了这个数系的雏型,其发展程序大概是先有正整数的运算,其次产生了分数,在后期产生了负数。上举的甲骨文和金文,只是数字的记录。当然这些复位数的记录,也说明是通过运算得来的。

《殷墟书契前编》3,23,6:

五十犬　五十羊　五十豚

三十犬　三十羊　三十豚

二十犬　二十羊　二十豚

十五犬　十五羊　十五豚

这一片甲骨文内的数字都是五的倍数,并且

$$50-30=4\times5=2^2\times5$$

$$30-20=2\times5=2^1\times5$$

$$20-15=1\times5=2^0\times5$$

含有等比的概念。金文内《曶鼎铭》:“东宫乃曰:偿曶禾十秭,遗十秭为廿秭。(如)来岁弗偿则倍册秭。”(郭沫若《奴隶制时代》,人民出版社 1952 年,卷首插图和释文。)这里有两个运算,一是加法,一是乘法:

$$10+10=20,$$

$$20\times2=40,$$

为金文中很少见的记录。

金文中已有分数记载，如《商鞅量》[1]。

十八年齐遣卿夫二众来聘，冬十二月乙酉大良造鞅爰，积十六尊五分尊(之)一为升。

尊即为寸字，此以

$$1\text{升}=16\frac{1}{5}(\text{立方})\text{寸}。$$

运算的记载 见于周、秦诸子百家的书籍中，如：

魏李悝《法经》尽地力之教说："今一夫挟五口，治田百亩，岁收亩一石半，为粟百五十石，除十一之税十五石，余百三十五石；食：人月一石半，五人终岁为粟九十石，余有四十五石，石三十为钱千三百五十，除社闾尝新春秋之祠用钱三百，余千五十；衣：人率用钱三百，五人终岁用千五百，不足四百五十。"这一节内把加减乘除都叙述了。

《墨子》卷十五，杂守第七十一："升食终岁三十六石，参食终岁二十四石，四食终岁十八石，五食终岁十四石〔四〕升，六食终岁十二石；升食食五升，参食食三升〔少半〕，四食食二升半，五食食二升，六食食一升大半。"这说明了比例运算：

$$36:24:18:14.4:12=5:3\frac{1}{3}:2\frac{1}{2}:2:1\frac{2}{3}。$$

《管子·地员篇》："蓄殖果木，不若三土以十分之二，……以十分之三，……以十分之四，……以十分之五，……以十分之六，……以十分之七，……"又《海王篇》："终月大男食盐五升少半$\left(5\frac{1}{3}\right)$，大女食盐三升少半$\left(3\frac{1}{3}\right)$，吾子食盐二升少半$\left(2\frac{1}{3}\right)$，……令盐之重，升加分强$\left(\frac{0.5}{10}\right)$釜五十也，升加一强$\left(\frac{1}{10}\right)$釜百也，升加二强

① 同第14页注②。

$\left(\frac{2}{10}\right)$釜二百也。”这说明分数运算，古代音乐的三分损一，三分益一，都是分数运算。

这些都是很典型的例子，把运算过程叙在著作内，说明当时能运算也是一种艺术。居延汉简有许多履历简内都有“能书，会计”字样，也说明了注重会计这一点。

《管子》卷十九地员篇称：“先主一，而三之，四开，以合九九。”即是$1\times3^4=9\times9=81$。《淮南子》卷三天文训称：“故置一，而十一，三之，为积分十七万七千一百四十七。”即是$1\times3^{11}=177147$，却有了指数的初步概念。

负数的出现，大约在秦、汉间。《九章算术》已有正负术，可知在正负术前负数已存在。《九章》的正负术，在刘徽注《九章》(公元263年)前一百年，刘洪(158～183年时人)《乾象历》亦有引称，知必出于同源。

古代无理数的观念，还未成立，$\sqrt{2}$用方五斜七的分数来表示($\sqrt{2}=\frac{7}{5}$)。汉张衡(78～139)算$\sqrt{3}$用$\frac{26}{15}$替代。《九章》内的加借算和不加借算，都是算数的近似值公式。

汉简数字 敦煌汉简有(见《流沙坠简》二屯戍丛残考释)

巨斧≡

守御器簿长椎≡

□□≡

木≡。

居延汉简有(见《居延汉简考释》)

一 一 三三三

≡ ≡ 三 ≡ 二

⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥

四作三，五作三，六作丄，和《孙子算经》“六不积，五不双”，《夏侯阳算经》“六不积聚，五不单张”都合。

又敦煌千佛洞卷子内数字：二十作廿，三十作卅，四十作卌，都是合书。见下“敦煌千佛洞算书和算表”（本书第23页至39）*。又敦煌千佛洞卷子内还有大写数字①。

* 见本卷第40～58页。

① 参看李俨《唐代算学史》，《西北史地》（西安），一卷一号（1938年2月），第63～95页；并见李俨《中算史论丛》第五集，第一版，第15～56页，北京，科学出版社（1955年）；并见本书第八卷第364～402页。

2. 规矩和古代几何学

根据地下发掘资料，古代劳动人民已知道如何在用器上饰以几何图案，从新石器时代石斧、石铲所凿圆形孔的整齐来看，知当时必定有画圆形的工具。

上古应用规矩两器制作方圆，其源很远。甲骨文有规字作𡚬，象手执规画圆[1]，矩作𠃊，象曲尺形（两个直角三角形）；又甲骨文石字作 ㇇，象直角三角形，石崖石岩都是这个形象，当是矩的原来意义。两足规画圆，直角矩画方，和后世（1）山东历城孝堂山郭氏墓石祠（公元 129 年）；山东嘉祥县汉武梁祠石室（145～167）；山东沂南汉画像石墓，都有“伏羲手执矩，女娲手执规”图[2]，（2）汉规矩砖

---

① 见朱芳圃：《甲骨学文学编》（1933 年）引郭沫若说。

② （一）山东历城县孝堂山郭氏墓石祠“伏羲手执矩，女娲手执规”的画像。看罗哲文：“孝堂山郭氏墓石祠”，《文物》，1961 年 4～5 期，第 48 页。（二）山东嘉祥县汉武梁祠石室造像见《金石索》拓片，北京图书馆有藏本。（三）山东沂南汉画像石墓“东柱上段刻着手持矩和规的人首蛇身的伏羲女娲像，中间还夹个人”。见华东文物工作队山东组，《山东沂南汉画像石墓》，《文物参考资料》，1954 年第 8 期，第 40 页。

图[1],(3)东汉石刻[2],(4)高昌坟墓内神像图[3],(5)吐鲁番绢画伏羲女娲神像图[4],(6)隋高昌故址阿斯塔那墓室彩色绢画[5] 所附规矩原形都同。长沙发掘出土的楚器有一柄两足形木器,两头都尖形,现称为木剪,或者即是古代的圆规[6]。

关于规、矩两字,古书上引的很多,如宋李昉《太平御览》(公元977年)工艺部九;如《事物纪原》七引:《墨子》、《孟子》、《荀子》、《庄子》、《韩非子》、《尸子》、《周礼》,述规矩称:宋墨翟,《墨子》卷七,天文志上第二十六:"轮匠执其规矩,以度天下之方圆。"《孟子》卷四离娄章句上:"孟子曰:离娄之明,公输子之巧,不以规矩,不能成方圆。"《孟子》卷七尽心章句上:"孟子曰:梓匠轮舆,能与人规矩,不能使人巧。"周荀况《荀子》,赋篇第二十六:"圆者中规,方者中矩。"周庄周《庄子》徐无鬼第二十四:"方者中矩,圆者中规。"周韩非《韩非子》卷二,有度第六:"巧匠目意中绳,然必先以规矩为度。"《周礼》冬官舆人:"圆者中规,方者中矩。"周尸佼《尸子》卷下:"古者倕为规矩、准绳,使天下仿焉。"

又《墨子》经上,经说上:"(经)圜,一中同长也。""(说)圜,规写攴也。""(经)方,柱隅四讙也。""(说)方,矩写攴也。"又"我有天志,譬若轮人之有规,匠人之有矩。"

《礼记》卷之十五,经解第二十六:"礼之正国也,犹衡之于轻重

---

① 原图见严敦杰:《汉规矩砖考》,1941年9月8日《时事新报·学灯》。并见常任侠,《民俗艺术考古论集》,第55~59页,正中书局(1943年9月)。

② 《闻一多全集》第一册,四版,开明书店(1949年)。

③ 见日本太谷光瑞《西域考古图谱》上册,图版第53,第54。

④ 见黄文弼:《吐鲁番考古记》,图版第59,图61,北京(1954年4月)。

⑤ 见斯坦因:《亚洲腹地考古记》,图C,Ⅸ。

⑥ 原器现藏北京历史博物馆。

也，绳墨之于曲直也，规矩之于方圆也。故衡诚县，不可欺以轻重；绳墨诚陈，不可欺以曲直；规矩诚设，不可欺以方圆。”又《礼·深衣》称：“古者深衣盖有制度，以应规矩绳权衡。”

《淮南子》一原道训：“规矩不能方圆，钩绳不能曲直。”

《淮南子》十缪称训：“圆乎规，方乎矩。”

《淮南子》十一齐俗训：“故天之员也不得规，地之方也不得矩”“若夫规矩钩绳者，此巧之具也。”

《淮南子》十四诠言训：“矩不正不可以为方，规不正不可以为员。”

《淮南子》十九修务训：“夫无规矩，虽奚仲不能以定方圆；无准绳，虽鲁班不能以定曲直。”

汉王符《潜夫论》卷第一赞学：“昔倕之巧，目茂圆方，心定平直，又造规绳矩墨，以诲教人，试使奚仲、公班之徒，释此四度而效倕，自制必不能也。”

《史记》卷二夏本纪：(禹)“陆行乘车，水行乘船，泥行乘橇(音敲)，山行乘檋(音局)。左准绳，右规矩，载四时，以开九州，通九道。”

又班固《前汉书》二十九沟洫志卷第九称：“夏书：禹堙洪水十三年，过家不入门，陆行载车，水行乘舟，泥行乘毳，山行则揭。”

清《古今图书集成》经济汇编，考工典第一卷“规矩准绳部”，所录，除上文外，尚有：

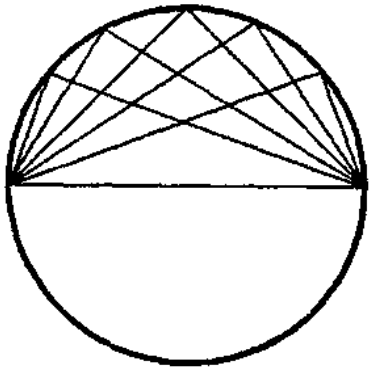
《管子》卷六：“虽有巧目利手，不如拙规矩之正方圆也。”

《吕氏春秋》卷二十四：“欲知平直，则必准绳；欲知方圆，则必规矩。”

《吕氏春秋》卷二十五：“为圆必以规，为方必以矩；为平直必以准绳。”

上面所引《墨子》经上经说一节，便是古代对圆和方的定义，语很简单而意义详尽①。

《周髀算经》称："环矩以为圆，合矩以为方。"直角三角形固定弦，其直角顶点的轨迹便是圆，即是"环矩以为圆"的解释（如下图）。



甲骨文内屡称②：

"己巳王锄圣囲。"（殷契粹编1221）

"甲子贞于……□方圣田。"（又1223）

"王令多×圣田。"（又1222）

"王令圣田陇。"（又1544）

这些方块就是田，从此可知在殷代已知道如何将田地分割为若干小方块，具备了计算面积的知识，由此导引出后来的井田制度，《九章算术》第一章之称为方田，实渊源有自。

《周礼》卷第十二，冬官《考工记》下："车人之事：半矩谓之宣，一宣有半谓之欘（音劬又音俱），一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。"

《考工记》是齐国的著作，这书内对角度及弧度都下了定义及说明，即：

90° 矩

① 钱临照"论《墨经》中关于形学、力学和光学的知识"，《科学通报》二卷八期，1951年8月。

② 引自郭沫若《奴隶制时代》，重版本第7页，北京，科学出版社（1962年）。

$\frac{1}{2}\times 90°=45°$ 宣

$45°+\frac{1}{2}\times 45°$ 楓

$(45°+\frac{1}{2}\times 45°)+\frac{1}{2}(45°+\frac{1}{2}\times 45°)$ 柯

$(90°+\frac{1}{4}\times 45°)+\frac{1}{2}(90°+\frac{1}{4}\times 45°)$ 磬折

凡是等于直角的称“倨勾中矩”，大于直角的称“倨勾外博”；凡直角向内延小于直角时称“勾于矩”，凡直角向外伸大于直角时称“倨于矩”；故“倨勾磬折”即表示角度为 135°，在《考工记》内凡三见，《管子》弟子职篇内亦有“倨勾如矩”，可知这是齐国的数学术语。

《考工记》内没有说到勾股弦定理，因为勾股弦三个字在《考工记》内的释义和直角三角形无关，但勾股弦定理在《考工记》内应用，却有一则可证明。冶氏

“戈广二寸，内倍之，胡三之，援四之，……倨勾外博；戟广寸有半，内三之，胡四之，援五之，倨勾中矩。”

三角形的三边若 2∶3∶4，则 4 的对角大于 90°，故称倨勾外博；若 3∶4∶5，则 5 的对角等于 90°，故称倨勾中矩。

角度和弧度是相关的，《考工记》内屡称：

“筑氏为削，合六而成规；天子之弓，合九而成规；为诸侯之弓，合七而成规；大夫之弓，合五而成规；士之弓，合三而成规。”

假如当时没有弧度的认识，便很难算出合而成规，把不同的弧度，配合起来成一个圆形，而不同的弧度两端连接起来，便成了圆内容各整边形。

《九章算术》方田章内没有四不等田的计算，但从古物上却载着一则实在的记录：

汉建初买地玉券[1]：

“建初六年十一月十六日乙酉…田〔南〕广九十四步，西长六十八〔四〕步，北广六十五〔步〕，东长七十九步，为田廿三亩奇百六十四步。”

（按西长当为六十四步。）

$$\frac{94+65}{2}\times\frac{64+79}{2}=79.5\times71.5=5684.25$$

一亩二百四十步

$$\frac{5684.25}{240}=23\frac{164.25}{240}$$

这计算公式是四边形面积的近似值，后来算书内也用此式[2]。

以《九章算术》发展的先后次序而论，大概我国古代先有平面面积的计算，在公元一世纪左右才完备了立体体积的计算，把这些具体抽象化，便形成并发展了中国古代的几何学。

古代计算田地面积，从正方形、长方形发展到三角形、圆形、梯形、四不等边形等，这是有不同的社会基础，这变化大概也在春秋、战国之际，讨论古代社会史时，虽然数学不是上层建筑，但数学也是社会意识形态，可以提供作为参考。

---

① 罗振玉《楚雨楼丛书》第八种《蒿里遗珍》，又《陶斋藏石录》卷一，作武孟子买地玉券。

② 如《夏侯阳算经》四不等田“并二长半之，又并二广半之，相乘为积步。”

3. 黄帝隶首作数

黄帝隶首作数之传说，实始于《世本》。刘知几《史通》"古今正史"条称："楚汉之际，有好事者录自古帝王公侯卿大夫之世，终乎秦末，号曰《世本》十五篇。"梁启超《中国历史研究法》称："史学界最初有组织之名著，则春秋战国间得二书焉，一曰左丘之《国语》，二曰不知撰人之《世本》。"其自注称："《汉书·艺文志》著录《世本》十五篇，原注云：'古史官记黄帝以来迄春秋时诸侯大夫。'《汉书·司马迁传》、《后汉书·班彪传》皆言司马迁删据《世本》等书作《史记》。今据《世本》篇目以校迁书，可以知其渊源所自矣。原书宋郑樵、王应麟尚及见，其佚当在宋、元之交。清钱大昕、孙冯翼、洪贻孙、秦嘉谟、茆泮林、张澍各有辑本，茆、张二家较精审。"[1] 各家引述《世本》，时见异文。《唐六典》卷二十一引《世本》"隶首造数"；宋高承《事物纪原》卷一数条引《世本》"隶首作数"；宋李籍《九章算术音义》隶首条引《世本》"黄帝时隶首作数"是也。唐释法琳《辨正论》注引郑玄《六艺论》云："隶首作算数。"宋范晔《后汉书》卷十一云："隶首作数。"似并本《世本》之说。晋张华《博物记》云："隶首，黄

---

① 见梁启超《中国历史研究法》，第21～23页，《万有文库》本。

帝之臣，一说隶首善算者也。”[1] 其在《算经》，则汉徐岳《数术记遗》云：“隶首注术，乃有多种。”又谓：“黄帝为法，数有十等，乃其用也，乃有三焉。”后周甄鸾《五经算术》亦谓：“黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。”至是黄帝隶首作数之说，始称完备。故入唐而司马贞《史记索隐》称：“隶首作算数。”唐房玄龄《晋书》称：“隶首作算数。”唐李贤《后汉书》马融传注称：“隶首，黄帝时善算者也。”汉、唐诸家，虽辗转传述，实本于《世本》之传说耳。

① 其后梁刘昭补注《后汉书》卷十一，引《博物记》及宋高承《事物纪原》卷一，引《博物记》并同。

4. 九　九

《管子·轻重篇》："宓戏作九九之数以应天道。"

扬雄《太玄经》："陈其九九，以为数生。"

魏刘徽《九章算术序》(公元263年)："庖羲氏……作九九之术，以合六爻之变。"

汉燕人韩婴著《韩诗外传》(《学津讨原》本)卷之三称：

"齐桓公设庭燎为便人欲造见者，期年而士不至。于是东野有以九九见者，桓公使戏之曰：九九足以见乎？鄙人曰：臣闻君设庭燎以待士，期年而士不至。夫士之所以不至者，君天下之贤君也，四方之士，皆自以不及君，故不至也。夫九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九者乎。……桓公曰：善，乃因礼之。期月四方之士相导而至矣……。"

"东野有以九九见者，(齐)桓公使戏之曰：'九九足以见乎？'曰：'九九薄能耳，而君礼之，况贤于九九者乎？'"见《韩诗外传》三。《魏书》注引《战国策》和刘向《说苑》卷八尊贤篇，全文如下：

"齐桓公设庭燎为士之欲造〔见〕者，期年而士不至，〔于是〕东野鄙人有以九九之术见者。桓公曰：'九九〔何〕足以见乎？'〔鄙人〕对曰：'臣非以九九为足以见也。臣闻主君设庭燎以待士，期年而士不至。夫士之所以不至者，君天下贤君也，四方之士，皆自〔以〕论

〔而〕不及君，故不至也。夫九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九(者)乎，……'桓公曰：'善。'乃因礼之。期月四方之士，相携而并至(矣)。"①

《前汉书》梅福传：福上书曰："臣闻齐桓之时，有以九九见者，桓公不逆，欲以致大也，……。"

《三国志·魏书》二十一："……九九不忽于齐……"

唐颜师古注《前汉书》云："九九：若今《九章》、《五曹》之辈。"

《隋书·经籍志》有："《九九算术》二卷，杨淑撰。"

宋李籍《九章算术音义》于刘徽序"九九之术"条注引《前汉书·梅福传》师古注及《隋书·经籍志》。

按颜师古、李籍似并以九九之术为《九章算术》之前身。

① 其中《太平御览》卷四百七十四所引，无[……]内文字，多(……)内文字，有异文。

5. 古 九 九 表

九九八十一

见《荀子》、《战国策》，卷第一，东周。

九九八十一； 八九七十二； 七九六十三；

六九五十四； 五九四十五； 四九三十六；

三九二十七； 二九一十八

见《淮南子》卷四坠形训及《孔子家语》。

“律数：九九八十一以为宫；三分去一，五十四以为徵；

三分益一，七十二以为商；三分去一，四十八以为羽；

三分益一，六十四以为角。”

见《史记》卷二十五，律书第三。

八八六十四

见《前汉书》，律历志。

七八五十六

见《管子》卷十九，地员篇。

六八四十八

见《灵枢经》卷四，脉度。

五八四十

见《淮南子》卷三，天文训。

四八三十二

见《易乾凿度》,郑注。

三八二十四(缺)

二八一十六

见《淮南子》卷三,《大戴礼记·本命》第八十及《孝经·援神契》。

七七四十九;六七四十二;五七三十五;

四七二十八;三七二十一;二七一十四。

见《管子》卷十九地员篇第五十八。

三七二十一

见《战国策》卷第八和《吕氏春秋》卷第六。

六六三十六

见《荀子》大略篇,《鶡冠子》卷中,《淮南子》卷三。

五六三十

见《贾谊新书》卷四,匈奴事势;魏伯阳,《参同契》。

四六二十四

见《易乾凿度》;《穆天子传》。

三六一十八

见《灵枢经》卷四,脉度,《穆天子传》。

二六十二

见《穆天子传》卷一。

五五二十五

见《逸周书》卷三,《内经素问》卷二,《鶡冠子》卷中。

四五二十(缺)

三五十五

见《礼记》礼运;《穆天子传》卷二。

二五十

见《灵枢经》卷四，脉度。

四四十六

见《淮南子》卷三，天文训。

三四十二

见董仲舒《春秋繁露·考功名》及《淮南子》。

二四八

见《灵枢经》卷四，脉度。

三三九

见《淮南子》，《孔子家语》，《大戴礼记》。

二三六（缺）

二二四（缺）

（一）“敦煌汉简”九九表

以下现存部分

九九八十一	八八六十四	五七卅五	二六十二	二三而六	大凡千一百一十
八九七十二	七八五十六	四七廿八	五五廿五	二二而四	
七九六十三	六八四十八	三七廿一	四五廿		
	五八四十		三五十五		

以下残缺部分

六九五十四	四八卅二	二七十四	二五十
五九四十五	三八廿四	六六卅六	四四十六
四九卅六	二八十六	五六卅	三四十二
三九廿七	七七四十九	四六廿四	二四而八
二九十八	六七四十二	三六十八	三三而九

据罗振玉、王国维，《流沙坠简》卷中，“小学术数方技书”类，第

5 页(1914 年):“九九术数残木简”抄补。

后附王国维“九九术”跋文:

九九术“木简出敦煌北,长二百六十米里迈当,广廿四米里迈当。”

九九八十一	八八六十四	五七卅五	□□□□	二三而六	大凡千一百一十
八九七十二	七八五十六	四七廿八	五五廿五	二二而四	
七九六十三	六八卌八	三七廿一	四五廿		
	五八卌		三五十五		

“右九九术残分六列书之,第一第三第五列存三行①;第二第四列存四行,第六列一行,第五列末行,字不可识,末为一字上有两字漫灭,但存微迹,然非一一而一,则可知也,即今日通行乘法。但今乘法,由一一如一,至九九八十一,凡四十五句。今此简虽亡其半,然以存句考之,盖无一一如一至一九如九,九句也。此简末言大凡千一百一十,十下似有三字,然已不可辨。依法推之,则不合有三字。若并一一如一九句,合计总数当得一千一百五十五,除此九句,总数乃得千一百一十。此简中无一一如一九句之确证也。余皆与今同,惟今法始一一至九九,此则始九九讫二二。考《孙子算经》乘法全载此四十五句,亦起九九而讫一一,末言从九九至一一,组成一千一百五十五,是古法始于九九之证,《孙子算经》不著撰人姓名,或以为孙武所著。《四库全书》提要,以书中有雒阳及佛经语,定为非出于孙武,然文义古质,决非出两汉后人之手也。《说苑》尊贤篇齐桓公设庭燎为士之欲造见者,期年而士不至,于是东野鄙人有以九九之术见者。《汉书》梅福传载福言事疏亦云臣闻齐桓之时,有以九九见者,桓公不逆。颜师古注九九算术,若今《九章》、《五曹》之辈,今以

① 第五列无三行,此处王国维跋文有误会。

此简及《孙子算经》证之，盖即乘法。其术始于九九，故称九九之术。其始一一如一，而终九九八十一者，后人所改也，颜注以为《九章》、《五曹》之辈者误矣。此法周秦古书多引之。如《管子·地员篇》，《大戴记·本命篇》，《淮南·天文训、地形训》，备引此四十五句中之语，此尤为东野鄙人所操以见齐桓公者，正是此术之确证也，此简二二而四，今法作二二如四。考《大戴记》，《淮南子》并引三三而九。《周礼》疏亦引二二而四，三三而九，正与此同，知唐人尚作而。《容斋续笔》云三三如九，三四十二，皆俗语算术。知改而作如，始于宋代也。《孙子算经》亦作二二如四，三三如九。殆唐以后刊本所追改，非原书之旧矣。"

（二）"居延汉简"九九表

以下现存部分

九九八十一	四九三十六	八八六十四
八九七十二	三九二十七	七八五十六
七九六十三	二九一十八	六八四十八
六九五十四		五八四十
五九四十五		四八三十二
		三八廿四

以下残缺部分

二八一十六	七七四十九
	六七四十二
	五七三十五
	四七二十八
	三七二十一
	二七一十四

以下残缺部分

六六三十六	五五二十五	四四一十六	三三九	二二四
五六三十	四五二十	三四一十二	二三六	
四六二十四	三五一十五	二四八		
三六一十八	二五十			
二六一十二				

据劳干《居延汉简考释》卷四之二"术数"类第 21 页（1943 年），"九九术残木简"钞补。

《居延汉简甲编》〈壹〉，第13页(1959年)，另有一“九九术残木简”题：

“九九八十一，八九七十二，七九六十三，六九五十四，……。”①

① 关于汉简文献，先看陈直，“六十年来我国发现竹木简概述”，《历史教学》，1962年第9期，第2～5页。

6. 记数方法

古代数以十进。"甲骨文及金文，十的倍数，都合书，百千倍数，亦然。"[1]《前汉书·律历志》："数者一十百千万也。"《左传》闵公传内称："万，盈数也。"再进到十万曰亿。《前汉书》卷十一哀帝纪第十一："宜蒙福祐，子孙千亿之报。"唐颜师古注曰："十万曰亿。"《逸周书》卷四世俘解第四十称："武王遂征四方，凡憝国九十有九国，馘蹙亿有七万七千七百七十有九，俘人三亿万有二百三十。凡服国六百五十有二。"又："凡武王俘商旧宝玉万四千，佩玉亿有八万。"

清王念孙《读书杂志》卷一之二据钞本《北堂书钞》衣冠部二；《艺文类聚》宝部上；《太平御览》珍宝部三；《初学记》器物部，佩下，引文都作："亿有八万。"也证明古代"十万为亿"是十进记数。

复次大数以"万"进，与西洋之以"千"进者不同，汉人叠称巨万、钜万、大万，即其一例：

《史记》梁孝王世家称："府库金钱且百巨万。"索隐引："（魏）如淳曰：巨亦大，与大百万同也。（吴）韦昭曰：大百万今万万。"

《前汉书·食货志上》称："庶人之富者累钜万。"

《前汉书·食货志下》称："费数十百钜万。"

---

① 见郭沫若，《甲骨文字研究》，释五十篇。

《前汉书·卫青霍去病传》称："天子所以赏赐数十钜万。"

《前汉书·贡禹传》称："税良民以给之，岁费五六钜万。"

《前汉书·楚元王传》称："功费大万百余。"

数过于万，又以万为数：

《前汉书》卷十，建始元年"六月，有青蝇无万数。"唐颜师古注称："言其极多，虽欲以万数计之而不可得，故云无万数。"

《前汉书》卷八，元康三年"六月诏曰：……今春五色鸟以万数，飞过属县。"神爵四年二月诏曰："鸾凤万举。""师古曰：万举犹言举以万数也。"

《后汉书》卷一上："死者以万数，水为不流。"注称："数过于万，故以万为数。"

汉以后万以上有十进、万进二法：《资治通鉴》卷二百二十四，"费逾万亿。"注引："孔颖达曰：亿之数有大小二法：其小数以十为等，十万为亿，十亿为兆也；其大数以万为等，数万至万，是万万为亿，又从亿而数至万，万亿为兆。"按十万为亿，系《数术记遗》之小数。

中国古代大数记数法，在万以上有亿、兆、经(京)、垓(姟、畯)、秭、涧、载、极诸字，见《风俗通》，并以十进。

宋释法云《翻译名义集》三："亿分四等，一：以十万为亿，二：以百万为亿，三：以千万为亿，四：以万万为亿。"

7. 算学教育

《礼记·内则》第十二："六年教之数与方名；……九年教之数日，十年出就外传，居宿于外，学书计。"

《白虎通·辟雍篇》："八岁入小学，"又："八岁毁齿，始有识知，入学，学书计。"

宋王应麟(1223～1296)《困学纪闻》卷五"仪礼"条释《内则》之说称：

> 六年教之数与方名：数者，一至十也。方名，《汉书》(食货志)所谓五方也。九年教数日，《汉志》所谓六甲也。十年学书计，六书九数也。计者数之详，十、百、千、万、亿也。《汉志》六甲、五方、书计，皆以八岁学之，与此不同。

《前汉书·食货志》："八岁入小学，学六甲、五方、书计之事。"

魏王粲(177～217)《儒吏论》(《太平御览》卷六百三十引)："古者八岁入小学，学六甲、五方、书计之事。"(隋虞世南《北堂书钞》卷八十三引同。)

《后汉书·杨终传》："礼制：人君之子，年八岁为置少傅，教之书计，以开其明。"

《周礼》：保氏教民六艺："六曰九数"。

后魏贾思勰《齐民要术》及隋杜台卿《玉烛宝典》引后汉桓帝时

崔实《四民月令》:“正月农事未起,命成童以上入大学,学五经,师法求备,勿读书传。研冻释,命幼童入小学,学书篇章六甲、九九、急就、三仓之属。”

书计条目:据《前汉书·食货志》及王粲《儒吏论》称:“学六甲、五方、书计之事。”注:“臣瓒曰:辨五方之名及书艺也。师古曰:瓒说是也。”

元胡三省音注《资治通鉴》卷一百七十六“未窥六甲”句注称:“古者八岁入小学,学六甲、五方、书计之事。”“六甲,谓六十甲子也。”又《四民月令》于“书篇章”下注称:“六甲、九九、急就、三仓之属”。

唐徐坚(659～729)《初学记》卷二十一:“古者子生六岁,而教数与方名;十岁入小学,学六甲、书计之事。”

8. 算　　术

汉唐引说算术，有下数例：

《前汉书·律历志》论记数筹算云："其法在算术，宣于天下，小学是则，职在太史，羲和掌之。"

《后汉书》卷一百十二下单飏传："单飏字武宣，山阳湖陆人也。以孤特清苦自立，善明天官算术。"

《史记》卷二十五律书："生钟分。"唐司马贞索隐："此算术生钟律之法也。"

《史记》卷二十五律书："实如法得长一寸。"唐司马贞索隐："言得一者，算术设法辞也"。

晋王嘉《拾遗记》卷八："（三国）蜀，周群妙闲算术……更精勤算术，及考校年历以进。"

《南史》卷三十六江夷传附："江湛兼明算术。"

梁刘勰《文心雕龙·书记篇》："术者路也，算历极数，见路乃明；九章积微，故以为术。淮南万毕，皆其类也。"

《周髀算经》卷上："陈子曰：'然，此皆算术之所及'。"

9. 敦煌千佛洞算书和算表

敦煌千佛洞在鸣沙山。光绪己亥(1899年)五月二十五日,在洞道士王园箓(? ～1931)因洞(张大千号C.151洞,伯希和号P.163洞)壁破坏,于此中发见藏经及图书经像,其中一二幅画像,曾由端方、叶昌炽诸人收藏。光绪丁未、戊申间(1907～1908)斯坦因、伯希和(1878～1948)先后来敦煌。斯氏得三四千卷,藏伦敦不列颠博物院;伯氏得六千卷,藏巴黎国家图书馆;其余万余卷,归北京京师图书馆,后改归北京图书院;此外散入私家者,不下数千卷。

敦煌算书流传国外者,在巴黎有:

Pelliot	2667	(甲)	算书
Pelliot	2490	(乙)	算表(公元952年写)
Pelliot	3349	(丙)	算经一卷并序(残)

在伦敦有:

O/N	39760	S.	19	(丁)	算经一卷并序(残)
O/N	39813	S.	5779	(戊)	算经一卷并序(残)
O/N	42518	S.	930	(己)	立成算经一卷

就中(甲)为算书,(乙)为算表,(丙)(丁)(戊)同写算经一卷并序,(己)为《立成算经》一卷。此项算书、算表,以往未曾记录,为中国古代数学史之重要材料。除算表已记明年代外,其余尚未记时

代。因汇集于后，以便参考。

（一）敦煌千佛洞“算书”

敦煌千佛洞“算书”，现藏法国巴黎图书馆，为伯希和(Pelliot)氏敦煌《将来目录》之第二六六七号。今录如下：

“今有男十万八百一十五人：三万六千七百八十三人，丁男，日食米八升；二万五千五百廿八人，老男，日食米七升；一万八千二百一十四人，中男，日食米六升；一万四千一百五十四人，小男，日食米五升；六千一百卅六人，黄男，日食米四升。问前件五等男一日、十日、一月、一年之食米各几何？曰：一日合食米六千七百七十五酥，五升，八升，十日合食米六万七千七百五十五酥八升，一月食米廿万三千二百六十七酥四升，一年食米二百卌三万九千二百八酥八升。

术曰：置丁男三万六千七百八十三人，以八升乘之，退二等，得丁男一日食二千九百卌二酥六升四升，置于上方。次置老男二万五千五百廿八人，以七升乘之，退二等，得老男一日食米一千七百八十六酥九升六升，置于上方。次置中男一万八千二百一十四人，以六升乘之，退二等，得中男一日食米一千九十二酥八升四升，置于上方。次置小男一万四千一百五十四人，以五升乘之，退二等，得小男一日食七百七酥七升，亦置于上方。次置黄男六千一百卅六人，以四升乘之，退二等，得黄男一日食二百卌五酥四升四升。总并五位，得各男一日食六千七百七十五酥五升八升；上十之，得十日之食六万七千七百五十五酥八升；又以三因之，得一月之食，廿万三千二百六十七酥四升；又以十二乘之，得一年之食，二百卌三万九千二百八酥八升。”

“今有马七万八千九百八十五匹。三万二千三百廿三匹上马，日给粟五升；二万四千三百卌一匹中马，日给粟四升；二万二千三百廿一匹下马，日给粟三升。问前件三等马一日、十日、一月、一年之食粟各几何？曰：一日合食粟三万二千五百九十四斛二升，十日合食卅二万五千九百卌二斛，一月食九十七万七千八百廿六斛，一年食一千一百七十三万三千九百一十二斛。

术曰：置上马三万二千三百廿三匹，以五升乘之，退一等，得上马一日食粟一万六千一百六十一斛五升，置于上方。次置中马二万四千三百卌一匹，以四升乘之，退一等，得中马一日食粟九千七百卅六斛四升，亦置上方，次置下马二万二千三百廿一匹，以三升乘之，退位一等，得下马一日食粟六千六百九十六斛三升。总并三位得都合一日食粟三万二千五百九十四斛二升；上十之，得十日都食卅二万五千九百卌二斛；又以三因之，得一月都合食粟九十七万七千八百廿六斛；又以十二乘之，得一年都合食粟一千一百七十三万三千九百十二斛。”

营造部第七

“今有塹广八尺，下无广，深八尺，长七百卅五尺，问千尺为一方，凡得几何方？曰廿三方，不尽五百廿尺。

术曰：先张长七百卅五尺，深次，广八尺半之得四尺，以四尺乘之，得二千九百卌尺，深八尺乘之，得二万三千五百廿，以一千尺于下除之即得。”

“今有堤下广五丈，上广三丈，高二丈，长六十尺，限用一千二百人，一日人二尺，问凡用几何日得了？曰二十日得了。

术曰：置上广卅尺，下广五十尺，并之得八十尺，半之得卌尺，以高廿尺乘之得八百尺，复以其长六十尺乘之，得四万八千尺于上，次列一千二百尺，一日二尺乘之，得二千四百尺，以二千四百尺

除上位，即得。”

“今有屋东西长六丈，广三丈，尺用瓦二枚，问总得几何瓦？曰：三千六百枚。

术曰：以广卅尺乘长六十尺，得积尺一千八百尺，以瓦二枚乘，得三千六百枚。”

“今有城周回七里廿五步，欲竖鹿角柎，三尺立一根，问凡几何根？曰：用四千二百五十根。

术曰：城七里，以三百步乘之，内廿五，得二千一百廿五；以六尺因之得积尺，得一万二千七百五十尺；以三尺除之，即得根数四千二百五十根。”

“今有绵七千二百廿六斤，欲造袍。领别用绵八斤。问总合着绵得几领？曰九百三领，余二斤。

术曰：先张绵七千二百廿六斤于上，以八斤于上除之，即得袍九百三领，余二斤。”

“今欲造袍一千八百九十二领，凡别用紫、帛各三丈五尺。问总紫，帛几何？曰合用三千三百一十一匹：一千六百五十五匹二丈紫，一千六百五十五匹二丈帛。”

“今有城周回十八里，四面有门，门有二楼；又四角，角有一大楼，一十五小楼。廿步置一弩，卌步置一方梁，六十步置一石车，五步置一钩。一大楼上着卌人，一小楼着廿人，弩着三人，一方梁着八人，石车置廿人，一钩置二人，又欲一步着战士一人，问凡用兵几何？曰：一十二大楼用人四百八十个，小楼用人一千二百，二百七十张弩，用人八百一十，一百卅五方梁，用人一千八十人，九十个石车，用人一千八百人，一千八十枚钩，用人二千一百六十人，五千四百步，用人五千四百。

术曰：先张大楼十二，以卌乘之，得四百八十人。次张小楼十

五，以四乘之，得小楼六十，以二十乘之，得一千二百人。次张城十八里，以三百步乘之，得积步五千四百，次以廿步除之，得弩二百七十张，以三人因之，得八百一十人。次更置积步五千四百，以卌步除之，得方梁一百卅五，以八因之，得一千八十人。次置积步五千四百，六十步除之，得石车九十，以廿人乘之，得一千八百人。次更置积步五千四百，以五步除之，得钩一千八十枚，以二人乘之，得二千一百六十人。次更置积步五千四百，以一人因之，得一，乘步长，遂得五千四百人即是。欲得都数，并之得一万二千九百卅人。"

"今有四王各领九军出征，一军有仪同，欲使二人共骑，三骑共火，四火共帅，五帅共将，六将共一都督，七都督共一营主，八营主共一仪同。问合得几何？曰四王，卅六仪同，二百八十八营主，二千一十六都督，一万二千九十六将，二万四百八十帅，二十四万一千九百廿火，七十二万五千七百六十骑，一百卌五万一千五百廿人正身。

术曰：先张四王以九因之，得仪同之数卅六人。次以八因之，得营主之数二百八十八人。次以七因之，得都督之数二千一十六人。次以六因之，得大将之数一万二千九十六人。次以五因之，得帅之数六万四百八十人。次以四因之，得火之数廿四万一千九百廿火。次以三因之，得骑之数七十二万五千七百六十。次以二因之，得正身数一百卌五万一千五百廿人即得。"

□□部第九

"今有木方三尺，高三尺，欲方五寸，作杭[1]一枚，问总得几何？曰二百一十六枚。

术曰：以方三尺自乘之得九尺，以高三尺乘之，得廿七尺，又以

---

① 按现传本《算经十书》内《孙子算经》卷中，和《张邱建算经》卷下，都有和此题相同的问题，其中"杭"都作"枕"。所以此处应改"杭"作"枕"，下同。

八因之，即得杭数。”

“今有蜡方三尺，高三尺，欲一日燃方寸，问得几日燃？曰得七十五年燃。

术曰：方三尺自相乘得九尺，复以高三尺乘之，得廿七尺，迁上十作寸，得二万七千寸，以三百六十日除之，即得。”

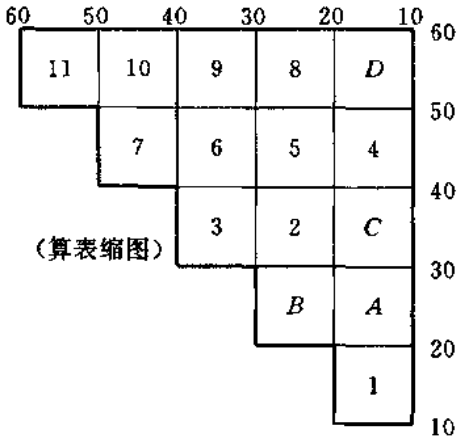
“今有木广三尺，长三尺，高三尺，欲方三寸，作杭一枚，问总得杭几何？曰一千枚。

术曰：广长自相乘得九尺，复以高三尺乘之，得廿七尺，迁十作寸，得二万七千寸。次方三寸自相乘得九寸，复以高三寸乘之，得廿七寸。以廿七寸除之，即得杭数。”

（二）敦煌千佛洞（田积）算表

20步	19步	18步	17步	16步	15步	14步	13步	12步	11步	10步	
一亩半四十步	一亩半二十步	一亩半	一亩一百步	一亩八十步	一亩六十步	一亩四十步	一亩二十步	一亩	半亩一百步	半亩八十	20步
	一亩半一步	一亩一百两步	一亩八十三步	一亩六十步	一亩四十五步	一亩二十六步	一亩七步	半亩一百八步	半亩八十九步	半亩七十	19步
		一亩八十四步	一亩六十六步	一亩四十八步	一亩三十步	一亩一十二步	一亩一百十四步	半亩九十六步	半亩七十八步	半亩六十	18步
			一亩四十九步	一亩三十二步	一亩一十五步	半亩一百十八步	半亩一百一步	半亩八十四步	半亩六十七步	半亩五十	17步
				一亩十六步	一亩	半亩一百四步	半亩八十八步	半亩七十二步	半亩五十六步	半亩四十	16步
					半亩一百五步	半亩九十步	半亩七十五步	半亩六十步	半亩四十五步	半亩三十	15步
						半亩七十六步	半亩六十二步	半亩四十八步	半亩三十四步	半亩二十	14步
							半亩四十九步	半亩三十六步	半亩二十三步	半亩一十	13步
							半亩三十六步	半亩二十四步	半亩十二步	半亩	12步
		半亩七十八步	半亩六十七步	半亩五十六步	牛亩四十五步	半亩三十四步	半亩二十三步	半亩十二步	半亩一步	一百一十	11步

按敦煌千佛洞(田积)《算表》，现藏法国巴黎图书馆，为伯希和 Pelliot 氏敦煌《将来目录》之第二四九〇号，原表系广顺二年(公元 952 年)写本。凡已知田亩广长各若干步，检表即得田亩积若干亩若干(方)步；或若干亩半，若干(方)步。原表广长六十步以下者，检表即得亩数。全表如左缩图。其中 A，B，C，D 各格，今已亡失，所存者为 1 至 11 各格，写成册页式。如上引算表示其中(1)之一格。



(算表缩图)

(三) 敦煌千佛洞《算经》一卷并序

按 1935 年，王重民君于法国巴黎国立图书馆发现敦煌《将来目录》之第三三四九号。有："《算经》一卷[并序]"(丙)，因影摄见寄。此卷上半截完好，下半截残缺，除序文外，尚可参照伦敦所藏二残页(丁)(戊)补全。共一百三十九行，每行约三十字。今按原行数胪列。原文校补之处，旁加圈为志；原文残缺无法校补之处，作方格为志；原文空格之处，作斜十字格为志。

筭经一卷并序$_1$

夫筭者：天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光 ⌋$_2$

之表里，五行之平均，皇极之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪，群伦之聚散。⌋$_3$

考元气于奸宄，推四时之运移，记精微之肇基，□□□□□□

□□□□ ⌋4

□推方员，合规矩，均尺丈，制法度，立权衡，平斛升，剖毫厘，析黍絫，历亿载 ⌋5

而不朽。但行之者富贵有余，背之者贫且贱，□□□□□□□□□□□□□□ ⌋6

盖意明情乐者，安有不成哉。昔鲁人请竿，□□□□□□□□□□□□□□ ⌋7

言人不解竿者，如天无日月，地无泉源，人无眼□，□□□□□□□□□□□□ ⌋8

识××××凡竿者正身端坐，一从右膝而起，先识其位，一纵十横，百立千 ⌋9

僵，万百相似，千十相望，六不积聚，五不单张。竿乘之法，十步至十，百步至百，千步 ⌋10

至千，万步至万。乘除之法，言十自过，不满自当，相乘至尽则已 ⌋11

九九八十一$_{\text{十}}$八九七十二$_{\text{廿}}$七九六十三$_{\text{卅}}$六九五十四$_{\text{四十}}$五九卅五$_{\text{五十}}$四九卅六$_{\text{六十}}$三九廿七$_{\text{七十}}$ ⌋12

二九十八$_{\text{八十}}$一九如九$_{\text{九十}}$八八六十四$_{\text{四十}}$七八五十六$_{\text{六十}}$六八卅八$_{\text{八十}}$五八卅$_{\text{三十}}$四八卅二$_{\text{二十}}$ ⌋13

三八廿四$_{\text{四十}}$二八十六$_{\text{六十}}$一八如八$_{\text{八十}}$七七卅九$_{\text{九十}}$六七卅二$_{\text{二十}}$五七卅五$_{\text{五十}}$四七廿八$_{\text{八十}}$ ⌋14

三七廿一$_{\text{一十}}$二七十四$_{\text{四十}}$一七如七$_{\text{七十}}$六六卅六$_{\text{六十}}$五六卅$_{\text{三十}}$四六廿四$_{\text{四十}}$三六十八$_{\text{八十}}$ ⌋15

二六十二$_{\text{十二}}$一六如六$_{\text{六十}}$五五廿五$_{\text{五十}}$四五廿$_{\text{二十}}$三五十五$_{\text{十五}}$二五十一五如五$_{\text{五十}}$四四十六$_{\text{六十}}$ ⌋16

三四十二$_{\text{十二}}$二四如八$_{\text{八十}}$一四如四$_{\text{四十}}$三三如九$_{\text{九十}}$二三如六$_{\text{六十}}$一三

如三三二二如四四 ⌋17

一二如二二一一如一一 ⌋18

凡数不过十，名不过万，故万万即改。×一十百千万，一万、十万、百万、千万、万万 ⌋19

曰亿。×一亿、十亿、百亿、千亿、万亿、十万亿、百万亿、千万亿。万万亿曰兆。× ⌋20

一兆、十兆、百兆、千兆、万兆、十万兆、百万兆、千万兆。万万兆曰京。×一京、十京、百京、千京，⌋21

万京、十万京、百万京、千万京。万万京曰垓。×一垓、十垓、百垓、千垓、万垓、十万垓，⌋22

百万垓、千万垓。万万垓曰梓。×一梓、十梓、百梓、千梓、万梓、十万梓、百万梓、千万梓。⌋23

万万梓曰让。×一让、十让、百让、千让、万让、十万让、百万让、千万让。万万让曰沟。× ⌋24

一沟、十沟、百沟、千沟、万沟、十万沟、百万沟、千万沟。万万沟曰间。×一间、十间、百间、 ⌋25

千间、万间、十万间、百万间、千万间。万万间曰政。×一政、十政、百政、千政、万政、 ⌋26

十万政、百万政、千万政。万万政曰载。×一载、十载、百载、千载、万载、十万载、 ⌋27

百万载、千万载。万万载曰极。 ⌋28

右孙子数，钱满载，天不容，地不载，故以载为极末也。 ⌋29

凡度之所起起于忽，从蚕口中吐丝为一忽，忽者如一蚕丝之广，十忽为一丝，十丝为一豪， ⌋30

十豪为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，四丈为 ⌋31

一匹，×五丈为一端，×十丈为（一）引，×方丈曰堵，×五尺曰步，×六尺为寻，×七尺为常，⌋32

八尺为一仞，×五尺为一步，×二百卌步为一亩，×一百亩为一顷，×一匹有四丈，四十尺，四 ⌋33

百寸、四千分、四万厘、卌万豪、四百万丝，四千万忽，×一丈有十尺，百寸，千分，⌋34

万厘、十万豪、百万丝、千万忽。×一尺有十寸、百分、千厘、万豪、十万丝、百万忽，× ⌋35

一寸有十分、百厘、千豪、万丝、十万忽。×一分有十厘、百豪、千丝、万忽。×一厘有 ⌋36

十豪、百丝、千忽。×）一豪有十丝，百忽。×一丝有十忽。×又据大唐令文，诸以北方秬黍中者 ⌋37

黍之广（为分）×凡升量所起，起于圭，×六黍为一圭，×十圭为一抄，×十抄为一撮× ⌋38

十撮为一勺，×十勺为一合，×十合为一升，×十升为一升，×十升为一斛。×一斛有十 ⌋39

升、百升、千合、万勺、十万撮、百万抄，千万圭。×一升有十升、百合、千勺、万撮，十万抄 ⌋40

百万圭。×一升有十合、百勺、千撮、万抄、十万圭。×一合有十勺、百撮、千抄、万圭。⌋41

一勺有十撮、百抄、千圭。×一撮有十抄、百圭，×一抄有十圭，×或云六粟为一圭。⌋42

今云廿黍为一圭×方一尺深一尺六寸二分受一石。 ⌋43

秤之所起起于黍，黍者如一黍之重，十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，⌋44

十六两为一斤，×卅斤为一钧，×四钧为一石，×一石有四钧×一

百廿斤×一千九百廿两× ⌋45

四万六千八十铢×卌六万八百叅×四百六十万八千乘×一钧有卌斤×四百八十 ⌋46

两×一万一千五百廿铢×一十一万五千二百叅×一百一十五万二千乘。×一斤有十六 ⌋47

两×三百八十四铢/三千八百卌叅×三万八千四百乘。×一两有二十四铢×二百四十叅 ⌋48

×二千四百乘。×一铢有十叅，百乘×一叅有十乘。 ⌋49

九九八十一×××/××自相乘得六千五百六十一。×九人分之得七百二十九。⌋50

八九七十二×××/××自相乘得五千一百八十四。×八人分之得六百四十八。⌋51

七九六十三××××××自相乘得三千九百六十九。×七人分之得五百六十七。⌋52

六九五十四××××××自相乘得二千九百一十六。×六人分之得四百八十六。⌋53

五九卌五×××××××自相乘得二千廿五，×五人分之得四百五。⌋54

四九卅六×××××××自相乘得一千二百九十六，×四人分之得三百二十四。⌋55

三九廿七×××××××自相乘得七百廿九，×三人分之得二百四十三。⌋56

二九十八×××××××自相乘得三百廿四，×二人分之得一百六十二。⌋57

九九一凡总得三百九十六自相乘得一十五万六千八百一十六。⌋58

已审阅
子居 09-10-26，17:47

八八六十四××××××自相乘得四千九十六，×八人分之得五百一十二。⌋59

七八五十六××××××自相乘得三千一百卅六，×七人分之得四百四十八。⌋60

六八卅八×××××××自相乘得二千三百四，×六人分之得三百八十四。⌋61

五八卅××××××××自相乘得一千六百，×五人分之得三百二十。⌋62

四八卅二×××××××自相乘得一千廿四，×四人分之得二百五十六。⌋63

三八廿四×××××××自相乘得五百七十六，×三人分之得一百九十二。⌋64

二八十六×××××××自相乘得二百五十六，×二人分之得一百二十八。⌋65

八八一凡总得二百八十自相乘得七万八千四百。⌋66

七七卅九×××××××自相乘得二千四百一，×七人分之得三百四十三。⌋67

六七卅二×××××××自相乘得一千七百六十四，×六人分之得二百九十四。⌋68

五七卅五×××××××自相乘得一千二百廿五，×五人分之得二百卅五。⌋69

四七廿八×××××××自相乘得七百八十四，×四人分之得一百九十六。⌋70

三七廿一×××××××自相乘得四百卅一，×三人分之得一百卅七。⌋71

二七十四×××××××自相乘得一百九十六，×二人分之得九十

八。⌋72

七七一凡总得一百八十九，自相乘得三万五千七百廿一。⌋73

六六卅六××××××× 自相乘得一千二百九十六，×六人分之得二百十六。⌋74

五六卅×××××××× 自相乘得九百，×五人分之得一百八十。⌋75

四六廿四××××××× 自相乘得五百七十六，×四人分之得一百卌四。⌋76

三六十八××××××× 自相乘得三百廿四，×三人分之得一百八。⌋77

二六十二××××××× 自相乘得一百卌四，×二人分之得七十二。⌋78

六六一凡总得一百廿，自相乘得一万四千四百。⌋79

五五廿五××××××× 自相乘得六百廿五，×五人分之得一百廿五。⌋80

四五廿×××××××× 自相乘得四百，×四人分之得一百。⌋81

三五十五××××××× 自相乘得二百廿五，×三人分之得七十五。⌋82

二五如十××××××× 自相乘得一百，×二人分之得五十。⌋83

五五一凡总得七十，自相乘得四千九百。⌋84

四四十六××××××× 自相乘得二百五十六，×四人分之得六十四。⌋85

三四十二××××××× 自相乘得一百卌四，×三人分之得卌八。⌋86

二四如八××××××× 自相乘得六十四，×二人分之得卅二。⌋87

四四一凡总得卅六，自相乘得一千二百九十六。⌋88

三三如九××××××× 自相乘得八十一，×三人分之得廿七。⌋89

二三如六××××××自相乘得卅六，×二人分之得十八。⌋90

三三一凡总得十五自相乘得二百廿五。⌋91

二二如四××××××自相乘得十六，×二人分之得八。⌋92

均田法第一：⌋93

今有方田(方)卌九步，×问为田几何？×曰十亩余一步。×术曰：以卌九步自相乘得二。⌋94

千四百一步，以亩法二百卌步除之，即得十亩余一步。⌋95

今有直田广六十步，×长九十步，×问为田几何？×曰廿二亩半。×术曰：列广 ⌋96

六十步×以长九十步乘之，得五千四百步，以二百卌步除之，即得廿二亩半。⌋97

今有员田周一百廿步，×问为田几何？×曰五亩。×术曰：以周自乘得一万四 ⌋98

千四百步，又以十二除之，得实(积)步一千二百步，以二百卌步除之，即得五亩。⌋99

今有四不(等)田×南头广七十五步×北头广六十九步×东畔长百八步×西畔长百廿步，⌋100

问为田几何？×曰卅四亩余卌八步。×术曰：以南头广七十五步并北头广六十九步并之得一百卌 ⌋101

四步，半之得七十二步×置之于上方，又置×西畔长一百廿步×东畔长一百八步×并之得二百廿八 ⌋102

步，半之得一百一十四步，以一百一十四步乘上方七十二步得八千二百八步，复二百卌步除之即得。⌋103

今有甪田×南头广廿二步×北头广一十四步×中央广六十三步×长一百卌步，×问为田几何？× ⌋104

曰十九亩余六十步×术曰：并三广三分而一分以乘长得积步，

以亩法除之即得亩数×置南头广 ⌋105

廿二步×中央六十三步×北头一十四步并之得九十九步，以三除之得卅三步，以卅三乘长 ⌋106

一百卌步得四千六百廿，以二百卌步除之得十九亩余六十步。⌋107

今有环田正员内空形如玉环，外周一百廿五步，×内周十五步，×径十二步，×问为田几何？×曰三亩余一百 ⌋108

廿步，×术曰：并内外周折之，以乘径得积步，×以亩法二百卌步除之即得亩数×置外周一百廿五步， ⌋109

以内周十五步并之得一百卌步，×折之得七十步，以径十二乘之得八百卌步，以二百卌步除之即得 ⌋110

三亩余一百廿步。⌋111

今有角田×本粗末细，外曲长，内曲短，如牛角×南头卌步×北头卅步×外 ⌋112

曲六十步，×内曲卌二步，×问为田几何？×曰七亩余一百五步。×术曰：并两 ⌋113

头，又并内外曲，各折而半之，以相乘得积步，×以法除之，得亩数。⌋114

置南头卌步×北头卅步×并之得七十步，×半之得卅五步，×置于上方× ⌋115

又置外六十步×内卌二步×并之得一百二步，×半之得五十一步，×以五 ⌋116

十一步乘上卅五步得一千七百八十五步，×以二百卌步除之，即得七亩余 ⌋117

一百五步。⌋118

今有箕田形如发箕文掌广六步×舌广廿步×长⌋119

卅步，×问为田几何？×曰一亩余一百五十步×⌋120
术曰：并掌、舌二而一，以乘长得积步，以亩法⌋121
除之。⌋122
置南头六步×北头廿步×并之得廿六步。×半之⌋123
得一十三步，×以长卅乘之得三百九十步，×以二⌋124
百卌除之×得一亩余一百五十步。⌋125
今有圭田形如三角尖如圭北头广七十四步×南头无广×⌋126
长一百八十步，×问为田几何？×曰廿七亩余一百⌋127
八十步。×术曰：折广以长乘得积步，以法除之即得。⌋128
置北头广七十四步×半之得卅七步，×以长一百八⌋129
十步乘之得六千六百六十步，×以二百卌步除之⌋130
得廿七亩余一百八十步。⌋131
今有鼓田形如大鼓，南头七十四步，×北头七十四步×，⌋132
中央一百六十一步，×长一百卌步，×问为田几何？⌋133
曰六十亩余廿步。×术曰：并三广三分而一，以乘⌋134
长得积步，×以亩法除之，即得。⌋135
置南头七十四步×北头七十四步，×中央一百六十⌋136
一步×并之得三百九步，×三分而一，得一百三步⌋137
×以长一百卌步乘之，得一万四千四百廿步×以⌋138
二百卌除之，得六十亩，余廿步。⌋139

（四） 敦煌千佛洞立成算经

《立成筭经》一卷

凡筭知法，大数左畔小右厢，六不积聚，五不单张。大小诸只，具列后详，筭既人间要切，合如略举大别：

| 一纵

— 十横

| 百(立)

— 千疆(僵)

| 万竖

— 亿横

六粟为圭　六十粟为撮　六百粟为杪

六千粟为勺　六万粟为合　六(十)万粟为(升)

六百万粟为龠　六(千万)粟为石

秤之权衡　十粟为黍　十黍为絫

十絫为铢　二十四铢为两　十六两为斤

卅斤为钧　七十斤为石

金方寸为斤　银方寸为十二两　玉方寸为九两

铜方寸为八两　铁方寸为六两　石方寸为四两

尺之豪厘　十忽为丝　十丝为豪　十豪为厘

十厘为分　十分为寸　十寸为尺　十尺为丈

三丈为段　四丈为匹　五丈为端　十丈为引

大数有十　十万曰亿　十亿为兆　十兆为京

十京为垓　十垓为梓　十梓为壤　(十壤)为沟

十沟为间　十间为正　十正为载

九九八(十)一,≡|　直下八十一,　≡|

八九七十二,　⊥||　通前一百五十三,|≡|||

七九六十三,　⊥|||　通前二百一十六,||一丅

六九五十四,　≡||||　通前二百七十,　||⊥

五九四十五,　≡|||||　通前三百一十五,|||一||||

四九三十六,　三丅　通前三百五十一,|||≡|

三九二十七，	二卌	通前三百七十八，	川丄卌
二九一十八，	一卌	通前三百九十六，	川≡丅
一九如九，	卌	通前四百五文，	川川 川川
八八六十四，	丄川川	直下六十四，	丅川川
七八五十六，	≡丅	通前一百二十文，	丨二
六八四十八，	≡卌	通前一百六十八，	丨丄卌
五八四十，	≡	通前二百八文，	川 卌
四八三十二，	三川	通前二百四十，	川≡
三八二十四，	二川川	通前二百六十四，	川丄川川
二八一十六，	一丅	通前二百八十，	川≡
一八如八；	卌	通前二百八十八。	川≡卌
七七四十九，	≡卌	直下四十九，	≡卌
六七四十二，	≡川	通前九十一，	≡丨
五七三十五，	三川川	通前一百廿六，	丨二丅
四七二十八，	二卌	通前一百五十四，	丨≡川川
三七二十一，	二丨	通前一百七十五，	丨丄川川
二七一十四，	一川川	通前一百八十九，	丨≡卌
一七如七；	卌	通前一百九十六。	丨≡丅
六六三十六，	三丅	直下三十六，	三丅
五六三十，	三	通前六十六，	丄丅
四六二十四，	二川川	通前九十，	≡
三六一十八，	一卌	通前百八(文)，	丨 卌
二六一十二，	一川	通前一百廿文，	丨二
一六如六；	丅	通前一百廿六文。	丨二丅
五五廿五，	二川川	直下廿五，	二川川
四五廿，	二	通前四十五，	≡川川

三五十五，	一卌	通前六十，	丄
二五十，	一	通前七十，	丄
一五如五，	卌	通前七十五，	丄卌
四四十六，	一丅	直下十六，	一丅
三四十二，	一川	通前廿八，	二卅
二四如八，	卅	通前三十六，	三丅
一四如四；	卌	通前四十。	三
三三如九，	卅	直下九，	卅
二三如六，	丅	通前一十五，	一卌
一三如三，	川	通前一十八。	一卅
二二如四，	卌	直下四，	卌
一二如二；	川	通前六文。	丅
一一如一，	丨	直下一。	丨

都计得一千一百五十五文

立成筭法。

10. 九　　宫

《大戴礼记·明堂篇》：二九四七五三六一八。北齐，卢辩注《大戴礼》有法龟文之说。

《数术记遗》记天目先生之言曰："隶首注术，乃有多种。及余遗忘，记忆数事而已。其一积算，其一太乙，其一两仪，其一三才，其一五行，其一八卦，其一九宫，其一运算*，其一了知，其一成数，其一把头，其一龟算，其一珠算，其一计算**。"后周甄鸾注谓："九宫者，即二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。"如图如示。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

唐开元中(713～741)，王希明《太乙金镜式经》卷二："九宫之义，法以灵龟，以二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，此为不易之道也。"据《四库全书》本。

《玉海》卷三："《太乙金镜式经》，开元中王希明撰。"

《旧唐书》卷二十四礼仪志："天宝三年(公元744年)有术士苏嘉庆上言请于京东朝日坛东置九宫贵神坛，……五为中，戴九履

---

* 算，《数术记遗》下文作"筹"，钱宝琮校点《算经十书》改作"筹"。——编者

** 算，南宋本作"数"，《数术记遗》下文均作"数"。——编者

一，左三右七，二四为上，六八为下。”

《资治通鉴》卷二百一十五：“术士苏嘉庆上言：遁甲术有九宫贵神。”注：“九宫贵人，盖《易乾凿度》所谓太一也，注已见五十二卷。汉顺帝阳嘉三年时，九宫贵神坛……五为中，戴九履一，左三右七，二四为上，六八为下。”

《史记·日者列传》：术数七家，太乙家居其一。

清钱大昕《十驾斋养新录》卷一“河图洛书”条：“九宫之图古矣。《大戴礼·明堂篇》：二、九、四；七、五、三；六、一、八。明堂九室之制，盖准乎此。《易乾凿度》四，正四维皆合乎十五，亦谓此图也。”参观清陆耀《切问斋集》卷三，第八至一〇页，惬吉堂刻本，乾隆壬子(1762年)。

清邹伯奇不信此说。见“明堂会通图说”，《学计一得》卷下(1844年)。

11. 魏刘徽注《九章》

魏刘徽撰注《九章算术》，其见于唐人记载者：唐李贤《后汉书·马援列传注》云：

刘徽《九章算术》曰方田第一、粟米第二、差分第三、少广第四、商功第五、均输第六、盈不足第七、方程第八、勾股第九。

宋王应麟《玉海》卷四四引同。《隋书·律历志》云：

魏陈留王景元四年（公元263年），刘徽注《九章》云：王莽时刘歆斛尺弱于今（魏）尺四分（原误作寸）五厘，比魏尺其斛深九寸五分五厘。

又云：

魏陈留王景元四年（公元263年），刘徽注《九章·商功》曰：当今（魏）大司农斛圆径一尺三寸五分五厘，深一尺，积一千四百四十一寸十分之三。

上两文见《隋书》卷十六，律历志第十一，律历上。

盖 $\frac{1}{2}\times 13.55=6.775$ 寸 （半径）

$(6.775)^2=45.900625$ 方寸 （半径幂）

$\pi=3.14$ （徽率）

则 $10\pi(6.775)^2=1441\frac{3}{10}$ （魏斛容积）

《隋书·律历志》又云：

王莽铜斛于今(魏)尺为深九寸五分五厘，径一尺三寸六分八厘七毫，以徽术计之，于今(魏)斛为容九斗七升四合有奇。此魏斛大而尺长，王莽斛小而尺短也。

上文见《隋书》卷十六，律历志第十一，律历上。

盖　王莽铜斛径＝14.332136 寸(＝14.142＋2×0.095)

(0.955)(14.332136)＝13.687 寸　(内径)

$\frac{1}{2}\times 13.687=6.8435$ 寸　(半径)

$(6.8435)^2=46.83349225$ 方寸　(半径幂)

$\pi=3.14$　(徽率)

则　$10\times 0.955\pi(6.8435)^2=1404.3959$。　(王莽斛容积)

$$\frac{\text{王莽斛容积}}{\text{魏斛容积}}=\frac{1404.3959}{1441\frac{3}{10}}=0.974^{+}$$

12. 中国古代数学家(一)

(一) 张　　苍

张苍,阳武人,好书律历。秦时为柱下御史,明习天下图书计籍,又善用算律历。汉高祖六年(公元前202年)封北平侯,迁为计相,吕后八年(公元前180年)为御史大夫。文帝四年(公元前176年)为丞相。文帝后元二年(公元前162年)八月免相。孝景五年(公元前125年)薨,谥曰文侯。年百余岁。汉家言律历者本张苍,著书十八篇,言阴阳律历事(见《史记》卷九十六,张丞相列传第三十六;《前汉书》卷一十九下,百官公卿表第七下及卷四十二,张周赵任申屠传第一十二;《四部丛刊》影明刊本,汉荀悦《前汉纪》第二册,第14页)。

魏刘徽《九章算术注序》(公元263年)称:"往昔暴秦焚书,经术散坏。自时厥后,汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌,皆以善算名世。苍等因旧文之遗残,各称删补。"(见《九章算术序》第一页,《算经十书》本)

(二) 耿　寿　昌

"(汉)宣帝即位……时大司农中丞耿寿昌,以善为算,能商功

利，得幸于上。……寿昌习于商功分铢之事。”（见《前汉书》卷二十四上，食货志第四）

神爵元年（公元前61年），“……耿中丞眼虔曰：耿寿昌也，为司农中丞，籴二百万斛谷，羌人不敢动矣 。”（见《前汉书》卷六十九，赵充国、辛庆忌传第三十九）

“或问浑天。曰：落下闳营之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几几乎莫之能违也。”（见《四部丛刊》影翻宋本扬雄《扬子法言》卷第十，第一页）

“甘露二年（公元前52年），大司农中丞耿寿昌奏：以图仪度日月行，考验天运日月行赤道。”（见《后汉书》卷一十二，律历志第二。《旧唐书》卷三十五，天文志第十五，引同）

“（耿寿昌）五凤四年（公元前54年），奏设常平仓以给北边，省转漕，赐爵关内侯。”（见《前汉书》卷八，宣帝纪第八及卷二十四上，食货志第四）

“五凤中……是时大司农中丞耿寿昌奏设常平仓，上善之。（萧）望之非寿昌。”（见《前汉书》卷七十八，萧望之传第四十八）

“初元元年（公元前48年）春正月辛丑，孝宣皇帝葬杜陵。”（见《前汉书》卷九，元帝纪第九）

“大司农中丞耿寿昌造杜陵，赐爵关内侯。”（见《前汉书》卷七十，傅常郑甘陈段传第四十）

“耿（寿）昌《月行帛图》二百三十二卷，耿（寿）昌《月行度》二卷。”（见《前汉书》卷三十，志第十，艺文“历谱”）

（三） 许　　商

许商，一作许商，字长伯，汉长安人，善为算，能度功用，著《五

行论历》,官至九卿。又著《许商算术》二十六卷。其自建始元年(公元前32年)迄绥和元年(公元前8年)历官及治河事迹,俱见《前汉书》、《资治通鉴》等书。

成帝初(建始元年,公元前32年),清河都尉冯逡奏言治河,"事下丞相、御史,白博士许商治《尚书》,善为算,能度功用,遣行视。以为屯氏河盈溢所为,方用度不足,可且勿浚。后三岁(建始四年,公元前29年),河果决于馆陶及东郡金堤。……杜钦说大将军王凤……,以为'宜遣(杨)焉及将作大匠许商、谏大夫乘马延年……商、延年皆明计算,能商功利,……必有成功'。凤如钦言,白遣焉等作治。……后九岁,鸿嘉四年(公元前17年),……勃海、清河、信都、河水溢溢。……河堤都尉许商与丞相史孙禁共行视,图方略。"(见《前汉书》卷二十九,沟洫志第九)

"河平三年(公元前26年),河复决平原,流入济南,千乘,所坏败者半建始时。复遣王延世与丞相史扬焉及将作大匠许商、谏大夫乘马延年同作治,六月乃成。复赐延世黄金百斤。"(见《资治通鉴》卷三十,汉纪,孝成皇帝上)

《九域志》称:"滴水因都尉许商而得名。"

《资治通鉴》卷二百七十九注:"隋开皇十六年置滴河县,属渤海郡,唐属棣州。《九域志》:滴河县在棣州西南八十里。注云:汉都尉许商凿此河通海。故以商为名,后人加水焉。"

"孝武时夏侯始昌通五经,善推《五行传》,以传族子夏侯胜,下及许商。"(见《前汉书》卷二十七中之上,五行志第七中之中)

"《(尚)书》九家,四百一十二篇。"内有许商《五行传记》一篇(见《前汉书》卷三十,艺文志十)。

许商与师丹、郑宽中、张禹同为成帝时经学大师,且为成帝帝师。师丹治《诗》,郑宽中治《尚书》,张禹治《论语》,许商亦治《尚

书》。张禹《前汉书》有传，见卷八十一，列传第五十一。许商为帝师事迹见《前汉书》卷一百上，传第七十上，叙传上。叙传称：

“（班）伯少受诗于师丹……时上（成帝）方向学，郑宽中、张禹，朝夕入说《尚书》、《论语》于金华殿中，诏（班）伯受焉。既通大义，又讲异同于许商。……是时（永始三年，公元前 14 年），许商为少府，师丹为光禄勋，上于是引（许）商、（师）丹入为光禄大夫（在元延元年，公元前 12 年），（班）伯迁水衡都尉，与两师（许商，师丹）并侍中，皆秩中二千石。”（见《前汉书》卷一百上，《传》第七十上，叙传上）

“元延元年（公元前 12 年），引少府许商……为光禄大夫……皆秩中二千石。”（见《资治通鉴》卷三十二汉纪孝成皇帝中）

“永始三年（公元前 14 年），詹事许商为少府，二年为侍中光禄大夫。绥和元年（公元前 8 年），侍中光禄大夫许商为大司农，数月迁为光禄勋，四月迁。”（见《前汉书》卷一十九下，百官公卿表第七下）

（汉）成帝河平三年（公元前 26 年），“谒者陈农使，使求遗书于天下。”“太史令尹咸校数术。”许商、杜忠《算术》亦在其列。（见《前汉书》卷十，帝纪第十，成帝，及卷三十，志第十，艺文）

“《许商算术》二十六卷。”（见《前汉书》卷三十，志第十，艺文）

“《九章术》，汉许商、杜忠、吴陈炽、魏王粲并善之。”（见《广韵》卷第四，换第二十九，……算）

大通六年（公元 534 年）梁太子纲撰《法宝联璧》二百余卷，湘东王绎撰序，曾称：《许商算术》。

（四） 杜　　忠

杜忠，著《算术》一十六卷，见《前汉书·艺文志》。汉河平（公元

前 26 年),尹咸校数术,许商、杜忠《算术》亦在其列。《广韵》卷四云:"《九章术》,汉,许商、杜忠;吴,陈炽;魏,王粲并善之。"故清沈钦韩、王先谦并谓《汉志》许商、杜忠《算术》即是《九章》(见《前汉书》卷一十,帝纪第一十,成帝及卷三十,志第一十,艺文。《广韵》卷第四,换第二十九,……算)。

(五) 尹 咸

尹咸,汝南人,汉宣帝永元四年(公元前 40 年)时谏大夫尹更始之子,传父《春秋》左氏传学,官至大司农。(见《前汉书》卷八十八儒林传内瑕丘江公传及卷七十三,韦贤玄成传。)

"初尹咸官丞相史,以能治《左氏传》,与(刘)歆共校经传。"(见《前汉书》卷三十六刘歆传)

成帝河平三年(公元前 26 年),使谒者陈农求遗书于天下。"太史令尹咸校数术。"许商、杜忠《算术》亦在其列(见《前汉书》卷一十,帝纪第一十,成帝,及卷三十,志第一十,艺文)。

(六) 刘 歆

刘歆,字子骏,少为黄门郎,河平中(前 28~前 25)与父向(前 77~公元 6 年)领校秘书,数术方技,无所不究。永始二年(公元前 15 年),翟方进为丞相,绥和二年(公元前 7 年)薨。方进好《左氏传》、天文、星历。其左氏则国师刘歆,星历则长安令田终术师也。哀帝崩,王莽持政,留歆为右曹太中大夫。元始五年(公元 5 年)为羲和,后封红休侯。王莽篡位,歆为国师,嘉新公。更始元年(公元 23 年)为莽所诛,年七十余。歆考定律历,著《三统历谱》。班固《前汉

书·律历志》,实本刘歆旧文(见《前汉书》卷一十二,帝纪第一十二,平帝;又卷二十一,志第一上,律历;又卷三十,志第一十,艺文;又卷三十六,列传第六,楚元王,刘向子歆;又卷八十四,列传第五十四,翟方进;又卷九十九,列传第六十九中,王莽)。

(七) 张 衡

张衡,字平子,南阳西鄂人,生汉章帝建初三年(公元78年),卒顺帝永和四年(公元139年),年六十二。衡善机巧,尤致力阴阳、天文、历算。安帝雅闻衡善学术,公车特征拜郎中,再迁为太史令(见《后汉书》卷八十九,张衡列传第四十九)。"未几迁为尚书郎。顺帝时再转为太史令。积年不徙,遂自去太史令职,五年复还。嗣是续居史职,至阳嘉末乃迁,盖十八余年间,三任太史令矣。"(见张荫麟,"张衡别传",《学术杂志》第四十期,1925年四月,第3~4页)

《后汉书》卷八十九称:衡初任太史令时,"遂乃研核阴阳,妙尽璇玑之正,作浑天仪,著《灵宪》、《算罔论》,言甚详明。"《算罔论》今已不传。

《后汉书》卷六又称:阳嘉元年(公元132年),"秋七月,史官始作候风地动铜仪。"唐李贤注:"时张衡为太史令,作之。"

刘徽《九章·少广》开立圆术注引及张衡《算》。清李潢按:"张衡《算》一节,文多舛错。……置周率一十之面,开方除之,得三·一六有奇,故云增周太多。"是张衡以 $\pi=\sqrt{10}=3.16$(见清李潢《九章算术细草图说》)卷四,少广第46~47页,语鸿堂刻本,嘉庆庚辰,1820年)。

唐《开元占经》引祖暅《浑天论》称:张衡"日月其径当周天七百三十六分之一,地广二百三十二分之一。按此而论,天周分母圆周

率也,广分母圆径率也,以八约之,得周率九十二,径率二十九。其率伤于周多径少,衡之疎也。"是张衡又以 $\pi=\frac{92}{29}$。(见唐瞿昙悉达《开元占经》卷一,第 25～26 页,恒德堂刻本。)

临海洪颐煊撰集《经典集林》,卷二十六称:"张衡《灵宪》一卷内:用重差,钩股。"

印度梵藏(Brahma-gupta,598～?)于其著述(*Brahma－Sphuta Sidd'hanta*,公元 628 年)中,及其后二百年亚拉伯算书,方说到:$\pi=\sqrt{10}$(参阅 Zeuthen,H. G.:*Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, Tr. par J. Mascart, p. 256, Paris,1902 及 Kaye,G. R.:*Indian Mathematics*, *p.* 33,*Calcutta*, 1915,又 Cajori,F.:*A History of Elementary Mathematics*, rev. ed. p. 94,New York,1917。)

(八) 刘　　洪

刘洪,字元卓,泰山蒙阴人,鲁王之宗室也。延熹(158～166)中,以校尉应太史征拜郎中,迁常山长史,以父忧去官。后为上计掾,拜郎中,检东观著作《律历记》,迁谒者。光和中(178～183)为谷城门侯。洪善算,当世无偶,作《七曜术》。及在东观,与蔡邕共述《律历记》,又造《乾象术》(见《后汉书》卷一十二,律历志第二,梁刘昭注引袁松山书。又卷一十三,律历志,第三,梁刘昭注)。

"刘洪好学,以天文数术,探颐钩深,遂专心锐思。"(见《玉海》卷二引《博物记》)

"汉灵帝时(168～183),会稽东部尉刘洪……作《乾象法》……献帝建安元年(公元 196 年),郑玄受其法,以为穷幽极微,又加注

释焉。”(见《晋书》卷十七,志第七,律历中)

“至(汉)灵帝《四分历》,犹复后天半日,于是会稽都尉刘洪更造《乾象历》,以追日月星辰之行,考之天文,于今为密。”(见《四部丛刊》影明刊本汉徐幹《中论》卷下,第十六页)

何承天曰:“光和中(178～183),谷城门侯刘洪始悟《四分》于天疏阔,更以五百八十九为纪法,百四十五为斗分,造《乾象》法。”(见《宋书》卷十二及《后汉书》卷十三,注)

“郎中刘洪,密于用算……。”(见《四部丛刊》影明刊本《蔡中郎集》)

参看梁剡令刘昭补并注《后汉书》卷十三,律历志三。

唐释慧琳《大藏经音义》卷六:“刘洪有《九章(或误作京)算术》。”(见1916年《适园丛书》本姚振宗《后汉艺文志》,1889年引)

刘洪《乾象历》,有正负术,如下:

“强正弱负　强弱相并　同名相从　异名相消
其相减也　同名相消　异名相从　无对互之。”

(严敦杰注:刘洪的“无对”,与《九章》“无入”同义。)

后来刘徽注《九章算术》称:“无入为无对也。”

(九) 马　续

马续,字季则,扶风茂陵人,马严(17～98)子,马融(79～166)兄。七岁能通《论语》,十三明《尚书》,十六治《诗》,博观群籍,善《九章算术》。班固(32～92)著《汉书》,其八表及天文志未及竟而卒。而马续述天文志(见《后汉书》卷五十四,马援列传第十四,又卷一百十四,列传第七十四,“列女”,曹世叔妻,又卷二十,梁刘昭天文志第十,天文上)。

阳嘉三年(公元134年)秋七月,"钟羌寇陇西、汉阳。冬十月,护羌校尉马续击破之。"永和元年(公元136年),耿晔病,马续以护羌校尉,代为度辽将军。永和五年(公元140年)四月,南匈奴左部句龙王(一作大人)吾斯、车纽等叛,围美稷,五月马续破之。永和六年(公元141年),马续率鲜卑五千骑破乌桓,是年夏免官。"(见《后汉书》卷六顺冲质帝纪第六及卷一百十九列传第七十九南匈奴)

"顺帝时(134~141),(马续)为护羌校尉,迁度辽将军,所在有威思称。"(见《后汉书》卷五十四,马援列传,第十四)

(十) 郑 玄

郑玄,字康成,北海高密人。玄少学书数,八九岁能下算乘除。年二十一,博极群书,兼精算术(见梁刘孝标《世说新语》卷上之下,文学第四,引《高士传》)。

郑玄师事京兆第五元先,始通《三统历》、《九章算术》。建安元年(公元196年),受《乾象历》于刘洪,为加注释;生永建二年(公元127年),卒建安五年(公元200年),年七十四(见《后汉书》卷六十五,张曹郑列传第二十五及《晋书》卷十一,天文志上,又卷十七,志第七,律历中)。

"皇甫士安《高士传》曰:郑玄字康成,北海高密人也,学《孝经》、《论语》,兼通京氏《易》、《公羊》、《春秋》、《三正历》、《九章算术》、《周官礼记》、《左氏》、《春秋》。"(见宋李昉《太平御览》卷第五百九,逸民部九,引)

"(汉)献帝建安中,袁绍与曹操相御于官渡,绍逼,大司农郑玄随军死此(黎阳县)。……玄注五经、纬、候历、天文经、通于世。"(见"四部丛刊"影武英殿聚珍本后魏郦道元《水经注》卷五,第十七

页）

郑玄释《周官》保氏九数称："九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、夕桀、勾股也。"唐贾公彦疏郑注云："方田已下，皆依《九章算术》而言。云今有重差、夕桀、勾股也者，此汉法增之。"

（十一） 蔡　邕

蔡邕，字伯喈，陈留圉人，好辞章数术天文。"先治律历，以筹算为本，天文为验"（"上汉书十志疏"语），与刘洪共论历法。生汉顺帝阳嘉二年（公元133年），卒献帝初平三年（公元192年），年六十。（见《后汉书》卷九十下，蔡邕列传第五十下，又《四部丛刊》影明刊本《蔡中郎集》，蔡中郎外传内"上汉书十志疏"。又吴修《续疑年录》："蔡邕本传：邕死狱中，年六十一。今从王昶所列年表"。）

《史记》卷一，五帝本纪第一，唐张守节正义于"璇玑玉衡，以齐七政"文下引："蔡邕云：玉衡长八尺……玑径八尺，圆周二丈五尺而强也。"蔡氏已知 $\pi>3.125$ 或 $>\frac{25}{8}$。

明王文素《通证古今算学宝鉴》（1524年）亦引此圆周率，称做"玑衡率"。

（十二） 徐　岳

徐岳，字公河，东莱人，生于汉末，受历学于汉灵帝时（168～188）会稽东部尉刘洪。会稽因述天目先生之语，岳为成《数术记遗》一卷。吴中书令阚泽受刘洪《乾象法》于东莱徐岳，又加解注。

(见《后汉书》卷十二;《晋书》卷十七,志第七,律历中;《宋书》卷十二,志第二,历上;宋嘉定五年(1212年)鲍澣之《数术记遗》序。)

徐岳于黄初中(220～226),与韩翊、许芝、董巴,在魏与太史令高堂隆详议历法(见《晋书》卷十七)。

魏王朗《塞势》曰:"余所与游处,惟东莱徐先生素习《九章》,能为计数。"(见宋李昉《太平御览》卷七百五十四引)

《隋书·经籍志》有:"《九章算术》二卷,徐岳(撰),甄鸾重述。《九章别术》二卷,《九章算经》二十九卷,徐岳、甄鸾等撰。《九章算经》二卷。徐岳注。"

《旧唐书·经籍志》有:"《九章算经》一卷,徐岳撰……《数术记遗》一卷,徐岳撰,甄鸾注。……《算经要用百法》一卷。徐岳撰。"

《新唐书·艺文志》有:"徐岳《九章算术》九卷,又《算经要用百法》一卷,《数术记遗》一卷甄鸾注。"

《宋史》有:"甄鸾注,徐岳《大衍算术注》一卷。"

(十三) 阚　　泽

阚泽,字德润,会稽山阴人也。……阚泽延熙五年(公元242年)拜太子太傅,又著《乾象历注》(见《三国志》卷五十二,《吴书》八,张严程阚薛传第八)。

三国吴中书令阚泽受刘洪《乾象法》于东莱徐岳,著有《乾象历注》(见《晋书》卷十七,志第七,律历中)。

唐徐坚(659～729)《初学记》器物部引:"阚泽《九章》曰:粟饭五十,粝饭七十,粺饭五十,糲饭四十八,御饭四十二。"

《佛祖统记》称:"阚泽建德润寺。"

道世《法苑珠林》卷一百二十历算部"说佛生年"称:"谨依魏国

昙谟最法师，及修历博士姚长谦等据《穆王天子传》，《周书异记》，前汉刘向《列仙传》序，并古旧二录，后汉《法本内传》，及《傅教法王本记》，吴尚书令阚泽等众书，准《阿舍经》等委细推究，冀得依实。”

又《法苑珠林》卷六十九引：“故吴主孙权问尚书令阚泽曰”云云。

（十四） 赵　爽

赵爽，字君卿，一曰名婴。宋李籍《周髀音义》称“不详何代人”。宋鲍澣之《周髀算经序》疑“魏晋之间人”（见明赵开美校刊本《周髀算经》）。

清阮元《畴人传》曰：“今本《周髀算经》题云汉赵君卿注，故系于汉代云。”（见清阮元《畴人传》卷四，《观我生室汇稿》本第十五页）

明赵开美校刊本《周髀算经》亦题：“汉赵君卿撰。”

（十五） 陆　绩

陆绩，字公纪，吴人，博学多识，星历算数，无不该览。孙权统事，辟为奏曹掾，出为郁林太守，年三十二卒（见晋陈寿《三国志》，吴志第十二）。

陆绩云：周天一百七万一千里，东西、南北径三十五万七千里，此言周三径一（见《宋书》卷二十三，志第十三，天文一。《晋书》卷十一，志第一，天文上及《开元占经》卷第一，第十三页）。

(十六) 王 蕃

王蕃,字永元,庐江人,博览多闻,兼通术艺;始为尚书郎,孙休即位,为散骑中常侍,加驸马都尉。又为夏口监军。孙皓初,复入为中常侍。甘露二年(公元266年),皓大会群臣,蕃沈醉顿伏,皓怒斩之,时年三十九(228~266)。关于圆率,蕃尝更考,周百四十二,而径四十五。即 $\pi=\frac{142}{45}=3.155$(见《三国志·吴志》第二十,《宋书》卷二十三,《晋书》卷十一,及《开元占经》卷一、卷二。)

唐李淳风《乙巳占》卷一天数第二称:"王蕃者,庐江人也,吴时为中常侍,善术数,传刘洪《乾象历》。"

《唐文粹》卷第五卢肇《海潮赋后序》称:"又案:吴王蕃法云:余因《周礼》郑众、郑玄之言,用勾股之术,以求天之里数,……倍之得十六万二千七百八十八里有奇,即天径之数也。以周径之法乘得五十一万二千六百八十七里有奇,即周天之数也。"(据《四部丛刊》影元翻宋本《唐文粹》)所谓周径之法,即指:$\pi=\frac{142}{45}=3.155$。

(十七) 陈 炽

陈炽,吴人,善《九章术》,与汉许商、杜忠,魏王粲并称(见《广韵》卷第四,换第二十九,……算)。

(十八) 王 粲

王粲,字促宣,山阳高平人,蔡邕尝见重之;博物多识,强记默

识，性善算，作《算术》，略尽其理，建安二十一年（公元 216 年）从征吴，二十二年春道病卒，年四十一岁（177～217）（见《三国志·魏志》第二十一王粲及《广韵》卷第四）。

《文选》王仲宣（粲）诔云："建安二十二年（公元 217 年）正月二十四日戊申，魏故侍中关内侯王君（粲）卒。"（见《文选》卷五曹子建"王仲宣诔"序）

（十九） 刘　　徽

刘徽，魏陈留王景元四年（公元 263 年）注《九章算术》。求圆率以圆内六边形起算，谓："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体，而无所失矣。"其方法为前人所未道，是为刘徽割圆术。曾定圆周率 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$，号为徽率。刘徽又造重差术。王孝通称："徽思极毫芒，触类增长，乃造重差之法，列于（《九章》）终篇。"《隋书·经籍志》有：刘徽《九章重差图》一卷，《旧唐书》、《新唐书》则记《九章重差》一卷，刘向（?）撰，《九章重差圆》一卷，刘徽撰①（见《晋书》卷十六，《志》第六，律历上；《隋书》卷十六，律历志第十一，律历上；《九章算术》，《算经十书本》）。

刘徽割圆术，以：

l_n＝有法 n 边形一边之长，r＝圆半径，

则　　$L(=l_{2n})$＝有法 $2n$ 边形一边之长

$$=\sqrt{\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l_n}{2}\right)^2} \tag{1}$$

① 《隋书·经籍志》另有"《鲁史欹器图》一卷，仪同刘徽注"。此刘徽，清姚振宗《隋书·经籍志考证》已考证是刘晖的误，三国无仪同官职（严敦杰补注）。

$$=\sqrt{r[2r-\sqrt{(4r^2-l_n^2)}]} \tag{2}$$

徽准是式由六边求至九十六边，得 $\pi=3.141024=3.14\frac{64}{625}$，于是定

$$\pi=\frac{157}{50}=3.14。$$

13. 南朝宋祖冲之著缀术

唐长孙无忌《隋书》卷十六，律历志卷十一云：

古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间，密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。

盖 $$3.1415926<\pi<3.1415927$$

$$\pi=3.14159265,$$

$$\pi=\frac{355}{113},\quad \pi=\frac{22}{7}。$$

$\frac{355}{113}$率，寻常称为安托尼兹(Adriaen Anthonisz，十六、七世纪时人)率[1]。

---

① 见 Smith，D. E. 著，郑太朴译，《圆周率 π 之历史及其超越性》，第 113 页，《万有文库》本。

《隋书》卷十六，嘉量条，《晋书》卷十六嘉量条，并称：

“《周礼》㮚氏为量，鬴深尺，内方尺，而圜其外，其实一鬴……祖冲之以算术考之，积凡一千五百六十二寸半，方尺而圜其外，减傍一厘八毫，其径一尺四寸一分四毫七秒二忽有奇，而深尺，即古斛之制也。”

《周礼·考工记》以六斗四升为鬴。《隋书·律历志》上引，“郑玄以为方尺积千寸，比《九章》粟米法少二升八十一分升之二十二。”盖《九章》粟米法斛积一千六百二十寸。鬴为六斗四升。拿十斗来比例计算。

$$10:6.4=1620:x$$

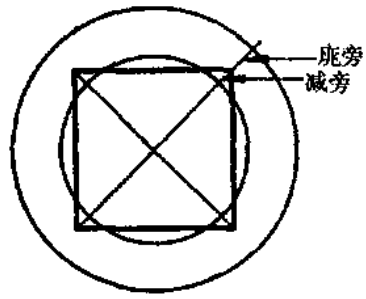
$$x=1036\frac{8}{10}$$

$$(1036\frac{8}{10}-1000)\div16\frac{2}{10}(\text{升法})=2\frac{22}{81}\text{升。}$$

所以还原“祖冲之以算术考之，积凡一千五百六十二寸半。”

$$10:6.4=y:1000$$

$$y=1562.5$$



如附图，表示：

古斛的减旁。

王莽铜斛的庞旁。

古斛：

$$\frac{10\pi}{4}(10\sqrt{2}-2\times0.018)^2=1562.5$$

王莽铜斛：

$$\frac{10\pi}{4}(10\sqrt{2}+2\times0.109)^2=1620$$

以祖冲之圆率 $\pi=3.14159265$ 或 $\pi=\frac{355}{113}$ 两值代入计算都合。

（楷体字为严敦杰补注）

祖冲之《缀术》，曾为唐代学官所选用，故其圆率亦为世人所习知，时见引用。如《隋书》卷十六，载后周武帝保定元年玉斗："内径七寸一分，深二寸八分……今若以数计之，玉升积玉尺一百一十寸八分有奇，斛积一千一百八寸五分七厘三毫九秒。"

盖 $\frac{1}{2}\times 7.1=3.55$ 寸 （半径）

$(3.55)^2=12.6025$ 平方寸 （半径幂）

$\pi=3.14159265$ （祖冲之率）

$10\times 2.8\pi(3.55)^2=1108.5737984055$

$=1108.5739(?)$ 立方寸 （容量）

14. 梁祖暅之开立圆术

祖暅之求圆球之体积，第一步先设一立方形，每边之长为 $D=2r$，如图(1)；此立方形可以内容一圆球，其半径之长为 r。次假设此立方形，纵横两面，各以圆柱相贯通后，再平分为上下两半，如图(2)、(3)。再将此上半个分为四小块，如图(2)，则各边之长为 r，体积为 r^3，每块自成一小立方形。且经两圆柱纵横相贯通后，此小立方应分四立体形，如图(4)及(6)、(7)、(8)、(9)。若于距底边 a 处，以一平面平截此小立方，则其截面有四形，即大平方形一个，长方形二个，小平方形一个，如图(6)、(7)、(8)、(9)；又因图(5)内于勾股形内已知弦为 r，勾为 a，假令其股为 b，即所切大平方形之一边为 b，其面积为 $b^2=r^2-a^2$，如图(11)；现因小立方内之四立体形本合立一立方，其截面之总面积为 r^2，如图(10)，减去其中之大平方形 $b^2=r^2-a^2$，则其余三立体形在此处之总截面积为 $r^2-(r^2-a^2)=a^2$，如图(12)；同理在 1 处之总截面积为 1^2，在 2 处之总截面积为 2^2，逐次如是，在 r 处之总截面积为 r^2。现在以 r^2 为底，r 为高之倒方锥形，如图(13)，正适合上开条件。故此三立体形可相合为一方锥形，其体积为 $\frac{1}{3}r^3$。因小立方体积为 r^3，则其余一较大之立体形体积为 $\frac{2}{3}r^3$。合此同样者四个为一“合盖形”，以其形似盒子盖

也。而此“合盖形”，a 处截面之面积为 $4b^2$，底之面积为 $4r^2$，其体积为 $4\times\frac{2}{3}\times r^3=\frac{8}{3}r^3$。

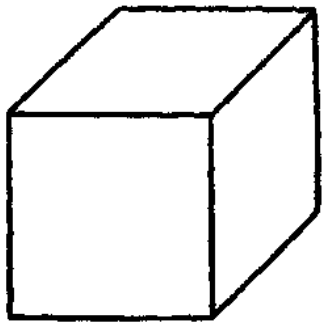
次假设此立方形，可以容一圆球，则其半立方形，必内容半圆球，假令球顶向上，如图(14)，于距底面 a 处，以一平面平切此半圆球，如上例，因勾股形内已知弦为 r，句为 a，假令其股为 b，则所切圆形之半径为 b，其面积为 $\pi b^2=\pi(r^2-a^2)$，如图(15)。

如于半立方形内同时内容一“合盖形”及一半球形，于距底边 a 处以一平面平切此两形，则其截面积各为 $4b^2=4(r^2-a^2)$ 及 $\pi b^2=\pi(r^2-a^2)$，即此两形截面积或体积之比，并为 $4:\pi$，假令圆形之体积为 V，则

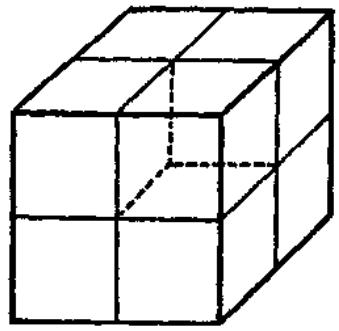
$$\text{合盖形}:\text{半圆球体积}=4:\pi$$

或

$$\frac{8}{3}r^3:\frac{1}{2}V=4:\pi,\qquad \therefore V=\frac{4}{3}\pi r^3。$$ ①

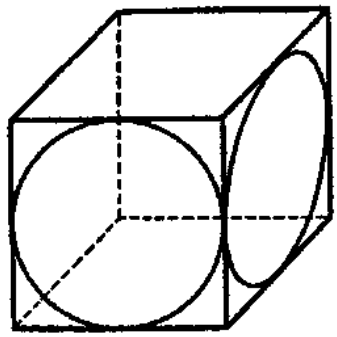


(1)

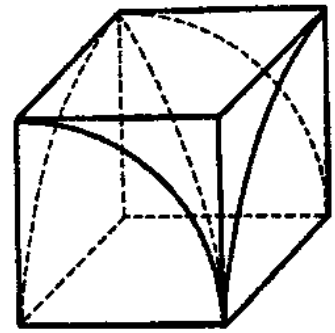


(2)

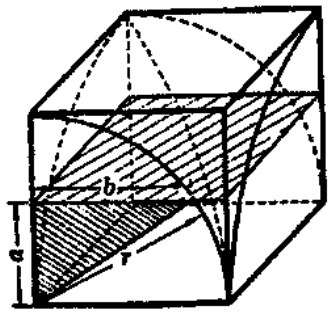
① 参看清徐有壬(1800～1860)《截球解义》，家刊《务民义斋算学》七种本，同治十一年(1872年)。



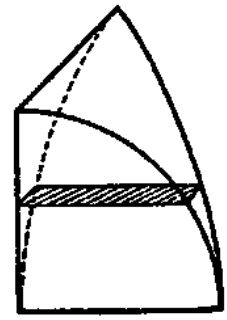
(3)



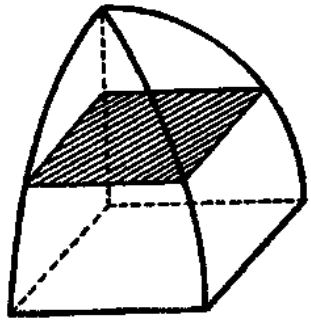
(4)



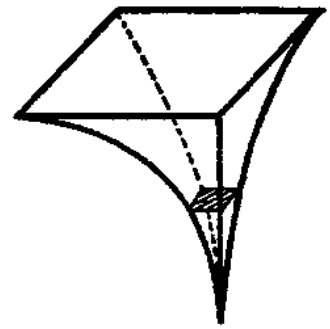
(5)



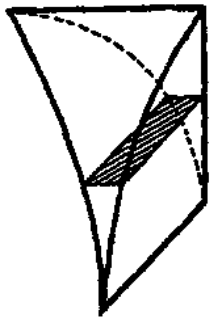
(6)



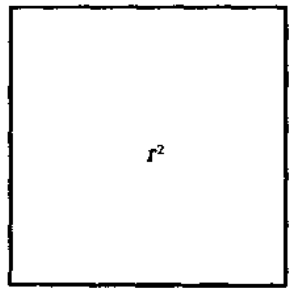
(7)



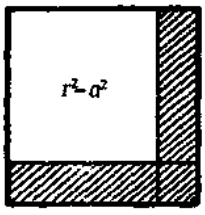
(8)



(9)

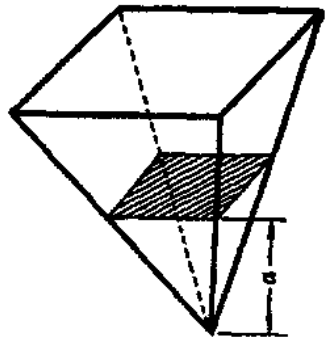


(10)

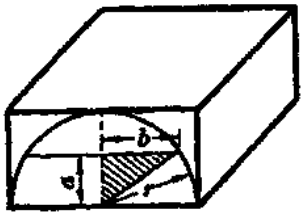


(11)

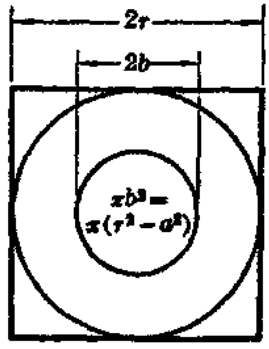
(12)



(13)



(14)



(15)

15. 中国古代数学家(二)

(一) 孙　　子

孙子,著《孙子算经》。今传本在《算经十书》之内,共三卷,《隋书·经籍志》作二卷。今传本《夏侯阳算经》序称:"《五曹》、《孙子》述作滋多。"《张丘建算经》序称:"《夏侯阳》之方仓,《孙子》之荡杯。"则其人至迟在张丘建以前(见《算经十书》本《孙子算经》、《夏侯阳算经》和《张丘建算经》)。

(二) 张丘建和夏侯阳

张丘建,清河人,著《张丘建算经》三卷,今传本在《算经十书》之内。宋本《张丘建算经》三卷,甄鸾注,李淳风等注释,刘孝孙细草(见《算经十书》本《张丘建算经》)。

夏侯阳,著《夏侯阳算经》三卷。今传本在《算经十书》之内,乃韩延所传,而以己说篡入之,序亦当为延所作(见《算经十书》本《夏侯阳算经》)。

（三） 赵 歐

赵歐，北凉河西人，善历算。宋元嘉十四年（公元437年），北凉王河西沮渠茂虔献书于宋文帝，内有赵歐传，并《甲寅元历》一卷。《隋书·经籍志》有：赵歐《算经》一卷，河西《甲寅元历》一卷，凉太史赵歐撰。又《甲寅元历序》一卷，《七曜历数算经》一卷，《阴阳历术》一卷，亦赵歐撰（见《隋书》卷三十四，志第二十九，经籍三；《宋书》卷九十八，列传第五十八，氐胡；又《通志》引：赵歐，《七曜历数算经》一卷）。

（四） 何 承 天

何承天，东海郯人，生晋帝奕太和五年（公元370年），卒宋元嘉二十四年（公元447年），年七十八（见《宋书》卷六十四，列传第二十四，……何承天。《南史》卷三十三，列传第二十三，……何承天）。

《宋书》卷十二志第二《律历中》称："宋太祖颇好历数，太子率更令何承天私撰新法。元嘉二十年（公元443年）上表……，二十二年（公元445年）普用《元嘉历》。"《高僧传》称："何承天受印度历法于僧慧严，乃有《元嘉历》之作。"

《宋书》卷七十四称："宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率；于强弱之际，以求日法，承天日法七百五十二，得一十五强一弱。自后治历者，莫不因承天法，累强弱之数。"又《宋书》卷七十五注称："自元嘉历（公元443年）后所立日法，以四十九之二十六为强率，以十七分之九为弱率，并强弱之数，为日法、

朔余,自后诸历效之。"

但何承天"调日法",《宋书·律历志》未曾记及,或疑为宋周琮伪造。不论是否伪造,其同为中算家分数论之一种方法,则无疑问。其在西洋,则刺伯达氏(Barlaam,Nicolas Rhabdas,约 1341 年)始以此类方法,推算开平方之零约值。

《隋书》卷十九《天文志》第十四天文上天体条称:何承天论浑天象体云:"周天三百六十五度三百四分之七十五。天常西转,一日一夜,过周一度,南北二极,相去一百一十六度三百四分度之六十五强,即天径也。"由是:

$$\pi=\frac{365\frac{75}{304}}{116\frac{65^{+}}{304}}=\frac{365\times 304+75}{116\times 304+65^{+}}=\frac{111035}{35329^{+}}=3.1428,$$

与 $\pi=\frac{22}{7}$ 之率相近。且南北两极相去度数下,本有一"强"字,或承天因 $\pi=\frac{22}{7}$,而得周径之率。

(五) 皮 延 宗

皮延宗,《宋书》卷十二志第二《律历上》称:"员外散骑郎皮延宗又难(何)承天。"事在《元嘉历》颁行(公元 445 年)之前。《新唐书》卷二十五志第十五《历志》作:"散骑侍郎皮延宗。"

《隋书》卷十七《律历志》第十二律历中称:"……至宋元嘉中何承天善历,其上表云:月行不定,或有迟疾,合朔月食,不在朔望,亦非历之意也。然承天本意欲立合朔之术,遭皮延宗饰非致难,故事不得行……。"

《新唐书》卷二十五《历志》第十五:"宋御史中丞何承天微欲见

意，不能详究，乃为散骑侍郎皮延宗等所抑，(王)孝通之语乃延宗旧说。”

《隋书》卷十六《律历志》第十一律历上称：“圆周率三，圆径率一，其术疏舛，自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。”刘歆、张衡、王蕃、刘徽圆周率已经纪录，皮率今亡。

(六) 祖 冲 之

祖冲之，字文远，范阳蓟人[1]，宋孝武(454～464)使直华林学省，赐宅宇车服，解褐南徐州从事史，公府参军。大明六年(公元462年)上书论历。宋武帝爱奇慕古，欲用冲之新法，寻薨(公元464年)事寝，转长水校尉，领本职。又特善算。生元嘉六年(公元429年)，卒永元二年(公元500年)，年七十二。注《九章》，造《缀述》数十篇(见梁萧子显《南齐书》卷五十二，列传第三十三《文学·祖冲之》。唐李延寿《南史》卷七十二列传第六十二《文学·祖冲之》。《宋书》卷十三志第三《律历下》)。

《宋书》卷十八志第八礼五称：“指南车……(晋)安帝义熙十三年(公元417年)，宋武帝平长安，始得此车。……虽曰指南，多不审正。回曲步骤，犹须人功正之。范阳人祖冲之有巧思，常谓宜更构造。宋顺帝昇明(477～478)末，齐王(萧道成)为相，命造之焉。车成，使抚军丹阳尹王僧虔、御史中丞刘休试之。其制甚精，百屈千回，未尝移变。”

---

① 祖冲之：祖籍范阳遒县，李俨《中国数学大纲》上册第60页(1958年，*见本书第三卷第68页。——编者)载“遒县(现涞水县)”。据1959年3月地图出版社出版之“《中华人民共和国行政区划简册》”，“涞水县”今称为“涞源县”，属河北省保定专区。

《大唐六典》卷之十七称:“又有指南车……至齐祖冲之,又造之。历梁、陈、隋无所变改,皇(唐)朝因之,驾四马,正道先启而行,匠一人,驾士十四人。”

《宋书·律历志》内载祖冲之自述学算经过称:“臣少锐愚尚,专功数术,搜练古今,博采沈奥,唐篇夏典,莫不揆量,周正汉朔,咸加该验,……此臣以俯信偏识,不虚推古人者也。”又:“臣用是深惜毫厘,以全求妙之准,不辞积累,以成永定之制。”又自称“臣测景历纪,躬辨分寸……”,及“臣考影弥年,穷察毫微……”等语。

北京图书馆藏监本《补完地理新书》十五卷内:卷第一“四方定位”称:“又宋南徐州从事史祖冲之,以土圭之法,经文阔略,先儒所言,又无明证,别以术数,求地平最为切近,今详录之。”

祖冲之造《缀术》,其子继之,其见于记载者有下开各条。

《缀述》数十篇,祖冲之造 ……(《南史》)

《缀术》六卷,□□撰,……(《隋书·经籍志》)

《缀术》六卷,□□撰,……(《日本国见在书目》)

《缀术》五卷,祖冲之撰,李淳风注, ……(《旧唐书·经籍志》)

《缀术》五卷,祖冲之撰,李淳风释, ……(《新唐书》)

《缀术》六卷,祖冲之撰,……(《通志略》)

《缀术》五卷,祖冲之撰,……(宋李籍《周髀算经音义》)

《缀术》□□,祖暅之,……(王孝通上《缉古算经表》)

《缀术》二卷,祖亘, ……(沈括《梦溪笔谈》)

其于《九章》、《海岛》,据《日本国见在书目》所载,有:

《九章》九卷,祖中注,

《九章术义》九卷,祖中注,

《海岛》二卷,祖仲注,

疑并为祖冲之所撰,因《南史》曾称祖冲之注《九章》也。

《缀术》于十世纪在日本,于十二世纪在朝鲜,还有流传。因日

本延长五年(公元927年)完成的《延喜式》五十卷,其中卷二十记明:"《孙子》,《五曹》,《九章》,《海岛》,《六章》,《缀术》,《三开》。《重差》,《周髀》,《九司》。"还和《令义解》(公元833年)相同。又朝鲜的《增补文献备考》卷一八八选举考记明:"仁宗十四年(1136年)凡明算式贴经,初日贴《九章》十条,翌日贴《缀术》四条,《三开》三条,《谢家》三条,两日并全通。"又《高丽史》卷七十三引同。

《缀术》一书,在国中似亡于宋天圣(1023~1031)之顷①。在日本则与梅文鼎(1633~1721)同时之关孝和(约1642~1708)似曾见及,但亦已成一段疑案。相传日本关孝和于奈良得一算书,学乃大进,其遗著《括要算法》多采中法,据冈本则录且称当时梶山、主和次俊尚藏有祖冲之之《缀术》,今书亦散亡,真伪不可得知②。

《南史·祖冲之传》已言:"祖冲之造《缀(述)术》数十篇。"《隋书·律历志》又言:"祖冲之……所著之书,名为《缀术》。"

《隋书·经籍志》记:"《缀术》六卷。"不言撰人。经考证以为当即祖冲之所著(见《隋书》卷三十四,志第二十九,经籍三,及《隋书》卷十六,志第十一,律历上内,召南考证)。

《旧唐书》卷四十七经籍志第二十七经籍下有:"《缀术》五卷,祖冲之撰,李淳风注。"宋李籍《周髀算经音义》:"祖冲之……撰《缀术》五卷。"与此同。

但宋沈括《梦溪笔谈》卷一则称:"北齐祖亘有《缀术》二卷。"唐

---

① 因《宋史》楚衍传称:"楚衍,开封阼城人,……于《九章》、《缉古》、《缀术》、《海岛》诸经,尤得其妙,……天圣初造新历,众推衍明历数,授灵台郎。"(见《宋史》卷四百六十二,列传第二百二十一,方技下,楚衍传)

又宋秦九韶《数书九章》(1247年),金李治《敬斋古今黈》曾举及缀术。

② 见三上義夫,"圓理,発明二就テ",《東京物理學校雜誌》第472、473、474、475号别刷(1930年)。

王孝通上《缉古算经表》亦称:"祖暅之《缀术》,……曾不觉方邑进行之术,全错不通,刍甍方亭之问,于理未尽。"或暅之曾简约其父《缀术》另成二卷。

(七) 祖 暅 之

祖暅之,一作暅,一作亘,字景烁,祖冲之子。"少传家业,究极精微,亦有巧思入神之妙,般、倕无以过也。当其诣微之时,雷霆不能入,尝行,遇仆射徐勉,以头触之,勉呼乃悟。父所改何承天历,时尚未行。梁天监(502~519)初,修乃父所改何承天历,位至太府卿。子皓少传家业,善算历。"(见《南史》卷七十二,列传第六十二,文学,祖冲之,子暅之。宋李籍《九章算术音义》,九章第四,内祖暅之条引同。)

《隋书》卷十六,十七,律历志第十一,十二,律历上,中称:员外散骑侍郎祖暅,天监三年(公元 504 年),八年(公元 509 年),九年(公元 510 年)三次上书论历。以遭侯景乱,未及施用。《资治通鉴》卷一四七引同。

"天监十二年(公元 513 年),魏降人王足陈计,求堰淮水以灌寿阳。上以为然,使水工陈承伯、材官将军祖暅,视地形。"(见《资治通鉴》卷一百四十七,《梁纪》,《高祖武皇帝》三。)参看《梁书》卷十八,康绚传。知祖暅之公元 514 年曾治淮。公元 516 年坝塌受徒刑。

北齐颜之推《颜氏家训》卷七,杂艺篇第十九:"算术亦是六艺要事,自古儒士,论天道,定律历者,皆学通之。然可以兼明,不可以专业,江南此学殊少。唯范阳祖暅精之,位至南康太守,河北多晓此学。暅音亘"

《文选》卷五十六李善注引刘璠《梁典》称:"天监六年(公元

507 年)，帝以旧漏乖舛，乃勅员外郎祖暅治之，漏刻成，太子中舍人陆倕为文。”按《隋书》卷十九，天文志第十四引同。陆倕，《梁书》卷二十七，《南史》卷四十八有传。

又《隋书·经籍志》有：“《漏刻经》一卷，祖暅撰。”《隋书·天文志》：“天监六年(公元 507 年)……先令祖暅为《漏经》。”即指《漏刻经》。

《南史·沈洙传》：“漏刻赊促，今古不同。《汉书》律历，何承天、祖冲之、暅之父子《漏经》，并自关鼓至下鼓，自晡鼓至关鼓，皆十三刻，冬夏四时不异。”

《隋书·天文志》称：梁奉朝请祖暅，天监中(502～519)造八尺铜表。又《隋书·律历志》称：“梁表尺即奉朝请祖暅所造铜圭影表。”(见《隋书》卷十九，天文志第十四，天文上；又《隋书》卷十六、十七、十八，律历志第十一、十二、十三，律历上、中、下)

《隋书·天文志》称：“梁奉朝请祖暅，天监中受诏集古天官及图纬旧说，撰《天文录》三十卷。”

又《隋书·经籍志》有：“祖暅《天文录》三十卷。”《旧唐书·经籍志》下，《崇文总目》卷四称：“《天文录》三十卷，祖暅之撰。”按李淳风《乙巳占》卷一，天占第三曾引：“祖暅《天文录占》。”又于《乙巳占》序称：“参同异，会殊途，触类而长，拾遗补阙，蔡邕，祖暅其博也。”又《玉海》卷三称：“《国史》：《天文录经要诀》一卷，钞祖暅书。”

《隋书》卷三十二经籍志序称：“梁有秘书监任昉、殷钧四部目录，又《文德殿目录》。其术数之书更为一部，使奉朝请祖暅撰其名。故梁有《五部目录》。”

又唐释道宣《广弘明集》(《四部丛刊》本)卷之三引梁阮孝绪《七录序》称：“乃分数术之文，更为一部，使奉朝请祖暅撰其名录。”

《北史》称：“有江南人祖暅者，先于边境被获，在(魏，安丰王，

元)延明(484～530,《魏书》卷二十,《北史》卷十九有传)家。旧明算历,而不为王所待。芳(即信都芳)谏王礼遇之。暅后还,留诸法授芳。"见唐李延寿《北史》第八十九,列传第七十七,艺术上·信都芳。按祖暅被获,当在徐州(公元525年),以延明讨徐州在孝昌元年(公元525年)也。

《资治通鉴》卷一百五十:"梁普通六年(公元525年),元延明使暅之作欹器漏刻铭。"

《资治通鉴》卷一百五十一:"梁普通七年(公元526年)魏遣江革、祖暅之南还。以求中山王,元略。"系引《梁书》卷三十六,江革传,和《南史》卷六十,江革传。

《续古文苑》卷九,记:梁祖暅,曾著有《浑天论》。

《九章算术》卷四开立圆术注:"臣(李)淳风谨按:祖暅之谓:刘徽、张衡二人皆以圆困为方率,丸为圆率,乃设新法。祖暅之开立圆术曰:以二十一乘积,十一而一*,开立方除之,即立圆径。"

盖以 $D=\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$, 即 $V=\frac{11}{21}D^3$

或 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $\pi=\frac{22}{7}$,

V=圆球之体积; D=圆球之全径,

r=圆球之半径。

祖暅之开立圆术见上第14节。

祖暅之,曾以算法授毛栖诚。《隋书》卷十六律历志候气条称:"开皇九年(公元721年)平陈后,高祖遣毛爽及蔡子元于普明等以

* "以二十一乘积,十一而一"系戴震误改。南宋本、大典本均作"以二乘积"。下式中$\frac{11}{21}$当作$\frac{1}{2}$。

候节气。……令爽等草定其法，爽因稽诸故实，以著于篇，名《律谱》，其略云：臣爽按……臣先人栖诚学算于祖暅，问律于何承天……。”

16. 后周甄鸾撰注算经

甄鸾撰注《算经》，各书所载，互有详略，兹引列如下，以备考证。

《九章》

《九章算经》九卷，甄鸾撰。……（《旧唐书》）

《九章算术》二卷，徐岳撰，甄鸾重述。……（《隋书》，《通志略》）

《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰。……（《隋书》，《通志略》）

《孙子》

《孙子算经》□卷，甄鸾注。……（《一切经音义》）

《孙子算经》三卷，甄鸾撰注。……（《旧唐书》）

《孙子算经》三卷，甄鸾撰，李淳风注。……（《新唐书》）

《孙子算经》三卷，甄鸾撰，李淳风注。……（《通志略》）

《五曹》

《五曹算经》五卷，甄鸾注。……（《旧唐书》）

《五曹算经》三卷，甄鸾撰①。……（《旧唐书》）

《五曹算经》五卷，甄鸾撰。……（《日本国见在书目》）

甄鸾《五曹算经》五卷。……（《新唐书》）

---

① 《旧唐书》校勘记卷二十九称："按甄鸾所注《五曹算经》五卷，已见于上文，则此处三卷之书，必非甄鸾所撰，疑本作韩延传写者，因上文诸条屡见甄鸾，故致此误耳。"

甄鸾《五曹算经》五卷。 ……（《通志略》）

甄鸾《五曹算术》二卷。 ……（《宋史》）

李淳风注，甄鸾《五曹算经》一卷。 ……（《宋史》）

《五曹算经》一卷，甄鸾注。 ……（《崇文总目》）

《张丘建》

《张丘建算经》一卷，甄鸾撰。 ……（《旧唐书》）

《张丘建算经》一卷，甄鸾注。 ……（《新唐书》）

《张丘建算经》三卷，甄鸾注。 ……（《直斋书录解题》）

《张丘建算术》三卷，甄鸾注，李淳风注释，刘孝孙细草。 ……（《通考》）

《夏侯阳》

《夏侯阳算经》三卷，甄鸾注。 ……（《旧唐书》）

《夏侯阳算经》一卷，甄鸾注。 ……（《新唐书》）

《周髀》

《周髀》一卷，甄鸾重述。 ……（《隋书》，《通志略》）

《周髀》一卷，甄鸾注。 ……（《旧唐书》）

《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释。

……（《崇文总目》及《中兴馆目》）

《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释。

……（《玉海》及《通考》）

《五经》

甄鸾《五经算术》一卷。 ……（《通志略》）

《五经算术》二卷，甄鸾注，李淳风注释。 ……（《玉海》引《书目》）①

甄氏《五经算术》。 ……（元，程端礼，《读书分年日程》）

《纪遗》

《数术记遗》一卷，徐岳撰，甄鸾注。 ……（《旧唐书》）

甄鸾注，徐岳《大衍算术注》一卷。 ……（《宋史》）

《三等数》

---

① 现行本《五经算术》二卷，题："周汉中郡守，前司隶臣甄鸾撰；唐朝议大夫，行太史令，上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释。"

《三等数》一卷，董泉撰，甄鸾注。 ……（《旧唐书》）

（《日本国见在书目》）

《海岛算经》

《海岛算经》一卷，甄鸾撰，李淳风等注释。 ……（《玉海》）

《甄鸾算术》

《甄鸾算术》云：周朝市尺，得玉尺九分二厘。 ……（《隋书》）

《甄鸾算术》云：玉升一升，得官斗一升三合四勺。 ……（《隋书》）

其不关算数者，有：

《周天和年历》一卷，甄鸾撰。 ……（《隋书·经籍志》）

《七曜术算》一卷，甄鸾撰。 ……（《隋书·经籍志》）

《七曜术算》一卷，甄鸾撰。 ……（《通志》）

《七曜历算》二卷，甄鸾撰。 ……（《旧唐书·经籍志》，《新唐书·艺文志》）

《历术》一卷，甄鸾撰。 ……（《旧唐书·经籍志》，《新唐书·艺文志》）

《七曜本起》三卷，后魏甄叔遵撰。 ……（《隋书·经籍志》，《通志》）

《七曜本起历》二卷，未著撰人。 ……（《旧唐书·经籍志》）

《七曜本起历》五卷，甄鸾撰。 ……（《新唐书·艺文志》）

《笑道论》三卷，甄鸾撰。 ……（《旧唐书·经籍志》，《新唐书·艺文志》，《法苑珠林》，《历代三宝纪》，《通志》）

《帝王世录》一卷，甄鸾撰。 ……（《隋书·经籍志》，《通志》，《开元释教录》）①

《年纪》，甄鸾及王道珪撰。 ……（《开元释教录》）②

---

① 《开元释教录》卷四称："前凉张氏，都姑藏（新上余录无年，依《甄鸾录》，多从晋年号）"，所谓《甄鸾录》，当即甄鸾《帝王世录》。

② 《开元释教录》卷十二引甄鸾及王道珪《年纪》："（梁）至绍泰二年（公元556年）丙子，改为太平元年（公元556年）；太平二年（公元557年）丁丑，改为永定元年（公元557年），陈霸先立号为陈国"，《年纪》一书，未见他处著录，甄鸾生于是时，宜其所记较详也。

17. 中国古代数学家(三)

(一) 庾 曼 倩

庾曼倩,字世华,新野人,梁世祖在荆州,辟为主簿,迁中录事,转谘议参军,疏注《算经》及《七曜历术》(见唐姚思廉《梁书》卷五十一,列传第四十五,处士……庾诜,《明一统志》引同)。

《南史·隐逸传》:"庾诜字彦宝新野人也,子曼倩字世华亦有令誉,所著《丧服仪》,《文字体例》,《老子义疏》,《算经》及《七曜历术》,并所制文章凡九十五卷。"

(二) 张 缵

张缵,著《算经异义》一卷(见《隋书》卷三十四,志第二十九,经籍三)。

《南史》卷五十六,列传第四十六,张弘策子缵传称:张缵,字伯绪,范阳方城人。尚(梁)武帝第四女富阳公主。太清二年(公元548年)徙授领军。俄改雍州刺史,卒。

《梁书·张缅传》附:"缵字伯绪,缅第三弟也。缵好学,兄缅有书万余卷,昼夜披读,殆不辍手,尝执四部书目曰:若读此毕,乃可

言优仕矣。著《鸿宝》二百卷,《文集》二十卷。”

《金楼子》聚书篇称:“张湘州缵《经饷书》。”按梁主撰《金楼子》在承圣二年癸酉(公元553年)。

以上《隋书》所记著《算经异义》一卷的张缵,未知和《南史》、《梁书》、《金楼子》所记的张缵是否同属一人。

(三) 元 延 明

元延明(484～530),后魏安丰王,猛子。因亦称安丰王延明。延昌初(公元512年),散家财拯饥。延明博极群书,鸠集图书万有余卷。正光三年(公元522年),诏延明定服章。正光中(520～525),监修金石,博探古今乐事。孝昌元年(公元525年)正月,元法僧反,为东道行台徐州大都督,共讨徐州。二年(公元526年)三月,从骠骑大将军徐州刺史,迁为仪同三司。庄帝时,元灏入洛,延明受灏委寄,缘河据守。永安二年(公元529年)七月,灏败,延明南奔,死于江南。延明撰《五经宗略》二十三卷,一作四十卷。以河间人信都芳工算术,引之在馆。其撰《古今乐事》、《九章十二图》,又集《器准》九篇,芳别为之注(见北齐魏收《魏书》卷二十,列传第八,安丰王。并参看同书卷九,帝纪九,肃宗纪;卷十,帝纪十,孝庄纪;卷一百零九,志第十四,乐五)。按《隋书》卷三十二有:“《五经宗略》二十三卷,元延明撰。”但《旧唐书》卷四十六,《新唐书》卷五十七并作“四十卷”。

另参看“安丰王元延明墓志铭”。见郭玉堂,《洛阳出土石刻时地记》,第45页(1941年)。又见赵万里,《汉魏南北朝墓志集释》第一册,科学出版社(1956年)。按墓志铭称:“元延明字延明,……以梁中大通二年(公元530年)三月卒于建康,春秋四十七(484～

530)。”

(四) 殷绍(附成公兴)

殷绍,“长乐人也,达《九章》、《七曜》。太武(424～451)时为算生博士,给事东宫西曹”。太安四年(公元458年),上书称其受《九章要术》于成公兴,受《九章数家杂要》于道人法穆(见《北史》卷八十九,列传第七十七,艺术上·殷绍及《魏书》卷九十一,列传第七十九,艺术·殷绍)。

成公兴,“字广明,自云胶东人也”。能达《九章算术》。(寇)谦之算《七曜》有所不了,……兴曰:“先生诚随兴语布之。”俄然便决(见《魏书》卷一百十四,志第二十,释老志十,及《魏书》卷九十一,列传第七十九,艺术,……殷绍)。

(五) 高 允

高允,字伯恭,渤海蓨人。神䴥四年(公元431年),征拜中书博士,迁侍郎。生魏登国五年(公元390年),卒太和十一年(公元487年)正月,年九十八。允尤明算法,著《算术》三卷(见《魏书》卷四十八,列传第三十六,高允及《北史》卷三十一,列传第十九,高允及卷二,魏本纪第二,神䴥四年条)。

(六) 信 都 芳

信都芳,字玉琳,河间人。少明算术,为州里所称。后魏安丰王元延明召信都芳入宾馆。延明家有群书,欲钞集五经算事,为《五经

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

宗(略)》,及古今乐事为《乐书》。又为《器准(图)》,并令芳算之。会延明南奔(公元529年)。芳乃自注《乐书》七卷,《器准图》三卷,《黄钟算法》二十卷。又注《重差勾股》、《周髀四术》,一作著《四术周髀宗》。武定中(543~550)卒。《北史·艺术传》曾引有《四术周髀宗》序文。唐李淳风等《周髀算经注释》曾引及《周髀四术》。(见《北史》卷八十九,列传第七十七,艺术上,……信都芳;《北齐书》卷四十九,列传第四十一,方伎,……信都芳;《魏书》卷九十一,列传第七十九,张渊传;《隋书》卷十九,天文志第十四,天文上,晷景;《新唐书》卷五十九,艺文志第四十九;《算经十书》本,甄鸾注《周髀算经》卷上第十六页。按《隋书》卷三十二有:"《乐书》七卷,后魏丞相士曹行参军信都芳撰。"又《隋书》卷三十四有"《器准图》三卷。"但《旧唐书》卷四十六,及《新唐书》卷五十七,并作:"《乐书》九卷,信都芳注。"清马国翰曾辑有信都芳《乐书》一种,在《玉函山房辑佚书》同治辛未(1871年)济南补刊本之内。

"江南人祖暅者先于边境被获(在公元525年),在(元)延明家,旧明算历,而不为王所待,芳谏王(元延明)礼遇之,暅后还(在公元526年),留诸法授芳。"(见《北史》卷八十九。)

《隋书》称:"后齐神武霸府田曹参军信都芳深有巧思。"(见《隋书》卷十六律历志)又《魏书》称:"兴和元年(公元539年),齐献武王入邺,令其幕客李业兴制甲子元历,诏以新历示信都芳,芳可,乃付施行。"(见《魏书》卷一百零七下,志第九,律历三下。)

(七) 甄 鸾

甄鸾,字叔遵,《夏侯阳算经》卷上"言斛法不同"谓:"梁大同元年(公元535年)甄鸾校之,用二尺九寸二分;"《隋书·律历志上》

引《甄鸾算术》云：玉升一升，得官斗一升三合四勺。按玉升于周保定五年（公元565年）颁行，是甄鸾入仕于周尚校斛法，《隋书·律历志》中称周武帝时（561～577）造《天和历》。《隋书·经籍志》有《周天和年历》一卷，为甄鸾天和元年（公元566年）所定历书。甄鸾又通释典，受佛教影响甚深，其注《数术记遗》引《楞伽经》及《华严经》。《隋书》有后魏甄叔遵《七曜本起历》三卷，《旧唐书》有《七曜本起历》二卷，未著撰人，疑与《新唐书》之《七曜本起历》同为甄鸾所撰，其"本起"一名，亦为佛教名词，谓根本所起。周武帝世既崇道法，欲齐三教，时俗纷然。甄鸾乃撰《笑道论》为佛教张目，事见《法苑珠林》卷一百及《历代三宝纪》卷十一，时在天和四、五年（569～570）。建德二年（公元573年），武帝复集群臣及沙门、道士等，帝升高座，辨释三教先后，以儒教为先，道教为次，佛教为后。甄鸾以崇奉佛教，不为时流所重，其后乃不闻名。其官职则《法苑珠林》称《笑道论》三卷，周朝武帝敕前司隶毋极伯甄鸾撰，《历代三宝纪》作司隶大夫甄鸾，现行本《笑道论》作前司隶毋极县开国伯甄鸾，现行本《数术记遗》作北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注。

嘉定五年（1212年）鲍澣之《数术记遗叙》称："甄鸾宇文周时人，尝造《太和历》者，算家诸书皆书其衔以为汉中郡守，前司隶。时代官称，皆承误也。"

甄鸾撰注《算经》，各书所载，互有详略。见第16节。

18. 古 算 解 释

（一）隋刘焯的招差术

查函数 $f(x)$，如 x 值逐渐变化为 $a, a+w, a+2w, \cdots\cdots$ 则原函数可书为 $f(a), f(a+w), f(a+2w), f(a+3w), \cdots\cdots$，即 $x=a+Sw$，就中 $S=0,1,2,3,\cdots\cdots(n-1)$。如将各函数胪列如下，即：

$$f(a),\ f(a+w),\ f(a+2w),\ f(a+3w),$$

$$f(a+w)-f(a),\ f(a+2w)-f(a+w),\ f(a+3w)-f(a+2w),$$

$$=\Delta f(a)=\Delta_1,\ =\Delta f(a+w)=\Delta_2,\ =\Delta f(a+2w)=\Delta_3,$$

为一差。

$$\Delta f(a+w)-\Delta f(a),\ \Delta f(a+2w)-\Delta f(a+w),$$

$$=\Delta_2-\Delta_1=\Delta^2 f(a),\ =\Delta_3-\Delta_2=\Delta^2 f(a+w),$$

$$=\Delta_1^2 \qquad\qquad =\Delta_2^2$$ 为二差。

$$\Delta^2 f(a+w)-\Delta^2 f(a)$$

$$=\Delta 3 f(a)$$

$$=\Delta_1^3$$ 为三差。

则原函数可书为：

$$f(x)=f(a)+S\Delta f(a)+\frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f(a)$$

$$+\frac{S(S-1)(S-2)}{3!}\Delta^3 f(a)+\cdots\cdots \tag{1}$$

此时如 $\Delta^3 f(a)=0$，即三差，为零。

则 $$f(x)=f(a)+\frac{S}{1}\Delta f(a)+\frac{S(S-1)}{2!}\Delta^2 f(a)$$

$$=f(a)+S\Delta f(a)+\frac{S(S-1)}{2!}[\Delta f(a+w)-\Delta f(a)]$$

因令 $\Delta f(a)=\Delta_1$， $\Delta f(a+w)=\Delta_2$

故 $$f(x)=f(a)+S\left[\Delta_1+\frac{S-1}{2}(\Delta_2-\Delta_1)\right]$$

$$=f(a)+S\left\{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{1}{2}[(1-S)(\Delta_1-\Delta_2)+(\Delta_1-\Delta_2)]\right\} \tag{2}$$

这是内插法的公式。

例如 $f(x)=x^2+x$，

则 $x=1,2,3,4,5$ 时，$f(x)$ 为

2，	6，	12，	20，	30	
$4=\Delta_1$，	$6=\Delta_2$，	8，	10		一差，
$2=\Delta_2-\Delta_1$，	2，	2			二差，
0，	0				三差。

则 $f(4)=20$，$f(5)=30$，可由上列公式求出。

隋刘焯曾以此公式求开皇二十年（公元 600 年）的《皇极历》。唐李淳风在《隋书》第十八卷律历志中引称刘焯：

推每日迟速数术：见求所在气陟降率，并后气率半之，以日限乘而汛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残，汛总除，为总差，其总差亦日限乘而汛总除，为别差，率前少者，以总差减末率为初率，乃别差加之；前多者即以总差加末率，皆为气

初日陟降数，以别差（半之），前多者日减，前少者日加初数得每日数，所历推定气日随算其数，陟加、降减其迟速，为各迟速数。

设 $$S_1 = \frac{日限}{汎总},$$

气末率： $$\frac{S_1(\Delta_1 + \Delta_2)}{2},$$

总差： $$S_1(\Delta_1 - \Delta_2),$$

别差： $$S_1^2(\Delta_1 - \Delta_2),$$

$f(x)$＝求每段日迟速数，

$f(a)$＝已知某段前一气率的迟速数，

$$f(x) = f(a) + \Big[\underbrace{\frac{S_1(\Delta_1 + \Delta_2)}{2} + S_1(\Delta_1 - \Delta_2)}_{初数} - \underbrace{\frac{S_1^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)}_{半别差}\Big]$$

$$= f(a) + S_1\left[\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}[(1 - S_1)(\Delta_1 - \Delta_2) + (\Delta_1 - \Delta_2)]\right]$$

刘焯还有三术都用此公式，此后僧一行（张遂）的《大衍历》（公元 724 年），徐昂的《宣明历》并用招差术。

参考文献：

日本藪内清《隋书历法之研究》，第 81～82 页。日本东京三省堂出版，昭和十九年（1944 年）。

严敦杰“中算家的招差术”，《数学通报》1955 年 1 月号，第 4～13 页。

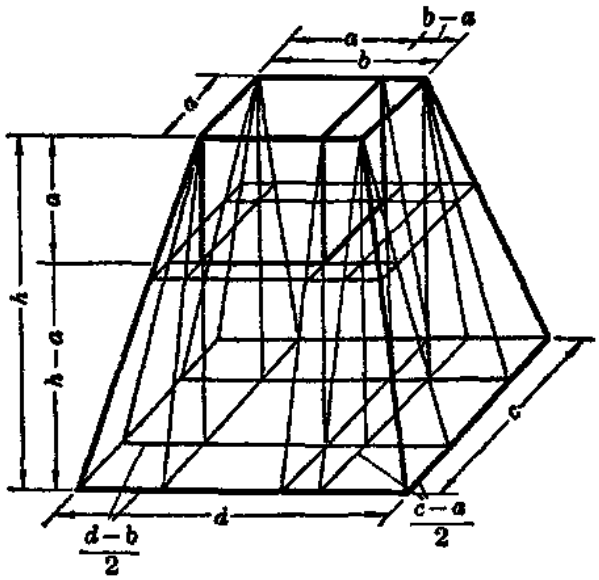
李俨《中算家的内插法研究》，第 23～34 页，北京，科学出版社，1957 年。

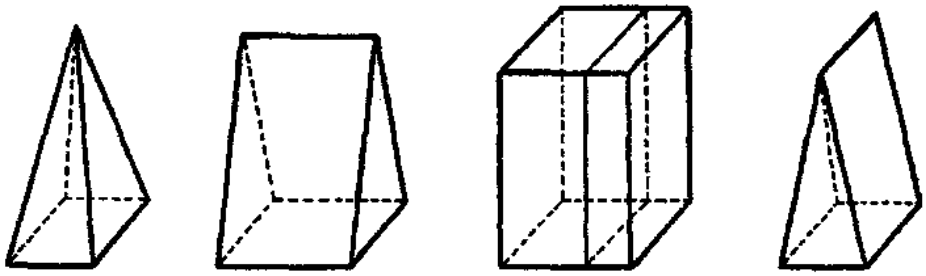
（二）唐王孝通分析仰观台等体积

唐王孝通《缉古算术》曾就刍童公式，即仰观台体积：

$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$，分析为

$$V=\frac{(c-a)(d-b)}{3}\times h+\left(a\times\frac{d-b}{2}\times h+b\times\frac{c-a}{2}\times h\right)$$
$$+a(b-a)\times h+a^2h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$加以分析。





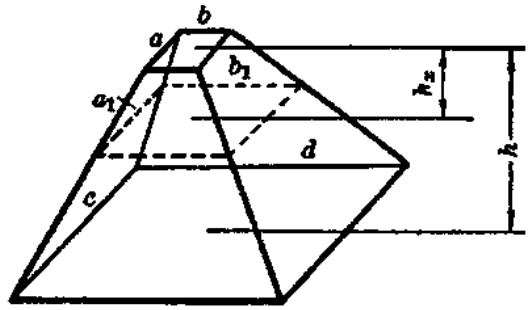
知角锥平截体系由一个角锥(四个小角锥)、二个堑堵(四个小堑堵)、二个方柱(一个方堡壔，一个方仓)所组成。又可分析为：

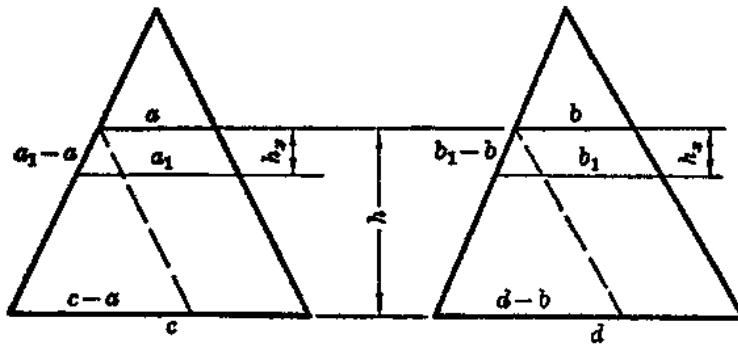
$$V=\frac{(c-a)(d-b)}{3}(h-a)+\frac{(c-a)(b-a)}{2}(h-a)$$
$$+\left[\frac{(c-a)+(d-b)}{2}+(b-a)\right](h-a)\times a$$
$$+\left[\frac{(c-a)(d-b)}{3}+\frac{(c-a)(b-a)}{2}\right]\times a$$

$$+\left[\frac{(c-a)+(d-b)}{2}+(b-a)+(h-a)\right]\times a^2+a^3。$$

此为王孝通《缉古算术》第二问之第一术。

该书并列举证题方法，用以分析各公式。如在某一角锥平截体（刍童，仰观台）A 内，已知 a,b,c,d 各值，欲于 a,b 面下某一高度 h_x 截出另一角锥平截体 B。法先求 h_x 之值。因已知 h_x 之值，则新角锥平截体 B 内下面 a_1,b_1 之值，亦可求得。





如图，先由比例式求得

$$\frac{h}{c-a}=\frac{h_x}{a_1-a}，及\frac{h}{d-b}=\frac{h_x}{b_1-b}$$

二式，代入刍童（角锥平截体）公式内：

$$B=\frac{h}{2}[(2b_1+b)a+(2a_1+a)b] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

消去 a_1 及 b_1，得

$$\frac{3h^2B}{(c-a)(d-b)}=\left[3\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}\right.$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{h\cdot a}{c-a}+\frac{h\cdot b}{d-b}\right)\times h_x+h_x^2\Big]h_x。$$

已得 h_x 值，则 a_1，b_1 可由上列比例式求得。此为王孝通《缉古算术》第二问之第二术。

同书又说明楔形内刍甍（羡道）之组成及其截积之公式，此为王孝通《缉古算术》第二问之第三、四术①。

① 参看李俨《中国数学大纲》上册，第118～127页，北京，科学出版社，1958年（*见本书第三卷第128～137页。——编者）。

19. 中国古代数学家(四)

(一) 刘　　焯

刘焯,字士元,信都昌亭人,以儒学知名,为州博士。隋开皇中与修国史,兼参议律历。《九章算术》、《周髀》、《七曜》、《历书》十余部推步日月之经,量度山海之术,莫不核其根本,穷其秘奥。著《稽极》十卷、《历书》十卷。大业六年(公元610年)卒,年六十七(544～610)(见《北史》卷八十二,列传第七十,儒林下,……刘焯;又《隋书》卷七十五,列传第四十,儒林……刘焯)。

刘焯曾创造有奇零分数算法,又焯号有招差术,见上节。

(二) 刘　　炫

刘炫,字光伯,河间景城人,为旅骑尉,与刘焯同时。卒年六十八。著《算述》一卷,一作《算术》一卷。刘炫与刘焯时人称为二刘(见《北史》卷八十二,列传第七十,儒林下,……刘炫;又《隋书》卷七十五,列传第四十,儒林……刘炫及《册府元龟》卷八百六十九,总录部一百一十九)。

（三） 刘　　祐

刘祐，“刘祐荥阳人，开皇初为大都督，封索卢县公；……与张宾、刘晖、马显定历”。著《律历术文》一卷（见《隋书·艺术传》）。《旧唐书》有“《九章杂算文》二卷，刘祐撰。”（见《旧唐书·经籍志》）

（四） 韩　　延

韩延，《新唐书》卷五十九艺文志第四十九有：“韩延，《夏侯阳算经》一卷，又《五曹算经》五卷。”

（五） 王　孝　通

王孝通，《旧唐书·历志》第十二称：“《戊寅历经》……武德九年（公元626年）五月二日，校历人……算历博士臣王孝通。”《新唐书·历志》称：《戊寅元历》，“高祖诏司历起（武德）二年（公元619年）用之，擢（傅）仁均员外散骑侍郎。三年（公元620年）正月望及二月、八月朔当蚀，比不效。六年（公元623年），诏吏部郎中祖孝孙考其得失。孝孙使算历博士王孝通以《甲辰历》法诘之；……九年（公元626年）（九月），复诏大理卿崔善为与孝通等较定，善为所改凡数十条。”（三十余条。）（见《旧唐书》卷三十二，又见《新唐书》卷二十五，志第十五，历志。据百衲本《新唐书》第四册《唐书》历志十五，第一、第二页，并据《唐会要》卷四十二，于武德九年下补“（九月）”二字。又《唐会要》卷四十称：“……善为所改，凡三十余条。”此与王孝通上缉古表所称：“比年已来，奉敕校勘傅仁均历，凡驳正术

错三十余道”文正合。按崔善为,《旧唐书》卷一百一十九及《新唐书》卷九十一有传。)

王孝通,《旧唐书》、《新唐书》作算历博士,而《唐会要》作算学博士(见《唐会要》卷四十二,《丛书集成初编》本第七五〇页,又《旧唐书》卷三十二及《新唐书》卷二十五)。

王孝通又官太史丞。《旧唐书·傅仁均传》称:“武德元年(公元618年)七月,诏颁新(戊寅)历,授(傅)仁均员外散骑常侍,赐物二百段。后中书令封德彝奏历术差谬,敕吏部郎中祖孝孙考其得失。又太史丞王孝通执甲辰历法以驳之。”(见《旧唐书》卷七十九,列传第二十九,傅仁均,据百衲本《旧唐书》第十八册,列传二十九,第二页。)

王孝通著《缉古算经》。《四库全书提要》称:“是书一名《缉古算术》,《唐书·艺文志》、《崇文总目》俱称李淳风注。……又《宋志》作一卷,《唐志》、郑樵《艺文略》俱作四卷。王应麟《玉海》谓今亡其三。案孝通原表称二十术。”今本《缉古算经》共二十问,题:“唐通直郎太史丞臣王孝通撰并注。”而上缉古表称:“少小学算……迄将皓首。……伏蒙圣朝收拾,用臣为太史丞。比年已来,奉敕校勘傅仁均历,凡驳正术错三十余道,即付太史施行。”(见《缉古算经》,“上缉古表”第一及第二页,《算经十书》本),所举与史书正合。则《缉古》之成,当在武德九年(公元626年)后数年中。《缉古算术》经李淳风等注释后立于学官。

(六) 李 淳 风

李淳风,岐州雍人,明天文、历算、阴阳之学(见《旧唐书》卷七十九,列传第二十九……李淳风,据百衲本《旧唐书》第十八册,列

传二十九，第五页）。

《旧唐书》卷一百九十一列传第一百四十一《方技·崔善为》称："贞观初（公元627年）……，傅仁均所撰《戊寅元历》，议者纷然，多有同异。"（据百衲本《旧唐书》第三十四册，列传一百四十一，第二页。）李淳风"以驳傅仁均历议，多所折衷，授将仕郎，直太史局。"（见《旧唐书》卷七十九，及《新唐书》卷二百零四李淳风传。）

《唐会要》卷四十二称："贞观元年（公元627年），将仕郎李淳风又奏驳太史历十有八事，诏下（崔）善为课二家得失，其七条改从淳风，余一十一条，并依旧也。"（据《丛书集成初编》本，第七册，第七五〇页。）

《旧唐书》卷三太宗本纪及《旧唐书》卷七十九李淳风传称：贞观七年（公元636年）春正月癸巳，"直太史（局）将仕郎李淳风铸浑天黄道仪，奏之。""太宗称善，置其仪于凝晖阁，加授承务郎。"按《唐会要》卷四十二："混仪图"条作："（贞观）七年三月十六日，直太史局将仕郎李淳风铸浑天黄道仪成，奏之。"

《旧唐书》卷七十九李淳风传称：贞观十五年（公元641年），李淳风"除太常博士，寻转太史丞。"（贞观十八年，公元644年，即作太史丞李淳风。）"二十二年（公元648年），迁太史令。""显庆元年（公元656年），复以修国史功封昌乐县男"。"龙朔二年（公元662年），改授秘阁郎中。"时太史局已改为秘阁局，令改为郎中。故李淳风由太史局太史令改为秘阁郎中。

《旧唐书》卷三十二志第十二"历一"称：高宗时"诏李淳风造《麟德历》。"参看《新唐书》卷二十五及二十六卷，志第十五及第十六，历志。

《资治通鉴》卷二百零一，《唐纪》高宗皇帝中之上称：麟德二年（公元665年），"秘阁郎中李淳风以傅仁均《戊寅历》推步浸疎，乃

增损刘焯《皇极历》,更撰《麟德历》,五月辛卯行之。"参看《旧唐书》卷四,本纪第四,高宗上(据百衲本《旧唐书》第二册,第十一页)。

《旧唐书》卷七十九李淳风传称:"咸亨(670～673)初,官名复旧,还为太史令。年六十九卒。"《新唐书》卷二百零四,列传第一百二十九,方技,李淳风……引同。

《旧唐书》卷七十九李淳风传及《新唐书》卷二百零四李淳风传并称:唐初"太史监侯王思辩表称:《五曹》、《孙子》十部《算经》,理多踳驳,淳风复与国子监算学博士梁述,太学助教王真儒等受诏注《五曹》,《孙子》十部《算经》。书成,高宗令国学行用。"按百衲本《旧唐书》第十八册,列传二十九,第七页作:

"高宗令付国学行用。"殿本《旧唐书》误作:"高祖令付国学行用"。

《册府元龟》卷八百六十九,总录部,一百一十九称:"显庆元年(公元656年),左仆射于志宁等奏以十部《算经》付国学行用。"

《唐会要》卷六十六广文馆条称:"显庆元年十二月十九日,尚书左仆射于志宁奏置:令习李淳风等注释《五曹》、《孙子》等十部《算经》,分为二十卷行用。"(据《丛书集成初编》本第十一册,第一一六三页。)

至《唐会要》卷三十六复称:"永隆元年(公元680年)十二月,太史令李淳风进注释(《五曹》)、《孙子》等十部《(算)经》,分为二十卷。"(据宋王应麟《玉海》卷四十四引,又据北京图书馆藏钞本校过。)

李淳风或称蜀简州人,宋王象之《舆地纪胜》:"(简州)平泉乾封镇之东,唐太史令李淳风之故宅及墓也。"又明曹学佺《蜀中广记》名胜记引《简州学记》:"李淳风生于州之乾封镇,有故宅及墓。"

李淳风和吕才(600～665)同时。时人称:"太史令李君(淳风)

者，……专精九数，综涉六爻，……。”见大正新修《大藏经》卷五十，第二六五页。

（七） 僧 一 行

僧一行，姓张，先名遂，魏州昌乐人。开元十五年（公元727年）卒，年四十五（683～727）（见《旧唐书》卷一百九十一，列传第一百四十一，方技……一行）。

开元九年（公元721年），《麟德历》署日蚀，比不效，诏僧一行作新历推大衍数，立术以应之；较经史所书气朔日名宿度可考者皆合。十五年草成，而一行卒（见《新唐书》卷二十七上，志第十七上，历志，又卷三十一，志第二十一，天文志，又卷二十二，志第十二，天文志）。

《玉海》卷十引《会典》：“开元《大衍历》，（开元）十五年（公元727年）一行刊定。诏（张）说成之，因编次勒成一部：《经章》十卷、《长历》五卷、《历议》十卷、《立成法天竺九执历》二卷、《古今历书》二十四卷、《略例奏章》一卷，凡五十二卷。（开元）十六年（公元728年）八月十五日张说进。”（见《玉海》卷十“唐古今历书”条引《会典》，参看《唐会典》卷四十二，《丛书集成初编》本第七册，第七五一页注文。又《新唐书》卷五十九艺文志及《四部丛刊》本《唐文粹》卷九十四内“张说大衍历序”所举篇目，略有出入）

《新唐书·艺文志》另有：“（僧一行）《心机算术括》一卷黄栖岩注。”《宋史》卷二百零七志第一百六十艺文志作：“僧一行，《心机算术括》（一作格）一卷，僧栖岩注。”

宋孙逢吉《职官分纪》卷十七引《大唐六典》称：“《大衍历》开元十四年（公元726年）嵩山僧一行承制旨考定，最为详密，今见行。”

(八) 边 冈

边冈,唐乾符时(874～897)为术士。《资治通鉴》卷二百五十九,景福元年(公元892年)条称:"(唐昭宗,889～905)《宣明历》浸差,太子少詹事边冈造新历成,十二月上之,命曰《景福崇玄历》。"胡注称:"边冈与司天少监胡秀林、均州司马王墀改治新历。然术一出于冈。冈用算巧,能驰骋反复于乘除间。由是简捷、超径、等接之术兴,而经制、远大、衰序之法废矣。虽筹策便易,然皆冥于本原。"

《新唐书》则称:"立先相减后相乘之法,令衰杀有伦。"(见《资治通鉴》卷二百五十九及《新唐书》卷三十下,志第二十,历志,又卷三十一)

《新五代史》卷五十八司天考称:"王朴奏曰:臣考前世无食神首尾之文,近自司天卜祝小术,不能举其大体,遂为等接之法,盖从假用以求径捷。"

《新唐书》卷五十九艺文志有:"边冈《景福崇玄历》四十卷冈称处士。"《宋史》卷二百零九志第一百六十艺文六作:"边冈唐《景福崇玄历》十三卷。"

(九) 刘 孝 孙

刘孝孙,《隋书》卷十七又称:"刘孝孙广平人,开皇十四年(公元594年)论历,俄卒。"《直斋书录解题》记:"甄鸾注、刘孝孙细草《张丘建算经》三卷,李淳风等注释。"宋本《张丘建算经》三卷题:"唐算学博士、臣刘孝孙细草。"又《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》有:"《隋开皇历》一卷、……《七曜杂术》二卷、刘孝孙撰。"(见

《旧唐书》卷四十七志第二十七经籍下;《新唐书》卷五十九,志第四十九艺文志)

20. 唐李淳风注十部算经

唐李淳风注《十部算经》，各书所载亦互有详略，兹引列如下，以备考证：

《九章》

《九章算经》□□，李淳风释。（《一切经音义》）

《九章算经》九卷，李淳风注。（《新唐书》）

《九章算经要略》一卷，李淳风注。（《新唐书》）

《九章算经要略》一卷，李淳风注释。（《宋史》，《崇文总目》）

《九章算术》九卷，李淳风撰。（《通志·艺文略》）

《九章算经要诀》一卷，李淳风撰。（《通志·艺文略》）

《九章算经》九卷，魏刘徽、唐李淳风注。（《宋史》）

（《郡斋读书志》，《玉海》，《文献通考》同）

《九章算经要略》九卷，李淳风注。（《宋史》）

《孙子》

甄鸾《孙子算经》三卷，李淳风注。（《新唐书》，《通志·艺文略》同）

《孙子算经》三卷，李淳风注。（《崇文总目》）

《孙子算经》一卷，李淳风注。（《宋史》）

《五曹》

（《五曹》）、《孙子》等十部算经二十卷，李淳风注释。（《唐会要》）

《五曹》、《孙子》等十部算经二十卷，李淳风注。（《旧唐书》，《新唐书》）

(《通志·艺文略》同)

《五曹算经》二卷,李淳风注。 (《新唐书》)

《五曹算经》五卷,李淳风注。 (《宋史》,《玉海》)

甄鸾《五曹算术》二卷,李淳风注。 (《宋史》)

《张丘建》

《张丘建算经》三卷,李淳风注。 (《新唐书》,《通志·艺文略》同)

甄鸾注、刘孝孙细草《张丘建算经》三卷,李淳风等注释。

(《直斋书录解题》)

《夏侯阳》

……

《周髀》

《周髀算经》二卷,李淳风注。 (《旧唐书》,《新唐书》)

《周髀算经》二卷,李淳风撰。 (《通志·艺文略》)

赵君卿注、甄鸾重述《周髀算经》二卷。 (《崇文总目》,《中兴馆目》)

(《玉海》,《文献通考》同)

《五经》

《五经算术》二卷,李淳风。 (《新唐书》,《崇文总目》同)

王孝通《五经算法》一卷,李淳风注。 (《宋史》)

《五经算术》二卷,甄鸾注、李淳风注释。 (《玉海》引《书目》)

《纪遗》

……

《海岛》

《海岛算经》一卷,李淳风注。 (《新唐书》)

《海岛算经》一卷,李淳风撰。 (《通志·艺文略》)

《海岛算经》一卷,甄鸾注,李淳风等注释。 (《玉海》)

《缀术》

祖冲之《缀术》五卷,李淳风注。 (《旧唐书》)

祖冲之《缀术》五卷，李淳风释。 （《新唐书》）

《缉古》

《缉古算术》四卷，李淳风注。 （《旧唐书》）

王孝通《缉古算术》四卷，李淳风注。 （《新唐书》）

《缉古算术》一卷，李淳风注。 （《宋史》）

21. 宋刊算经十书

唐立算学，李淳风因注《十部算经》。宋代再置算学，同时因而刊刻《算经十书》，用备研习。《宋会要》称："奉圣旨：今国子监依元丰六年(1083年)九月十六日指挥施行。"《宋史》称："元丰七年，诏选命官通算学者，通于吏部就试。"宋本《周髀》、《孙子》、《五曹》、《缉古》、《夏侯阳》、《九章》诸算经有："元丰七年九月□日"字样，而《缉古》、《夏侯阳》、《九章》诸算经又有宰辅大臣官衔姓名一幅，司马光以下并列名其上。并有三行书："元丰七年九月二十八日进呈，奉御宝批：宜依已校定镂板"字样。复次则：

宋王应麟《玉海》卷四十四称：

《孙子算经》三卷　元丰间秘书监赵彦若等校定。

《五曹算经》五卷　元丰间秘书监赵彦若等校定。

《缉古算经》一卷　元丰间秘书监赵彦若等校定。

《海岛算经》一卷　元丰间秘书监赵彦若等校定。

宋马端临《文献通考》卷二百一十九称：

《(夏侯阳)算经》一卷　无注　元丰京监本。

宋陈振孙《直斋书录解题》亦称：

《(夏侯阳)算经》三卷　无注　元丰京监本。

靖康二年(1127年)，金人入汴，秘阁三馆书籍、监本印板，并

取而去，府库蓄积，为之一空，秘阁图书，狼藉泥土中[1]。

《玉海》称"绍兴九年(1139年)九月七日，诏下诸郡索国子监元颁善本，校对镂版。十五年(1145年)闰十一月，博士王之望请：群经义疏，未有版者令临安府雕造。二十一年(1151年)五月，诏令国子监访寻五经三馆旧监本刻版。上曰：其他阙书，亦令次第雕版，虽重有所费，亦不惜也。"而于《算经》之重刻尚未暇顾及。直至嘉定五、六年(1212，1213年)，汀州守括苍鲍澣之始重刊《数术记遗》和《周髀算经》。

明程大位《算法统宗》卷末"算经源流"条称："宋元丰七年(1084年)刊《(算经)十书》入秘书省，又刻于汀州学校：

《黄帝九章》《周髀算经》《五经算法》《海岛算法》
《孙子算法》《张丘建算法》《五曹算法》《缉古算法》
《夏侯阳算法》《算术拾遗》。

所谓"又刻于汀州学校"尚未能确定是鲍澣之重刊元丰监本。就中《九章》一书，据宋鲍澣之《九章算经序》，则庆元六年(1200年)之夏，鲍澣之在都城，与太史局同知算造杨忠辅德之论历，因从其家得古本《九章》。嘉定五年(1212年)，因《数术记遗》不立于崇宁学官，因于杭州七宝山三茅宁寿观《道藏》中录得。宋汀州刻本"《五曹算经》五卷，附《数术记遗》一卷，《算学源流》一卷"，有嘉定五年鲍澣之序[2]。至《周髀算经》亦有鲍澣之序，题："嘉定六年癸酉(1213年)十一月一日丁卯冬至，承议郎权知汀州军州兼管内劝农事主管坑冶括苍鲍澣之仲祺谨书。"考弘治《汀州府志》职官门，知澣之以嘉定六年以朝奉郎知本州，八年(1215年)除刑部郎官离

① 参考《宋史》钦宗本纪，《宣和录》，《系年要录》，《三朝北盟会编》卷七十三。

② 见徐乃昌，《文禄堂访书记》卷三。

任。《算经》之刊，当在其始事时[1]。

王国维《五代两宋监本考》卷中称：

北宋监本：

《周髀算经》二卷 《九章算术》九卷 《孙子算经》三卷

《数术记遗》一卷 《海岛算经》一卷 《五曹算经》五卷

《夏侯阳算经》三卷 《张丘建算经》三卷 《五经算术》二卷

《缉古算经》一卷

"秘书省

某某《算经》一部××共×册，

元丰七年九月 日校定，降授宣德郎秘书省校书郎臣叶祖洽上进

校定 承议郎行秘书省校书郎臣王仲脩

校定 朝奉郎行秘书省校书郎臣钱长卿

奉议郎守秘书丞臣韩宗古

朝请郎试秘书少监臣孙觉

降授朝散郎试秘书监臣赵彦若"

影宋本(《周髀算经》)、《五曹算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》(《缉古算经》)后均有此九(八)行。

"元丰七年九月二十八日

进呈。奉

御宝批：宜依已校定镂板。

朝奉郎秘书丞上骑都尉赐绯鱼袋臣 韩 治

朝散郎试秘书少监上骑都尉赐绯鱼袋臣 顾 临

朝议大夫守秘书少监上护军赐紫金鱼袋臣 刘 攽

中大夫守尚书右丞护军东平郡开国侯食邑二千三百户赐紫金鱼袋臣 吕大防

---

① 见1933年12月7日《大公报》图书副刊第六期内赵万里《芸盦郡书题记》。

通议大夫守尚书左丞上柱国平原郡开国公食邑二千八百户食实封
伍百户臣 李清臣
正议大夫守中书侍郎上柱国冯翊郡开国公食邑二千三百户食实封
伍百户臣 张 璪
正议大夫守门下侍郎上柱国南阳郡开国公食邑二千一百户食实封
壹仟户臣 韩 维
金紫光禄大夫守尚书右仆射兼中书侍郎上柱国东平郡开国公食邑
六千二百户食实封壹仟玖伯户臣 吕公著
正议大夫守尚书左仆射兼门下侍郎上柱国河内郡开国公食邑四千
一百户食实封壹仟伍伯户臣 司马光。"

影宋本《夏侯阳算经》后有此十一(十二行)[1]。

证以王应麟、马端临、陈振孙,及宋刻《算经》,则元丰七年赵彦若校定算经之可考者,有《周髀》、《孙子》、《五曹》、《缉古》、《海岛》、《夏侯阳》、《九章》、《张丘建》。至程大位所称《五经算法》、《算术拾遗》,元丰时是否有刻本尚待考证。

复次则《宋会要》称:"(政和)六年(1116 年)四月十九日,诏通仕郎武仲宣,自大观初兴复算学后来注释考正见行《算经》一百八十九卷,特与循一资。"[2] 见行《算经》一百八十九卷中必包括《算经十书》,惜其详不可得闻矣。

---

① 王国维《五代两宋监本考》卷中第 42 页以下。

② 据大兴徐松辑大典本《宋会要》卷一百三十二引《永乐大典》卷二万二千,吴兴刘承幹编定,今藏北京图书馆。

22. 算经十书佚文

古代算书之流传于现代者，首推《算经十书》。其刊刻则以宋元丰七年(1084年)刻本为定本。但其佚文遗义分见于宋代前后记载者，由作者辑录得若干条，以备考证。

九 章 算 术

魏刘徽《九章算经序》"……"

宋王应麟《玉海》卷四十四及《困学纪闻》卷四曾引及之。

《九章算经》李淳风注云：旧术求圜，皆以周三径一为率，若用之求圜周之数，则周少而径多。径一周三，理非精密，盖术从简要，略举大纲而言之。今依密率，以七乘周，二十二而一，即径；以二十二乘径，七而一，即周。

上文见宋李诫《营造法式》(1091年)"看详"，引《九章算经》(卷一)李淳风注。

王莽时刘歆斛尺弱于今尺四分五厘，比魏尺其斛深九寸五分五厘。

上文见《晋书》卷十六律历志上，及《隋书》卷十六律历志引魏陈留王景元四年刘徽注《九章》(卷一)。

粟率五十、粝米三十、粺二十七、糳二十四、侍御二十一。

上文见《诗》大雅"彼疏斯粺"疏，引《九章》粟米之法。

粟(率)五十、粝率三十，一斛米得六斗米为粝也。

上文见唐李贤注《后汉书》卷五十六伏湛传引《九章算术》。

玉方寸重七两；石方寸，重六两。

上文见《考工记》玉人疏引盈不足术。语见宋王应麟《玉海》卷四十四，下三条同。

海岛邈远，不可践量。

上文见《禹贡疏》引《九章算术》。

穿地四，为壤五，为坚三。

上文见《诗》绵疏引《九章算术》。

粟率五十　糳二十四

上文见《春秋》疏引《九章算术》。

今按《九章·均输篇》有犬追兔术，与此术相似。彼问：犬走一百步，兔走七十步。今兔先走七十五步，犬始追之，问几何步追及？答曰：二百五十步追及。彼术曰：以兔走减犬走，余者为法；又以犬走乘兔先走为实；实如法而一，即得追及步数。

上文见唐王孝通《缉古算经》第一问注引，为今本《九章算术》所无。(严敦杰补注)

孙 子 算 经

十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引是。

上文见唐慧琳《一切经音义》卷二十五，《涅槃经》第四卷，毫厘条注引《孙子算经》。

十厘为分，十分为寸。

上文见《适园丛书》本宋彭百川《太平治迹统类》卷六引《孙子》。

凡称之所起，始于黍，十黍为一絫，十絫为一铢，六铢为一缁。缁即分也，音汾问反。四分为一两，十六两为一斤，三十斤为钧，四钧为一石，即一百二十斤也。

上文见《一切经音义》一百卷，《念佛三昧宝王论》上卷"锱铢"条注引《孙子九章算经》。

量之所起，初起于粟，六粟为一圭，六十粟为一撮，六百粟为一抄，六千粟为一勺，六万粟为一合，六十万粟为一升，六百万粟为一斗，六千万粟为一斛。

上文见《一切经音义》卷二十五，《涅槃经》第十卷"满足百斛"条注引《孙子算经》。

十十为百，十百为千，十千为万，自万至亿有三等，上中下数变之也。

上文见《续一切经音义》卷二，《新大方广佛华严经》卷第一"百洛义为一俱胝"条注引《孙子算经》。

"凡数不过十，名不过万，故万万即改×一、十、百、千、万，一万、十万、百万、千万、万万"[19]

曰亿。×一亿、十亿、百亿、千亿、万亿、十万亿、百万亿、千万亿、万万亿曰兆。×"[20]

一兆、十兆、百兆、千兆、万兆、十万兆、百万兆、千万兆、万万兆曰京。×一京、十京、百京、千京、"[21]

万京、十万京、百万京、千万京、万万京曰垓。×一垓、十垓、百垓、千垓、万垓、十万垓、"[22]

百万垓、千万垓、万万垓曰梓。×一梓、十梓、百梓、千梓、万梓、十万梓、百万梓、千万梓、"[23]

万万梓曰让，×一让、十让、百让、千让、万让、十万让、百万让、

千万让、万万让曰沟。×”[24]

一沟、十沟、百沟、千沟、万沟、十万沟、百万沟、千万沟、万万沟曰间。×一间、十间、百间、”[25]

千间、万间、十万间、百万间、千万间、万万间曰政。×一政、十政、百政、千政、万政、”[26]

十万政、百万政、千万政、万万政曰载。×一载、十载、百载、千载、万载、十万载、”[27]

百万载、千万载、万万载曰极。”[28]

右孙子数，钱满载，天不容，地不载。故以载为极末也。”[29]

上文见敦煌千佛洞“《算经》一卷并序”第19行至28行。

古者积钱上至于天，天不能容；下至于地，地不能载；天不能盖，地不能载，故名曰载。

上文见《太平御览》卷七百五十工艺部七引《孙子算经》。明陈耀文《天中记》卷四十一数下“载数之极”条引同，疑亦出于《太平御览》。清孙诒让《札迻》卷十一称：检今本《孙子算经》无此语，疑传录失之。

夏侯阳算经

算数起自伏羲，而黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》，汉备五数云云。《五曹》、《孙子》，述作滋多，甄鸾、刘徽为之注释。

上文见宋王应麟《玉海》卷四十四引。

又宋王应麟《小学绀珠》卷之一，亦引有《夏侯阳算经序》。

黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》，汉备五数。

上文见明陈耀文《天中记》卷四十一数下九数条引。

周髀算经

周公问于商高曰：“寡人闻子大夫善数。”“数，算也。”

上文见《太平御览》(公元977年)卷七百五十工艺部七引《周髀》。

周公问于商高曰:闻大夫善数,数安从出?高曰:数之法出于圜方,方出于矩。周公曰:请问用矩之道。曰:平矩以正绳,偃矩以望高,覆矩以测深,卧矩以知远,环矩以为圜,合矩以为方。

上文见元舒天民《六艺纲目》卷下"九数"条引《周髀》。

昔者周公问于商高曰:数安从出?商高曰:数之法出于圜方,圜出于方,方出于矩,矩出于九九八十一。万物周事,而圜方用焉;大匠造制,而规矩设焉。或毁方而为圜,或破圜而为方;方中为圜者,谓之圜方;圜中为方者,谓之方圜也。

上文见宋李诫《营造法式》(1091年)"看详"引《周髀算经》。道光丙戌(1826年)闻筝道人《营造法式跋》称:可补今本之脱佚。俨按:今本"万物周事"至"谓之方圜也"四十九字在卷上七衡图之前。

夫天不可阶而升。

上文见唐李善注《文选》引《周髀》。

天不可阶而升,地不可尺寸而度。

上文见《太平御览》卷二十六地部地上引《周髀算经》。

天圆地方,盖以写天,天青黑为表,丹黄为里,故天象盖覆,中高四旁下也。

上文见隋虞世南《北堂书钞》卷一百四十九"天"一"天象盖覆"条引《周髀》。清孔广陶校注《北堂书钞》称:是本钞数句,足补算经之阙。

日中树表,则无影矣。

上文见《世说》言语篇引《周髀》,清顾观光《周髀算经校勘记》,以为即原文"日中立竿测影"下之脱文。

日益南,晷益长。

上文见《华严经音义》四引《周髀》,清顾观光《周髀算经校勘记》以为即原文"日益表南,晷日益长",此表字日字,并衍。

冬至三光微,夏至三光盛。

上文见《太平御览》卷二十三时序部八夏至《范子计然》内引《周髀》。清顾观光《周髀算经校勘记》以为即原文"三光之精微,以成其道远"内脱文。

数 术 记 遗

世人言:"三不能比两",乃云悄闷与四维。甄鸾注《艺经》曰:悄闷者,周公作。先布本位,以十二时相从。徐援称悄闷是奇两之术。三不能比两者,孔子所造,布十干于其方,戊己在西南。四维,东莱子所造,布十二时四维。

上文见宋王应麟《困学纪闻》卷九天道条和《小学绀珠》卷之一引《数术记遗》。《玉海》卷四十四引同。

按《太平御览》卷七百五十五工艺部十二于悄闷、四维亦有解析。而清杭世骏《诸史然疑·后汉书》条则以甄鸾注《数术记遗》,谓孔子作三不能比两,为离经畔道。兹录其文如下:

> 《太平御览》卷第七百五十五工艺部十二"四维":"晋李秀四维赋序曰:四维戏者,卫尉贲侯所造也。画纸为局,截木为棋,取无一,分而为二,准阴阳之位,拟刚柔之棋,而变动无为生乎其中。
>
> 《太平御览》卷第七百五十五工艺部十二,弹棋……悄闷……掷抟内"悄于玄反闷"条引:"《艺经曰:悄闷者先布本位,以十二时相从。文曰:同有文章,虎不如龙,豕者何为,来入兔宫。王孙画卜,乃造黄钟。犬往就马,非类相从,羊奔蛇穴,牛入鸡笼。"

清杭世骏《道古堂外集》:《诸史然疑·后汉书》:

> 东汉崇尚纬谶者,多非圣无法,动引孔子,以实其说,……甄鸾注《数术记遗》谓:孔子作三不能比两,……其离经畔道也至矣。

黄帝为数,法有十等,亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。及其用也有三,谓上、中、下。下数十万曰亿,中数百万曰亿,上数万万曰亿。

上文见唐慧琳《一切经音义》二十七卷，引《筭经》。

黄帝算法总有二十三数，谓一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。从万以上，有三等数法，其下者十十变之，中者百百变之，上者倍变之。

上文见唐慧琳《一切经音义》，二十一卷，引《黄帝算法》，又见明胡应麟《少室山房丛集》(1593年)卷四十七引。

上文二条疑出《算术记遗》，因并列于此。

又甄鸾撰《五经算术》卷上，亦引上文二条。

五 曹 算 经

宋王应麟《小学绀珠》卷之一引：

《五曹算经》：田曹，兵曹，集曹，仓曹，金曹。

23. 九章算术补注(一)

九 章 本 文

九 章 第 一

几何 《春秋左传》僖公二十七年传:楚芳贾曰:"靖诸内,而败诸外,所获几何?"

亩法 《广韵》卷第三:"亩,《司马法》:六尺为步,步百为亩;秦孝公之制,二百四十步为亩也。"《盐铁论》卷第三:"古者制田百步为亩。……先帝(昭帝)哀怜百姓之愁苦,衣食不足,制田二百四十步而一亩。"见《四部丛刊》影明刊本《盐铁论》"论三"第九页。

顷 《广韵》卷第三:"顷,田百亩也。"《公羊》宣十五传注:"一夫一妇,受田百亩,公田十亩,庐舍二亩半,凡为田一顷十二亩半。"

里 邹伯奇《补小尔雅释度量衡》三篇:"周制三百步为里。""《谷梁》宣十五年传:古者三百步为里。《家语》王言周制三百步为里。"

宛田 清罗士琳《算学启蒙后记》:"至于是(《算学启蒙》)书畹田之畹,并见《(四元)玉鉴》,或疑字书所无。按刘徽所注之《九章》,本亦作晥。李籍《音义》谓当作宛,字之误也。盖取《尔雅》宛中宛邱注中央隆高之义,今刻从李所改。杨辉《算法》作晥。考《说文》畹下注:田三十畮也,与中央隆高义迥别。《夏侯阳算经》丸田注:"形如

覆半弹丸。”而“术曰：径乘周四而一。”与此合。丸、畹音近，畹、畹形近似，畹虽不见于字书，殆如明邢云路《古今律历考》幂积之幂别作羃，同为算书习用字。”

九 章 第 二

粟米 《盐铁论》园池第十三：“粟米薪采，不能相赡。”

粝米 说文：“粝；粟重一秬，为十六斗大半斗，舂为米一斛曰粝。”俨按：粟比粝如十六又三分之二比十，故粟率五十而粝率三十。

《前汉书》卷六十二：“粝粱之食。”服虔曰：“粝，粗米也。”张晏曰：“一斛粟，七斗米为粝，音赖。”宋祁曰：“景本粝作粝，注同。”

《后汉书》卷五十六伏湛传：“乃共食粗粝。”唐李贤注：“粝，粗米也。《九章算术》曰：粟五十，粝率三十。一斛粟得六斗米为粝也。”

粺米 《说文》：“粺，毁也。”又：“毁：粝米一斛，舂为九斗也。”俨按：粟率五十而粝率三十，今粝米一斛，舂为（粺）九斗；故粟率五十而粺率二十七。

糳米 《说文》：“糳：粝米一斛为八斗曰糳。”俨按：此言粟率五十而糳率二十四。

御米 《诗大雅》：“彼疏斯粺。”郑康成笺：“米之率：粝十、粺九、糳八、侍御七。”

元胡三省《通鉴省文辩误》卷九引《九章算术》：“粟一石，为粝米六斗，舂粝一斗为粺九升，又舂为侍御则七升。”

太半 《史记》项羽本纪：“汉有天下太半。”“吴韦昭曰：凡数三分有二为太半，一为少半。”《淮南子》卷六览冥训：“斩艾百姓，殚尽太半。”“逵吉按：凡数三分有二为太半，有一为少半，韦昭说也。”《前汉书》卷二十四上食货志：“收泰半之赋。”“师古曰：泰半三分取二。”

瓴甓 《管子》卷十八:"故高其上,领瓴之,尺有十分之三。"《前汉书》卷九十尹赏传:"穿地方深各数丈,致令辟为郭。""师古曰:令辟,甎砖也。"《广韵》卷三:"甓:瓴甓,甎砖。"

李明仲(诚)《营造法式》卷二"垼"条引:"《诗》:中唐有甓;《尔雅》:瓴甋谓之甓。注:甎砖也,今江东呼为瓴甓;《博雅》:……甓,甎砖也;《义训》:井甓谓之甋,音洞……。"又宋朱熹(1130～1200)《楚辞集注》(1235年刻本)引司马相如《长门赋》:"致错石之瓴甓兮,象瑇瑁之文章。"

《通鉴释文辩误》卷十一:"史照释文曰:甓,瓴甓,……余(元胡三省)谓:瓴甓今之砖。"

钱 《说文》贝下云:"至秦废贝行钱。"《史记·秦始皇本纪》:"(秦)惠文王生十九年而立,立二年,初行钱。"

缣 《释名》释彩帛第十四:"缣,兼也,其丝细致,数兼于布绢也。"《广韵》卷二:"缣,绢也。《说文》曰:并丝缯也。"

匹 《汉书·食货志下》:"布帛广二尺二寸为幅,长四丈为匹。"

铢、两、斤、钧、石 《汉书·律历志》:"权者,铢、两、斤、钧、石也,所以称物平施知轻重也。本起于黄钟之重。一龠容千二百黍,重十二铢,两之为两。二十四铢为两,十六两为斤,三十斤为钧,四钧为石。"《史记·秦始皇本纪》:"至以衡石量书。"《集解》:"石百二十斤。"《广韵》卷一:"斤,十六两也。钧,三十斤也。"

《前汉书》卷五十一注:"郑氏曰:石,百二十斤。(吴)张晏曰:乘所转四万六千八十铢,而至于石。"(即:24×16×30×4=46080)

猴 《广韵》卷二:"猴,《说文》曰:羽本也。"《方言》第十三:"猴,本也。""今以鸟羽本为猴,音侯。"

矢竿 《释名》释兵第二十三:"矢,指也。……其体曰干,言挺干也。"

九 章 第 三

衰分 《淮南子》卷十七说林训："大小之衰然。"高注："衰，差也。"唐陆德明《经典释文》卷第十八《春秋左传音义》之四以衰注："差，降也。"

大夫、不更、簪衰、上造、公士 《史记》秦本纪集解引《汉书》曰："商君为法于秦，战斩一首，赐爵一级，欲为官者五十石，其爵名一为公士、二上造、三簪衰、四不更、五大夫、……二十彻侯。"《前汉书·百官公卿表上》称："爵：一级曰公士，师古曰：言有爵命，异于士卒，故称公士也。二上造，师古曰：造，成也，言有成命于上也。三簪衰，师古曰：以组带马曰衰。簪衰者，言饰此马也。衰音乃了反。四不更，师古曰：言不豫更卒之事也，更音工衡反。五大夫，师古曰：列位从大夫，……二十彻侯，皆秦制。"汉荀悦《前汉纪》卷五引同。《续汉书·百官志》称："关内侯，承秦赐爵，十九等为关内侯。"梁刘昭注补引："刘劭爵制曰：一爵曰公士者，步卒之有爵为公士者。二爵曰上造。造，成也。古者成士升于司徒，曰造士，虽依此名，皆步卒也。三爵曰簪衰，御驷马者。要衰，古之名马也。驾驷马者，其形似簪，故曰簪衰也。四爵曰不更。不更者，为车右，不复与凡更卒同也，五爵曰大夫。大夫者，在车左者也。"

秦商鞅《商子》卷五境内第十九："故爵公士也，就为上造也，故爵上造，就为簪衰，就为不更，故爵为大夫。"《左传注疏》卷二十七，传十三年："秦师败绩，获秦成差及不更女父。"注："不更，秦爵。"

《居延汉简》(公元前102年至公元31年)内有"簪衰"名称。

持钱 《前汉书·高祖纪上》："贺钱万，实不持一钱。"

算 《汉仪注》曰："人年十五至六十五，出赋钱一百二十为一

算。又七岁至十四出口钱,人二十以供天子。至武帝时,又口加三钱,以补车骑马。"俨按:《论衡·谢短篇》曰:"七岁头钱二十三。"又《说文》:"汉律民不繇,赀钱二十三。"都指"口钱"。

徭 《前汉书·高祖纪上》:"高祖常繇咸阳。"应劭曰:"繇者,役也,……,繇读曰徭,古通用字。"

素 《礼记》郑注:"素,生帛也。"《释名》释彩帛第十四:"素,朴素也。已织则供用,不复加巧饰也。"

保 《史记·栾布传》:"穷困,赁佣于齐,为酒家保。"注:"酒家作保佣也"。

《史记》荆轲列传:"高渐离变姓名,为人佣保。"

《前汉书》卷十六高惠高后文功臣表第四:"求其子孙,咸出庸保之中。"

九 章 第 四

又有积三十九亿七千二百一十五万 俨按:此言亿为万万。

九 章 第 五

商功 《前汉书》二十四上食货志称:"耿寿昌以善为算,能商功利。"又称:"(耿)寿昌习于商功分铢之事。"《前汉书》二十九沟洫志称:"(许)商,(乘马)延年,皆明计算,能商功利。"

穿地 《说文》:"穿,穿地也。"段注引召南曰:"谁谓鼠无牙,何以穿我墉。"《周礼》小宗伯注:"南阳名穿地为窬。"《前汉书·尹赏传》:"穿地方深各数丈。"《史记》秦始皇本纪:"始皇初即位,穿治郦山。"

壤 《说文》:"壤,柔土也。"

城 崔豹《古今注》上："城者盛也，所以盛受人物也。"

堤 《尔雅》："筑土遏水曰堤。"

沟 《考工记》："广四尺深四尺，谓之沟。"

塹 《广韵》卷第四："塹，坑也，绕城水也。"

《前汉书》卷五十七上司马相如传第二十七上："隤墙填塹，使山泽之民得至焉。"

《前汉书》卷六十九赵充国辛庆忌传第三十九："部曲相保，为塹垒木樵。"

徒 《尔雅》河曲下"徒骇"条李巡云："徒骇者，禹疏九河，以徒众起，故曰徒骇。"又"太史"条，李巡云："太史者，禹大使徒众，通其水道，故曰太史。"《史记·秦始皇本纪》："始皇初即位，穿治郦山。及并天下，天下徒送诣七十余万人。"又《孝景本纪》："孝景……七年……春免徒隶作阳陵者。"又《平准书》："人徒之费，拟于南夷。"

堞垛 《广韵》卷第三："堞，堞障，小城；垛，高土。"

《吕氏春秋·疑似篇》："周宅酆镐，近戎人。与诸侯约，为高葆祷于王路，置鼓其上，远近相闻，即戎寇至，传鼓相告，诸侯之兵，皆至救天子。"俨按：此"葆祷"即"堞垛"的异文。

棚 《广韵》卷第二："棚，棚阁。"

踟蹰 《广韵》："踟蹰，行不进貌。"

九 章 第 六

均输 《史记·秦始皇本纪》："调郡县，转输菽粟刍稿。"《史记·平准书》或《前汉书·食货志》称："桑弘羊为大农丞，管诸会计事，稍稍置均输，以通货物矣。"元封元年（公元前110年），"桑弘羊为治粟都尉，领大农，尽代（孔）仅笼天下盐铁。弘羊以诸官各自

市,相与争,物故腾跃,而天下赋输或不偿其僦费。乃请置大农部丞数十人,分部主郡国,各往往县置均输盐铁官。"孟康注曰:"(均输者,)谓诸当所输于官者,皆令输其土地所饶,平其所在时价,官更于他处卖之,输者既便,而官有利。《汉书·百官表》大司农属官有均输令。"梁刘昭注《汉志》并引盐铁论之说,以明均输之制。

《后汉书》卷四十三朱晖传:"武帝时所谓均输者也。"李贤注:"武帝作均输法,谓州郡所出租赋,并雇运之直,官总取之,市其土地所出之物,官自转输于京,谓之均输。"后汉有均输的官吏。

"昭帝始元六年(公元前81年),诏郡国举贤良文学之士,问以民所疾苦,教化之要。皆对愿罢盐铁、酒榷、均输官,毋与天下争利,视以俭节,然后教化可兴。时桑弘羊为御史大夫,与贤良、文学辩论时政得失。宣帝时桓宽记其相互诘难之辞,凡六十四篇,题曰《盐铁论》。其第一篇本议录桑弘羊均输、平准二事之定义,较平准书、食货志所载者尤为切近。

"《盐铁论》卷第一'本议第一'称:'是以先帝(昭帝)建铁官以赡农用,开均输以足民财,……大夫曰:往者郡国诸侯,各以其物贡输,往来烦杂,物多苦恶,或不偿其费,故郡置输官以相给运,而便远方之贡,故曰均输……'见《四部丛刊》影明刊本《盐铁论》'论一'第1及4页。

"今《九章算术》均输章二十八题中惟首四题系均输本术问题,余为假借法之应用。就中仅第四问比较完备。题文有云:'粟有贵贱,佣各别价,以算出钱,令费劳等,问县各粟几何?'其算法可以考见汉均输法之一斑,足补《史记》平准书及《汉书》食货志之简略。"参看钱宝琮《汉均输法考》,《文理》第四期第46~47页*。

---

* 见本书第九卷第141~143页。——编者

塞 崔豹《古今注》上："塞者，塞也。所以拥塞戎狄也。"又称："紫塞，秦筑长城，土色皆紫，汉塞亦然，故称紫塞也。"

僦一里一钱 《前汉书·酷吏传》："初大司农取民牛车三万两为僦，……车直千钱。"注服虔曰："雇载曰僦，言所输物不足，偿其雇载之费也。"颜师古曰："僦，顾也，言所输赋物不足偿其余顾庸之费也。"

佣价一日一钱 《史记·陈涉世家》："尝为人佣耕。"俨按：前言僦一里一钱，此言佣一日一钱；则僦佣同为雇佣之费，僦以一里计，佣以一日计也。

太仓 《史记·平准书》："至今上即位，……太仓之粟，陈陈相因。"

上林 《史记·秦始皇本纪》："诸庙及章台、上林，皆在渭南。"《史记·孝武本纪》："是时上求神君，舍之上林蹄氏观。"

问金一斤值钱几何？答曰："六千二百五十" 《前汉书·张良传》注："秦以镒名金，若汉之论斤。"《史记·平准书》："又造银锡为白金，……故白金三品，其一曰重八两，圜之，其文龙，名曰白选，直三千，……而吏民之盗铸白金者，不可胜数。"俨按：此处所指之金，盖指白金。《九章算术》言金一斤值钱六千二百五十，《史记》言白金八两直三千，即一斤直六千，两者相类，而吏民之盗铸白金者，不可胜数，故值亦不一。

"第四种是楚国的方币，正方形，中间整齐地划了十六个小方格，每小方格中有的又铸有'一两'二字，十六个小方格是十六两，十六两为一斤。可知一个大方币，便叫作'斤'了。在古书中每有金若干斤的说法，有了这方币的出现，才懂得了它的意义。"(见郭沫若，《奴隶制时代》，第40页，1952年)。

牡瓦、牝瓦 《广韵》卷一"庋，屋牡瓦名。"又卷一："甋，牡瓦。"《广韵》："甋，甋也。"《玉篇》："甋，牡瓦也。"《广雅》作甋。《广韵》：

"甋甋,小牡瓦也。"《玉篇》,《广韵》称:"甋,牝瓦也。"《三国志》:"魏文帝梦两瓦落地为鸳鸯。"李商隐诗:"秦楼鸳瓦汉宫盘。"白居易诗:"鸳鸯瓦冷霜华重。"

九 章 第 七

珊 《说文》:"珊,石之似玉者。"

醇酒、行酒 《史记·曹相国世家》:"日夜饮醇酒。"《说文》:"醇,不浇酒也。醴,泛齐行酒也。"段注曰:"泛齐见《周礼》,……行酒未闻,疑是货物行敝之行,谓行用之酒也。"俨按:行酒实对醇酒而言。

《资治通鉴》卷一百四十五《梁纪》高祖武皇帝:"王曰,我死不须金,醇酒足矣。"

《盐铁论》刺复第十:"是以曹丞相日饮醇酒。"

黄文弼《罗布淖尔考古记》(1949年)第四篇,木简考释内引木简49称:"为东卿造水三斗,醇酒一斗,……。"

《太平御览》卷七百四十二疾病部五"疫疠"条引:"《刘根别传》曰……以淳酒三升沃在地,……。"

九 章 第 八

秉 《说文》:"秉,禾束也。"①

九 章 第 九

① 参看程廷熙"秉"《数学通报》1953年1~2号(1953年),第55页。

24. 九章算术补注(二)

九 章 条 目

九章条目之见于诸家载记者,有下开各条:

1. 九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要;今有重差、夕桀、勾股也①。

上文见汉郑玄《周礼》保氏九数注引汉郑众《周礼注》(约公元83年)。又张衡《灵宪》称:"用重差,勾股。"按唐孔颖达《礼记少仪》郑注《九数正义》引作:

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要;今有重差,勾股。

唐贾公彦《周礼》,地官大司徒郑注九数引作:

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要;今有重差、夕桀、勾股。

宋李昉等《太平御览》卷七五〇引作:

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要;今有重差、夕桀、勾股。

---

① 此据(商务)《四部丛刊初编》内《周礼》十二卷缩印长沙叶氏藏明翻宋本岳氏相台本。

宋李籍《九章算术音义序》引作：

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、夕桀、勾股。

宋邢昺《论语》七何晏注《六艺疏》引作：

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足，旁要。

宋王应麟《玉海》卷四十四，汉制考卷一，《汉艺文志考证》九同引作：

方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、夕桀、勾股。

清马国翰玉函山房辑《周礼郑司农解诂》二引与前同。

2. 今有夕桀。

上文见唐孔颖达《礼记少仪正义》引汉马融(约公元166年)《周官传》。按唐贾公彦《周礼》地官保氏郑注九数引作：

今有重差、夕桀。

清马国翰玉函山房辑马融《周官传》引与前同。

3. 方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。

上文见今本魏刘徽(公元263年)《九章算术》注。按宋王应麟《玉海》卷四十四，汉制考卷一及清鄂尔泰等《周官义疏》十三引并与前同。

4. 今有夕桀。

上文见唐孔颖达《礼记少仪正义》引晋干宝《周官礼注》。按清马国翰辑《周官礼干氏注》与前同。

5. 夕桀。

上文见唐陆德明《经典释文》八《周礼音义》上引后周沈重《周官礼义疏》。按清马国翰辑沈重《周官礼义疏》与前同。

6. 差分、重差、夕桀。

上文见唐陆德明《经典释文》及《周礼注疏》引。

7. 一方田、二粟米、三衰分、四少广、五商功、六均输、七盈朒、八方程、九勾股。

上文见唐长孙无忌《隋书·律历志》上及宋李籍《九章算术音义·序》引。

8. 九数：一方田、二粟米、三差分、四少广、五商功、六均输、七方程、八赢不足、九旁要；今有重差、勾股。

上文见唐孔颖达《礼记少仪正义》引儒者解。宋王应麟《玉海》卷四十四及《汉制考》卷一引与前同。

9. 九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、夕桀、勾股。

上文见《周礼保氏疏》内唐贾公彦《周礼义疏》。按宋王应麟《汉制考》卷一引与前同。宋王应麟《玉海》四十四及《汉书·艺文志》考证九引作：

重差、夕桀、勾股。

10. 九章：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。

上文见唐李贤注《后汉书》卷五四，马援列传第十四引，按宋王应麟《汉制考》卷一引《马援传注》与前同。又《玉海》四十四引《马援传注》作：

商功五、均输六、盈不足七、方程八。

唐李贤云：

《九章算术》：方田、粟米、差分、少广、均输、方程、旁要、盈不足、勾股。

上文见李贤注《后汉书》卷六十五，张曹郑(玄)列传第二十五引。按宋王钦若等《册府元龟》八六九《明算》引作：

方田、粟布、差分、少广、均输、方程、旁要、盈不足、勾股。

宋王应麟《玉海》四十四及《汉制考》引《郑玄传注》作：

方田、粟米、差分、少广、均输、方程、旁要、盈不足、勾股。

又宋王应麟《小学绀珠》卷之四,作"九数:方田,粟米,差分,少广,商功,均输,盈朒,方程,勾股。"

11. 九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。

上文见唐李林甫《唐六典》卷二十一,算学博士注引。

12. 九数:乘除之术凡九篇:一曰方田,以度田亩;二曰算粟,以制变易;三曰衰分,以辨隆杀;四曰少广,以求积幂;五曰商功,以计功程;六曰均输,以量远近;七曰盈不足,以较盈减;八曰方程,以御正负;九曰勾股,以测高远。

上文见唐白居易,宋孔传,《白孔六帖》卷三十三,算十引。按明陈仁锡《潜确类书》卷八十一引《孔帖》与前同。

13. 九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要也。

上文见宋陈彭年等《广韵》卷四,十遇韵,数字注。

14. 方田、粟布、差分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股。

上文见宋高承《事物纪原》卷一引。

又《事物纪原》卷一称:"一曰方田,即今丈量田地亩之法。二曰粟布,粟是谷,布是钱,谓以多少钱籴多少谷。三曰差分,此是理会官员俸禄多少之法。四曰少广,如今仓积米其中,以其器而知多少。五曰商功,商其工程,如打土论方子,打算一方土,便会计得合用几多人工。六曰均输,均其道里远近之劳。七曰盈朒,盈是多,朒是少,数之显者可见,隐者不可见。朒音缩。八曰方程,如算线,逐件除下零细的,绝长补短,凑得齐整,便好算。九曰勾股,此是量山量水之法,今军中立寨,有晓此法者。"

15. 九章算法:方田、粟米、差分、少广、均输、方程、旁要、盈(不)足、勾股。

上文见宋李石《续博物志》卷九引。

16. 九章：方田、粟米、差分、少广、商功、功输、盈朒、方程、勾股；附重差，夕桀。

上文见宋秦九韶《数学九章》(1247年)引。

17. 九章算法：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股；附旁要。

上文见宋杨辉《详解九章算法》(1261年)引。

18. 宋昭德先生《读书后志》卷二(一作衢本昭德先生《郡斋读书志》，有绍兴二十一年(1151年)自序)称：

"《九章算经》九卷

右未详撰人者姓名，或曰周公。九章者：一方田、二算粟、三衰分、四少广、五商功、六均输、七盈不足、八方程、九勾股。魏刘徽、唐李淳风尝为之注，则此术起于汉之前矣。"

元明以后九章条目，多因通行本《九章算术》篇目；其有互异之处，略引数条以见例。

19. 九章：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、盈朒、旁要。

上文见元托托等《宋史》卷六十八律历志二十一，引。

20. 九章：方田、算粟(一本作算米)、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。

上文见元马端临《文献通考》卷二百二十九引。

21. 方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。

上文见明姚广孝等《永乐大典》(1407年)目录。

22. 九章算法：方田、粟米、差分、少广、均输、方程、傍要、盈不足、勾股。

上文见明焦竑辑《焦氏说楛》(1613年刊本)卷三引,《续博物志》卷九引同。

23. 九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、赢朒、方程、勾股。

上文见明徐袍《事典考略》(1606年)卷二,或周学制条引。

24. 方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。

上文见明吴敬《九章详注比类算法大全》(1450年)目次,按吴敬同书乘除开方起例引《九章名数》作:方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股。

25. 九章:方田、粟布、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股。

上文见明程大位《算法统宗》(1592年)目次。

26. 九数:方田、粟布(一作算粟)、衰分、少广、商功、均输、盈朒(一作盈不足)、方程、勾股。

上文见明陈仁锡《潜确类书》卷八十一,崇祯三年(1630年)刻本,盖本《算法统宗》。其后明李笃培《中西数学图说》(1630年),清梅瑴成《增删算法统宗》所引并与前同[①]。

---

① 参看 孙文青"九章算术篇目考(上)",《金陵学报》第二卷,第二期(1932年11月),第1~43页。

25. 孙子算经补注

孙子算经序

“孙子曰：夫算者，天地之经纬，群生之元用，……”

微波榭孔刻《算经十书》本作：“群生之元用。”汲古阁毛氏景宋本作：“群生之元首。”毛景本今藏北京旧故宫博物院图书馆，即《天禄琳琅书目》中《御题算经》十册之一。

敦煌千佛洞“算经一卷并序”亦作“夫算者，天地之经纬，群生之元首。”

至古今之说述孙子者，胪举如下：

(1)《夏侯阳算经》序曰：“《五曹》、《孙子》，述作滋多。”

(2)《张丘建算经》序曰：“《夏侯阳》之方仓，《孙子》之荡杯，此等之术，皆未得其妙。”

(3)《隋书》卷三十四经籍志作：“《孙子算经》二卷。”又律历志作：“《孙子算术》。”

(4)唐慧琳《一切经音义》作：“《孙子算经》及孙子《九章算经》。”

(5)《旧唐书》卷四十四职官三第二十四及《新唐书》卷四十八

志第三十八百官志并称："学生三十人习……《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》十五人。"

(6)《旧唐书》卷七十九列传第二十九李淳风及《新唐书》卷二〇四列传第一二九方技，李淳风并称："先是太史监侯王思辩表称：《五曹》、《孙子》十部算经，理多踳驳，淳风复与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等，受诏注《五曹》、《孙子》十部算经。书成，高宗令国学行用。"

(7)《新唐书》卷四十四志第三十四选举志称："《孙子》、《五曹》共限一岁，……试《九章》三条，《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》各一条。"《大唐六典》卷二十一，引同。

(8)《新唐书》卷五十九艺文志第四十九：李淳风注"《五曹》、《孙子》等算经二十卷，注《甄鸾孙子算经》三卷。"

(9)日本宽平时代(889～897)藤原佐世奉敕撰《日本国见在书目》，内有《孙子算经》三卷。盖日本自大化二年(公元696年)大改新以来，经大宝(701～703)、养老(717～733)，文物制度已经大备。《令义解》之学令中，明记算经之名，中有《孙子》焉。其试验方法及修业方式，并如唐制。

(10)李籍《九章算术音义》作：《孙子算术》。

(11)《太平御览》引作：《孙子算经》。

(12)《宋史》卷二〇七艺文志第一六〇艺文六称"李淳风注释《孙子算经》三卷。"

(13)《续一切经音义》卷二称："刘洪、《九章》、《孙子》、《五曹》，皆计数术也。"

(14)明程大位《算法统宗》卷十二"算经源流"条称：宋元丰七年(1084年)，刊十书入秘书省，又刻于汀州学校：

《黄帝九章》、《周髀算经》、《五经算法》、《海岛算法》、《孙子算

法》、《张丘建算法》、《五曹算法》、《缉古算法》、《夏侯阳算法》、《算术拾遗》。

(15)清康熙甲子(1684年),毛扆(1690～?)作《算经》跋称:"从太仓王氏(世贞家)得《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》四种,……皆元丰七年(1084年)秘书省刊版。"

(16)孔继涵《算经十书》序称:"今得毛氏汲古阁所藏宋元丰京监本七种,又假戴东原先生所辑《永乐大典》中《海岛算》、《五经算》,而十书备。"又孔刻《算经十书》本《孙子算经》卷下后有:"大清乾隆三十八年癸巳(1773年)秋阙里孔氏依汲古阁影宋刻本重雕"一行。

(17)段玉裁《戴东原先生年谱》:乾隆三十九年(1774年)十月三十日,戴氏与段氏书称:"纂次《永乐大典》内散篇,……于算学得《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《夏侯阳》五种算经。"

(18)《四库全书总目》卷一〇七,子部十七,天文算法类有:"《孙子算经》三卷《永乐大典本》。"

《四库全书提要》称:"《隋书·经籍志》有《孙子算经》二卷,不著其名,亦不著其时代。《唐书·艺文志》称李淳风注甄鸾《孙子算经》三卷,于《孙子》上冠以甄鸾,盖如淳风之注《周髀算经》,因鸾所注,更加辨论也。《隋书》论审度,引《孙子算术》'蚕所生吐丝为忽,十忽为秒,十秒为豪,十豪为厘,十厘为分。'本书乃作'十忽为一丝,十丝为一豪'。又论嘉量引《孙子算术》'六粟为圭,十圭为抄,十抄为撮,十撮为勺,十勺为合。'本书乃作'十圭为一撮,十撮为一抄,十抄为一勺。'考之《夏侯阳算经》引田曹、仓曹亦如本书。而《隋书》中所引与史传往往多合。盖古书传本不一,校订之儒,各有据证,无妨参差互见也。唐之选举,算学凡十书,《孙子》、《五曹》共限一岁习肄。于后来诸算术中,特为近古。第不知孙子何许人。朱彝

尊《曝书亭集·五曹算经跋》云：相传其法出于孙武，然孙子别有算经，考古者存其说可尔。又有《孙子算经》跋云：首言度量所起，合乎兵法"地生度，度生量，量生数"之文。次言乘除之法，设为之数。十三篇中所云廓地、分利、委积、远输、贵贱、兵役分数，比之《九章》方田、粟米、差分、商功、均输、盈不足之目，往往相符，而要在得算多，多算胜，以是知此编非伪托也云云。合二跋观之，彝尊之意，盖以为确出于孙武。今考书内设问有云长安、洛阳相去九百里，又云佛书二十九章，章六十三字，则后汉明帝以后人语。孙武春秋末人，安有是语乎？旧本久佚，今从《永乐大典》所载，裒集编次，仍为三卷。其甄、李二家之注，则不可复考，是则姚广孝等割裂刊削之过矣。"

(19)阮元《畴人传》(1795～1799)卷一末，孙子传引：

《孙子算经》。

论曰：朱竹垞彝尊以《孙子算经》为孙武作。戴东原震以书中有长安、洛阳相去及佛书二十九章语，断为汉明帝以后人。余考韦曜《博弈论》枯棋三百注引邯郸淳《艺经》，谓棋局十七道，而《孙子》乃云棋局十九道，则其人当更在汉以后矣。然术数之书，类多附益。如卷末推孕妇所生男女，鄙陋荒诞，必非《孙子》正文。或恐传习《孙子》者，转辗增加，失其本真。今但题作《孙子》，不称孙武，而附于周末，以志阙疑。其书详说乘、除、开方，可以考见古人从横布算之式。下卷物不知数，三三数之，五五数之，七七数之一问，为《九章》所未及。宋秦道古《数学九章》大衍求一法，盖出于此也。

孙子算经卷上

"度之所起，起于忽。欲知其忽：蚕吐丝为忽，十忽为一丝，十丝

为一豪，十豪为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引。五十尺为一端，四十尺为一匹。六尺为一步，二百四十步为一亩。三百步为一里。”

《前汉书》卷二十一上律历志上：“度长短者，不失豪厘。”

《广韵》卷一之第七丝字条引：“《说文》云蚕所吐也，又一蚕为忽，十忽为丝。”又卷五末第十一忽字条注称：“又一蚕为一忽，十忽为一丝。”

《隋书》卷十六律历志第十一审度条称；“《孙子算术》云：蚕所生吐丝为忽，十忽为秒(?)，十秒为豪(?)，十豪为厘，十厘为分。”

《一切经音义卷》二十五，《涅槃经》第四卷毫厘条注称：按《孙子算经》：

十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引是。”

《一切经音义》卷一，《大唐三藏圣教序》注称：“《九章算经》云：凡度之法，初起于忽，十忽为丝，十丝为毫，十毫为厘，……”又卷四十一，《大乘理趣六波罗密多经》注称：“《九章算经》云：凡度之始，初于忽，(十忽)为丝，十丝为毫，十毫为厘。”李籍《九章算术音义》秒忽条注称：“忽者数之始也。一蚕所吐谓之忽。《孙子算术》云：蚕所生吐丝为忽，十忽为秒，十秒为豪，十豪为厘，十厘为分。”

贾谊《新书》，亦称：“是故立一毫以为度始，十毫为厘，十厘为分，十分为寸，十寸为尺，备于六。”

俨按：据《广韵》及《一切经音义》可证《隋书》及《九章算术音义》引文之误。

“称之所起，起于黍，十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。”

《前汉书》二十一卷上律历志上：“权轻重者不失黍絫。”元和十二年(公元817年)慧琳《一切经音义》卷一百《念佛三昧宝王论》上卷锱铢条注称：“案孙子《九章算经》云：

凡称之所起，始于黍，十黍为一絫，十絫为一铢，六铢为一锱，锱即分也，音汾问反。四分为一两，十六两为一斤，三十斤为钧，四

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

钧为一石，即一百二十斤也。

谨检诸字书，说锱而有三别。案《风俗通义》云：铢六则锤，二锤则锱，二锱则两，计此说则半两名锱，二十四铢为一两。唯此一书独异于众典。诸字书多同一说。谨案《字林》、《字统》、《字镜》、《韵集》、《韵略》、《韵谱》、《韵英》、《文字集略》、《文字典说》、《古今正字》及案《说文》、《九章算经》一十三家，并同以六铢为锱，即四锱成两也。郑玄《礼记》注以八两为锱，《集训》、《韵诠》效郑注言八两，未详此义何所从来。今故疏出诸家异同，取舍任随所见，今且谨依《九章算经》及取多说，以六铢为锱定矣。《风俗通义》以及郑玄未详其由，莫测古人幽旨也。

"量之所起，起于粟，六粟为一圭，十圭为一撮，十撮为一抄，十抄为一勺，十勺为一合，十合为一升，十升为一斗，十斗为一斛，斛得六千万粟。所以得知者：六粟为一圭，十圭六十粟为一撮，十撮六百粟为一抄，十抄六千粟为一勺，十勺六万粟为一合，十合六十万粟为一升，十升六百万粟为一斗，十斗六千万粟为一斛，十斛六亿粟，百斛六兆粟，千斛六京粟，万斛六垓粟，十万斛六秭粟，百万斛六壤粟，千万斛六沟粟，万万斛为一亿斛六涧粟，十亿斛六正粟，百亿斛六载粟。"

《前汉书》卷二十一上律历志上："量多少者不失圭撮。"

《隋书》卷十六律历志第十一嘉量条称："《孙子算术》曰：六粟为圭，十圭为秒(?)，十秒为撮(?)，十撮为勺(?)，十勺为合。"

《一切经音义》卷二十五《涅槃经》十卷注称："《孙子算经》云：

量之所起，初起于粟，六粟为一圭，六十粟为一撮，六百粟为一抄，六千粟为一勺，六万粟为一合，六十万粟为一升，六百万粟为一斗，六千万粟为一斛。……"

李籍《九章算术音义》程粟条注称："《孙子算术》曰：六粟为圭，十圭为抄，十抄为撮，十撮为勺，十勺为合。"

《隋书·律历志》引同。

又敦煌千佛洞"《算经》一卷并序"残本(Pelliot 3349 及 0/N 39760. S. 19)第37、38、39行:

"…×又据大唐令文,诸以北方秬黍中者一黍之广(为分)×凡升量所起,$_{37}$

起于圭,×六黍为一圭,×十圭为一抄,×十抄为一撮,×$_{38}$

十撮为一勺,×十勺为一合,×十合为一升,×十升为一升,×十升为一斛,×……$_{39}$"

《流沙坠简》二,《屯戍丛残考释》寄给类第四十五简:"百一十三斛七斗六升六合三撮三秒。"

《太平御览》卷七百六十五器物部十"斛"引:"杂令曰:

诸量以秬黍中者,容一千二百为龠,二龠为合,十合为升,十升为斗,三斗为大斗。十斗为斛。"

按《前汉书》以圭撮相连,《一切经音义》亦言六十粟为一撮,可证《隋书》及《九章算术音义》引文之误。

"凡大数之法,万万曰亿,万万亿曰兆,万万兆曰京,万万京曰陔,万万陔曰秭,万万秭曰壤,万万壤曰沟,万万沟曰涧,万万涧曰正,万万正曰载。"

《通训定声》引《字林》:"垓,大数也。"

陔通垓。《淮南子》:"期乎九陔之上。"谓九天之上也。按《御览》引《广韵》又作九垓,是其证也。

《礼记·内则》降德于众兆民疏:"算法:亿之数有大小二法。小数以十为等。十万为亿。大数以万为等,万万为亿也。"徐岳《数术记遗》:"黄帝为法,数有十等,及其用也,乃有三焉。十等者:亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。三等者,谓上、中、下也。其下数者,十十变之,若言十万曰亿,十亿曰兆,十兆曰京也;中数者,万万变之,若言万万曰亿,万万亿曰兆,万万兆曰京也;上数者,数穷则变,若言万万曰亿,亿亿曰兆,兆兆曰京也。"甄鸾又于《五经算术》卷上称郑用下数,毛用中数。

《广韵》卷第三秭条引《风俗通》云："千生万，万生亿，亿生兆，兆生京，京生秭(?)，秭生垓(?)，垓生壤(?)，壤生沟，沟生涧，涧生正，正生载，载地不能载也。"

《一切经音义》第二十七卷亿载条注释："《算经》：黄帝为数，法有十等，谓亿、兆、京、垓，壤(?)、秭(?)、沟、涧、正、载。及其用也，有三，谓上、中、下。下数十万曰亿，中数百万曰亿，上数万万曰亿。"又第二十五卷，百亿阎浮条亦称："若依下数，十万为亿，……若依上数，万万为亿。"此一说也。

《一切经音义》第二十二卷一百洛叉又为一俱胝条称："洛叉，此云万也，俱胝，此云亿也。又案此方黄帝算法总有二十三数，谓一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。从万已去，有三等数法。其下者十十变之，中者百百变之，上者倍变之，今此阿僧祇品中上数法，故云一百洛叉为一俱胝，当此亿也，阿庾多兆也，那由他京也，余皆依次准配可知。今案此经十、百、千、万，十十变之；从万至亿，百倍变之；从亿已去，皆以能数量为一数，复数至与能数量等。"此又一说也。

《续一切经音义》卷二称："依此方《孙子算经》云：

十十为百，十百为千，十千为万，自万至亿有三等，上中下数变之也。

依《黄帝算经》总有二十三数，谓一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载也，亦从万已去，有三等数，谓其下者十十变之，中者百百变之，上者亿亿变之。"

清孙诒让《札迻》卷十一称："《太平御览》工艺部七引《一位算法》曰：万万穰为载，数之极矣，或问之曰：何以数之为载？按《孙子算经》云：

古者积钱上至于天，天不能容，下至于地，地不能载。天不能盖，地不能载，故名曰载。

检今本《孙子算经》无此语，疑传录失之。"俨按见《太平御览》卷第七百五十工艺部七数。

敦煌千佛洞"《算经》一卷并序残本(Pelliot 3349 及 0/N 39760，S. 19)第19至29行：

“凡数不过十，名不过万，故万万即改×一、十、百、千、万、一万、十万、百万、千万、万万[19]。

曰亿。×一亿、十亿、百亿、千亿、万亿、十万亿、百万亿、千万亿、万万亿曰兆。×[20]

一兆、十兆、百兆、千兆、万兆、十万兆、百万兆、千万兆、万万兆曰京。×一京、十京、千京、[21]

万京、十万京、百万京、千万京、万万京曰垓。×一垓、十垓、百垓、千垓、万垓、十万垓、[22]

百万垓、千万垓、万万垓曰梓。×一梓、十梓、百梓、千梓、万梓、十万梓、百万梓、千万梓、[23]

万万梓曰让。×一让、十让、百让、千让、万让、十万让、百万让、千万让、万万让曰沟。×[24]

一沟、十沟、百沟、千沟、万沟、十万沟、百万沟、千万沟、万万沟曰间。×一间、十间、百间、[25]

千间、万间、十万间、百万间、千万间、万万间曰政。×一政、十政、百政、千政、万政、[26]

十万政、百万政、千万政、万万政曰载。一载、十载、百载、千载、万载、十万载、[27]

百万载、千万载、万万载曰极。[28]

右孙子数，钱满载，天不容，地不载，故以载为极末也。[29]

按《孙子算经》凡大数之法一节，虽与今本《数术记遗》中数之法相同，但此节中多脱文，散见于《太平御览》及《续一切经音义》，且与《一切经音义》所引中数、上数之法不合，原文似有窜改之处。

“黄金方寸重一斤。”

《前汉书》卷二十四下食货志第四下：“黄金方寸而重一斤。”

“凡算之法，先识其位，一从十横，百立千僵，千十相望，万百相

当。”

“凡算之法，……六不积，五不只。……”

《夏侯阳算经》曰：“夫乘除之法，先明九九。一从十横，百立千僵；千十相望，万百相当。满六已上，五在上方。六不积算，五不单张。”

俨按如孙子、夏侯阳之说，盖谓：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵者为	丨	丨丨	丨丨丨	丨丨丨丨	丨丨丨丨丨	丅	丅丅	丅丅丅	丅丅丅丅
横者为	一	二	三	亖	亖	丄	丄	丄	丄

如有数6728则作丄丅丅二丅丅是也。据清马昺《货布文字考》卷四：新莽泉布则作“丅”为六，更作“丅丅，丅丅，丅丅”为七、八、九，亦满六已上，五在上方，六不积算，五不单张之义也。李俨另有“筹算制度考”一文载《燕京学报》第六期，1929年12月，第1129～1134页*。

“以粟求粝米，三之，五而一，
以粝米求粟，五之，三而一，
以粝米求粝饭，五之，二而一，
以粟米求粝饭，六之，四而一，
以粝饭求粝米，二之，五而一，
以糳米求饭，八之，四而一。”

《九章算术》卷二今有题术曰：“以粟求粝米，三之，五而一。”又“以粝米求粟，五之，三而一。”又“以粝米求粝饭，五之，二而一。”又“以粟求粝饭，三之，二而一。”其粟米之法称：“糳米二十四（按孔刻本作三十四，兹据毛景本作二十四），糳饭四十八”。是以糳米糳饭八之四而一。故原文第三，四，六条应改正如下：

以粝米求粝饭，五之，二而一，
以粟求粝饭，六之，四而一，

* 见本书第八卷第3～10页。——编者

以糜米求糜饭，八之，四而一。

“九九八十一，自相乘，得几何？

……

一一如一，自相乘得一，一乘不长。”

《周髀算经》：“商高曰：数之法，出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。”

《前汉书》卷六十七列传第三十七梅福传：“臣闻齐桓之时，有以九九见者。”唐颜师古注云：“《九九算术》若今《九章》、《五曹》之辈。”

其在日本《口游》(公元970年)一书中，九九亦始于九九，终于一一。《拾芥抄》书中之九九表亦然，并受《孙子算经》的影响。

… … … …

… … … …

孙子算经卷中

“今有粟一斗，问为粝米几何？

……

今有粟七斗九升，问为御米几何？”

此言　　粟率五十，粝米率三十，粺米率二十七，

　　糜米率二十四，御米率二十一，

与《诗》大雅《郑笺》所云：“米之率：粝十、粺九、糜八、侍御七”之义相合。

《初学记》引阚泽《九章》：“粝饭七十(应作七十五)，粺饭五十(应作五十四)，糜饭四十八，御饭四十二”，和《九章算术》及《孙子算经》相同。

“今有屋基，南北三丈，东西六丈，欲以砖砌之。……”

《广韵》卷第二砖字注：“砖瓦，《古史考》曰：乌曹作砖。”

《一切经音义》第三十四卷金砖条注：“《埤苍》云：甎，砖也。经从石作砖，俗字也。《说文》从瓦，专声也。”又第五十三卷砖土条注：“经文从土作垼，俗字

非正也。”

“今有筑城上广二丈，下广五丈四尺，高三丈八尺，长五千五百五十尺，秋程人功三百尺，问须功几何？”

《九章算术》卷五商功：“今有穿渠上广一丈八尺……秋程人功三百尺，问用徒几何？”

俨按：《孙子算经》所取，盖《九章》法也。

… … … …

… … …

孙子算经卷下

“今有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬，九家共输租，甲出三十五斛，乙出四十六斛，……”

“答曰：

甲二十八斛，

……

辛一百六十八，

壬二百六十斛。”

毛景本作：“辛一百六十八斛。”

《晋书》卷二十六志第十六食货称：“咸和五年（公元330年），（晋）成帝始度百姓田取十分之一率，亩税米三升。……哀帝（362～365）即位，乃减田租，亩收二升。孝武太元二年（公元377年），除度田收租之制，王公以下，口税三斛，唯蠲在役之身。八年（公元383年）又增税米，口五石。”

“今有丁一千五百万，出兵四十万，问几丁科一兵？”

《隋书》卷二十四志第十九食货称：“（后周）武帝保定元年（公元561年），改八丁兵为十二丁兵，率岁一月役。建德二年，改军士为侍官，募百姓充之，除其县籍，是后夏人半为兵矣。宣帝时发山东诸州，增一月功为四十五日役。”

“(隋)高祖登庸,……仍依周制,役丁为十二番。”“开皇三年(公元593年),……减十二番每岁为二十日役。”

俨按:以上为周隋之间丁男科兵之制。

“今有佛书凡二十九章,章六十三字,问字几何?”

《魏书》卷一百一十四志第二十释老志十。“(后汉)孝明帝夜梦金人顶有白光。……(蔡)愔又得佛经四十二章。……愔之还也,以白马负经而至,汉因立白马寺于洛城雍关西。”戴震因以《孙子算经》更在明帝以后。

《隋书》卷三十五志第三十经籍四:“后汉明帝夜梦金人飞行殿庭,以问于朝,而傅毅以佛对。帝遣郎中蔡愔及秦景使天竺求之,得《佛经四十二章》及释迦立像。并与沙门摄摩腾、竺法兰东还。愔之来也,以白马负经,因立白马寺于洛阳雍门西以处之。”

“今有棋局方一十九道,问用棋几何?”

《文选》卷五十二,韦弘嗣(曜)《博弈论》内:“枯棋三百孰与万人之将。”李善注引:“邯郸淳《艺经》曰棋局纵横各一十七道,合二百八十九道,白黑棋子各一百五十枚。”

阮元《畴人传》卷一,论曰:“……而孙子乃云棋局十九道,则其人当更在汉以后矣,……。”

“今有三万六千四百五十四户,户输绵二斤八两,问计几何?”

《晋书》卷二十六志第十六食货称:“(晋武帝)平吴之后(按吴亡于太康元年,公元280年),……又制户调之式,丁男之户,岁输绢三匹,绵三斤,女及次丁男为户者半输。其诸边郡或三分之二,远者三分之一。”

《晋书》卷三:太康五年,“减天下户课三分之一;六年,减百姓绵绢三分之一。”《通考》“晋武帝置户调之式,丁男之户,岁输绢三匹,绵三斤。”

“今有贷与人丝五十七斤,限岁出息一十六斤? 问斤息几何?”

《一切经音义》第七十一卷子息条注:“今人出钱生利亦曰息。”

“今有妇人河上荡栖,津吏问曰:栖何以多?妇人曰:家有客。津吏曰:客几何?妇人曰:二人共饭,三人共羹,四人共肉,凡用栖六十五。不知客几何?”

《张丘建算经序》称："《夏侯阳》之方仓，《孙子》之荡杯。"

《张丘建算经》卷下："今有妇人于河上荡杯，津吏问曰：杯何以多？妇人答曰：家中有客，不知其数，但二人共酱，三人共羹，四人共饭，凡用杯六十五。问人几何？"

俨按：《集韵》栝或作䥶、杯、盃、鉐、匜。

"今有黄金一斤，直钱一十万，问两直几何？"

……

《前汉书》卷二十四下食货志第四下："黄金重一斤。直钱万。"此汉法也。后此币法紊乱，故黄金一斤直钱益多。《夏侯阳算经》卷下："今有金一斤，直钱一百贯，问一两几何？"即本《孙子算经》题问，

俨按：元戴侗《六书故》谓"千钱为一贯。"故《孙子》作一十万，《夏侯阳》作一百贯也。

"今有锦一匹，直钱一万八千，问丈、尺、寸各直几何？"

《夏侯阳算经》卷下："今有锦一匹，直钱一十八贯，问丈、尺、寸各得几何？"亦本《孙子算经》题问。

"今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

清黄宗宪《求一术通解叙》称："自《孙子算经》物不知数一题有术无草，后人罕通其妙，遂无有论及者。宋秦氏道古（九韶《数书九章》）以大衍释之，其法始显。"

日本《尘劫记》（1627年）称此为"百五减之事。"

大衍求一术与《孙子算经》物不知数题问之关系，参观李俨"大衍求一术之过去与未来"，《学艺杂志》第七卷第二号，上海，1925年9月，第1～45页*。

"今有甲乙二人持钱各不知数，甲得乙中半，可满四十八；乙得

* 见本书第六卷第116～163页。——编者

甲大半，亦满四十八，问甲乙二人元持各几何？”

答曰：

甲持钱三十六。乙持钱二十四。

术曰：如方程求之……。

《九章算术》卷八方程：今有甲乙二人持钱不知其数，甲得乙半而钱五十，乙得甲太半，而亦钱五十，问甲乙持钱各几何？

答曰：甲持三十七钱半，乙持二十五钱。术曰：如方程，损益之，……。

按《孙子算经》所取，盖《九章》旧术。朱彝尊仅言：“比之《九章》：方田、粟米、差分、商功、均输、盈不足之目，往往相符。”尚未提及孙子中尚有《九章》方程题问，如上所记也。

“今有百鹿入城，家取一鹿不尽，又三家共一鹿适尽。问城中家几何？

答曰：七十五家。

术曰：以盈不足取之。假令七十二家，鹿盈四；令之九十家，鹿不足二十；置七十二于右上，盈四于右下；置九十于左上，不足二十于左下。维乘之，所得并为实；并盈不足为法，除之即得。”

《九章算术》卷七，盈不足：“今有米在十斗桶中，不知其数，满中添粟而舂之，得米七斗，问故米几何。答曰：二斗五升。术曰：以盈不足术求之。假令故米二斗，不足二升；令之三斗，有余二升。”与《孙子算经》题问相类。

日本泽田吾一于《日本数学史讲话》第三百二十六页称假定一数，以解其数，为该国“缀术”算法之由来。

“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

此为日本鹤龟问题之起源。

“今有长安、洛阳相去九百里，……”

《前汉书》卷二十八上地理志第八上：“京兆尹……县十二：长安……。河南郡……县二十二：雒阳，……。”……王莽曰宜阳。师古曰：鱼豢云汉火德忌水，故

去洛水而加佳，如鱼氏说，则光武以后改为雒字也。

《魏书》卷一百六下志第七地形志二下："京兆郡领县八，长安……"；又卷一百六中志第六地形志二中："洛阳郡领县二……洛阳。"《资治通鉴》卷六十九，魏纪一："黄初元年十二月初营洛阳宫，戊午，帝如洛阳。"

元胡三省注引："《魏略》曰：汉火行也，火忌水，故洛去水而加佳。魏于行次为土，土水之牡也，水得土而流，土得水而柔，故除佳加水，变雒为洛。"

按戴震以"书内设问有云长安洛阳相去九百里，又云佛书二十九章，章六十三字，则后汉明帝以后人语"。惟此长安洛阳或为魏地。

"今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色，问各几何？"

日本《尘劫记》(1627年)之鼠算亦有此相类之连乘数问题。

甄鸾注《数术记遗》内"不辨积微之为量，讵晓百亿于大千"句称："按《楞伽经》云：积微成一阿耨，七阿耨为一铜一尘，七铜上尘为一水上尘，七水上尘为兔毫上尘，七兔毫上尘为一羊毛上尘，七羊毛上尘为一牛毛上尘，七牛毛上尘为一向中由尘，七向中由尘成一虮，七虮成一虱，七虱成一麦横，七麦横成一指节。"

按《孙子算经》卷末推孕妇所生男女一题，鄙陋荒诞，阮元《畴人传》(1795～1799)已论其非。但日本《口游》(公元970年)一书，亦有算产妇知男女法，显然受《孙子算经》之影响。其见于正史者，则《北史·许遵传》称：遵"子晖，亦学术数。遵谓曰：汝聪明不及我，不劳多学。唯授以妇人产法，豫言男女及产日，无不中。武成时(559～560)，以此数获赏焉。"

26. 海岛算经新注

（第一题） “今有望海岛（$AB=x$），立二表齐高三丈（$c_1=c_1$），前后相去千步（d），令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步（b），人目着地（p），取望岛峰（A）与表末（m）参合；从后表却行一百二十七步（a），人目着地（q），取望岛峰（A）亦与表末（n）参合。问岛高（x）及（岛）去表（y）各几何？

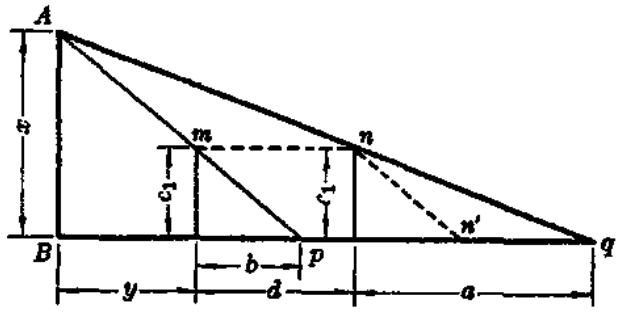
答曰：岛高四里五十五步，（岛）去表一百二里一百五十步。

术曰：以表高（c_1）乘表间（d）为实，相多（$a-b$）为法，除之。所得加表高（c_1），即得岛高（x）。求前表去岛远近（y）者，以前表却行（b）乘表间（d）为实，相多（$a-b$）为法，除之，得岛去表里数（y）”。

如图：nn' 平行于 mp；因相似三角形比例得：

$$x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1 \text{ 及 } y=\frac{bd}{a-b} \tag{1}$$

（第二题） “今有望松（x_1）生山上（KB），不知高下。立两表齐高二丈（$c_1=c_1$），前后相去五十步（d），令后表与前表参相直。从前表却行七步四尺（b），（人目）薄地（p）遥望松末（A），与表端（m）参合。又望松本（K），入表二尺八寸（c_2）。复从后表却行八步五尺（a），（人目）薄地（q）遥望松末（A），亦与表端（n）参合。问松高（x_1）及山去表（y）各几何？

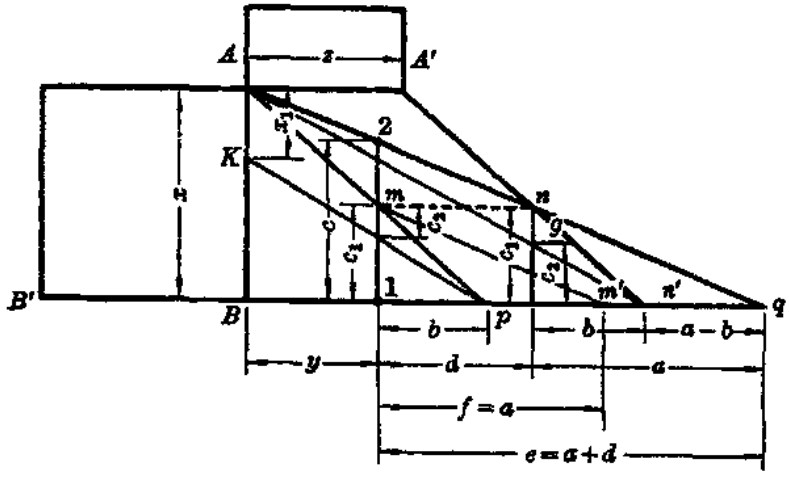


第一题附图①

答曰：松高十二丈二尺八寸，山去表一里二十八步七分步之四。

术曰：以入表(c_2)乘表间(d)为实，相多($a-b$)为法，除之。加入表(c_2)，即得松高(x_1)。求表去山远近(y)者，置表间(d)，以前表却行(b)乘之为实，相多($a-b$)为法，除之，得山去表(y)。"

① 《海岛算经》共九题，新注每题有附图，其中第一题至第六题，亦可共绘在一图，如下：



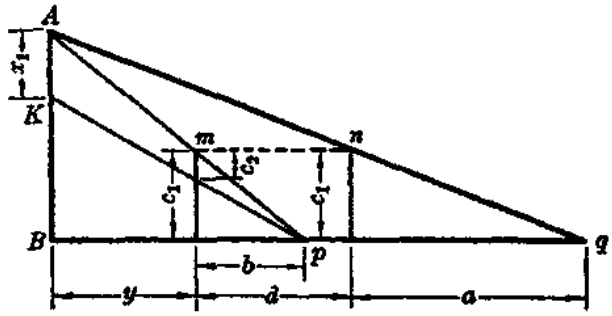
第一题至第六题附图

于第一题图，从(1)式，因：

$$\frac{x_1}{c_2}=\frac{y+b}{b}\text{及}\frac{x_1-c_2}{c_2}=\frac{d}{a-b};$$

得

$$x_1=\frac{c_2d}{a-b}+c_2\text{及}y=\frac{bd}{a-b} \tag{2}$$



第二题附图

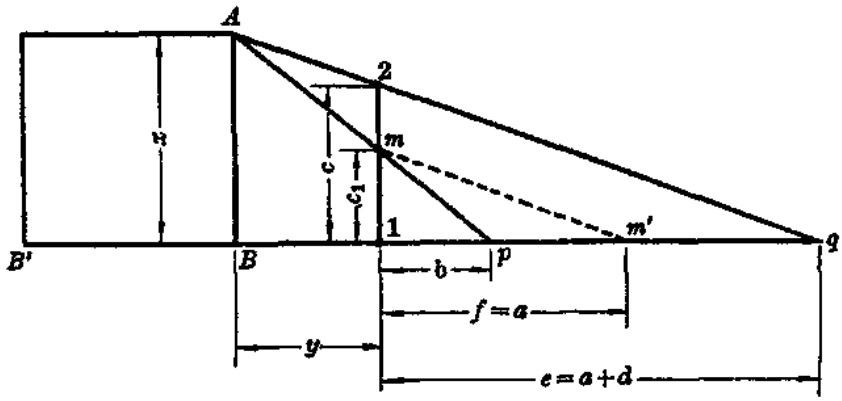
(第三题) “今有南望方邑，不知大小，立两表(1处及2处)，东西相去六丈(c)，齐人目，以索连之。令东表(1处)与邑东南隅(B)及东北隅(B')参相直。当东表之北却行五步(b)，遥望邑西北隅(A)，入索东端二丈二尺六寸半(c_1)。又却北行去表十三步二尺($e=a+d$)，遥望邑西北隅(A)，适与西表(2处)相参合。问邑方(x)及邑去表(y)各几何？

答曰：邑方三里四十三步四分步之三，邑去表四里四十五步。

术曰：以入索(c_1)乘后去表($e=a+d$)，以两表相去(c)除之，所得为景差(f)。以前去表(b)减之，不尽，以为法。置后去表(e)，以前去表(b)减之，余以乘入索(c_1)为实，实如法而一，得邑方(x)。求(邑)去表远近(y)者，置后去表(e)，以景差(f)减之，余以乘前去表(b)为实，实如法而一，得邑去表(y)。”

如第一题图，设 1，2 为两表。

如题意，在入索东端 c_1 的 m，作 mm' 平行于 Aq 或 nq。



第三题附图

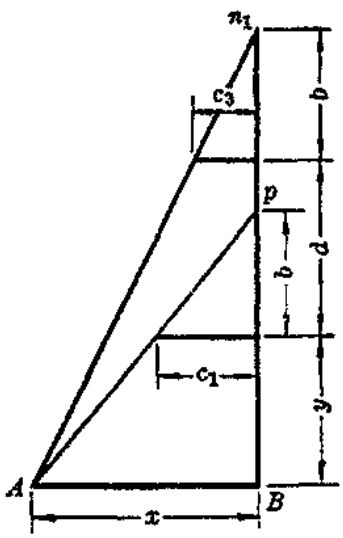
则 $f=a$ 为景差，而 $f=\frac{c_1 e}{c}$，从(1)式得：

$$x=\frac{c_1(e-b)}{f-b} \text{ 及 } y=\frac{b(e-f)}{f-b} \tag{3}$$

（第四题） “今有望深谷（y），偃矩岸上，令勾高六尺（b）。从勾端（p）望谷底（A），入下股九尺一寸（c_1）。又设重矩于上，其矩间相去三丈（d）。更从勾端（n_1）望谷底（A），入上股八尺五寸（c_3）。问谷深几何？

答曰：（谷深）四十一丈九尺。

术曰：置矩间（d），以上股（c_3）乘之为实。上下股（c_3，c_1）相减，余为法，除之。所得以勾高（b）减之，即得谷深（y）。”



第四题附图

于第一题图，令谷底为 A，谷深为 y，

又令谷底宽为 x，则：

$$\frac{y+b}{b}=\frac{x}{c_1},$$

$$\frac{y+b+d}{b}=\frac{x}{c_3}$$

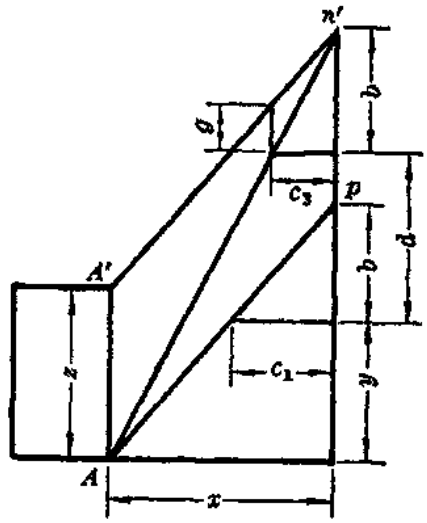
消去 x，即得：

$$y=\frac{c_3 d}{c_1-c_3}-b \tag{4}$$

（**第五题**）“今有登山望楼（AA'），楼在平地。偃矩山上，令勾高六尺（b），从勾端（p）斜望楼足（A），入下股一丈二尺（c_1）。又设重矩于上，令其间相去三丈（d）。更从勾端（n'）斜望楼足（A），入上股一丈一尺四寸（c_3）。又立小表（g）于入股之会，复从勾端斜望楼岑端（A'），入小表八寸（g）。问楼高几何？

答曰：（楼）高八丈。

术曰：上下股（c_3，c_1）相减，余为法。置矩间（d），以下股（c_1）乘之，如勾高（b）而一。所得以入小表（g）乘之为实。实如法而一，即



第五题附图

是楼高(z)。”

于第一题图，又从(4)式，和：

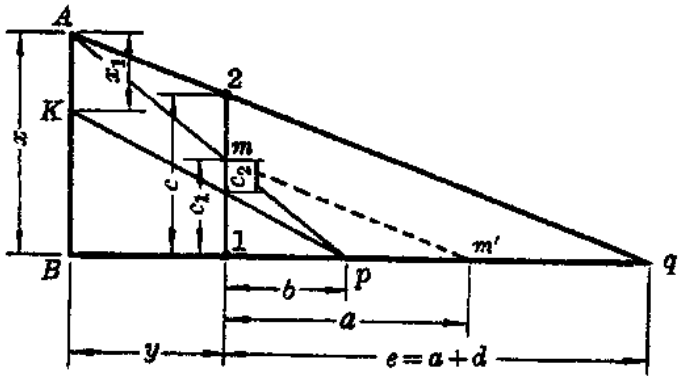
$$\frac{x}{c_1}=\frac{y+b}{b}\text{之关系，得：}$$

$$\frac{x}{c_1}=\frac{c_3d}{c_1-c_3}\cdot\frac{1}{b}$$

又因 $$\frac{x}{c_3}=\frac{z}{g}\text{，即得：}z=\frac{g\cdot\frac{c_1d}{b}}{c_1-c_3} \tag{5}$$

(第六题) “今有东南望波口(x_1)，立两表(1及2)，南北相去九丈(c)，以索薄地连之。当北表(1)之西却行去表六丈(b)，(人目)薄地(p)遥望波口南岸(A)，入索北端四丈二寸(c_1)。以望北岸(K)，入前所望表里一丈二尺(c_2)。又却后行去表十三丈五尺($e=a+d$)，(人目)薄地遥(q)望波口南岸，与南表(2)参合。问波口广(x_1)几何？

答曰：(波口广)一里二百步。



第六题附图

术曰：以后去表(e)乘入索(c_1)，以表相去(c)而一。所得以前去表(b)减之，余以为法。复以前去表(b)减后去表(e)，余以乘入所

望表里(c_2)为实。实如法而一,得波口广(x_1)。"

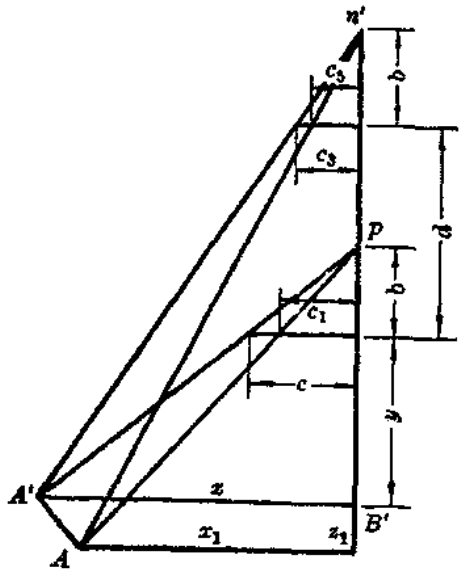
于第一题图:1 为北表,2 为南表,又从(2)式,和

$$\frac{a}{e}=\frac{c_1}{c}\text{之关系,得:}$$

$$x_1=\frac{c_2(e-b)}{\frac{c_1e}{c}-b} \tag{6}$$

(第七题) "今有望清渊(z_1),渊下有白石(A);偃矩岸上,令勾高三尺(b),斜望水岸(A'),入下股四尺五寸(c)。望白石(A)入下股二尺四寸(c_1)。又设重矩于上,其间相去四尺(d)。更从勾端(n')斜望水岸(A'),入上股四尺(c_5)。以望白石(A),入上股二尺二寸(c_3)。问水深几何?

答曰:(水深)一丈二尺。



第七题附图

术曰:置望水(岸,A')上下股(c,c_3),相减,余以乘望石上股

(c_5)为上率。又以望石(A)上下股(c_1,c_5)相减,余以乘望水上股(c_3)为下率。两率相减,余以乘矩间(d)为实。以二差相乘为法。实如法而一,得水深(z_1)。"

如图,并从第四题第(4)式:

$$y + z_1 = \frac{c_5 d}{c_1 - c_5} - b$$

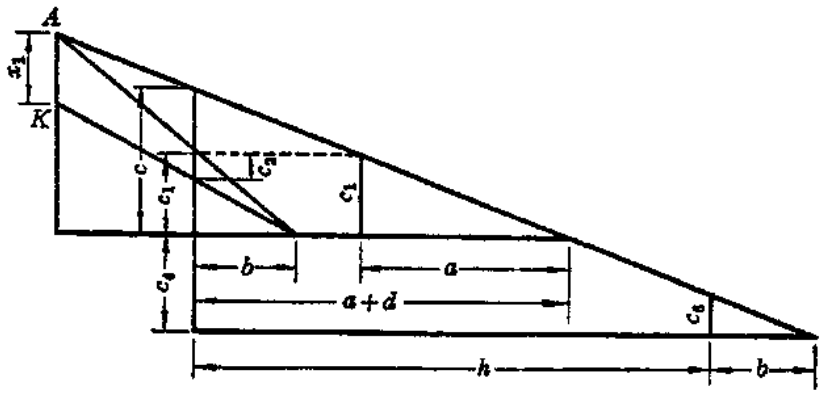
$$y = \frac{c_3 d}{c - c_3} - b$$

两式相减得:

$$z_1 = \frac{d[c_5(c - c_3) - c_3(c_1 - c_5)]}{(c - c_3)(c_1 - c_5)} \tag{7}$$

(第八题) "今有登山望津(x_1),津在山南;偃矩山上,令勾高一丈二尺(b)。从勾端斜望津南岸(A),入下股二丈三尺一寸(c_1)。又望津北岸(K),入前望股里一丈八寸(c_2)。更登高岩,北却行二十二步(c_4),上登五十一步(h),偃矩山上。更从勾端斜望津南岸(A),入上股二丈二尺(c_6)。问津广几何?

答曰:(广)二里一百二步。



第八题附图

术曰：以勾高(b)乘下股(c_1)，如上股(c_6)而一。所得以勾高(b)减之，余为法。置北行(c_4)以勾高(b)乘之，如上股(c_6)而一。所得以减上登(h)。余以乘入股里(c_2)为实。实如法而一，即得津广(x_1)。"

如图 $$\frac{b}{c_6}=\frac{b+h}{c+c_4}=\frac{a+d}{c}=\frac{a}{c_1}$$

从 $$\frac{b}{c_6}=\frac{b+h}{c+c_4}=\frac{a+d}{c},\text{得 } a+d-b=h-\frac{bc_4}{c_6} \qquad (A)$$

从 $$\frac{b}{c_6}=\frac{a}{c_1},\text{得 } a=\frac{bc_1}{c_6} \qquad (B)$$

又从(2)式 $x_1=\frac{c_2d}{a-b}+c_2$，以(A)，(B)式代入，得：

$$x_1=\frac{c_2\left(h-\frac{bc_4}{c_6}\right)}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \qquad (8)$$

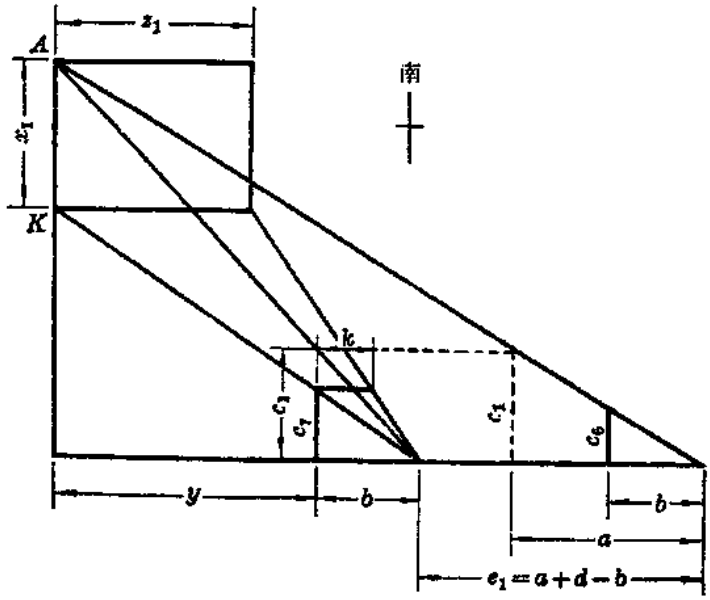
(第九题) "今有登山临邑，邑在山南。偃矩山上，令勾高三尺五寸(b)。令勾端与邑东南隅(A)及东北隅(K)参相直。从勾端遥望东北隅，入下股一丈二尺(c_7)。又施横勾于入股之会，从立勾端望西北隅，入横勾五尺(k)。望东南隅入下股一丈八尺(c_1)。又设重矩于上，令矩间相去四丈(e_1)。更从立勾端望东南隅(A)，入上股一丈七尺五寸(c_6)。问邑广长各几何？

答曰：南北长一里一百步，

东西广一里三十三步少半步。

术曰：以勾高(b)乘东南隅入下股(c_1)，如上股(c_6)而一，所得减勾高(b)，余为法。以东北隅下股(c_7)减东南隅下股(c_1)，余以乘矩间(e_1)为实。实如法而一，得邑南北长(x_1)也。求邑广(z_1)，以入横勾(k)乘矩间(e_1)为实。实如法而一，即得邑东西广(z_1)。"

如图从(2)式，得 $$x_1=\frac{e_1(c_1-c_7)}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \qquad (9)$$



第九题附图

又如图从$\frac{z_1}{k}=\frac{y+b}{b}=\frac{x_1}{c_2}$得：$z_1=\frac{x_1k}{c_2}$。代入上式，得：

$$z_1=\frac{e_1k}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \tag{10}$$

27. 夏侯阳算经新注

夏侯阳算经序

夫博通九经，为儒门之首；学该六艺，为伎术之宗；若非材性通明，孰能与于此也。然算数起自伏牺，而黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》。逮乎有虞，乃同律度量衡。孔子曰：谨权量，审法度。汉备五数，纪于一，协于十，长于百，大于千，衍于万。度长短者不失豪厘，量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫。《五曹》、《孙子》，述作滋多；甄鸾、刘徽为之详释；稽之往古，妙绝其能；储校今时，少有闻见。余以总角，志好其文，略寻古今，备览差互。其如明数造术，讵晓端倪，寻考遗言，颇知梗概。且计课租庸调，无术可凭；步数奇残，若为销尽；永变米谷，经旨未赡；正耗共升，何由剖析。三分五分取一，法理为明焉。况今令式，与古数不同，奚能则定。代相沿革，互议短长。经术尤深，难可意测。是以跋涉川陆，参会宗流；纂定研精，刊繁就省，祛荡疑惑；括诸古法，烛尽毫芒，谨录异同，列之于左。

《夏侯阳算经》序文内称："《五曹》，《孙子》，述作滋多。"按《夏侯阳算经》有二题，和《五曹算经》相同，如：

《夏侯阳算经》卷下，“说诸分”内有一题，称： “今有丝三百二十四斤，欲九两为绢一匹，问绢几何？ 答曰：五百七十六匹” 又	《五曹算经》卷五，“金曹”内亦有一题，称： “今有丝九两得绢一匹，有丝三百二十四斤，问计得几何？ 答曰：五百七十六匹。”
《夏侯阳算经》卷中“给计粮”内有一题，称： “今有酱二升给五兵，见有三百二十斛，问给几何？ 答曰：给兵八万人。”	《五曹算经》卷三，“集曹”内亦有一题，称： “今有凡酱二升饲五人，有酱三百二十斛，问人几何？ 答曰：八万人。”

《夏侯阳算经》卷下又有二题，和《孙子算经》相同，如：

《夏侯阳算经》卷下，“说诸分”内有一题，称： “今有金一斤，直钱一百贯①，问一两几何？ 答曰：一两：六贯二百五十文。” 又	《孙子算经》卷下，有一题亦称： “今有黄金一斤，直钱一十万，问两直几何？ 答曰：六千二百五十钱。”
《夏侯阳算经》卷下，“说诸分”内有一题，称： “今有锦一匹，直钱一十八贯，问丈、尺、寸各得几何？ 答曰：一丈：四贯五百文 一尺：四百五十文 一寸：四十五文。”	《孙子算经》卷下内亦有一题，称： “今有锦一匹，直钱一万八千，问丈、尺、寸各直几何？ 答曰：丈：四千五百钱 尺：四百五十钱 寸：四十五钱。”

① 贯，一千文。

现传本算经十书之六,《夏侯阳算经》三卷,系据元丰七年(1084年)秘书省校刻本。清初修四库全书馆臣戴震(1724～1777)有跋文,今录于下:

"《隋(书)·经籍志》有:《夏侯阳算经》二卷。《旧唐书·经籍志》有:《夏侯阳算经》三卷,甄鸾注。《新唐书·艺文志》列《夏侯阳算经》一卷,甄鸾注。又韩延:《夏侯阳算经》一卷。韩延乃作注者姓名,亦犹《新唐志》中称李淳风注甄鸾《孙子》也。而《直斋书录解题》载元丰京监本云三卷,无注。盖甄鸾、韩延两本易混淆,乃加姓名以别之。而传写又各有并析,故卷帙互异欤?且《唐志》载李淳风注明算科十书,独不及《夏侯阳算经》。盖李注者甄鸾之本,当宋时已佚与?然皆不言阳为何代人。序有云"《五曹》、《孙子》述作滋多;甄鸾、刘徽为之详释",则其人当在甄鸾后。而《宋史·礼志》载算学祀典有云"封魏刘徽淄乡男;晋姜岌成纪男;张邱建信成男;夏侯阳平陆男;后周甄鸾无极男。"又《张邱建算经》序云:"《夏侯阳》之方仓",则阳为晋人,在甄鸾前明矣。书内又称:"宋元嘉二年(公元425年)徐受重铸(铜斛),至梁大同元年(公元535年)甄鸾校之。"则系隋初人,去梁稍远。故目梁时斗、尺为古所用。其"辩度量衡"云:"在京诸司及诸州各给称、尺,并五尺度,斗、升、合等样,皆用铜为之。""仓库令:诸量函所在官造,大者五斛,中者三斛,小者一斛,以铁为缘,勘平印书,然后给用。"及"课租庸调"章称"赋役令","论步数不等"章称"杂令"、"田令"之属,皆据隋制言之,则是韩延传其学,而以己说纂入之。序亦当为延所作。故李淳风取甄鸾本而舍是,志亦以韩延《夏侯阳算经》别之也。韩延为隋人,盖无可疑。其书务切实用,虽《九章》古法,非官曹民事所必需者,亦略而不载,于诸算经中最为简要,且于古今制度异同,多资考证,尤足宝重云。今此本即韩延所传无注本。宋元丰京监所刊者也。昔毛氏(晋)斧季,得之太仓王氏(世贞,1526～1590),余今假之孔君体生(继涵,1739～1784),因题其后,休宁戴震。"

按戴震拟为隋人著作,实际具录有唐代制度,因另新注于后。先记"目录",以后按章补注。

《夏侯阳算经》　　目录

卷上:(1)明乘除法

(2)辩度量衡

(3)言斛法不同

(4)课租庸调

(5)论步数不等

(6)变米谷

卷中:(7)求地税

(8)分禄科

(9)计给粮

(10)定脚价

(11)称轻重

卷下:(12)说诸分

以下列注文:

(1)"明乘除法"章

"六不积算,五不单张。"

孙子算经,称:"凡算之法,……六不积,五不只……",又敦煌千佛洞《立成算经》称:"凡筭知法,……六不积聚,五不单张。"与此同。

(2)"辩度量衡"章

"田曹、仓曹、金曹"

据《五曹算经》,称:

"田曹:生人之本,上用天道,下分地利,故田曹为首

兵曹:既有田畴,必资人功,故以兵曹次之

集曹:既有人众,必用食饮,故以集曹次之

仓曹:众既会集,必务储蓄,故仓曹次之

金曹:仓廪货币,交质变易,故金曹次之。"

又据《大唐六典》[1] 卷之三十于"功曹参军事二人正七品下"注，称：

"汉魏已下，司隶校尉及州郡皆有：功曹，户曹，赋曹（赋当作贼，下同），兵曹等员。北齐诸州有：功曹，仓曹，中兵、外兵甲曹，法曹，士曹，左户等参军事；隋诸州有：功曹，户曹，兵曹等参军事，法曹，士曹行参军。郡有西曹，金曹，户曹，兵曹，法曹，士曹等。及罢郡置州，以曹为名者，改曰司。炀帝罢州置郡，改司功，司仓，司户，司兵，司法，司士等为书佐。皇（唐）朝因其六司，而改书佐为参军事。开元初为功曹参军。"

又隋萧吉《五行大义》卷五第二十二论诸官引《洪范五行传》称："甲为仓曹，共农赋；乙为户曹，共口数；丙为解曹，共讼诉；丁为贼曹，共狱捕；戊为功曹，共除吏；己为田曹，共群畜；庚为金曹，共钱布；辛为尉曹，共车使；壬为时曹，共政教；癸为集曹，共纳输。"

《旧唐书》四十八志卷二十八食货上记武德四年（公元621年）前有：兵曹，仓曹，铠曹各参军事名称。武德四年后有兵曹，仓曹，铠曹，功曹，骑曹，士曹等六曹各参军事名称。

《新唐书》四十九下，志第三十九下、百官四下称：

"田曹……景龙三年（公元709年）初置……唐隆元年（公元710年）省，上元二年（公元761年）复置……。"

其中大，中，下都督府，上州，京兆设有功，仓，户，田，兵，法，士等各曹；其余京兆以下，中州，下州以及上县，中县，下县，配合需要或全部设置，或局部设置。又：

功曹：司功。掌官吏考课，祭祀祯祥，道佛学校，表疏，医药，陈设之事；

---

① 据"近卫公府藏版，昭和十年（1935年）京都帝国大学文学部印"本，下同。

仓曹：司仓。掌公廨度量庖厨，仓库，租赋，征收，田园，市肆之事；

户曹：司户。掌户籍计帐，道路逆旅，婚田之事；

田曹：司田。掌园宅口分永业及产田；

兵曹：司兵。掌武官选举，兵甲器仗，门户管龠，烽候，传驿之事；

法曹：司法。掌刑法；

士曹：司士。掌津梁舟车，舍宅，百工众艺之事。

宋钱希白《南部新书》（有子钱明逸，嘉祐元年，1056年序）癸集称："……王仁岫善工算，因因八卦，五曹算法，五曹：秤，尺，地，仓，金。"

《夏侯阳算经》卷上"辩度量衡"章原文：

田曹云：度之所起，起于忽，十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，（十寸为一尺），十尺为一丈，十丈为一引，四丈为一匹，五丈为一端，六尺为一步，二百四十步为一亩，三百步为一里。……已上古法。

按《孙子算经》卷上亦称："度之所起，起于忽，……十忽为一丝，十丝为一豪，十豪为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引，五十尺为端，四十尺为一匹，六尺为一步，二百四十步为一亩，三百步为一里。"

《夏侯阳算经》卷上"步除"内注称："丈中求尺，尺中求寸，寸中求分，皆言'上十之，上百之'，故曰步除也。"又"明乘除法"章称："里之求步三百之，步之求尺，六之。"又"论步数不等"章称："田曹：以六尺为步，三百步为一里。此古法。"都与上同。

又原文

仓曹云：量之所起，起于粟，十粟为一圭，十圭为一撮，十撮为一抄，十抄为一勺，十勺为一合，十合为一升，十升为一

斗，十斗为一斛。……已上古法。

《孙子算经》卷上："量之所起，起于粟。六粟为一圭，十圭为一撮，十撮为一抄，十抄为一勺，十勺为一合，十合为一升，十升为一㪷[①]，十㪷为一斛，得六千万粟。……。"

《夏侯阳算经》卷上，"步除"内注称："如斛中求斗，斗中求升，升中求合，合中求勺，勺中求抄，……皆言上十之，上百之，故曰步除也。"又"明乘除法"章称："……斗之求升、合、(勺)、抄、撮，皆上十之，"与上同。《旧唐书》食货志亦称："其量制，公私又不用龠、合、勺、之分；则有杪、撮之细。"

又原文

金曹云：称之所起，起于黍。十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。……已上古法。

《孙子算经》卷上："称之所起，起于黍。十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。"

以上《夏侯阳算经》所引田曹，仓曹，金曹各条并注称"已上古法"云。

《夏侯阳算经》卷上，"辩度量衡"章，又引《(前)汉书·律历志》称：

度：分、寸、尺、丈、引；

量：龠、合、升、斗、斛；

权：铢、两、二十四铢。斤、十六两。钧、三十斤。石。四钧。

---

① 唐代另有"石"，"㪷(即斗)"，"升"(《立成算经》作石，㪷，升)之称，如《旧唐书》四十八志二十八，食货上载："大历四年(公元769年)上等每亩税一㪷，下等每亩税六升。"

与上同。

《夏侯阳算经》卷上“辩度量衡”章称：“在京诸司，及诸州各给称、尺，并五尺度，斗、升、合等样，皆用铜为之。”其中：

京、司、州

据《新唐书》五十五志第四十五食货五亦称：“京、司及州县皆有公廨田，供公私之费”等记载。又《夏侯阳算经》卷上“辩度量衡”章所引此条系“杂令”的令文。另详下。

《夏侯阳算经》卷上“辩度量衡”章，又称：

“仓库令：诸量函所在官造，大者五斛，中者三斛，小者一斛，以铁为缘，勘平印书，然后给用。以上今时用之也已。”

按《大唐六典》卷十九司农寺丞条亦称：

“……凡受租皆于输场对仓官。租纲吏人，执筹数函。其函大五斛，次三斛，小一斛。”与上同。又其中

“仓库令”

据《夏侯阳算经》卷上“变米谷”章又引：

“仓库令云：其折糙米者：稻三斛折纳糙米一斛四斗。”又同书问题内亦记有“谷……欲依租变米：每谷三斛为米一斛四升”之例。又《太平御览》卷七百六十六杂物部一“簏篠”条亦引有：

“仓库令曰：诸输米麦二十斛，簏篠一番。”其中“簏篠”同书引：“《方言》曰：簟粗者谓之簏篠。”同书卷七百零九并引有“簏篠裹尸”。

(3)“言斛法不同”章

《夏侯阳算经》卷上“言斛法不同”章称：

仓曹云：古者凿地，方一尺，深一尺六寸二分，受粟一斛，至汉王莽改铸铜斛，用深一尺九寸二分。至宋元嘉二年(公元425年)**徐受重铸，用二尺三寸九分；至梁大同元年**(公元535

年)**甄鸾校之,用二尺九寸二分。**

其中:

"仓曹"

据《夏侯阳算经》卷上"辩度量衡"章,另引有:

"仓曹云,量之所起,起于粟……"云云。又其中

"凡斛法一尺六寸二分"

据《九章算术》卷五商功章已称:

"程粟一斛,积二尺七寸。二尺七寸者,谓方一尺,深二尺七寸,凡积二千七百寸。

其米一斛,积一尺六寸五分寸之一。谓一千六百二十寸。"

即"斛法一尺六寸二分"之义。

又《孙子算经》和《五曹算经》也同样说:"斛法一尺六寸二分"。

《夏侯阳算经》卷上"言斛法不同"章又有一题称:

"今有方仓长三十一丈六尺,广七十二尺,高一十七尺。中有九柱各圆三尺五寸,长十七尺。又有六柱各方二尺八寸,长十七尺。梁三枚长三十二尺,厚、广二尺。牵三枚,长三十二尺,各方七寸。问受粟几何?"其中仓内有:

柱、梁、牵

按《夏侯阳算经》卷上"言斛法不同"章另有一题作"牵二枚,长二丈六尺,方五寸"。又《五曹算经》卷四亦有一题称:"今有仓从一丈三尺,广六尺,高一丈,中有从牵二枚,方五寸,从一丈三尺。又横牵三枚,方四寸,从六尺。又柱一枚,周三尺,高一丈。问受粟几何?",这说明牵有方四寸,方五寸,或方七寸的例。

(4)"课租庸调"章

《夏侯阳算经》卷上"课租庸调"章称:

赋役令:诸户一丁租粟二斛,其调各随乡土所出。绢、绵各

二丈，布二丈五尺，输绢、绉者绵三两，输布者麻三斤，若当户不成端、匹、屯、綟者，皆丈、尺折半之。

按《大唐六典》卷三称：

“凡赋役之制有四：一曰租，二曰调，三曰役，四曰杂徭。

开元二十二年（公元734年）敕以为天下无事，百姓徭役，务从减省，遂减诸司色役二十二万二百九十四。

课户每丁租粟二石，其调随乡土所产，绫、绢、绉各二丈，布加五分之一，输绫、绢、绉者绵三两。输布者麻三斤，皆书印焉。

若当户不成匹、端、屯、绫绫当作綟者，皆随近合成。其调麻每年支科科当作料，有余折一斤纳粟一斗。”

又《旧唐书》四十八志第二十八食货上称：

“赋役之法，每丁岁入租粟二石，调则随乡土所产：绫、绢、绉各二丈，布加五分之一。输绫、绢、绉者兼调绵三两；输布者麻三斤。”

又《旧唐书》四十三志第二十三职官二称：

“凡赋役之制……户每丁租粟二石，其调随乡土所产：绫、绢、绉各二丈，布加五分之一。输绫、绢者绵三两，输布者麻三斤。”

又《通典》食货典六赋税下篇亦称：

“（开元）二十五年（公元737年）定令：诸课户一丁租调，准武德二年（公元619年）之制”。“其调：绢、绉、布并随乡土所出，绢、绉各二丈，布则二丈五尺。输绢、绉者绵三两，输布者麻三斤，其绢、绉为匹，布为端，绵为屯，麻为綟。若当户不成匹、端、屯、綟者，皆随近合成。”……“准令，布、帛皆阔尺八寸。帛长四丈为匹，布五丈为端，绵六两为屯，丝五两为绚，麻三斤为綟”。

又《新唐书》五十一志第四十一食货一亦称：

“凡授田者，丁岁输粟二斛，稻三斛谓之租。

丁随乡所出，岁输绢二匹，绫、绉二丈，布加五分之一。绵三两。

麻三斤。非蚕乡则输银十四两，谓之调。”

又唐长孙无忌《唐律疏议》(公元653年)卷十内“户婚律”;《唐会典》卷八十三,《册府元龟》卷四八七,食货志内武德七年(公元624年)始定律令条;《太平御览》卷六二六,治道部贡赋内引开元二十五年(公元737年)定令,和宋、《刑统》卷十三,户婚律所引赋役令,都和《夏侯阳算经》卷上“课租庸调”所记“赋役令”相同。

《夏侯阳算经》此条又续称:

凡年中除闰月外,有二月谓五月,十月一云九月为农事之月,免庸。若役五十日,租、庸、调并免,佗皆放此。

按《大唐六典》卷之三“凡赋役之制”后亦续称:

“凡丁岁役二旬

有闰之年加二日

无事则收其庸,每日三尺

布加五分之一

有事而加役者旬有五日,免其调;三旬则租、调俱免。

通正役并不得过五十日。”

又《新唐书》五十一志第四十一食货一“凡授田者”后亦续称:

“用人之力,岁二十日,闰加二日,不役者,日为绢三尺,谓之庸。

有事而加役二十五日者免调,三十日者租、调。皆免、通正役不过五十日。”

这和《夏侯阳算经》原文“若役五十日,租、庸、调并免”意义相同。又其中:

“匹、端、屯、绚、缤”

《大唐六典》卷之三称:

“凡缣帛之类,必定其长短广狭之制,端、匹、屯、缤之差焉。

罗、锦、绫、段、纱、縠、绉、紬之属，以四丈为匹；布则五丈为端，绵则六两为屯，丝则五两为纣‘纣当作绚’，麻乃三绩缐[1]。”

又《大唐六典》卷之二十又称：

“金银之属，谓之宝，钱帛之属，谓之货。绢曰匹，布曰端，绵曰屯，丝曰绚，麻曰缐，金银曰铤，钱曰贯。”

《新唐书》四十八志第三十八百官三称：

“织染署，……染绵、罗、纱、縠、绫、紬、绉、绢布皆广尺有八寸，四丈为匹，布五丈为端，绵六两为屯，丝五两为绚，麻三斤为缐”

又《旧唐书》四十八志二十八食货上亦称：

“匹……阔一尺八寸，长四丈，同文共轨，其事久行。”

又据日本《养老令》(公元718年)，日本《口游》(公元970年)亦称：

绢、绉、紬、纱、帛 …… 作匹(四丈)
布 …… 作端(五丈)
绵 …… 作屯(六两)
丝 …… 作绚(五两)
麻…… 作缐(三斤)。

庸、调时匹、端、屯折半，绚、缐不折半，云。

(5)“论步数不等”章

田曹：以六尺为步，三百步为一里此古法。

杂令：诸度地，以五尺为一步，三百六十步为一里。

田令：诸田：广一步，长二百四十步为亩，亩百为顷此今用之。

---

① 乃，疑当作则。又据《唐志》，绩当作斤。

按“田曹：六尺为一步，三百步为一里”见前“辩度量衡”章。其中：

“杂令”

据《唐会要》卷六十六太府寺条内称：

“开元九年（公元721年）敕格权衡度量并函脚，杂令……京、诸司及诸州各给秤尺及五尺度，斗升合等样，皆铜为之。”

《唐律疏议》卷二十六“校斛斗秤度”条内《疏议》称：

“校斛斗秤度，依关市令，每年八月诣太府寺平校。不在京者，诣所在州县官校，并印署，然后听用。其校法：

杂令：

量 以北方秬黍中者，容一千二百为钥，十钥为合，十合为升，十升为斗，三斗为大斗一斗，十斗为斛。

秤权衡 以秬黍中者，百黍之重为铢，二十四铢为两，三两为大两一两，十六两为斤。

度 以秬黍中者一黍之广为分，十分为寸，十寸为尺，一尺二寸为大尺一尺；十尺为丈。……。”

《太平御览》卷七百六十五器物部十“斛”引：

“杂令曰：‘诸量以秬黍中者容一千二百为龠，二龠为合，十合为升，十升为斗三斗为大一斗，十斗为斛。’”

又《旧唐书》四十八志第二十八食货上称：

“凡权衡、度、量之制

度 以北方秬黍中者一黍之广为分，十分为寸，十寸为尺，十尺为丈；

量 以秬黍中者容一千二百为龠，二龠为合，十合为升，十升为斗，三升为大升，三斗为大斗，十大斗为斛；

权衡 以秬黍中者百黍之重为铢，二十四铢为两，三两为大

两，十六两为斤。……。”

又《大唐六典》卷之三称：

“金部，郎中员外郎掌：库藏出纳之节，金宝财货之用，权衡度量之制，皆总其文籍，而颁其节制。

凡度以北方秬黍中者一黍之广为分，十分为寸，十寸为尺，一尺二寸为大尺，十尺为丈；

凡量以秬黍中者容一千二百为龠，二龠为合，十合为升，十升为斗，三斗为大一[据《唐志》“一”字当削]斗，十斗为斛；

凡权衡以秬黍中者百黍之重为铢，二十四铢为两，三两为大两，十六两为斤。……。”即系杂令

按杂令所记“五尺为一步”，是唐代的新制度。因《大唐六典》卷之三“……凡天下之田，五尺为步，二百有四十步为亩，百亩为顷。……。”又敦煌千佛洞“《算经》一卷并序”亦称“五尺为一步”。又其中：

“田令”

按长孙无忌《唐律疏议》(公元653年)内“户婚律”，《大唐六典》卷三户部郎中员外郎条，又《通典》卷二食货二田制下引大唐开元二十五年(公元737年)令，《册府元龟》卷四九五引开元二十五年制，《山堂考索前集》卷六十五地理门田制引唐开元二十五年令都引田令。

(6)“变米谷”章

“稻(谷)、糙米”

《夏侯阳算经》卷上“变米谷”章引：

“仓库令云：其折糙米者稻(或谷)三斛折纳糙米一斛四斗”。

又本章第二题称：

“今有谷(或稻)一千八百四十三斛八斗三升，欲依租(程)变米，每谷(稻)三斛为米一斛四斗，问合得米几何。

答曰八百六十斛四斗五升四合

术曰：置谷（稻）数，以一斛四斗为法乘之，以三斛为法除之得米数。”

又本书卷中(7)“求地税”章亦称：“纳谷三斛准米一斛四斗。”

关于米谷变率：

《九章算术》卷二有：

粟……50，　小麸……13½，

粝米……30，　大麸……54，　粝饭……75，

粺米……27，　粺饭……54，

糳米……24，　糳饭……48，

御米……21，　御饭……42，

菽，荅，麻，麦……45，　熟菽……103½，

稻……60，

豉……63，

飧……90，

糵……175，

等各率。

又《孙子算经》有：粝米，　粺米，　糳米，　御米；

粝饭，　粺饭，　糳饭，　御饭

的比率和《九章算术》相同。

《夏侯阳算经》记有：粝米，粺米，糳米，御米的比率亦和《九章算术》、《孙子算经》相同。

另有　稻（谷）　60　（见《九章算术》）

糙米　28

的比率，除稻率和《九章》相同外，其余糙米是在粝米，粺米之间的米。

又“糙米”或“糙”为唐人常用的名词，如：

《旧唐书》四十八志二十八食货上：“仪凤四年(公元679年)四月，令东都出远年糙米及粟。”又前书四十九志二十九食货下：“开元四年(公元716年)诏……近年已来，每三年一度，以百姓义仓糙米，远赴京纳，仍勒百姓私出脚钱。”又前书四十九志二十九食货下：“元和六年(公元811年)(卢)坦奏：每年江淮运糙(米)四十万石。”

(7)“求地税”章

(缺)

(8)“分禄科”章

《夏侯阳算经》卷中“分禄科”章内第一问称：

“今有官本钱八百八十贯文，每贯月别收息六分，计息五十二贯八百文。内六百文充公廨食料，五十二贯二百文，逐官高卑共分：太守十分，别驾七分，司马五分，录事参军二人各三分，司仓参军三分，司法参军三分，司户参军三分，参军二人各二分，问各钱几何？

答曰：

太守十分，计十二贯七百三十一文，四十一分文之二十九，

别驾七分，计八贯九百一十二文，四十(一)分文之八，

司马五分，计六贯三百六十五文，四十一分文之三十五，

录事参军二人各三分，各得三贯八百一十九文，四十一分文之二十一，二人共七贯六百三十九文，四十一分文之一，

司仓参军三分，计三贯八百一十九文，四十一分文之二十一，

司法参军 三分，计三贯八百一十九文，四十一分文之二十一，

司户参军三分，计三贯八百一十九文，四十一分文之二十一，

参军二人各二分，各二贯五百四十六文，四十一分文之十四，二人共五贯九十二文，四十一分文之二十八。”

其中：

“公廨、公廨田、公廨食料”

《大唐六典》卷之六：“凡税天下户钱，以充州县官月料，皆分公廨本钱之利，羁縻州所补……。”

《大唐六典》卷之七：“……凡在京诸司，有公廨田。”

《旧唐书》四十三志第二十三职官二：“凡内外官料俸，以品第高下为差，外官以州县府之上中下为差。凡税天下户钱，以充州县官月料，皆分公廨本钱之利，羁縻州所补。”

《新唐书》五十五志四十五食货五称：“京，司及州，县，皆有公廨田，供公私之费，其后以用度不足，京官有俸赐而已，诸司置公廨本钱。”

又唐《元氏长庆集》卷三十八“同州奏均田”称：“其诸色职田，每亩约税粟三斗，草三束，脚钱一百二十文。其……公廨田……。”又其中：

“太守、别驾、司马、录事参军、司仓参军、司法参军、司户参军、参军事”

《通典》职官第十七，太守：天宝元年（公元742年）以刺史为太守，又别驾：天宝八年（公元749年）废。代宗广德元年（公元762年）又设。

《新唐书》四十九下志第三十九下百官四下：“上州刺史……别驾……”注称：“武德元年（公元618年）改太守曰刺史，加使持节丞曰别驾，十年改雍州别驾曰长史。高宗即位（公元650年）改别驾皆为长史。上元二年（公元675年）诸州复置别驾，以诸王子为之。永隆元年（公元680年）省，永淳元年（公元682年）复置，景云二年（公元711年）始参用庶姓。天宝元年（公元742年）改刺史曰太守，八载（公元749年）诸郡废别驾，下郡置长史一员，上元二年（公元

761 年)诸州复置别驾,德宗时(780～805)复省。元和(806～820)长庆(821～824)之际,两河用兵,裨将有功者补东宫王府官,久次当进,及受代居京师者,常数十人,诉宰相以求官,文宗世(827～840)宰相韦处厚建议复置两辅、六雄、十望、十紧州、别驾。"

又《夏侯阳算经》所记:太守,别驾,录事参军,至司户参军,参军事是"下州"制度,因唐代下州所配合人数与此问所记相符。因据《旧唐书》志卷二十四,职官三:"下州……刺史(即太守)一员,正四品下。别驾一人,从五品上。司马一人,从六品下。录事参军事一人,从八品上。录事一人,从九品下。司仓,司户,司法三曹参事各一人,从八品下。参军事二人,从九品下。"

按唐代官吏分九品,每品有正品上阶,正品下阶;从品上阶,从品下阶之分。各品的分如正四品以下根据每二阶为一分,至正七品以下根据每四阶为一分计算,亦和此问所记"太守十分,别驾七分,录事参军,司仓,司法,司户三曹参军各三分,参军事二分"之例相符。

又《新唐书》记开元十九年(公元 731 年)四品官月俸十一贯五百六十七文和《夏侯阳算经》所算答案"太守(四品)十分计十二贯七百三十一文,四十一分文之二十九"无大出入。

以上都可证明此题是唐代八世纪时期制度。

(9)"计给粮"章

"兵……人(日)给米二升,　　五兵(日)共给酱二升,
醋三升(日)给七兵,　　兵五日给盐二升,
酒(日)每人三升,　　兵人给绢二匹。"

按以上是《夏侯阳算经》卷中"计给粮"章内问题所提配给米粮、用品等制度。

按《大唐六典》卷十九有"丁男日给米二升,盐二勺五撮"的制度。其中人日给米二升,和《夏侯阳算经》所记相符。《大唐六典》卷

四又称："六品已下，九品已上……，每日白米二升。"《大唐六典》卷六又称："其粮丁口日给二升。"

又《五曹算经》卷三有"凡酱二升饲五人"的问题，和《夏侯阳算经》卷中"计给粮"章内问题相同，前已记及。

又《大唐六典》卷之四曾记有"六品已下，九品以上……每日给酱四合，醋四合；又三品已上，四品、五品每日给酒一升半"的制度，和《夏侯阳算经》此处所记，大体相同。

惟《大唐六典》卷十九记："丁男日给……盐二勺五撮"和《夏侯阳算经》所记"兵五日给盐二升"不相符。《夏侯阳算经》当有误记。

(10)"定脚价"章

"洛州"

据《旧唐书》三十八志第十八地理一"河南道"条称：

"河南府：隋河南郡，武德四年(公元621年)讨平王世充置洛州……开元元年(公元713年)改洛州为河南府。"

又据《新唐书》四本纪第四："万岁通天元年(公元696年)给复洛州。"又《新唐书》三十八志二十八地理二："河南府：河南郡，本洛州，开元元年(公元713年)为河南府。"和《旧唐书·地理志》所记相同。

"正，脚；正米，脚米；正钱，脚钱；水脚"。

按《夏侯阳算经》卷中"定脚价"章，又卷下"说诸分"章各题，曾说明"抽身充脚"之例。

据《大唐六典》卷之三称：

"……租、调远近州县官司，收其脚直，然后付国邑官司。……"又"……凡天下舟车，水陆载运，皆具为脚直，轻重贵贱，平易险涩，而为之制。"

《旧唐书》四十三志二十三职官二称："凡天下舟车，水陆载运，

皆具为脚。”又《旧唐书》四十八志第二十八食货上亦称：“每计其运脚，数倍加数。”又“贞元八年(公元792年)……以停江淮运脚钱。”又《旧唐书》九十八列传第四十八裴耀卿传：“开元二十一年(公元731年)(裴)耀卿对曰……今天下输丁约有四百万人，每丁支出钱一百文、五十文……脚钱。”

又《新唐书》五十二志四十二食货二称：“又索进奉门户及脚价钱……。”都说明唐代脚价钱的例子。

“时估”

按《夏侯阳算经》卷中“定脚价”章内有各题说明：“其布准时估，端：别一百五十文。”又“其布准时估，端：三百六十文。”又“……两税米……时估，斗：别一百三十文。”又卷下“说诸分”章有“其绢时估每匹：一贯一百文……”各例。

据《旧唐书》四十八志二十八食货上，亦称“折纳时估”，这都说明唐代在行两税法时，有按时估的方法。

积叠

按《夏侯阳算经》卷中“定脚价”章有“又抽一文充积叠”之例。

“两税米，两税钱，两税法”

按《夏侯阳算经》卷中有问题称：

“今有两税米……斗送州，每斗脚一十三文……”，

“今有两税钱……文送州，每贯一十七文七分充脚……”。

又按《夏侯阳算经》卷下又有问题称：

“今有十五家共纳两税钱一十贯……”，

“今有两税钱……文欲送州，每贯数内抽一十文充脚……”，

“今有两税钱……抽身内充脚，每贯二百文，……”，

各例。

据《旧唐书·食货志》记有边境税米，税钱的规则。代宗即位

(公元763年)设有税地钱物使。又据《新唐书》五十二食货志四十二,代宗(763～779)开始定有亩定税,德宗(780～804)确定两税法,亦设有官吏。

《新唐书》七本纪第七记明:"德宗建中元年(公元780年)二月初定两税。"

其经过情形,据《旧唐书》一百十八列传第六十八杨炎传称:"杨炎……诏曰……初定令定国家有租赋。庸调之法,……其租庸之法久矣。迨至德(756～757)之后,……炎因奏对,恳言其弊,乃请作两税法,以一其名,……其租、庸、杂徭悉省。……夏税无过六月,秋税无过十一月……(刘)晏领东都河南、江淮、山南东道转运租庸青苗盐铁使,炎作相数月,欲贬晏,先罢其使,天下钱、谷皆归金部、仓部……。"

(11)"称轻重"章

"生铁,黄铁,钢铁"

按《夏侯阳算经》卷中"称轻重"章问题内,有:

"……生铁……炼为黄铁,每斤耗五两",

"……黄铁……炼为钢铁,每斤耗三两",

之例。

(12)"说诸分"章

"糯米每斗酝酒一斗四升,

大豆每斗造豉一斗五升,

小麦每斗造曲五斤,

麻每三斛三斗作油一斛。"

按《夏侯阳算经》卷下"说诸分"章问题有上述举例。

"上户,(次户),下户"

按《大唐六典》卷之三称:

“户……定为九等，四等已上为上户，七等已上为次户，八等已下为下户，……”，又“……税米者上户一石二斗，次户八斗，下户六斗。”

又《旧唐书》四十八志二十八食货上称：

“若岭南诸州，则税米上户一石二斛，中户八斛，下户六斛。”又“大历四年（公元769年）上等每亩税一斛，下等每亩税六升。”

“垫、垫陌（即每贯垫若干文）”

《夏侯阳算经》卷下“说诸分”章有：

“每贯垫四十二文”，“每贯纳五十文充垫陌”

之例。此项“垫”或“垫陌”亦称：“陌内欠钱”，或“除陌钱”。唐代，八世纪广泛应用，以后逐渐加多。

据《旧唐书》四十八志第二十八食货上：

“天宝九载（公元750年）除陌钱每贯二十文。”

“元和四年（公元809年）闰三月京城时用贯头除二十文陌内欠钱。”

《新唐书》五十五志四十五食货五：

“元和九年（公元814年）户部除陌钱每缗增垫五钱。”

又《旧唐书》四十八志第二十八食货上：

“元和十四年（公元819年）六月敕……时用钱，每贯除二十文足：陌内欠钱。”

“元和……皇甫镈建议内外用钱每缗垫二十外，复抽送度支以澹军，十二年（公元817年）……民间垫陌有至七十者。”

又“长庆元年（公元821年）九月敕：泉货之处，所贵通流，如闻比来用钱所在除陌不一，其禁，人之必犯，未若从俗之所宜，交易往来，务令可守，其内外公私给用钱，从今以后，宜每贯一例，除垫八十，以九百二十文成贯，不得更有加除，及陌内欠少。”

28. 缉古算术佚文校补

“假令有勾弦相乘幂一千三百三十七二十分之一，弦多于股一、十分之一，问股多少？

答曰：九十二五分之二。

术曰：幂自乘，倍多而一，为立幂。又多再自乘，半之，减立幂，余为实。又多数自乘，倍之，为方法，又置多数，五之，二而一为廉法。从开立方除之，即股。勾弦相乘幂自乘即勾幂乘弦幂之积。故以倍股弦差而一，得一股与半差再乘得弦幂为方。今多再自乘半之为隅以减立幂得横虚二立廉为二多多自乘半之为横隅倍之为从隅故多自乘倍之为方法今半多为上廉，即二多数与半多为廉法故五之二而一从开立方除之。”

因勾股形内，令勾为 a，股为 b，弦为 c，第十七问已知 ac、$c-b$，求 b。

$$\begin{aligned} a^2c^2 &= (c^2-b^2)[(c-b)+b]^2 \\ &= [(c-b)(c-b+2b)][(c-b)+b]^2 \end{aligned}$$

故得：

$$\frac{a^2c^2}{2(c-b)} - \frac{(c-b)^3}{2} = 2(c-b)^2b + \frac{5}{2}(c-b)b^2 + b^3 \tag{XVII}$$

“假令有股弦相乘幂四千七百三十九五分之三，勾少于弦五十

四五分之二问股多少?

答曰六十八。

术曰:幂自乘倍少数而一为立幂,又少数再自乘半之以减立幂,余为实。又少数自乘倍之为方法,又置少数五之二而一为廉法,从开立方除之即勾,加少数即弦,除幂即股。"

第十八问,已知 bc,$c-a$,求 a。

$$b^2c^2=(c^2-a^2)[(c-a)+a]^2$$

故得:

$$\frac{b^2c^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2}=2(c-a)^2a+\frac{5}{2}(c-a)a^2+a^3 \qquad (\text{XVIII})$$

"假令有股弦相乘幂七百二十六勾七十分之七,问股多少?

答曰:股二十六五分之二。

术曰:幂自乘为实,勾自乘为方法,从开方除之,所得又开方即股。股弦相乘幂即为股幂弦幂相乘之数亦是股幂乘股幂加勾幂之数以股幂为长以股幂与勾幂相加为从开方除之得股幂又开方得股此分母常开尽。"

第十九问,已知 bc 及 a,求 b。

$$b^2c^2=b^2(a^2+b^2)$$

故得

$$b^2c^2=a^2b^2+b^4 \qquad (\text{XIX})$$

"假令有股十六二分之一,勾弦相乘幂一百六十四二十五分之十四,问勾多少?

答曰:勾八五分之四。

术曰:幂自乘为实,股自乘为方法,从开方除之,所得又开方即勾。"

第二十问,已知 ac 及 b,求 a。

如前得 $$a^2c^2 = b^2a^2 + a^4 \qquad (XX)$$

以上《缉古算术》,第 17、18、19、20 各题,就中第 17、19 题由严敦杰校补注文,第 18、19、20 题,题文佚文校补,见《清张敦仁缉古算经细草》,并由严君校过,其校补之处,加点为志。

29. 筹算制度

古人算数用筹。筹的采用，使数字离开实物而愈加抽象，如是便引进了代数学。但其名称不一，大约策为最先之名，而算子为后来通俗之称。其间又有算、筹、筹算、筹策、算筹诸异名，今分述于下：

(1)策 《后汉书》卷六十上马融传称："融……元初二年(公元115年)上《广成颂》……'隶首策乱，陈子筹昏'。"唐李贤注称："陈子，陈平，善于筹策者也。昏，乱也。言禽兽多不可算计。"此言隶首用策，陈平用筹，盖已认策先于筹。唐慧琳《一切经音义》十三卷引顾野王《字书》："策，筹也。"又十八卷："策，或作筴。《声类》：筴，筹也。郑玄云：箸也。筴，亦算也。《方言》(二)：燕北、朝鲜、烈水之间，谓木细枝为策。"观《方言》所载，则策为细木枝，初不加人工制作者。

(2)算 《说文》竹部："筭(同算)长六寸，计历数者，从竹，从弄，言常弄乃不误也。"(见清段玉裁《说文解字注》第九卷，第二〇页，光绪辛巳(1881年)苏州刻本。)清张文虎《舒艺室随笔》卷二谓："筭字有从王之义，非从弄也。常弄之说，恐又后人所增。"但唐慧琳《一切经音义》九卷亦言："(筭)字从竹，从弄，言常弄不误也。"则从弄之义，由来已久。算之名称，屡见于古算书，如《九章算术》卷

四“开方术曰：置积为实，借一算步之，超一等。”又“开立方术曰：置积为实，借一算步之，超二等。”《孙子算经》卷中“问为方几何？术曰：置积……为实，次借一算，为下法，步之，超一位至百而止。”是也。其他载记，至宋尚存此称。如《顾氏文房小说本》，宋张耒《明道杂志》称：“卫朴……每算历，布算满案，以手略抚之。人有窃取一算，再抚之即觉。”又《资治通鉴》卷一百二十八，唐纪，懿宗皇帝三：“吏执笔握算，入人室庐计其数。”

明陈耀文《天中记》卷四十一引《异苑》称：

“越王余算，——晋安有越王余算策长尺许，白者似骨，黑者似角。云越王行海作算，有余算弃之于水生焉。”

(3)筹 《淮南子》云：“筹，策也。”郑注《礼记》云：“筹，算也。”《文选》卷十一何晏《景阳殿赋》：“丛集委积，焉可殚筹。”又卷三十四枚乘《七发》：“孔老览观，孟子持筹而算之。”徐锴《说文系传》竹部曰：“筹，壶矢也。从竹，寿声。”(南唐，徐)锴曰：“投壶之矢也。其制似箸，人以之算数也。”宋司马光《资治通鉴》卷一九七唐纪：“筹笔不去手。”元胡三省注：“筹，所以计算，笔所以书。”又《大唐六典》卷十九：“……凡受租……吏人执筹……。”

(4)筹算 《广韵》：“筹，筹算。”《前汉书》：“(桑)弘羊……有心计”，(颜)师古(注)曰：“不用筹算。”

《九章算经》五：“术曰：广袤相乘以高乘之，三而一”条，魏刘徽注曰：[……谓以精推，不用筹算。]

(5)筹策 《太平御览》引《老子》曰：“善计者，不用筹策。”顾野王《字书》曰：“筹策所以计算也。”唐李贤注《后汉书》称：“陈平善于筹策者也。”

(6)算筹 《述异记》：“成公兴真人假为货客，误触算筹，其算乃合。”《邵氏闻见后录》(1157年)卷二十七：“有中官取以作算筹，

(张)浮休亦得一二。"元陶宗仪《辍耕录》称:"其法折草一把,不计草数多寡,苟用算筹亦可。"

(7)**算子** 宋薛居正《旧五代史》卷一〇七,《汉书》第九列传四王章,宋欧阳修《新五代史》卷三〇汉臣传第一八王章,宋陈世崇《随隐漫录》卷一,并云:"此辈与一把算子,未知颠倒,……"。宋罗大经《鹤林玉露》天集(1248年)卷二"算子"条称:"《五代史》……算子本俗语,……温公《通鉴》改作"授之握算,不知纵横",不如欧《史》矣。"清梅文鼎《古算器考》引宋浦江吴氏《中馈录》有"切肉长三寸,各如算子样"之语。

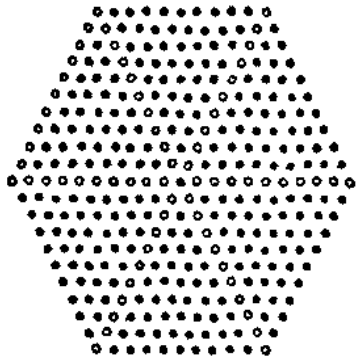
《古今图书集成》经济汇编食货典卷二百五十九饮食部汇考三,引《中馈录》"算条巴子"条同。

宋释赞宁等撰《高僧传》三集,卷一僧一行传:"……院中布算……除一算子。"

《万有文库》本《元曲选》辛集下,元无名氏撰"玎玎珰珰盆儿鬼杂剧"称:"我问道半仙,你再与我一算看:可还有什么解处?那先生把筭子,又拨上几拨,说道,……。"又《元曲选》丁集下,元孙仲章(一作孙仲辛,或云姓李,系蒙古时代1260~1280年作家。)《河南府张鼎勘头巾杂剧》称:"大凡掌刑法的有八:……二算子,……。"又元李雪庵《雪庵字要外法》:"作字……状如算子。"元陈绎曾《翰林要诀》:"凡平画忌如算子","画不变者,谓之布算子","皆须分向背,以避铺算子也"。

至其形式,则《方言》谓:"木细枝为策。"《说文》竹部曰:"算长六寸,计历数者。"《盐铁论》贫富论第十七:"运之六寸",即指运筹。《前汉书·律历志》曰:"其算法用竹,径一分,长六寸,二百七十一枚而成六觚为一握。"此称径一分,乃系圆形之物,如下图(甲)。

其后北周甄鸾注《数术记遗》称:"积算,今之常算者也,以竹为



第一图 （甲）

之。长四寸，以效四时；方三分，以象三才。”此时已由细木枝或圆形之物，进而为有规则之四方形矣。《隋书·律历志》曰：“其算用竹，广二分，长三寸。正策三廉，积二百一十六枚，成六觚，乾之策也。负策四廉，积一百四十四枚，成方，坤之策也。觚、方皆径十二，天地之大数也。”

按《周易》策数法已言：“乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四。”

《北史》卷四十七贾思伯传称：“蔡邕（132～192）论明堂之制云：堂方百四十（四）尺，象坤之策；屋圆径二百一十六尺，象乾之策。”

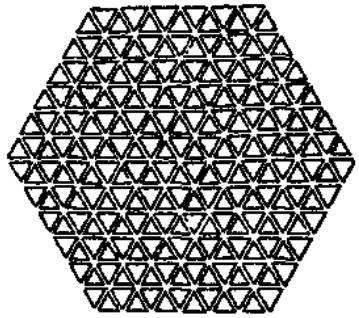
其分别正负，亦有用赤黑色者。如魏刘徽注《九章算术》称：“正算赤，负算黑。”又《梦溪笔谈》卷八称：“算法用赤筹、黑筹，以别正负之数。”（见《四部丛刊续编》影明刊本宋沈括《梦溪笔谈》卷八第三页。）

清李锐于《知不足斋丛书》本《益古演段》卷上称：“秦道古（九韶）《数学九章》卷四上开方图，负算画黑，正算画朱。”盖李氏所见本如此。今所传《宜稼堂丛书》刻本，已无朱黑之别，至宋人杨辉，则

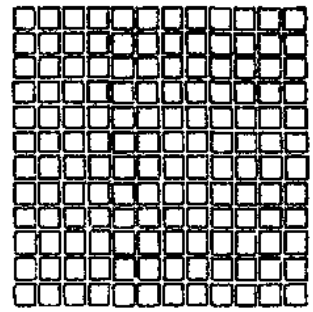
已审阅
子居 09-10-26, 17:48

以斜画为负，颇为后人所沿用。

又有将算筹就其形式分为正负二种：正者为三角式，负者为四方形，如下图（乙）及（丙）。



第二图 （乙）



第三图 （丙）

论其长短，则于上记之外，清梅文鼎《古算器考》引宋浦江吴氏《中馈录》有“切肉长三寸，各如算子样”之语。（《图书集成》引同）

其数目，虽《汉书》、《隋书》各有定数，后来却以“一把”、“盈握”为度，引见(7)算子条。

其器初用竹，如策、筭、筹，并从竹是也。亦有用木者，方言释策为木细枝，即其例也。其后有用铁，用牙，用玉者。宋陶谷《清异录》卷上“不动尊”条称：“铸铁为算子”。又施耐庵《水浒传》亦言及铁算子。用玉之例亦一见于宋人笔记。如邵博《邵氏闻见后录》（1157 年）第二十七第一条称：“张浮休云盗夜发咸阳原上古墓，有火光出，用剑击之，铿然以坠，视之白玉廉也。岂至宝久埋欲飞去邪？既击碎之，有中官取以作算筹。浮休亦得一二。”至用牙之例，则《世说》言王戎持牙筹会计。《唐语林》卷六言王戎牙筹。《资治通鉴》卷八十二，《晋纪》，孝惠皇帝：元康七年（公元 297 年）九月，以尚书右仆射王戎为司徒，“每自执牙筹，昼夜会计，常若不足。”又

《新编五代史(晋史)平话》目录有:"契丹主牙筹计景延广罪"亦是一例。

盛算之器谓之算袋。唐段成式《酉阳杂俎》前集卷十七"乌贼"条称:"海人言:昔秦王东游,弃算袋于海,化为此鱼,形如算袋,两带极长。"至今尚存此称,如清周亮工《闽小记》卷下谓"墨鱼一名算袋鱼"是也。唐时官吏有佩算袋者。《旧唐书》上元元年(公元674年)制一品以下,文官并带手巾、算袋。景云二年(公元711年),又令内外官依上元元年,九品以上文武官咸带手巾、算袋。开元二年(公元714年),并停京官所带跨巾算袋。(见《旧唐书》卷五、卷七,卷八及卷四十五)。《新唐书》称:"初职事官……一品以下,则有手巾、算袋、佩刀、砺石。至睿宗时(685~689)时,罢佩刀、砺石。"又:"百官朔望朝参,外官衙日则佩算袋,余日则否。"(见《新唐书》卷二十四志第十四,车服志)。按唐颜师古注《前汉书》外戚传第六十七下"盛绿绨方底"句称:"绨,厚缯也;绿,其色也。方底盛书,囊形,若今之'算縢'耳"。《说文》:"縢,囊也。"《广韵》:"縢,囊可带者。"

《资治通鉴》卷一四四齐纪和皇帝"麝縢"条,元胡三省注称:"囊可带者曰縢。山沙以盛麝香,故曰麝縢,犹今之香袋。"亦以縢为囊。颜师古所谓算縢,即算袋也。至宋尚存此称,如宋刘延世《孙公谈圃》卷下(1101年)两言"算袋"是也。宋时尚有一种算子筒,想亦为留置算子之具。《永乐大典》卷七六〇三本《西湖老人繁胜录》载:"京都有四百十四行,略而言之,闹慢道业,……算子筒"(见《永乐大典》卷七六〇三杭字韵《西湖老人繁胜录》第23页,《涵芬楼秘笈三集》本,上海商务印书馆,1917年11月。)

算筹亦有时与他物通用。《礼记》投壶曰:"算,尺有二寸。"《说文系传》竹部曰:"筹,壶矢也。从竹,寿声。臣(徐)锴曰:投壶之矢也。其制似箸;人以之算数也。"是以筹为壶矢矣。《史记》云:"借箸

为大王筹之。”是以筹为箸矣。《后汉书·胡广传》称:“顺帝欲立皇后,而贵人有宠者四人,莫知所建,议欲探筹,以神定选。(胡)广与尚书郭虔、史敞上疏谏曰:窃见诏书,以立后事大,谦不自专,欲假之筹策,决疑灵神。篇籍所记,祖宗典故,未尝有也。……”至宋元以后,亦以算子为算命之需,如《水浒》所谓铁算子是也。

30. 佛教与中国历数

印度的天文学、数学，随着佛教输入中国，在公元三世纪已有开展。来华僧人因为兼学五明，多有通晓天文、数学的。如《旧唐书》(卷一九八)即记载："天竺国即汉人身毒，或云婆罗门地也……有文字，善天文算历之术。"对于个别的天竺人，则如《高僧传》称：曹魏嘉平中(249～253)来华的印度高僧昙柯迦罗，"天文图谶，莫不该综"。苻秦建元十七年(公元381年)来华的僧伽跋澄，"博览众典，特善数经"，姚秦弘始三年(公元401年)来至长安的鸠摩罗什，"博览五明诸论，阴阳星算，莫不毕尽"。刘宋元嘉十三年(公元436年)来至金陵的求那·跋陀罗，"天文、书、算、医方、咒术，靡不该博"。七、八世纪，印度僧人参加修历，事例尤多。

这时期间，中国学者亦有通过学习佛经而吸收印度的天文、数学知识的，如何承天(370～447)曾撰《元嘉历》，并曾向僧慧严询问印度所用的历法(《高僧传》卷，7)。又甄鸾(535～573)通晓佛典，并撰注新旧算书十余种(参看李俨《中国数学大纲》"修订本"上册，第一版，第130～131页，北京科学出版社1958年)*，作为唐李淳风再校订《算经十书》(公元680年)，以及宋代官刊《算经十书》(1084

---

* 见本书第三卷第141～142页。——编者

年)的基础。甄鸾注《数术记遗》曾引用佛经文句。甄鸾又自撰有《天和历》(公元566年);僧一行(683～727)尤精历算,撰有《大衍历》(公元727年)。此外,中国算书中也有提到佛书的,如《算经十书》内《孙子算经》有一题称:"今有佛书凡二十九章,章六十三字,问字几何?"即是其例。

又五世纪至七、八世纪间,中国僧人也很多前往印度留学,两国人们往来频繁,文化交流,除印度输入天文、数学知识有明白记载外,中国算术好像也有西传的情形。如《九章算术》内"盈不足"术,中世纪阿拉伯人称为 Hisab alkhataayn,意云"契丹算法",可能是通过印度输入中亚细亚各地的。又刘焯(544～610)于公元600年创内插法,僧一行亦曾应用,在印度则七世纪算书,在中亚细亚则十一世纪学者,都曾用内插法计算正弦(sine)数值,时间较迟于刘焯,可能是受中国的影响,或彼此有同样的创造,亦未可知①。

现在从佛典《大藏经》以及其他史实里,可以详细了解到佛教和中国各项科学的种种关系,今分述天文学和数学方面的关系如下:

---

① 见 Li Yen, *The interpolation formulae of early Chinese Mathematicians*, —《*Actes du Ⅷ-e congrès international d'histoire des sciences*》, Florence, 3～9 Septembre 1956, Firenze, 1957. pp. 70～72. 又见 P.C. Sengupta, *Brahmāgupta* (626) *on interpolation*, *Bulletin Calcutta Math. Society*, Vol. 23 (1931), pp. 125～128.

又见李俨《中国数学大纲》(修订本)上册,第105～107页(*见本书第三卷第112～114页。——编者)。

又见 B. A. Rosenfeld (Kolomna): *Une tentative d'interpolation quadratique chez al-Bīrūnī*,

Историко-Математические Исследования, *Выпуск* XII(1959), pp. 421～430。

(一) 天 文 学

印度较古的历法,是公元500年前的耆那教历。此项历法,在《法苑珠林》(唐道世公元668年撰,卷7引《智度论阿鞞跋致品》)曾经介绍过,其中记录有:

(1)日(Solar)月$=30\frac{1}{2}$日,日年$=12\times30\frac{1}{2}=366$日;

(2)世间(Rtu)月$=30$日,世间年$=12\times30=360$日;

(3)月(Lunar)月$=29\frac{32}{62}$日,月年$=12\times29\frac{32}{62}=354\frac{12}{62}$日;

(4)星宿(Naksatra)月$=27\frac{21}{67}$日,星宿年$=12\times27\frac{21}{67}=327\frac{51}{67}$日。

这是印度天文知识的古代部分的输入①。

中国《淮南子》、《史记》以及《前汉书》、《后汉书》曾就五星(即(1)荧惑(火星)、(2)辰星(水星)、(3)岁星(木星)、(4)太白(金星)、(5)镇星(土星))的周天数(即环行一周的年数)加以记录。五星配合日、月就是七曜,公元230年(吴孙权黄龙二年)竺律炎译《摩登伽经》,又约公元320~340年帛·尺梨蜜多罗译《大孔雀王神咒经》一卷(此书后来更经多次重译),以及公元759年不空译《宿曜经》,都记有七曜的天竺名称。例如《大孔雀王神咒经》的唐义净译本(公元705年)记明

(1)日 天竺名作"阿娌底"(Āditya),

(2)月 天竺名作"苏摩"(Sōma),

(3)荧惑(火) 天竺名作"盎伽迦"(Amgāraka),

---

① 参看 Sukumar Ranjan Das, *The Jaina Calendar*, Isis, No. 54 (Vol. Ⅶ-3), (1932), pp. 432~437。

(4)辰星(水) 天竺名作"部陀"(Budha),

(5)岁星(木) 天竺名作"苾栗诃飒钵底"(Vrhaspati),

(6)太白(金) 天竺名作"末羯罗"(Sukra),

(7)镇星(土) 天竺名作"珊尼折罗"(Sanaiscara)。

中国原有二十八宿之说,上述《摩登伽经》(公元230年)、《宿曜经》(公元759年)等经,也都如上例分别记有二十八宿的天竺名称和形象,以及星数,此项七曜和二十八宿的研究,当是彼此各自有相似的发展的。可是三世纪七曜的名义输入以后,中国历数家所修的历法曾统称为七曜历,并有直接以七曜名的。如《通志·艺文略》即记有四世纪至八世纪内三十部七曜历的目录①。

七曜历流行之后,中国学者对此亦曾加以考核,如徐广、何承天即在四、五世纪以八十年的功夫来作考校。何承天于公元443年曾上表称:

臣"自昔幼年,颇好历数,……臣亡舅故秘书监徐广素善其事,有既往《七曜历》,每记其得失,自(晋)太和(约公元360年)至(晋)太元之末(约公元400年)四十许年。臣因比岁考校,至今又四十载。故其疏密差会,皆可知也。……是故臣更建《元嘉历》"。因之中国于公元445年,即通用《元嘉历》(见《宋书》历志上)。

上述七曜历及天文学,公元七、八世纪朝廷曾禁民间学习,可是此项七曜历照旧在民间流行称做"小历"。八世纪间日本留学僧宗叡即有带《七曜历日》等三书回国的纪事(见李俨《中算史论丛》第五集,北京二次印本,第39、44页)*。

由印度输入七曜名义之外,又输入九执名义。公元230年所译

① 参看"31. 七曜名义"章,本卷第214~222页。又刘世楷"七曜历的起源",《师大学报》第4期(1959年)第27~39页。

* 见本书第八卷第405、410页。——编者

《摩登伽经》即列举七曜和罗睺(Rāhu)、彗星(即计都,Ketu)。帛·尸梨蜜多罗译《大孔雀王神咒经》,亦于七曜外另有"罗睺和计都(即彗星)"共九星称为"九执",以为是"九种执持天神名号"(见李俨《中算史论丛》第五集,第51页)*。至公元718年瞿昙悉达(Gautama Sidhārta)更于《开元占经》内有专节说述"天竺九执历经"。

九执历,是以十九年七闰,和一月$=29\frac{373}{703}$日计算,这与印度Varāha Mihira(约505～587时人)所编《五大历法全书》(*Pañca-Siddhāntikā*)记录相同(见薮内清。Kiyosi yabunti《隋唐历法史之研究》第六章内"九执历之研究",东京,1944年)。

由于《九执历》的输入,后来僧一行《大衍历》内,亦引述了印度天文学中十二宫位次,以及拘摩罗(Kumāra)断日蚀法。

此外,又由印度输入《婆罗天文经》,费长房《历代三宝记》卷3、卷11并称达摩流支(Dharmaruci)公元569年译出《婆罗门天文(经)》20卷(参照李俨《中算史论丛》第五集,1957年上海二次印本,第16～17页)**。此项纯粹天文书以后失传。《开元释教录》(公元730年)卷7曾注称:"……《波罗门天文》二十卷,今以非三藏教,故不存之。"大概此书不列入《大藏经》,故不久就亡失了。另外还有《聿斯经》若干种,《新唐书·艺文志》列入历算类,《宋史·艺文志》列入天文类、五行类、历算类,现在也同样不流传。

在公元七、八世纪,唐代政府为着需要,曾在太史阁另设瞿昙监(即瞿昙氏等所执掌的司天台),由天竺天文学专家修治历法。公元759年不空所译《宿曜经》,公元764年杨景风曾为注释,谈到此

---

* 见本书第八卷第417页。——编者

** 见本书第八卷第383、384页。——编者

事。其卷上第三称：

景风曰：凡欲知五星所在者，天竺历术，推知何夜，具知也。今有迦叶氏、瞿昙氏、拘摩罗等三家天竺历，(并)掌在太史阁。然今之用，多瞿昙氏历，与本(术)相参(供)奉耳。(本文据磧砂版《大藏经》校正)

杨景风亦自造《建中正元历》(公元784年)。所举迦叶氏、瞿昙氏、拘摩罗氏事迹可考的有迦叶·孝威(公元665时人)、瞿昙罗(665～699)、瞿昙悉达(712～718)、瞿昙谡(721～762)、瞿昙谦、瞿昙晏和俱摩罗(一作拘摩罗，或鸠摩罗)各人[1]。瞿昙氏执掌天文台时间较长，故杨景风在八世纪末叶尚称："然今之用，多瞿昙氏历，与本术相参供奉耳。"

(二) 数　　学

中国在公元一世纪前后，已确定用筹算的方法，并用竹制"算筹"做算数的工具，亦称"算子"。到公元六、七世纪，它的应用更广，如整数、分数、小数的四则，开方以外，联立方程，二次、三次方程以及内插法，无一不可用算筹来计算。《孙子算经》和《夏侯阳算经》都引有乘除等用算筹计算的实例。

算筹或算子除用竹制之外，还有用玉、用牙、用铁的，又盛算子之器，有用"算袋"的例子[2]。此外，还有布算"在地"，在几上，在特制如棋盘型的算盘上，和"一纵十横"的法则。

五、六世纪中国所译佛经内也介绍了古代印度用"算子"算数，

---

① 参看"35. 瞿昙氏历"章(*见本卷第241～244页。——编者)。

② 参看"29. 筹算制度"章(*见本卷第197～203页。——编者)。

和“算子”用宝(玉)、用骨、牙、角、铜、铁、铅、锡、白镴木;和用囊(即算袋),以及布算“在地”、在几上的例子。如公元412年姚秦三藏佛陀耶舍共竺佛念译《四分律藏》,其中卷52,第4分,“杂揵度”二之二,记称:

> 比丘不解事、数相涉,“听用算子记数”,彼用宝作。佛言不应用宝,听用骨、牙、角、铜、铁、铅、锡、白镴木作。彼安置地污手,佛言不应置地,应安板上。彼安板置地,复安膝上污衣,佛言不应尔,应安脚作机。彼算子患零落,听作囊盛。不系从口出,听以绳系安杙上,龙牙杙上。

这说明古代印度,在土盘算法(即写算方法)未应用之前,也应用与中国古代筹算相类的方法来计算。

中国筹算又有“一纵十横”的用法,《孙子算经》称:“凡算之法,先识其位,一纵十横,百立千僵,千十相望,万百相当。”《夏侯阳算经》亦有同样的记载。中国算筹或算子的记数,一至九纵列,一十至九十横列,以后纵横相同,布列成数。如。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵者是:	丨	丨丨	丨丨丨	丨丨丨丨	丨丨丨丨丨	丅	丅丨	丅丨丨	丅丨丨丨
横者是:	一	二	三	亖	亖	丄	丄	丄	丄

如有数6728作“丄丅二丅”,又6708作“丄丅　丅”(见李俨《中国数学大纲》修订本上册,第一版,第77页)*。

六、七世纪中国所译所注佛经,也说明此项规则,如公元511年元魏三藏菩提留支译天亲《十地经论》卷7称:“算数:数者一一为二,二二为四,如是等;算者一纵十横,如是等。”所谓“一一为二”,“二二为四”,就是积一、一两个筹成二,积二、二两组筹成四。

---

* 见本书第三卷第87页。——编者

又唐澄观撰《大方广佛华严经疏演义钞》卷三十六亦称："数以记数，算以记位，谓一纵十横等。"所谓"算以记位"就是用"算筹"或"算子"作定位之用。这又说明古代印度的算法，先用算筹，以及用"一纵十横"方法，都和中国相同。

上述是中国、印度古代算法的共同点。但不必强调说是：中国输入筹算法到印度，或印度输入筹算法到中国。可能是两国同时都用这类方法。

到七、八世纪印度已盛行"土盘算法"（即在盘上铺沙土做写算的方法）和"位值制数码"（即如现在以亚拉伯数码记数的方法）。按公元628年《婆罗门笈多》(Brahma-gupta，598～?)《天文书》中有两章讨论数学，举出(1)"土算盘法"和(2)应用"位值制数码"。这些方法，当随着佛教的传播而介绍到中国，并传到中亚细亚，以及欧洲各地。

八世纪初年僧一行撰《大毗卢遮那成佛经疏》卷十九次百字成就持诵品第二十二称："此中算数喻者，犹如世间下算之法，最初画置一字，以为其本西方算皆于土中画之，未已，还画之耳，乃至亿、载、阿僧祇等，皆从是生。然最初未下算时，本无是数，从此空地，本无算数之中，而下一算，若二、若三，乃至无量。乃算毕已，除去众位，还空如本。"又《新唐书》、《玉海》并称公元718年瞿昙悉达译《九执历》，《新唐书》又称瞿昙悉达集《开元占经》110卷。现传本《开元占经》卷一百〇四"算法，天竺九执历经"内记明："九执历法，梵天所造，五通仙人承习传受……。"又于"算法"、"算字法样"内记明：

"一字 二字 三字 四字 五字 六字 七字 八字 九字 点

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

右天竺算法，用上件九个字乘除，其字皆一举□而成。凡数至十，进入前位，每空位处，恒安一点。'有间咸记，无由辄错'，连算便眼，趁

须先及。”(见《开元占经》卷一〇四)上面“零号以点为记”的方法，一直到十一世纪在印度还在利用，如十一世纪中亚细亚穆斯林数学家亚·勃鲁尼(Al-Bîrûni)游历印度，撰《印度记》，记载印度“零号以点为记”的事实，和《开元占经》所记相同。可是《开元占经》所记各数码字，它们写法和中国体制不同，中国人民不习用，便早已失传了。《新唐书》卷二十八历志第十八还批评说：“《九执历》者，出于西域，……其算皆以字书，不用筹策，其术繁碎，或幸而中，不可以为法，名数诡异，初莫之辩也……。”至于印度数学对中国数学直接发生影响的，有“三等(命)数法”、“周天360度”，以及“三角函数表”等，也都和佛教的传播有关。

中国记数法先有十进法，在殷墟甲骨文上即已见到。汉代(二世纪)以后，万数以上，有十进、万进二种方法，即十万为亿，十亿为兆等等，和万万为亿，万亿为兆等等的方法。自五、六世纪佛经译出之后，更有万万进、百进以及倍进的方法。如公元418年佛驮跋陀罗(359～429)译《华严经》、公元541年月婆首那、公元571年阇那崛多译《大宝积经》、公元567年真谛译俱舍论，皆有此类记载。后来唐译《华严经》卷45、卷65(公元699年)说：“一百洛叉(Laksa)为一俱祇(Koti)；俱祇、俱祇为一阿庾多(Ayuta)；阿庾多、阿庾多为一那由他(Nayuta)”，都是倍进的实例。

甄鸾所注汉徐岳《数术记遗》原文谈到：“数有十等，及其用也，乃有三焉……三等者，谓上中下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿、十亿曰兆、十兆曰京也；中数者万万变之，若言万万曰亿、万万亿曰兆、万万兆曰京也；上数者数穷则变，若言万万曰亿、亿亿曰兆、兆兆曰京也。”上数即是倍进的例子①。

---

① 参看“33. 三等数法”章(*见本书本卷第227～237页。——编者)。

甄鸾又于注《数术记遗》注文内引《楞伽经》的七进位法，如“七阿耨为一铜上尘，七铜上尘为一水上尘，七水上尘为一兔毫上尘……”等。又引《华严经》文以解释原文“大千(世界)”的意义。这些说明原文和注文都是受到佛教的影响的。

由佛经附带输入大数、小数之后，也给中国数学者一种启发，知道大数可达到“阿僧祇”(即无数)，以及“不可说不可说转”等，小数可由“百分、千分、百千分、亿分(俱致分)”以至“不可数分”。所以元朱世杰《算学启蒙》(1299 年)大数记法，在“载”以上，列有“极、恒河沙、阿僧祇、那由他、不可思议、无量数”等六名，小数也有和这相仿的命名。这虽和原来意义不相符，但这些名词无疑是取自佛经①。

瞿昙悉达的《开元占经》卷一〇四“算法，天竺九执历经”内，曾将一圆周分为 360 度，二十四段(即四象限)，每度为 60 分，并介绍三度四十五分(3°45′)至九十度(90°)，每隔三度四十五分(3°45′)的正弦(sine)函数表：由 $\sin 3°45' = \frac{225}{3438} = 0.06544$ 到 $\sin 90° \frac{3438}{3438} = 1.00000$(参看李俨《中国数学大纲》(修订本)上册，第一版，第 137～141 页)*。此项九十度共分二十四段所介绍三角法的正弦表，和印度数学家阿利耶毗陀(Aryabhata，公元 476 年生)所算，以及印度古历算书 Sūrya－Siddhānta 记录相同②。

从以上所说可见在历数方面，中印两方是有渊源关系的。

---

① 参看“34. 天竺小数记法”章(• 见本书第 238～240 页。——编者)。

* 见本书第三卷第 149～153 页。——编者

② 参看 Burgess，E：*Translation of the sūrya－Siddhānta*，*Journal of the Amer. Oriental Society*. Vol. 6(1860 年，有 1935 年复刻本)，pp. 141～498。

31. 七曜名义

汉代天文专书仅存者，有汉高祖孙淮南王刘安之《淮南子·天文训》及《史记·天官书》二种。《淮南子》列举二十八宿，并以岁星、荧惑、镇星、太白、辰星为五星。其后《前后汉书·律历志》并记及之。《史记·天官书》尚记及五星周天者之数。所谓周天之数者，谓环行一周之数也。吴竺律炎与大月氏优婆塞支谦同译《摩登伽经》[1]（公元230年）及后出之《五星行藏历》、《五星傍通秘诀》[2]，并言及五星周天之数。今与近世观察较论如下：

五星周天之数

星名	《淮南子》	《史记》	《摩登伽经》	《五星行藏历》	《五星傍通秘诀》	近世观察
岁星（木）	12年	12年	12年	12年	—	11.86年
荧惑（火）	—	—	2年	2年	2年	1.88年
镇星（土）	28年	28年	28年	29.5年	29年	29.50年
太白（金）	—	1年	1.5年	1年	1年	225日
辰星（水）	—	—	1年	1年	—	88日

《摩登伽经》不仅言五星周天之数，且举及七曜名义。

《摩登伽经》 据梁法经《众经目录》（公元594年）卷三，唐翻

---

① 本篇所举藏经，除特别说明外，并据"频伽精舍校刊本《大藏经》"。

② 据《续一切经音义》卷五、卷六引。

经沙门及学士等《众经目录》卷二,《大唐内典录》(公元 664 年)卷一、卷二、卷七,《大周刊定众经目录》卷八,《古今译经图记》卷一、卷二,《开元释教录》(公元 730 年)卷一、卷二、卷十五者,同本异出,计有五种,即:

(一)《摩邓女经》一卷,后汉安息沙门安世高译。

(二)《舍头谏经》一卷,前人译。

(三)《摩登伽经》二卷或三卷,吴沙门竺律炎,共大月氏优婆塞支谦译。

(四)《舍头谏经》一卷,晋月氏沙门竺法护(昙摩罗察 Dharmaraksa)译。

(五)《摩邓女解形中六事经》一卷,失译人名,今附东晋《录》①。

是《摩登伽经》后汉时已入中国。但安世高所译二种:《摩邓女经》系节译本,未记七曜。《舍头谏经》已经亡失,无由考证。但梁慧皎《高僧传》称:"安世高七曜五行……无不综达。"梁释僧祐《出三藏记集传》上卷第十三称:"安清字世高……七曜五行之象,……悉穷其变。"则安世高固亦通达七曜也。上述其他四种同本异出者,以竺律炎共支谦译本为较详。唐智升《开元释教录》(公元 730 年)卷二称:竺律炎以吴孙权黄龙二年庚戌(公元 230 年)于杨都(武昌)译《摩登伽》等经四部是也。

同时"七曜"已为社会所习知。《古文苑》卷十三后汉李尤《漏刻铭》称:"仰厘七曜,俯顺坤德"即其一例。今检吴译《摩登伽经》卷上末称:

"今当为汝复说七曜:日、月、荧惑、岁星、镇星、太白、辰星,是名为七,罗睺、彗星、通则为九。"

---

① 据梁法经《众经目录》(公元 594 年)卷三;唐翻经沙门及学士等《众经目录》卷二;《大唐内典录》(公元 664 年)卷一、卷二、卷七;《大周刊定众经目录》卷八;《古今译经图记》卷一、卷二;《开元释教录》(公元 730 年)卷一、卷二、卷三、卷十五;频伽精舍校刊《大藏经》本。

又吴译《摩登伽经》卷下末称：

日、月、荧惑、辰星、岁星、太白、镇星，是为七曜。

其岁星者，于十二岁始一周天。

其镇星者，于二十八岁乃一周天。

太白岁半始一周天。

荧惑二岁始一周天。

辰星一岁乃一周天。

凡岁三百六十五日，曰一周天。

月三十日乃一周天。

此是七曜周天数法。

又高齐天竺三藏那连提那舍译《大方等大集经》卷五十六，月藏分第十二，星宿摄受品第十八又称：

所言曜者，有于七种，一者日、二者月、三者荧惑、四者岁星、五者镇星、六者辰星、七者太白星。

是七曜名义至迟于黄龙二年(公元230年)输入中国。

自《摩登伽经》(公元230年译)七曜名义输入之后，七曜术普行于中国。晋袁山松至称："刘洪……作七曜术。"[①]《晋书·天文志》有"七曜"一目。陈自永定(公元557年)迄祯明(公元588年)，并用七曜历。隋唐因之。《隋书·经籍志》天文类有《摩登伽经说星图》一卷。当时于《摩登伽经》之外，尚有《星图》行世，而僧侣亦有通

① 见《后汉书·律历志》引。

日本饭岛忠夫以为刘洪之《乾象历》有月行迟疾之说，实本于西域人梵统。因《后汉书·律历志》有"永平中(58～75)梵统以史官候注考校，月行当有迟疾"之语。而宋徐铉《说文新附》称梵字出自西域，则梵统当为西域人。语见饭岛忠夫《支那古代史论》，第355～356页，日本东洋文库印本。大正十四年(1925年)。

历法者。

齐魏之际,《七曜历》亦互有修正。《魏书》卷八十四卷一百十一称:

> 以世行赵歐(赵歐撰《七曜历数算经》一卷)历,节气后辰下算。延昌中(512～515),(李)业兴乃为戊子元历上之。

时张洪、张龙祥、李业兴、卢道虔、卫洪显、胡荣、樊仲遵、张僧豫并雍州沙门统道融并上新历,乃以龙祥、业兴为主,成《正光历》[①]。

此一事也。复次则唐建中时(780～783),《符天历》亦采用《天竺七曜历》。《新五代史》卷五十八司天考云:

> 唐建中(780～783)时,术者曹士芳始变古法,以显庆五年为上元,雨水为岁首,号《符天历》。然世谓之小历,只行于民间,……民间又有万分历。

《玉海》卷九曾专举"陈七曜历"一目,《玉海》卷十称:

> 《符天历》
>
> 《崇文目》:《七曜符天历》一卷、《符天人元历》三卷、《符天九曜通元立成法》二卷、《符天行宫》一卷;《晁氏志》:《合元万分历》一卷,唐曹氏撰。历元起显庆五年庚申,盖民间所行小历也,本天竺历为法。

郑樵《通志》载《曹公小历》一卷,唐曹(士)芳撰。明焦竑《国史·经籍志》云:"《曹公小宪》一卷,李思议重注,本天竺旧法。"此为天竺历算流传中国之又一史料。日本留学僧宗叡于天平十八年(公元746年)赍回图书中有:《七曜穰灾诀》一卷、《七曜二十八宿

---

① 并参看《魏书》卷一百零七志第八律历三上,又儒林李业兴传记:公元537年,东魏侍读李业兴使梁。

历》一卷、《七曜历日》一卷，而《七曜历日》一书记及七曜胡名[1]。

时中原正盛行《七曜历》，故唐代作家时以“七曜”二字代表天文历算。如：

唐姚思廉《梁书》卷五十一称：庾曼倩，“(梁)世祖在荆州，辟为主簿，……疏注算经及《七曜历术》。”

《北史》卷八十二、《隋书》卷七十五并称：刘焯隋开皇中与“修国史，兼参议律历、……《九章算术》、《周髀》、《七曜》历书十余部。”

《北史》卷八十九、《魏书》卷九十一并称：殷绍“达《九章》、《七曜》，(魏)太武(421～451)时为算生博士。”

《南史》卷七十一称：顾越“《九章》、《七曜》，音律图纬，咸尽其精微。”

《唐律疏义》(公元653年)第九卷“玄象器物”条称：

> 诸玄象器物、天文图书、谶书、兵书、《七曜历》、太一雷公式，私家不得有，违者徒二年私习天文者亦同，其纬候及论语谶不在禁限。[2]

即是一例，以后周广顺三年(公元953年)以及宋代都有此例[3]。

《宿曜经》 唐北天竺国三藏不空(阿目佉跋折罗 Amoghavajra)译《宿曜经》，曾言及七曜之胡名、波斯名、天竺名。胡即康居。胡名则用窣利(Sulik)文[4]。俨按：《大唐贞元续开元释教录》卷上

---

① 见《日本续纪》天平十八年(公元746年)条及宗叡《书写请求法门等目录》。又巴黎图书馆敦煌写本书第2693号亦有《七曜历日》一卷。

② 见《万有文库》本《故唐律疏义》第二册，第82页或《四部丛刊三编》本，并参看《全唐文》卷四一〇，载有常衮(729～783)《禁藏天文图谶制》。据《弘简录》则大历二年(公元772年)亦有此禁令，并参看《旧唐书》卷十一。

③ 见宋《刑统》卷九。

④ 见“新疆之语言文字”，《新亚细亚杂志》，十卷三号(1935年9月)。

称：不空译《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》二卷“上卷前译，下卷后译，有序共四十纸”是也。

《宿曜经》以乾元二年（公元759年）译出，而频伽精舍校刊《大藏经》内《宿曜经》卷下“宿曜历经七曜直日历品第八”称：

> 夫七曜者，所谓日月五星，下直人间，一日一易，七日周而复始，其所用各各于事有宜有不宜者，请细详用之。忽不记得，但当问胡及波斯并五天竺人总知。尼乾子，末摩尼，常以密日持斋，亦事此日为大日。此等事持不忘，故今列诸国人呼七曜如后：
>
> 日曜，太阳：胡名密（Mir），波斯名曜·森勿（Yeh Sumbad），天竺名阿弥泥以反底耶二合（Āditya）。
>
> 月曜，太阴：胡名莫（Māq），波斯名娄祸·森勿（Douh Sumbad），天竺名苏上摩（Sōma）。
>
> 火曜，荧惑：胡名云汉（Wugān 或 Vahrām），波斯名势·森勿（Sch Sumbad），天竺名粪盎声哦啰迦盎（Amgāraka）。
>
> 水曜，辰星：胡名咥丁逸反（Tir），波斯名掣·森勿（Chehar Sumbad），天竺名部引陀（Budha）。
>
> 木曜，岁星：胡名鹘勿斯（Wrmzt 或 Hur muzd），波斯名本·森勿（Penj Sumbad），天竺名勿哩诃娑跛底丁以反（Vrhaspati）。
>
> 金曜，太白：胡名那歇（Nāgit），波斯名数·森勿（Shesh Sumbad），天竺名戍羯罗（Sukra）。
>
> 土曜，镇星：胡名枳梡（Kewât 或 Kevān）；波斯名翕·森勿（Haft Sumbad），天竺名赊乃以室析啰（Sanaiscara）。

就中七曜胡名、天竺名时有异译。如伯希和、羽田亨《敦煌遗书》中《七曜历日》一卷，内七曜胡名作：密、莫空、云汉、嘀日、温没斯、那

溢、鸡缓。刘复《敦煌掇琐》八九(3403)雍熙三年《历书》及同书九二(3081)《七曜吉凶避忌条项》(残)内作:蜜(日)、莫(月)、云汉(火)、嘀(水)、温没斯(木)、那颉(金)、鸡缓(土)及蜜、莫、云汉、嘀、郁没斯、那颉、鸡换。

唐义净译《佛说大孔雀呪王经》(公元705年)卷下,七曜天竺名作:阿姪底、苏摩、鸯伽迦、部陀、苾栗诃飒钵底、束羯罗、珊尼折拶。

波斯名亦有异译,如:《宿曜经》,《华夷译语》异译如:

《宿曜经》:	曜,	娄祸,	势,	掣,	本,	数,	翕。
《华夷译语》:	夜克,	都,	岁,	义哈克,	潘知,	舍石,	哈夫忒
	(Yeh),	(Douh),	(Sch),	(Chehar),	(Penj),	(Shesh),	(Haft)。

至以密日持斋,事此日为大日,则隋唐以后尚复盛行。巴黎图书馆敦煌写本书第2705号有:《华文历书》一卷,当为十世纪时物,惟存十月后半月,及十一、十二两全月,谓星期日曰密,用朱色书①。

今敦煌千佛洞所出若干写本历书,就中同光四年(公元926年)历、显德六年(公元959年)历、雍熙三年(公元986年)历、淳化四年(公元993年)历,其置闰及每月甲子、大建、小建并与五代历及宋历互异,而日曜日均著一"蜜"字。又《太平广记》引孙光宪《北梦琐言》载伪蜀后主王衍时司天监胡秀林进历,移闰在丙戌年(公元926年)正月。按丙戌(公元926年)即同光四年,敦煌千佛洞同

① 见法国伯希和编,吴江陆翔译"巴黎图书馆敦煌写本书目",《国立北京图书馆馆刊》,第七卷,第六号,1933年11、12月,北京。

光四年历正闰正月，则胡秀林亦用七曜历[1]。

其见于记载者，则《通志》卷六十八艺文略汇记《七曜历》三十部六十七卷：

"《七曜本起》三卷，后魏甄(鸾)叔遵撰，

《七曜小甲子元历》一卷，

《七曜历术》一卷，

《七曜历法》一卷，

《七曜历算》二卷，

《七曜要术》一卷，

陈天嘉(560～565)《七曜历》七卷，

陈永定(557～559)《七曜历》四卷，

《推七曜历》一卷，

陈天康二年(公元566年)《七曜历》一卷，

陈光大元年(567～568)《七曜历》二卷，

陈太建年(569～582)《七曜历》十三卷，

陈至德年(583～586)《七曜历》二卷，

陈祯明年(587～588)《七曜历》二卷，

(隋)开皇(581～600)《七曜年历》一卷，

仁寿二年(公元602年)《七曜历》一卷，

《七曜历经》四卷，张宾撰，

---

① 见王重民："敦煌本历日之研究"，《东方杂志》第三十四卷，第九号(1937年5月)，第13～20页。

该文曾举下列四历日，与五代历及宋历，校其异同：

(一)大唐同光四年(公元926年)具注历(Pelliot 2347)，巴黎藏，并见《敦煌掇琐》八十八。

(二)显德六年己未岁(公元959年)具注历并序(Pelliot 2623)，巴黎藏。

(三)雍熙三年丙戌岁(公元986年)具注历日并序(Pelliot 3403)，巴黎藏，并见《敦煌掇琐》八十九。

(四)淳化四年癸巳岁(公元993年)具注历日(Pelliot 4507)，巴黎藏。

《七曜历数算经》一卷，赵敏撰，

《七曜历疏》一卷，(魏)李业兴撰，

《七曜义疏》一卷，李业兴撰，

《七曜术算》一卷，甄鸾撰，

《七曜杂术》二卷，刘孝孙撰，

《七曜历疏》五卷，太史令张胄元撰，

《七曜符天历》一卷，唐曹士芳撰，

《七曜符天人元历》一卷，曹士芳撰，

《人天定分经》一卷，

《地轮七曜》一卷，吕佐周撰，

《七曜气神歌诀》一卷，庄守德撰，

《七曜气神歌诀》一卷，

《七政长历》三卷。”

唐僧一行亦治七曜术，著有《大日经疏》二十卷、《七曜星辰别行法》一卷、《梵天火罗九曜》一卷(此书曾见《日本宝物集》引)。

《宋史·艺文志》有：文殊《七曜经》一卷、钱明逸《西国七曜历》一卷。

32. 九执名义

九曜名义，曾于吴黄龙二年(公元230年)竺律炎及支谦同译之《摩登伽经》一度述及，盖日、月、荧惑、岁星、镇星、太白、辰星七曜其外，益以罗睺、彗星，则成九曜。案九执实与九曜同义，执者执持之义，随逐诸曜日时，而不相离也[1]。僧一行《大日经疏》[2] 四称："执有九种，即有日、月、水、火、木、金、土、七曜，与罗睺、计都，合为九执。罗睺是交会蚀神，计都正翻为旗，旗星即彗星也。除此二执之外，其余七曜，相次直日，其性类有善恶，如《梵厉》中说。"[3]《续一切经音义》卷六于《最胜无比大威德金轮佛顶炽盛光陀罗尼经》内"罗睺"(Rāhu)注称："今云罗睺即梵语也，或云摆护，此云暗障，能障日月之光，即暗曜也。"又"计都"(Ketu)注称："亦梵语，或云鸡兜，或云计睹，此云蚀神，亦暗曜也。案罗睺、计都，常隐不见，过日月行次即蚀，亦名达坠二曜也。"

---

① 见《佛学大辞典》第164页，上海医学书局(1921年)。

② 《大日经》本名大毘卢遮那《成佛神变加持经》。
《大日经疏》，唐善无畏三藏为玄宗皇帝讲说本经，一行阿阇梨记之。日本现存二种：
(一)日本弘法携回者二十卷称《大日经疏》，(二)日本慈觉携回者十四卷称《大日经义释》。

③ 见《佛学大辞典》第164页，上海医学书局(1921年)。

佛典记及九曜者有：

《大孔雀明王经》，

《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》，

《佛说炽感光大威德消灾吉祥陀罗尼经》，而以前二种所记为尤详。

《大孔雀明王经》(Mahā－māyuri vidyā－rājñi)，据梁僧祐《出三藏记集》卷二，隋法经《众经目录》(公元 594 年)卷一，翻经沙门及学士等《众经目录》卷一、二，《大唐内典录》(公元 664 年)卷三、四、六、九，《大周刊定众经目录》卷五，唐释靖迈《古今译经图记》卷二，《开元释教录》(公元 730 年)卷三、四、六、九、十四、十八、十九，《开元释教录略出》卷二，《大唐贞元续开元释教录》卷上、卷下，知《大孔雀明王经》古今共有九种译本如下：

(一)《大孔雀王神呪经》一卷或二卷，

东晋元皇帝时(317～336)，一作咸康年(335～342)，西域龟兹沙门帛·尸利密多罗(Po Srimitra，译曰吉友)译。

(二)《孔雀王杂神呪》一卷，

同上，帛·尸利密多罗译。

(三)《孔雀王呪经》一卷，

东晋孝武帝时(373～396)，西域沙门昙无兰(Dharmaranya，译曰法正)译。

(四)《孔雀王呪经》一卷，

姚秦龟兹三藏鸠摩罗什(Kumarajira，译曰童寿)，以弘治四年壬寅(公元 342 年)至十四年壬子(公元 352 年)译《大品》、《小品》、《金刚》等经七十四部，三百八十余卷，《孔雀王呪经》亦在其中。

(五)《大金色孔雀王呪经》一卷，

失译人名，今附秦《录》。

(六)《佛说大金色王呪经》一卷，

失译人名，今附秦《录》。

(七)《孔雀王呪经》二卷，

梁扶南三藏僧伽婆罗(Samghāpāla，译曰众养)，于梁天监十五年(公元516年)在杨都占云馆及正观寺译。

(八)《佛说大孔雀呪王经》三卷，

唐三藏法师义净于神龙元年(公元705年)在东都内道场译。

(九)《佛母大孔雀明王经》三卷，

唐大兴善寺三藏沙门不空译。据《大唐贞元续开元释教录》卷下记大历七年(公元772年)不空奏《大孔雀明王经》三卷为玄宗、肃宗、代宗大历七年(713～772)以来翻译经论之一。

就中义净、不空译本曾记及九执，义净采音译，不空采意译，今将两译对照附列如下：

义净译《佛说大孔雀呪王经》卷下	不空译《佛母大孔雀明王经》卷下
"阿难陀汝当忆识有九种执持天神名号，此诸天神于二十八宿巡行之时，能令昼夜时有增减，亦令世间丰俭苦乐，预表其相，其名曰： 阿婓底(日)、苏摩(月)、苾栗诃一颯钵底(木)、束羯摆(金)、珊尼折摆(土)、耆伽迦(火)、部陀(水)、曷逻虎(罗睺)、鸡睹(彗)。 此九执持天神有大威力，彼亦以此大孔雀呪王常拥护我某甲并诸眷属寿命百年 星有二十八　七各居四方　执星复有七　加日月成九　总有三十七　勇猛大威神　出没照世间　示其善恶相　与世为增减　有势大光明　各以清静心于此呪随喜。"	"阿难陀汝当念有九种执曜名号，此执曜天神巡行二十八宿之时，能令昼夜时分增减，世间所有丰俭苦乐，皆先表其相，其名曰： 日、月及荧惑，辰、岁并太白，镇及罗睺、彗，此皆名执曜 此等九曜有大威力，能示吉凶，彼亦以此佛母大孔雀明王常拥护我'某甲'，并诸眷属，寿命百年，复以伽陀赞诸星宿。 宿有二十八　四方各居七　执曜复有七　加日月为九　总成三十七　勇猛大威神　出没照世间　示其善恶相　令昼夜增减　有势大光明　皆以清静心于此明随喜。"

其次，唐代失译《佛说大威德金轮佛顶炽盛光如来消除一切灾

难陀罗尼经》及不空译《佛说炽盛光大威德消灾吉祥陀罗尼经》，亦言及九曜。今亦将两译对照附列如下：

唐代失译《陀罗尼经》	不空译《陀罗尼经》
“尔时释迦牟尼佛，住净居天宫，告文殊师利菩萨摩诃萨，及诸四众，八都游空大天九执，七曜，十二宫神，二十八宿，日月诸宿，……”	“尔时释迦牟尼佛，在净居天宫，告诸众曜游空天众，九执大天，及二十八宿，十二宫神，一切圣众，……”

唐代失译本《陀罗尼经》且于九曜真言，附有九曜汉梵译名。

杨景风于广德二年（公元764年）注《宿曜经》卷上第三称：“景风曰：案太史有旧翻九执宿命占……。”瞿昙悉达《开元占经》卷一百〇四称：天竺《九执历经》，即写《九执历》也，《新唐书》、《玉海》并称开元六年（公元718年）诏瞿昙悉达译《九执历》，时《麟德历》尚未废也。

与《九执历》同时输入者为西域笔算，《开元占经》卷一百〇四，举“算字法样”称：

“一字 二字 三字 四字 五字 六字 七字 八字 九字 点
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

右天竺算法，用上件九个字乘除，其字皆一举□而成，凡数至十，进入前位，每空位处，恒安一点，‘有间咸记，无由辄错’，连算便眼，趁须先及。”

此与《新唐书》卷二十八下历志所称“《九执历》者，出于西域，……其算皆以字书，不用筹策”同为一事，足证笔算由《九执历》连带输入。

南宋张世南《游宦纪闻》卷八称：“高丽国有《九执历》。”《明史·历志》正统十三年（1448年）条称：“回回科推验西域九执历法。”清乾隆敕撰之《钦定协纪办方》书中载及“罗睺”及“计都”事。则《九执历》于唐代以后，在朝鲜，在明清两代，尚被参用也。

33. 三 等 数 法

中国古代大数记数法，在万以上有亿、兆、经(京)、垓(姟、晐)、秭、选、载、极、诸字。孔注《周礼》：数者十、百、千、万、亿、兆也。《太平御览》卷七百五十及《一切经音义》卷二十七引《风俗通》云：

> 十十谓之百，十百谓之千，十千谓之万，十万谓之亿，十亿谓之兆，十兆谓之经(京)，十经(京)谓之垓(姟)，十垓谓之秭，十秭谓之选，十选谓之载，十载谓之极。

是《风俗通》以十进位矣。《逸周书·世俘篇》："凡武王俘商旧玉亿有百万。"王念孙《读书杂志》卷一之二据钞本《北堂书钞》衣冠部二，《艺文类聚》宝部上，《太平御览》珍宝部三，《初学记》器物部佩下，并作"亿有八万"，以证古代"十万为亿"。颜师古于注《前汉书》亦称十万曰亿，此古说也。至《礼记·内则》"降德于兆民"疏引："《算法》：亿之数有大小二法，小数以十为等，十万为亿；大数以万为等，万万为亿也。"故当时注经，二法并用。如后汉郑玄注《诗经》楚茨，假乐，及孔传《尚书》五子之歌，皆云"十万曰亿，十亿曰兆。"而郑玄注《礼记·内则》又作"万亿曰兆"，即其例也。亦有专用万进者，如：晋杜预注《左传》："万万曰亿，万亿曰兆 。"三国吴韦昭注《国语》："万万兆曰垓。"因万兆曰京，万京曰垓，故云万万兆曰垓也。《前汉书·律历志》第一下称："一亿三千四百八万二千二百九

十七”，“一亿二千二百二万九千六百五分”，及《孙子算经》卷上称：“五亿一千六百五十六万六百五十二”，“四十六亿四千九百四万五千八百六十八”，以万万为亿，亦为万进，是在汉代以后万以上有十进与万进二法矣。

其在《算经十书》中《数术记遗》及甄鸾《五经算术》卷上并称：

黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。十等者，亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。

三等者，谓上、中、下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。

《算经十书》中《孙子算经》卷上又称：

凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京，万万京曰垓，万万垓曰秭，万万秭曰壤，万万壤曰沟，万万沟曰涧，万万涧曰正，万万正曰载。

《一切经音义》卷一亦称历算中数万万变名。是在南北朝时，万以上有十进、万万进、倍进三法矣。

三等数法之说，在甄鸾撰注算经之前，因甄鸾曾注董泉《三等数》。《日本国见在书目》(《古逸丛书》之十九)尚有《三等数》一卷。唐费长房《历代三宝记》(公元597年)卷第十二，《大唐内典录》卷五引隋刘凭[1]，《外内傍通比校数法序》亦称“华(一作东)夏数法，自有三等之差”是也。

至佛典输入之后，又有百进之说。唐慧琳《一切经音义》卷八引：“《佛本行经》。一百千是名俱胝(Koti)，百俱胝名阿由多(Ayu-

① 刘凭《法苑珠林》卷一百，作刘凭同，《续高僧传》作刘冯。

ta)，此当千亿，百阿由多名那由他(Niyuta)，此当万亿”是也。唐慧琳《一切经音义》卷二十二注《华严经》卷四十五阿僧祇品称：“又案此方《黄帝算法》总有二十三数，谓：一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。从万已去，有三等数法，其下者十十变之，中者百百变之，上者倍变之。今案此经十、百、千、万、十十变之；从万至亿，百倍变之；从亿已去，皆以能数量为一数，复数至与能数量等。”又同书卷二十五引：“依经说，亿有三种数法，若依下数，十万为亿，……若依上数，万万为亿……。”又同书卷二十七引：“《竿经》：黄帝为数，法有十等，谓亿、兆、京、垓、壤、秭、沟、涧、正、载。及其用也有三，谓上、中、下。下数十万曰亿，中数百万曰亿，上数万万曰亿。”《续一切经音义》承《一切经音义》旧说，于卷二注称：“或十万为一洛又，百万为一洛又，或万万为一洛又。依此方《孙子算经》云：十十为百，十百为千，十千为万。自万至亿有三等，上中下数变之也，依《黄帝算经》总有二十三数，谓一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载也。亦从万已去，有三等数，谓其下十十变之，中者百百变之，上者亿亿变之。……”其卷三注又称：“案《黄帝算经》有二十三数，自万已去，皆有上中下三等数也。谓万、亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载也。下数十十变之，中数百百变之，上数亿亿变之。……”是唐代又有十进、百进、倍进之说矣。

俨案十进、万进为吾国旧法，至南北朝之十进、万万进、倍进及唐代之十进、百进、倍进，则多少受佛典之影响。因《华严经》始译于晋(398～421)，再译于唐(公元 699 年)，所举数法为“倍倍变之”；《俱舍论》始译于陈(公元 567 年)，再译于唐(公元 651 年)，所举数法为“十十变之，百百变之”。而甄鸾《五经算术》及《数术记遗》、《孙子算经》并在《华严经》、《俱舍论》二书始译之后也。

《大方广佛华严经》六十卷，东晋北天竺三藏佛驮跋陀罗(Buddhabhadra，359～429)于义熙十四年(公元418年)于道场寺出，至宋永初二年校讫(公元421年)。又《大方广佛华严经》八十卷，唐于阗国三藏实叉难陀(Siksānanda)奉诏译，于圣历二年(公元699年)译成。前者称为晋译本，后者称为唐译本。唐译本卷四十五、卷六十五并称："一百洛叉(Laksa)为一俱胝(Koti)，俱胝、俱胝为一阿庾多(Ayuta)，阿庾多、阿庾多为一那由他(Niyuta)。……"盖倍倍变也。其晋译、唐译名义异同之处如下：

(公元418年)晋译《华严经》卷二十九	唐译《华严经》卷四十五	唐译《华严经》卷六十五
拘梨	俱胝(Koti)	俱胝
不变	阿庾多(Ayuta)	阿庾多
那由他	那由他(Niyuta)	那由他
鞞波逻	频波罗(Bimbara)	—
作	矜羯罗(Kainkara)	—
来	阿伽罗	—
胜	最胜	—
复次	摩婆罗	—
阿婆罗	阿婆罗	—
得胜	多婆罗	—
分界	界分	—
充满	普摩	—
量	祢摩	—
解	阿婆钤	—
此解	弥伽婆	—
离欲	毗睹伽	—
舍	毗伽婆	—
聚	僧罗摩	—

通	毗萨罗	—
颊申	毗矮婆	—
纲	毗盛伽	—
众流	毗素陀	—
出	毗婆诃	—
分	毗薄底	—
分别	毗佉担	—
称	称量	—
持	持	—
不颠倒	异路	—
不幡	颠倒	—
正	三末耶	—
慧	毗睹罗	—
第一	奚娑罗	—
觉	伺察	—
毗遮妒	周广	—
极高	高出	—
妙	最妙	—
逻婆	泥罗婆	—
诃梨婆	诃理婆	—
解脱	一动	—
黄	诃理蒲	—
诃梨那	诃理三	—
因	奚鲁伽	—
贤觉	达摩步陀	—
明相	诃鲁那	—
摩楼陀	摩鲁陀	—
忍	忏慕陀	—

枝	医拶陀	—
摩楼摩	摩鲁摩	—
等	调伏	—
离疑	离憍慢	—
种	不动	—
不放逸	极量	—
摩多罗	阿么怛罗	—
动	勃么怛罗	—
到	伽么怛罗	—
说	那么怛罗	—
白	奚么怛罗	—
了别	鞞么怛罗	—
究竟	钵么怛罗	—
清凉	尸婆么怛罗	—
阿罗	翳罗	—
潮	薜罗	—
汕	涕罗	—
祇逻	偈罗	—
味	窣步罗	—
泥逻	泥罗	—
戏	计罗	—
斯罗	细罗	—
聚沫	睥罗	—
弥罗	谜罗	—
坚固	婆拶荼	—
风	谜鲁陀	—
满	契鲁陀	—
不可称量	摩睹罗	—

根	婆母罗	—
微细	阿野婆	—
莲华	迦么罗	—
摩伽婆	摩伽婆	—
不可度	阿怛罗	—
醯楼	醯鲁耶	—
语	薜鲁婆	—
劫	羯罗波	—
婆婆	诃婆婆	—
间	毗婆(上声)罗	—
无间	那婆罗	—
离垢	摩拶罗	—
实胜	婆婆罗	—
弥罗覆	迷拶普	—
遮摩罗	者么罗	—
法	驮么罗	—
波罗摩驮	钵拶么陀	—
决定	毗伽摩	—
流转	乌波跋多	—
广说	演说	—
无尽	无尽	—
等真实	出生	—
无我	无我	—
阿槃陀	阿晔多	—
青莲华	青莲华	优钵罗
—	钵头摩	波头摩
数	僧祇	僧祇
趣	趣	趣

受	至	谕
阿僧祇	阿僧祇	无数
阿僧祇转	阿僧祇转	无数转
无量	无量	无量
无量转	无量转	无量转
无分齐	无边	无边
无分齐转	无边转	无边转
无周遍	无等	无等
无周遍转	无等转	无等转
无数	不可数	不可数
无数转	不可数转	不可数转
不可称	不可称	不可称
不可称转	不可称转	不可称转
不可思议	不可思	不可思
不可思议转	不可思转	不可思转
不可量	不可量	不可量
不可量转	不可量转	不可量转
不可说	不可说	不可说
不可说转	不可说转	不可说转
不可说转转	不可说不可说	不可说不可说
	不可说不可说转	不可说不可说转

《阿毗达磨俱舍释论》二十二卷，婆薮盘豆(Vasubandhu)造，陈天竺三藏真谛(Paramartha)于广州译，陈光大元年(公元567年)十二月二十五日译成。又《阿毗达磨俱舍论》三十卷，尊者世亲(Vasubandhu)造，唐三藏法师玄奘永徽二年(公元651年)五月十日于大慈恩寺翻经院译，至五年(公元654年)七月二十七日毕，沙

门元瑜笔受[1]。前者称为陈译本，后者称为唐译本，并兼十进及百进，例如十洛沙为阿底洛沙，百洛沙为俱胝，余仿此。其陈译、唐译和宋法云《翻译名义》集引《俱舍论》(五十二数)名义异同之处如下：

陈译《俱舍论》卷九	唐译《俱舍论》卷十二	法云，《翻译名义集》引《俱舍论》(五十二数)
一	一	一
十	十	十
百	百	百
千	千	千
万	万	万
洛沙(Laksa)	洛叉	洛叉(亿也)
阿底洛沙	度洛叉	度洛叉(兆也)
俱胝(Koti)	俱胝	俱胝(京也)
末持诃(Madhya)	末陀	末陀(秭也)
阿由多(Ayuta)	阿庾多	阿庾多(垓也)
摩阿由多	大阿庾多	大阿庾多(壤也)
那由多(Niyuta)	那庾多	那庾多(沟)
摩阿那由多	大那庾多	大那庾多(涧)
婆由多(Parayuta)	钵罗庾多	钵罗庾多(正)
摩阿婆由多	大钵罗庾多	大钵罗庾多(载)
郁僧伽(Kainkara)	矜羯罗	[或甄迦罗]
摩剡僧伽	大矜羯罗	—
波诃那(Bimbara)	频跋罗	[或频婆罗]
摩阿婆诃那	大频跋罗	—

[1] 见《大唐内典录》卷七及《开元释教录》卷八。

知知婆(Aksobhya)	阿刍婆	[或阿阅婆]
摩阿知知婆	大阿刍婆	—
醯兜(Vimvara)	毗婆诃	—
摩阿醯兜	大毗婆诃	—
柯罗婆(Utsanya)	嗢蹭伽	—
摩阿柯罗婆	大嗢蹭伽	—
因陀(Babuta)	婆喝那	—
摩头陀	大婆喝那	—
婆末多	地致婆	—
摩阿婆末多	大地致婆	—
伽知	醯都	—
摩阿伽知	大醯都	
纽婆	羯腊婆	[或羯膊缚]
摩阿纽婆	大羯腊婆	—
物陀	印达罗	—
摩阿物陀	大印达罗	—
婆罗	三摩钵就	—
摩阿婆罗	大三摩钵就	—
社那	揭底	—
摩阿社那	大揭底	—
毗休多	拈筏罗阇	—
摩阿毗休多	大拈筏罗阇	—
婆洛沙	姥达罗	—
摩阿婆洛沙	大姥达罗	—
阿僧祇	跋蓝	—
—	大跋蓝	—
—	珊若	—
—	大珊若	—

—	毗步多	—
—	大毗步多	—
—	跋逻搀	—
—	大跋逻搀	—
—	阿僧企耶	—

下至元代，朱世杰于《算学启蒙》(1299 年)大数记法，于载以上，有“极”、“恒河沙”、“阿僧祇”、“那由他”、“不可思议”、“无量数”、六名，虽于原义无当，盖亦取自佛典也。

34. 天竺小数记法

天竺小数记法亦于元魏以后输入中国，其说数见于《大般若波罗密多经》、《大波罗密多经》、《大方广佛华严经》及《大宝积经》，而以《大宝积经》所记为尤详。从亿以上，亦“倍倍变之”。《大宝积经》据《开元释教录》卷七、八、九，则东魏中天竺优禅尼国王子月婆首那(Upasunya 陈云高空)于兴和三年(公元 541 年)于骠骑大将军左仆射内侍中司徒公孙腾第译《摩诃迦叶经》二卷，今编入《大宝积经》中。又北周闍那崛多(Jinagupta)，天和六年(公元 571 年)译三卷。至唐南天竺人菩提流支(Bodhiruci 唐言法希)于神龙二年(公元 706 年)创首，先天二年(公元 713 年)功毕，译《大宝积经》一百二十卷。唐于阗国沙门实叉难陀(Siksānanda 唐云学喜)于久视元年(公元 700 年)于西京清祥寺、东都授记寺译《大宝积经》等十九部，唐玄奘亦译出数卷。

今将各译本次序胪列后方，以见《大宝积经》中小数记法，虽各译本所记，互有详略；其次序或未能确定，盖亦采“倍倍变之”之记法也。

《大宝积经》：

卷八十八、八十九， 元魏月婆首那译。 （公元 541 年）	卷八十一， 北周闍那崛多译。 （公元 571 年）	卷二、十七、十九、二十、九十五， 唐菩提流支译； （706～713） 卷六十， 唐实叉难陀译； 卷三十七、四十六， 唐玄奘译。
百分	百分	百分
千分	千分	千分
百千分	百千分	百千分
亿分	俱致分	拘胝分
百亿分	百俱致分	百拘胝分
千亿分	千俱致分	千拘胝分
百千亿分	百千俱致分	百千拘胝分
那由他分	那由他分	那由他分
百那由他分	—	—
千那由他分	—	—
百千那由他分	—	—
亿那由他分	—	—
百亿那由他分	—	—
千亿那由他分	—	—
百千亿那由他分	—	—
阿僧祇分	—	—
—	—	僧佉分
—	哥罗分	迦罗分，歌罗分
—	—	伽拿那分
—	—	沤波摩分，乌波摩分

—	邬波尼沙陀分	乌波尼杀昙分
算分	算分	
数分	数分	
譬喻分	譬喻分	
不可数分		

下至元代，朱世杰于《算学启蒙》(1299 年)卷首，录小数之类有“一、分、毫、丝、忽、微、纤、沙；万万尘曰沙，万万埃曰尘，……”之语，其一至沙为十进；沙、尘、埃、渺、模糊、逡巡、须臾、瞬息、弹指、刹那、六德、虚、空、清、净、等十五名，皆从万万进，则又采甄鸾中数之法也。

其后《推用算法》、《捷用算法》及王文素《算学宝鉴》(1524 年)并用此法。

35. 瞿昙氏历

唐广德二年(公元764年),杨景风注《文殊师利菩萨及诸仙所说吉凶时日善恶宿曜经》卷上第三称:

景风曰:凡欲知五星所在者,$_1$

天竺历术,推知何宿,具知也,$_2$

今有迦叶氏(迦叶波 Kāsyapa,译言饮光)①,瞿昙氏(瞿昙罗 Gautama,译言地最胜)②,拘摩罗(亦作鸠摩罗 Kumāra,译言童子)③ 等三家天竺历$_3$

(并)掌在太史阁,然今之用,多瞿昙氏历,与本$_4$

(术)相参$_5$

(供)奉耳$_6$(此六行据碛砂版《大藏经》校过。)

按《新唐书》卷二十九历志略称:德宗时(780~804)诏司天徐承嗣与夏官正杨景风等杂《麟德》、《大衍》之旨,治新历。建中四年(公元783年)历成,名曰《建中正元历》,以兴元元年(公元784年)

---

① 《一切经音义》:迦叶具云迦叶波,此云饮光也,天竺国之大姓也。

② 《姓纂》称瞿昙为西国姓名。《一切经音义》卷二十一,瞿昙氏具云瞿答摩,言瞿者此云地也,答摩最胜也。谓除天以外,在地人类,此族最胜,故云地最胜也。……

③ 见《西域记》十。

颁行，迄元和元年(公元806年)。

杨景风所举迦叶氏、拘摩罗、瞿昙氏在唐代事迹可考者如下：

迦叶孝威 《旧唐书》卷三十三李淳风《麟德甲子元历》(公元665年)内"求日月蚀亏初及复末时刻术"称："迦叶孝威等天竺法，先依日月行迟疾度，以推入交远近……此等与中国法数稍殊，自外梗概相似也。"①

俱摩罗 即杨景风所称之拘摩罗。《旧唐书》卷三十四，"开元大衍历经"，求日月蚀亏初复末，注称："按天竺僧俱摩罗所传断日蚀法，……理多烦碎，略陈梗概，不复具详者。"②

瞿昙罗 瞿昙罗官司天台太史令凡三十余年，曾于麟德二年(公元665年)上《经纬历》，神功二年(公元698年)上《光宅历》。

按《新唐书》卷二十六历志称："高宗时(650～683)《戊寅历》益疏，(李)淳风作《甲子元历》以献，诏太史起麟德二年(公元665年)颁用，谓之《麟德历》，……当时以为密，与太史令瞿昙罗所上《经纬历》参行……神功二年(公元698年)……命瞿昙罗作《光宅历》，将用之，三年(公元699年)罢作《光宅历》，复行夏时，终开元十六年(公元728年)。"而《旧唐书》卷三十二律历志亦称："天后时瞿昙罗造《光宅历》。"《旧唐书》卷四十七经籍志有："《大唐光宅历草》十卷"，《新唐书》卷五十九艺文志，作南宫说《光宅历草》十卷。

《新唐书》卷四十七百官志称："司天台，监一人，正三品；少监二人，正四品；……开元二年(公元714年)复曰太史监，改令为监。"故麟德二年(公元665年)尚称太史令瞿昙罗。又按百官志，司

① 见《旧唐书》卷三十三，志第十三，历二，据百衲本《旧唐书》第九册《唐志》十三，第17～18页。

② 见《旧唐书》卷三十四志第十四，历三。据百衲本《旧唐书》第九册，唐志十四，第20页。

天台仅有太史令一人，则瞿昙罗实为之长，自麟德二年（公元 665 年）至神功二年（公元 698 年），服官凡三十余年矣。

瞿昙罗《玉海》卷十误作瞿昙跃。

瞿昙悉达（Gautama Sidhârta）

《开元占经》卷一称：唐景云三年（公元 712 年），诏银青光禄大夫行太史令瞿昙悉达、正议大夫行太史令李仙宗、试太史令殷知易等，修浑仪。先天二年（公元 713 年）仪成。按开元二年方改令为监，故先天二年（公元 713 年）尚称太史令瞿昙悉达。

《玉海》称：开元六年（公元 718 年），诏瞿昙悉达译《九执历》。《新唐书》卷二十八下历志亦称："《九执历》者，出于西域，开元六年（公元 718 年），诏太史监瞿昙悉达译之，……其算皆以字书，不用筹策，其术繁碎，或幸而中，不可以为法，名数诡异，初莫之辩也。陈玄景等持以惑当时，谓一行写其术未尽，妄矣。"按开元二年（公元 714 年），已改令为监，故称太史监，时瞿昙氏尚任司天台长官也。

大唐《开元占经》卷一百四于"天竺九执历经"称："臣等谨按《九执历法》，梵天所造，五通仙人承习传授。"亦明言其出自西域也。《九执历》所传九曜，乃合日、月、五行星及假定之龙首（Rāhu）、龙尾（Ketu）二星而成，后之二星即《摩登伽经》（公元 230 年译）之罗喉、彗星。《大日经疏》四："九执者，梵音钅乇栗何（Graha），是执持义。"天竺以此九星为"九种执持天神名号"，"此九执持天神有大威力"[1] 是也。

《开元占经》据《新唐书·艺文志》作："大唐《开元占经》一百一十卷[瞿昙悉达集。"《宋史·艺文志》作瞿昙悉达《开元占经》四卷。

---

① 见义净译（公元 705 年）《佛说大孔雀王呪经》卷下及不空《佛母大孔雀明王经》卷下。

《玉海》引《唐志》亦作一百一十卷。又注称："《国史志》四卷，《崇文目》三卷，一本一百二十卷。"现行本印作一百二十卷。

瞿昙撰 《新唐书》卷二十七上历志称："开元九年（公元721年），《麟德历》署日蚀比不效，诏僧一行作新历，推大衍数立术以应之，较经史所书气朔日名宿度，可考者皆合。十五年（公元727年）草成而一行卒（683～727），诏特进张说与历官陈玄景等，次为《历术》七篇、《略例》一篇、《历议》十篇。玄宗顾访者则称制旨。明年（公元728年），说表上之[1]，起十七年（公元729年），颁于有司。时善算瞿昙撰[2]者，怨不得预改历事。二十一年（公元733年），与玄景奏'《大衍》写《九执历》，其术未尽'，太子右司御率南宫说亦非之。诏待御史李麟、太史令桓执圭，较灵台《候薄》，《大衍》十得七八，《麟德》才三四，《九执》一二焉，乃罪（南宫）说等……"。《旧唐书》志十六天文下："（代宗）上元二年（公元761年）七月癸未朔，日有蚀之，大星皆见。司天秋官正瞿昙撰奏曰。"《旧唐书》志卷十六天文下，《唐会要》卷四十四并称"宝应元年（公元762年）六月九日，司天少监瞿昙撰奏"，云云，即瞿昙撰在此时尚服官司天台也。

瞿昙谦 《旧唐书·经籍志》题《大唐甲子元辰历》，《新唐书》、《通志》、《玉海》并称：《唐甲子元辰历》一卷，瞿昙谦撰，或以为瞿昙谦即瞿昙撰[3]。

瞿昙晏 《通志》氏族略五称："瞿昙撰子瞿昙晏任冬官正。"

---

① 此据《新唐书》卷二十七上志第十七上历志并参看《玉海》卷十"唐古今历书"条引《会典》，及《四部丛刊》本《唐文粹》卷九十四内："张说大衍历序"及《旧唐书》卷八，本纪八。

② 《玉海》卷十引此文注称："一作谦，宗正丞。"

③ 见桑原骘藏撰，何健民译，"隋唐时代西域人华化考"，国立武汉大学《文哲季刊》五卷三号，1936年，第680～686页。

附：古代三角函数表

开元六年（公元 718 年），瞿昙悉达译《九执历》（见《开元占经》），内有“推月间量命”，为中国古书上最早记载的三角函数表（正弦函数表）[1]，原文如下：

“推月间量命

段法　凡一段管三度四十五分，每八段管一相，总有二十四段，用管三相，其段下侧注者，是积段并成之数。

第一段	二百二十五。	第二段	二百二十四，并四百四十九。
第三段	二百二十二，并六百七十一。	第四段	二百一十九，并八百九十。
第五段	二百一十五，并一千一百五。	第六段	二百十，并一千三百一十五。
第七段	二百五，并一千五百二十。	第八段	一百九十九，并一千七百一十九。
第九段	一百九十一，并一千九百一十。	第十段	一百八十三，并二千九十三。
第十一段	一百七十四，并二千二百六十七。	第十二段	一百六十四，并二千四百三十一。
第十三段	一百五十四，并二千五百八十五。	第十四段	一百四十三，并二千七百二十八。
第十五段	一百三十一，并二千八百五十九。	第十六段	一百一十九，并二千九百七十八。

[1] 见日本藪内清《隋唐历法之研究》，第六章：九执历之研究（第 154 页），日本东京三省堂出版，昭和十九年（1944 年）。

第十七段 一百六，并三千八十四。

第十八段 九十三，并三千一百七十七。

第十九段 七十九，并三千二百五十六。

第二十段 六十五，并三千三百二十一。

第廿一段 五十一，并三千三百七十二。

第廿二段 三十七，并三千四百九。

第廿三段 二十二，并三千四百三十一。

第廿四段 七，并三千四百三十八。”

即：

（段数）	角度	段法	（差数）
（一）	3°45′	225	
			224
（二）	7°30′	449	
			222
（三）	11°15′	671	
			219
（四）	15°	890	
			215
（五）	18°45′	1105	
			210
（六）	22°30′	1315	
			205
（七）	26°15′	1520	
			199
（八）	30°	1719	
			191
（九）	33°45′	1910	
			183
（十）	37°30′	2093	
			174
（十一）	41°15′	2267	
			164
（十二）	45°	2431	
			154
（十三）	48°45′	2585	
			143
（十四）	52°30′	2728	
			131
（十五）	56°15′	2859	
			119
（十六）	60°	2978	
			106
（十七）	63°45′	3084	
			93
（十八）	67°30′	3177	
			79
（十九）	71°15′	3256	
			65
（二十）	75°	3321	
			51
（二十一）	78°45′	3372	
			37
（二十二）	82°30′	3409	
			22
（二十三）	86°15′	3431	
			7
（二十四）	90°	3438	

由此说明，当时印度历算家，曾以一象限为九十度，每度为六

十分，并将一象限分为三相，每相为三十度，内分八段。如此每段为三度四十五分或二百二十五分（因$\frac{90°}{24}=3°45'=225'$），而每象限有二十四段。

另假定第一段三度四十五分，对角线（勾）之值为225（内带弦或半径的分母，以后各段都带此分母）①，因此形成各角度的正弦数值如附表所记。其中各值与现在三角函数表实际数值比较虽有出入，尚不超过0.0002，即：

$\sin 3°45'$ $\frac{225}{3438}=0.06544$ 比较实际数值 $0.06540+0.00004$

$\sin 7°30'$ $\frac{449}{3438}=0.13060$ 比较实际数值 $0.13053+0.00007$

$\sin 11°15'$ $\frac{671}{3438}=0.19517$ 比较实际数值 $0.19509+0.00008$

$\sin 15°$ $\frac{890}{3438}=0.25887$ 比较实际数值 $0.25882+0.00005$

$\sin 18°45'$ $\frac{1105}{3438}=0.32141$ 比较实际数值 $0.32144-0.00003$

$\sin 22°30'$ $\frac{1315}{3438}=0.38248$ 比较实际数值 $0.38268-0.00020$

$\sin 26°15'$ $\frac{1520}{3438}=0.44211$ 比较实际数值 $0.44229-0.00018$

$\sin 30°$ $\frac{1719}{3438}=0.50000$ 比较实际数值 0.50000 0

$\sin 33°45'$ $\frac{1910}{3438}=0.55556$ 比较实际数值 $0.55557-0.00001$

$\sin 37°30'$ $\frac{2093}{3438}=0.60878$ 比较实际数值 $0.60876+0.00002$

$\sin 41°15'$ $\frac{2267}{3438}=0.65939$ 比较实际数值 $0.65935+0.00004$

---

① $\sin 90°=\frac{3438}{3438}=1.00000$

因 $2\pi r=360\times 60$，$\pi=3.1416$

$r=\frac{360\times 60}{2\pi}=3438$ 作为公共分母。

sin 45°	$\frac{2431}{3438}=0.70710$	比较实际数值 0.70711－0.00001
sin 48°45′	$\frac{2585}{3438}=0.75189$	比较实际数值 0.75184＋0.00005
sin 52°30′	$\frac{2728}{3438}=0.79348$	比较实际数值 0.79335＋0.00013
sin 56°15′	$\frac{2859}{3438}=0.83158$	比较实际数值 0.83147＋0.00011
sin 60°	$\frac{2978}{3438}=0.86620$	比较实际数值 0.86603＋0.00017
sin 63°45′	$\frac{3084}{3438}=0.89703$	比较实际数值 0.89687＋0.00016
sin 67°30′	$\frac{3177}{3438}=0.92408$	比较实际数值 0.92388＋0.00020
sin 71°15′	$\frac{3256}{3438}=0.94706$	比较实际数值 0.94693＋0.00013
sin 75°	$\frac{3321}{3438}=0.96596$	比较实际数值 0.96593＋0.00003
sin 78°45′	$\frac{3372}{3438}=0.98080$	比较实际数值 0.98079＋0.00001
sin 82°30′	$\frac{3409}{3438}=0.99156$	比较实际数值 0.99144＋0.00012
sin 86°15′	$\frac{3431}{3438}=0.99796$	比较实际数值 0.99786＋0.00010
sin 90°	$\frac{3438}{3438}=1.00000$	比较实际数值 1.00000＋0

36. 中国古代数学家(五)

(一)陈　从　运

陈从运,亦作陈运。《宋史·律历志》称:"唐试右千牛卫胄曹参军陈从运著《得一算经》。其术以因折而成,取损益之道,且变而通之,皆合于数。"《新唐书》、《宋史》有:"陈从运《得一算经》七卷。"《崇文总目》作:"陈运《得一算经》七卷。"《宋史》及《崇文总目》另有:"陈从运《三问田算术》一卷。"(见《宋史》卷六十八律历志第二十一,律历一。又《宋史》卷二百零七艺文志第一百六十,艺文六,《新唐书》卷五十九艺文志第四十九,《崇文总目》。)《新唐书》作陈道。

(二)江　　本

江本,据《玉海》:"江本撰《三位乘除一位算法》二卷,又以一位因折进退,作《一位算术》九篇,颇为简约。"《新唐书》、《宋史》、《崇文总目》并有:"江本《一位算法》二卷。"(见《玉海》、《新唐书》卷五十九、《宋史》卷二百零七,《崇文总目》。又《太平御览》卷七百五十,工艺部,引作:《一位算法》。)

（三）龙　受　益

龙受益，亦作龙受，亦作龙受一，亦称唐人，亦称宋人。《新唐书·艺文志》有："龙受《算法》二卷，贞元（785～804）人。"《崇文总目》亦有："龙受《算法》二卷。"《宋史·艺文志》作："龙受益，《算法》二卷，又《求一算术化零歌》一卷、《新易一法算范要诀》一卷"。"龙受益法王守忠《求一术歌》一卷*、《算范要诀》二卷、《明算指掌》三卷。"

宋绍兴（1131～1162）《秘书省续编到四库书目》卷二有："《求一算术歌》、唐龙受益注《算范九例诀》一卷、《算范诀》二卷。"及"龙受益撰《新易一法算范九例要诀》一卷。"（见《秘书省续编到四库书目》卷二，长沙叶氏观古堂刊本第六十九及七十一页。光绪癸卯，1903年。）

龙受益又撰《六问算法》五卷。元马端临《文献通考》引晁氏曰："《六问算法》五卷，并《化零歌》附，唐龙受益撰。"宋晁公武《郡斋读书志》卷三下杂艺术类有："《六问算法》五卷，右皇朝龙受益撰，并《化零歌》附。"又明陈第《世善堂藏书目录》有："《六问算法》五卷，唐龙受一。"明《晁氏宝文堂书目》作："六门算法。"

（四）宋　延　美

宋延美，后唐天成五年（公元930年），宋延美明算科及第；是

* 中华书局版《宋史》，"龙受益法"四字系上文"张祚注《法算三平化零歌》一卷"条之注，"王守忠《求一术歌》一卷"作另条。

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

年明算五人,而延美为之首(见《册府元龟》明算门)。天成五年二月,改元长兴。以长兴元年(公元930年)"夏四月甲午朔,国子司业张溥奏请复八馆,以广生徒。"而算学居其一(见《旧五代史》卷四十一,《后唐书》卷十七,明宗纪七)。

(五)薛 崇 誉

薛崇誉,南汉韶州曲江人,善《孙子》、《五曹算》(见《宋史》卷四百八十一列传二百四十,南汉世家)。

37. 中国古代数学家之成就

中国古代数学家研究工作，有显著之成就。如古代整数之后以分数记数，故对分数论曾作有计划之研究[1]。大衍求一术则始见于《孙子算经》。《孙子算经》卷下载“今有物不知其数”一题，为后世大衍求一术之起源。原题如下：

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

答曰二十三。

术曰，三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得。

凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一，七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。

宋杨辉《续古摘奇算法》(1275 年)“剪管术”即引《孙子》原题，如：

---

① 李俨“中算家之分数论”，《科学》，第二十六卷，二期，1943 年，桂林，第 183～203 页。或李俨《中算史论丛》第一集，第一版，第 15～43 页，北京，科学出版社(1954 年 11 月。＊见本书第六卷第 19～45 页。——编者)。

物不知总数，只云三三数之剩二；五五数之剩三，七七数之剩二，问本总数几何？[《孙子》]答曰二十三①。

关于平立方零约，古代有不加借算及加借算二例。不加借算，见于《孙子算经》，即：

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}。$$

加借算，见于《五经算术》、《张丘建算经》及甄鸾注《周髀算经》，即：

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}。$$

唐刘孝孙细草《夏侯阳算经》，复应用加借算法于开立方，即：

$$\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+1}。②$$

于方程理论亦有相当成就，而称二次方程、三次方程为带从平方、带从立方。唐王孝通《缉古算术》十七、十八、十九、二十各题，曾应用

$$x^2=A,\ x^2+px=A,\ x^3+px^2=A,$$

$$x^3+px^2+qx=A,\ x^4+px^2=A$$

各方程入算。并称 A 为实，p 为方法，q 为廉法。故同书分析仰观台等体积，于

$$V=\frac{(c-a)(d-b)}{3}(h-a)+\frac{(c-a)(b-a)}{2}(h-a)$$

---

① 李俨《大衍求一术之过去与未来》，《学艺》，七卷二号(1925年9月)，第1～45页。或李俨，《中算史论丛》第一集，第一版，第122～174页，北京，科学出版社(1954年11月。＊见本书第六卷第116～165页。——编者)。

② 李俨《中算家之平方零约术》，《中国科学》第一卷，第二及四期(1950年11月)，第295～322页。或李俨，《中算史论丛》第一集，第一版，第76～121页，北京，科学出版社(1954年11月。＊见本书第六卷第77～115页。——编者)。

$$+\left[\frac{(c-a)+(d-b)}{2}+(b-a)\right](h-a)a$$
$$+\left[\frac{(c-a)(d-b)}{3}+\frac{(c-a)(b-a)}{2}\right]\times a$$
$$+\left[\frac{(c-a)(d-b)}{2}+(b-a)+(h-a)\right]\times a^2+a^3$$

公式，可就各已知数，求 a 之值。又于

$$\frac{3h^2B}{(c-a)(d-b)}=\left[3\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}+\frac{3}{2}\left(\frac{h\cdot a}{c-a}+\frac{h\cdot b}{d-b}\right)\times h_x+h_x^2\right]h_x$$

公式，可就各已知数，求 h_x 之值①。

中国古代数学家对于等差、等比各项级数，亦都有记载。《周髀算经》即屡言等差级数，如：七衡的直径，以 2(19832 里 200 步)递进，二十四气以 9 寸 9 分$\frac{1}{6}$分，递为加减，即其一例。《九章算术》卷三"衰分"及《孙子算经》卷中都有："今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？"一题，则以等比级数入算②。隋刘焯更发明了内插法③。至平立几何形之计算，因其切合实用，尤为中国古代数学家所注重。南宋祖冲之著述《缀术》计算圆周率，梁祖暅之立开立圆术计算球形体积，唐王孝通分析仰观台等体积，成就尤多。

---

① 李俨《中算家之方程论》，《科学》，十五卷一号(1930 年 11 月)，第 7～44 页。或李俨《中算史论丛》第一集，第一版，第 246～314 页，北京，科学出版社(1954 年 11 月。＊见本书第六卷第 231～286 页。——编者)。

② 李俨《中算家之级数论》，《科学》，十二卷九号，十号(1929 年 4，5 月)，第 1139～1172，1349～1401 页。或李俨《中算史论丛》第一集，第一版，第 315～432 页，北京，科学出版社(1954 年 11 月。＊见本书第六卷第 287～382 页。——编者)。

③ 参看李俨《中算家的内插法研究》第一版，北京，科学出版社(1957 年 4 月。＊见本卷。——编者)。

38. 宋元类书(公元977年～　)内中算史料

(一) 数(《太平御览》)

宋李昉等《太平御览》[1] (公元977年)卷七五零,工艺部七。

《说文》曰:筭长六寸,计历数者也。从竹从弄,言常弄乃不误也。

《易》曰:大衍之数五十大合天地之数凡五十有五。言五十者,举成数。天数二十有五,地数三十;凡天地之数五十有五;此所以成变化而行鬼神也。

《周礼》曰:保氏养国子以道,乃教之六艺,六曰九数。郑司农曰:九数:方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要,今有重差、夕桀、勾股也。

《汉书·律历志》曰:数者一十百千万也。所以算数事物,慎性命之理也。

又曰:武帝时,桑弘羊以计算幸,年十三,为侍中。

又曰:宣帝时,大司农丞耿寿昌,以善算为算工,得幸于上。

又曰:许商善为算,著《五行论》,《算术》二十六卷。

又曰:张苍明习天下图书计籍,又善算律历。故令苍以列侯居

---

① 《太平御览》用嘉庆十四年(1809年),张海鹏序刻从善堂校明钞宋蜀刊本。

相府，领主郡国上计者。

《吴志》曰：顾谭每省簿书，未尝下算，徒屈指心计，尽发疑谬，下吏以此服之。

又曰：赵达河南人也。治九宫一算之术，究其微旨，是以能应机立成，对问若神。使人取小豆数升播播，布也之席上，立言其数。验覆果信。尝过其所知故，知故为之具食；食毕谓曰：仓卒乏酒，又无嘉肴；无以叙意如何？达因取盘中只箸，再三纵横之。乃言，卿东壁下有美酒一斛，又有鹿肉三斤，何以辞无。主人笑曰：以卿善算，欲以相试耳。遂出酒酣饮。又有书简上作千万数着空仓中封之，令达算之。达云：但有名无实。其精微若是。达宝惜其术，自阚泽、殷礼皆名儒善士，屈节就学，秘而不告也。太史丞公孙滕师事之，累年赍酒拜跪而请。达曰：吾先人得此术，欲图为帝王师，至仕来三世不遇太史郎，诚不欲复传之。且此术微妙，头乘尾除，一算之法，父子不相语。初孙权行师征伐，每令达有所推步，皆如其言。问其法，终不言由此见非。达尝笑谓诸星气风术者曰：当迥算帷幕不出户牖，以知天道，而反昼夜暴露以望氛祥，不亦难乎？无何，引算自校，乃叹曰：吾算尽某年月日其终矣。达妻数见达效，闻而哭泣。达欲弭妻意，乃更算言，向者谬误耳，尚未也。后如期死，权闻达有书，求之不得，录问其女，乃发达棺，一无所得，法遂绝焉。

王隐《晋书》曰：王戎为司徒，好治生。公妪二人，尝以象牙筹，昼夜算计家财。

《唐书》曰：僧一行姓张氏，公谨之孙也。初求访师资以穷大衍，至天台山国清寺见一院，古松十数；门有流水。一行立于门屏间，闻院僧于庭布算声，而谓其徒曰：今日当有弟子自远来求吾算法。已合到门，岂无人导达也。即除一算。又谓曰：门前水当却西流，弟子亦至。一行承其言而趋入，稽首请法，尽授其术焉，而门前水果却西

流。

《西京杂记》曰:定安嵩真明《算术》,成帝时人也。真常以算自剋克其寿七十三。真曰:绥和元年(公元前8年)正月二十五日晡时死矣。书壁以志之。至二十四日晡时死。妻曰:真算时见长下一算,欲以告之,虑脱,真旨故不告之,今校差一日也。

又曰:曹元理善《算术》,成帝时人也。常从友人陈广汉。广汉曰:吾有二囷米,忘其石数,子为吾算之。元理以食箸十余转,曰:东囷七百四十九石六升七合,西囷六百九十七石八升。遂署囷门。后出米,西囷六百九十七石七斗九升。中有一鼠,大可一升。东囷无差。元理后岁复过广汉,广汉以米数告之。元理以手击床曰:遂不知鼠之殊米,不如剥面皮矣。广汉为之取酒鹿脯数片。元理复算曰:十牛产二百犊,万鸡将产五万雏。羊豕鹅鸭,皆道其数;果蓏虚果反肴蔌悉知其所;乃曰:如此赀业之广,何供馈之褊耶。广汉惭曰:有仓卒宾,无仓卒主人。元理曰:俎上蒸豘一头,厨中荔枝一盘,皆可以为设。广汉再拜谢罪,入取之。尽日为叹。其术后传南季,季传项滔,滔传子陆;皆得其分数而失其玄妙焉。

《老子》曰:善计者不用筹策。

《尹文子》曰:凡数:十百千万亿,亿万千百十;皆起于一,推之至亿亿,无差矣。

《山海经》曰:帝令竖亥,步自东极,至于西极;五亿千选选,万也。九千八百八十步。竖亥右手把算,左手指青邱曰:五亿十万九千八百。天地东西二亿三万三千里,南北二亿一千五百里;天地相去一亿五万里也。

《博物志》曰:南郡宜城王子山到泰山从鲍子真学算。

《异苑》曰:晋安有越王余算策长尺许;白者似骨,黑者似角;云越王行海作算,有余弃之于水生焉。

《风俗通》曰:十十谓之百,十百谓之千,十千谓之万,十万谓之

亿，十亿谓之兆，十兆谓之经，十经谓之垓，十垓谓之补，十补谓之选，十选谓之载，十载谓之极。有物者有事者纪于此矣。过此往者则其数可纪，其名未之或闻也。夫数：一为特候奇只；二为再两偶双；三为参，四为乘。

《贾谊书》曰：数度之道，以六为法；数度之始，始于微细；有形之物莫细于毫；是故立一毫以为度。十毫为发，十发为厘，十厘为分，十分为寸，十寸为尺。备于六，故先王以为天下用也。

《周髀》曰：周公问于殷高曰：寡人闻子大夫善数。数，算也。

《语林》曰：郑玄，马融门下，三年不得见；令高足弟子传授而已。融尝算浑天不合，召玄令算，一转便决，众咸骇服。

谢察微《算经》曰：《易》称太极，是生两仪；盖数之先也。自隶首作术，容成造历，显算斯兴故也。

《一位算法》曰：万万穰为载，数之极矣。或问之曰：何以数之为载？按《孙子算经》云：古者积钱上至于天，天不能容；下至于地，地不能载；天不能盖，地不能载；故名曰载。

又曰：按司马迁《史记》云：自秦孝公时，商鞅献三术，内一开道阡陌以五尺为步，二百四十步为亩。

又曰：按千乘之国，周之制度。司马法六尺为步，步百为亩；是古之制也。

《法象算经》曰："问云：度之起，起于何？答曰：度之起，起于忽；忽是神虫口中吐丝名也。十忽为一丝，十丝为一毫。"

《算经》曰：量之起，起于何？答曰：量之起，起于粟。粟是阴阳而生，从六甲而出；故六粟为一圭，十圭为一抄。

《算经》曰：秤之起，起于何？答曰：秤之起，起于黍，黍是三棱草子也。十黍为一絫，十絫为一铢。

(二)明　　算(《册府元龟》)

宋王钦若等《册府元龟》[1](1005年)卷八六九,总录部一一九。

自隶首作筭,容成造历;从之学者,不绝英华。或妙尽其能,或略穷其理;忘寝废食,精骛心游;耳不闻于雷霆,行或坠于坎窞,尝龢乱而耽味,射隐伏以冥符;小则括毫厘之形,大则周天地之数。聊屈指而洞明,运只箸而无爽;若非苦志名山,寻师远道;则何以臻此哉?

隶首作算,黄帝时人善算。

汉张苍明习天下图书计籍;又善算律历;故令苍以列侯居相府,主领郡国上计者。

许商为博士,治尚书,为算;能度功用。尝著《五行论历》。《艺文志》有《许商算术》三十六卷,《杜忠算术》十六卷。

后汉马勤为司徒,八岁善计。计,算术也。

桑弘羊,武帝时以计算幸,年十三为侍中。

耿寿昌,宣帝时为大司农中丞,以善算为算工;得幸于帝。

张衡字平子,为尚书;犹致思于天文阴阳历算。

王子山与父叔师到泰山从鲍子真学算。

郑玄造太学受业,师事京兆第五元先:始通《春秋》,《三统历》,《九章算术》。《三统历》,刘歆所撰;《九章算术》,周公作,凡有九篇:方田一、粟布二、差分三、少广四、均输五、方程六、傍要七、盈不足八、钩股九。又因庐植事马融。融素贵,玄在门下,三年不得见,会融集诸生考论图纬。闻玄善算,乃召见。玄因质诸疑义。后征大司农,不起。

魏王粲字仲宣,为侍中,性善算,作《算术》,略尽其理。

---

① 《册府元龟》用明崇祯十五年(1642年)黄国琦刻本,有傅增湘校并跋。

吴顾谭为左节度，每省簿书，未尝下算；徒屈指心计，尽发疑谬，下吏以此服之。

赵达明《算术》，事太帝。帝令达算作天子之后当复几年。达曰：高祖建元十二年，陛下倍之。帝大喜，左右称万岁。果如达言。黄武三年，魏文帝在广陵；太帝令达算之曰：曹丕走矣。虽然，吴衰庚子岁。帝曰几何？达屈指而计之曰：五十八年。帝曰：今日之忧不暇及远，此子孙事也。达治九宫一算之术，究其微旨。是以能应机立成，对问若神。至计飞蝗，射隐伏，无不中效。或难达曰：飞者固不可校，谁知其然，此殆妄耳。达使人取小豆数斗，播之席上，立处其数；验覆果信。尝遇知故；知故为之具食毕，谓之曰：仓卒乏酒，又无佳肴，无以叙意如何？达因取盘中只箸，再三纵横之，乃言：卿东壁有美酒一斛，又有鹿肉三斤，何以辞无。时适坐有他宾，内得主人情。主人惭曰：以卿善射有无，欲相试耳，竟效如此。遂出酒酣饮。又有书简上作千万数著空仓中封之；令达算之。达处如数云：但有名无实。其精微若是。达又间居无为，引算自较，乃叹曰：吾算讫尽某年月日其终矣。达妻数见达效，闻而哭泣。达欲弭妻意，乃更布算，言向者谬误耳。尚未也。后如期死，太帝闻达有书，求之不得，乃录问其女。乃发达棺，无所得，法术绝焉。

宋关康之字伯愉，河东阳人。世居京口，寓居南平昌。少而笃学《算术》。妙尽其能。太宗诏征，不起。

祖冲之为长水校尉，又时善算。注《九章》，造《缀术》数十篇。

后魏安丰王猛子延明为尚书右仆射。以河涧人信都芳工《算术》，引之在馆，共撰《古今乐事》、《九章》、《十二图》。

高允为太尝，明算法；为《算术》三卷。

殷绍长乐人。少聪敏，好阴阳术数。游学诸方。达《九章》、《七曜》。太武时为算生博士。太安四年夏上《四序堪舆表》曰："臣以姚

氏之世行乐伊川,时遇游遁大儒成公兴,从求《九章要术》。兴字广明,自云胶东人也。山居隐迹,希在人间。兴时将臣南到阳翟九崖岩沙门释昙影间。兴即北还,臣独留住。依止影所,求请《九章》。影复将臣向长广东山,见道人法穆。法穆时共影为臣开述《九章》数家杂要。披释章次意况大旨。又演隐审五脏六腑心髓血脉,商功大算端部,变化玄象,土圭、周髀。练精锐思,蕴习四年。从穆所闻,粗皆髣髴。穆等仁矜,特垂忧愍。复以先师和公所注《黄帝四序经》文三十六卷,合有三百二十四章,专说天地阴阳之本:其第一孟序,九卷八十一章,说阴阳配合之原;第二仲序,九卷八十一章,解四时气王休杀吉凶;第三叔序九卷,八十一章,明日月辰宿交会相生为表里;第四季序,九卷八十一章,具释六甲刑祸礼德。以此经文传授于臣,山神禁严,不得赍出;寻究经年,粗举纲要。山居险难,无以自供;不堪穷迫,心生懈怠。以甲寅之年,日维鹑火,月吕林钟,景气郁盛,感物怀归,奉辞影等。自尔至今,四十五载;历观时俗堪舆八会,经世已久,传写谬误;吉凶禁忌,不能备悉。或考良日而值恶会,举吉用凶,多逢殃咎。又史迁、郝振,中古大儒,亦各撰注,流行于世。配会大小,序述阴阳,依如本经,犹有所缺。臣前在东宫,以状奏闻;奉被景穆皇帝圣诏敕臣撰录,集其要最。仰奉明旨,谨审先所见《四序经》文,抄撮要略;当世所须吉凶举动,集成一卷。上自天子,下至庶人,又贵贱阶级,尊卑差别,吉凶所用,罔不毕备。未及内呈,先帝晏驾。臣时狼狈,几至不测,停废以来,经繇八载;思欲上闻,莫能自彻。加年度齿颓,余龄日暮;每惧殂殒,颠仆沟壑,先帝遗志,不得宣行;夙夜悲愤,理杂违匿。依先撰录奏,谨以上闻。请付中秘通儒达士,定其得失。事若可施,乞即班用。"其《四序堪舆》遂大行于世。

北齐许遵明易善算,高祖引为馆客。后文宣无道日甚,遵语人曰:多折筭来,吾筮此狂夫何时当死。遂布算满床,大言曰:不出冬

初，我乃不见。遵果以九月死。

信都芳河涧人，少明算术，为州里所称。每精研究，忘寝与食。或坠坑坎。尝语人云：算之妙机巧精微；我每一沉思，不闻雷霆之声也。其用心如此。初为魏安丰王延明所馆。延明家有群书，欲抄集五经算事为《五经宗》及古今乐事为《乐书》；又聚浑天歌器，地动铜乌候风诸图为《器准》，并令芳算之。会延明南奔，芳乃自撰注。芳注重差勾股，撰史宗仍自注之，合数十卷。

隋萧吉，字文休；为上仪同；博学多通，犹精阴阳算术。

刘炫为旅骑尉，撰《算术》一卷，行于世。

唐傅仁均为太史令，善历算。

李淳风为太史令，犹明天文历算阴阳之学。与算学博士梁述太学助教王真儒等注释《五曹》、《孙子》等十部算经，分二十卷。显庆元年左仆射于志宁等奏之，付国学行用。

僧一行姓张氏，公谨之孙也。初求访师资以穷大衍，至天台山国清寺；见一院，古松数十，门有流水。一行于门屏间，闻院僧于庭布算声，而谓其徒曰：今日当有弟子自远求吾算法，已合到门，岂无人导达也。即除一算，又谓曰：门前水当却西流，弟子亦至。一行承其言而趋入；稽首请法。尽授其术。而门前水果却西流。

（三）算　术竺国算法（《通志》）

宋郑樵《通志》[1]（约1150年）卷六八艺文六天文类三。

《九章算术》十卷刘徽撰；《九章算术》二卷徐岳、甄鸾重述；又一卷李遵义撰；又九卷李淳风撰。《九九算术》二卷杨淑撰。《九章别术》二卷；

---

① 《通志》用大德（1297～1307）三山群库，元、明递修本。

《九章算经》二十九卷徐岳、甄鸾等撰；又二卷徐岳注。《九章六曹算经》一卷；《九章重差》一卷刘向撰。《九章重差图》一卷刘徽撰；《九章推图经法》一卷张峻撰。

《算经要用百法》一卷徐岳撰；《缀术》六卷祖冲之撰；《孙子算经》二卷；《赵畋算经》一卷；《谢察微算经》三卷；《夏侯阳算经》一卷；《张丘建算经》二卷；又三卷李淳风撰；《数术记遗》一卷徐岳撰；《五经算术录遗》一卷；《五经算术》一卷甄鸾撰；又二卷李淳风注；《算经异义》一卷张续撰；《张去斤算疏》一卷；《黄钟算法》三十八卷；《算律吕法》一卷；《众家算阴阳法》一卷。《董泉三等数》一卷；《五曹算经》五卷甄鸾撰；又五卷韩延夏侯阳等撰；《韩延夏侯阳算经》一卷；《九经术疏》一卷宋泉之撰；《海岛算经》一卷刘徽撰；又一卷李淳风撰；《九章杂算文》二卷刘佑撰；《七经算术通义》七卷阴景愉撰；《周髀算经》二卷李淳风撰；《九章算经要诀》一卷李淳风撰；《五曹》、《孙子》等算经二十卷李淳风注；甄鸾《孙子算经》三卷李淳风注。

《缉古算术》四卷王孝通撰；算经表序一卷。《一位算法》二卷江本撰；《得一算经》七卷陈从运撰；《心机算术括》一卷；《龙受益算法》二卷；《周易轨限算》一卷；《新易一法算轨九例要诀》一卷龙受益撰；《乘除算例》一卷；《法算细历》一卷；《量田要例算法》一卷；《颍阳书》三卷邢和璞撰；《求一指蒙算术玄要》一卷李绍谷撰；《周髀算经音义》一卷李籍撰；《求一算法九例》一卷；《谢经算术》三卷；《九章算经音义》一卷李籍撰；《九章细草》九卷贾宪撰；《算法敎古集》二卷贾宪撰；《算学通玄九章》一卷青阳中山子撰。

右算术六十二部二百二十九卷。

《婆罗门算法》三卷；《婆罗门阴阳算历》一卷；《婆罗门算经》三卷。

右竺国算法三部七卷。

凡算术二种，六十五部三百三十六卷。

（四）九 九 数 等（《玉海》）

宋王应麟《玉海》[1]（约1250年）卷四四。

（1）九九数

《**管子**》：轻重戊：虙戏作，造六峚以迎阴阳。作九九之数，以合天道；而天下化之。周人之王，循六峚行阴阳。虙戏以来未有不以轻重而能成其王者也峚字未详。《**汉·梅福传**》：齐桓之时，有以九九见者；桓公不逆，所以致大也。今臣所言，不特九九也。《注》师古曰：九九算术；若今《九章》、《五曹》之辈。事见《说苑》、《韩诗外传》。《**韩诗外传**》：齐桓公设庭燎，东野人有以九九见者选注。《**汉志**》：伏戏画八卦，由数起。万物之数，因八卦而起。《**晋志**》：黄帝使隶首作算数。

（2）周九数

九章算术　汉小学算术　汉九数　唐算经又见历算。

《**周官**》：大司徒六艺注：数，九数之计。《保氏》：以六艺教国子，六曰九数。《注》：郑司农云：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要、今有、重差、夕桀音的、勾股也。《礼记正义》、《周礼》注九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要、今有、重差、勾股。九数之名，书本多误；儒者所解：方田一、粟米二、差分三、少广四、商功五、均输六、方程七、赢不足八、旁要九。云今有重差勾股者，郑司农指汉时云：今世于九数之内有重差勾股二篇。其重差即与旧数差分一也。去旧数旁要，而以勾股替之，为汉之九数，即今之《九章》也。先师马融、干宝等云：今有、夕桀各为一篇，未知所出。今依司农所注，余并不取。见后刘徽《算经序》。《正义》：方田已下，皆依《九章算术》而言。重差、夕

---

[1] 《玉海》用元至元六年（1340年）庆元路儒学刻，元、明递修本。王应麟《宋史》有传。

桀、勾股，此汉法增之。马氏以重差、夕桀亦是《算术》之名，与郑异。按今《九章》，以勾股替旁要，则旁要，勾股之类也。《**后汉·郑康成传**》：通《九章算术》。注：周公所作也。凡九篇：方田、粟米、差分、少广、均输、方程、傍要、盈不足、钩股。《**马续传**》：善《九章算术》。注：刘徽《九章算术》曰：商功五、均输六、盈不足七、方程八。并无重差夕桀。马传注无傍要；郑注无商功。晋隋《律志》引《九章》粟米商功法。《考工记》注引于今粟米法。疏云："《算术》有算粟为米之法。"《玉人疏》引盈不足术曰：玉方寸，重七两；石方寸，重六两。《禹贡》疏引：《九章算术》云：海岛邈绝，不可践量。《诗》绵疏引《九章算术》云：穿地四，为壤五，为坚三。召旻疏引粟米注。《春秋》疏引《九章算术》云：粟率五十，凿二十四。《伏湛传》注引《九章算术》曰：粟五十、粝率三十一斛，粟得六斗米。《**汉·律志**》：一曰备数：纪于一，协于十，长于百，大于千，衍于万；其法在《算术》。宣于天下，小学是则。职在太史，羲和掌之。《夏侯阳序》云：汉备五数。汉志、八岁入小学，学六甲、五方、书、计之事。历谱有《许商算术》二十六卷，《杜忠算术》十六卷。《**沟洫志**》：博士许商治尚书，善为算，能度功用，商及乘马延年，皆明计算。能商功利。《**食货志**》：耿寿昌习于商功分铢之事。研桑心计。《**张苍传**》：善算律历，定章程。《**后传**》：卓茂习历算，究极师法。刘瑜善历算。郑康成善算。翟酺、何休善历算。张衡致思历算。《**西京杂记**》：成帝时嵩真曹元理并明《算术》。《**夏侯阳算经序**》：算数起自伏牺，而黄帝定三数为十等。隶首因以著《九章》……。汉备五数云云。《五曹》、《孙子》，述作滋多；甄鸾、刘徽为之详释。《**尧典正义**》：天之三光四时变化以此为政，故命羲和令以算术推步。累历其所行、法象其所在，具有分数节候。《左传》史赵曰、亥有二首六身、下二如身、是其曰数也。《**魏志**》：王粲善算，作《算术》，略尽其理。《**吴志**》：赵达治九宫一算之术。《**南史**》：顾越于《七曜》、《九章》、音律、图纬、咸尽精微。《**北**

史》：刘焯，《九章算术》、《周髀》、《七曜》历书十余部，推步日月之经，量度山海之术，莫不核根本，穷秘奥。苏绰善算术。《隋志》：古之九数，圆周率三、圆径率一。其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋祖冲之更开密法，以朒数三丈一尺四寸一分五厘九豪二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率圆径七，周二十二。又设开差幂立，兼以正负参之，指要精密，算氏之最也。所著书名《缀术》六卷学者莫能究其深奥。刘徽《九章术义序》一卷；《九章算术》十卷；徐岳甄鸾重述二卷；李遵义疏一卷；杨淑《九九算术》二卷；岳鸾《算撰别术》二卷；《算经》二十九卷；又徐岳注二卷；刘徽《九章六曹算经》一卷；《重差图》一卷。又有孙子、赵爽、夏侯阳、张丘建《算经》、《五经算术》、《黄钟算法》、张峻《九章推图经法》。又刘炫著《算术》一卷。《唐志》：刘向《九章重差》一卷；徐岳《九章算术》九卷；甄鸾《九章算经》九卷。又董泉《三等数》一卷，甄鸾注，《史记》正义引甄鸾注算经。刘祐《九章杂算文》一卷；刘徽《九章重差图》一卷；李淳风注《九章算术》九卷、《要略》一卷；《谢察微算经》三卷《御览》引《谢察微算经》曰易称太极是生两仪，盖数之先也。自隶首作术，容成造历，显算斯兴。《一位算法》，按《孙子算经》，又引《发象算经》。《会要》：永隆元年（公元680年）十二月太史令李淳风进注释《孙子》等十部算经。分为二十卷。传云奉诏与算博士梁述、助教王真儒等是正《五曹》、《孙子》等书，刊定注解，立于学官。志注《五曹》、《孙子》等算经二十卷，《算经表序》一卷。淳风又注《周髀》二卷，注《九章》九卷，注《九章算经要略》一卷，注《五经》、《张丘建》、《海岛》、《甄鸾》、《孙子算经》共九卷，释祖冲之《缀术》五卷；注王孝通《缉古算术》四卷。《百官志》：算学《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》、《缀术》、《缉古》为顓业，兼习《记遗》、《三等数》。王孝通《上缉古表》：周公制礼、有九数之名，即《九章》是也。其理幽而微，其形秘而约。汉张苍删补残缺；较其条目，颇与古术不同。魏刘徽为之注，触类增长乃造重差之法，列于终篇。

贺循、徐岳、王彪、甄鸾之辈，会通之数无闻焉。祖暅之《缀术》，时人称精妙；方邑进行之(以下原缺，据通行本补)术全错不通，刍亭方亭之问于理未尽。《九章·商功篇》有平地役攻受袤之术，至于上宽下狭，前高后卑，阙而不论。臣于平地之余，续狭斜之法凡二十术。《唐志》：四卷，李淳风注。

(3)徐岳《数术记遗》

黄帝为法，数有十等；及其用也，乃有三焉。十等者谓亿兆京垓秭壤沟涧正载；三等者谓上中下也。其下数者十十变之；若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者万万变之；若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。从亿至载，终于大衍。徐岳生于汉末，受历学于刘洪，其书甄鸾注；宇文周时造天和历者。《唐志》：《数术记遗》一卷。世人言三不能比两，乃云捐闷与四维注《艺经》曰：捐闷者周公作也，先本位以十二时相从。徐援称捐闷乃是奇两之术，三不能比两者，孔子所造也。布十干于其方戊己在西南维，四维东莱子所造也。布十二时四维。

(4)魏刘徽《九章算经序》

庖牺氏始画八卦，作九九之术，以合六爻之变，黄帝神而化之，引而伸之，建历纪，协律吕，用稽道原；然后两仪四象可得而效焉。记称隶首作数，其详未之闻也。周公制礼而有九数。《九章》是矣。汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌，皆以善算命世，苍等因旧文之遗残，各称删补；故校其目，与古或异；而所论者多近语也。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子，其能(以上原缺，据通行本补)穷纤入微，探测无方；以法相传，亦犹规矩度量可得而共。今好之者寡、虽通才达学、未必能综于此。《周官》说云：南戴日下万五千里。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见。无有超邈若斯之类。苍等为术犹未足以博尽群数也。九数有重差之名，原其指趣，乃所以施于此。凡望极高、测绝深、而兼知其远者，必用重差勾股，

则必以重差为率。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。方田以御田畴界域算田亩。粟米以御交质变易变造谷米精粗分数。衰分以御贵贱禀税若律管不成才者余分。少广以御积幂方圆若东西广南北狭。商功以御功程积实计功役。均输以御远近劳费租赋之属。盈不足以御隐杂互见以多补少，一云盈朒。方程以御错糅正负开方法若礼为方千里者。勾股以御高深广远今天文家算天象所用。李籍《**周髀音义**》云：以九数勾股重差算日月周天行度远近之数，皆得于股表。即推步盖天之法也。髀者股也；以表为股。周天历度，本庖牺氏立法，其传自周公，受之于大夫商高，周人志之，故曰《周髀》。《**崇文目**》：《算术》三十一部七十九卷，始于《周髀算经》，至《数术记遗》。《御览》引《周髀算经》，天不可阶而升，地不可尺寸而度，《周髀》曰周公问于殷高曰、闻子大夫善数 详见"天文"。景德二年(公元964年)龙图阁子书有《算术》六卷。《**书目**》：《五经算术》二卷汉甄鸾注，唐李淳风等注释，引五经之说，如毛诗郑数书定闰法、月令、黄钟律管法，礼求地中法，易策数法之类。故名。《周髀算经》二卷，赵君卿君卿，赵爽字也。注并序，甄鸾重述，淳风等注释。以盖天有周髀之法，大抵勾股乘除之数。古一卷，今分为二。《海岛算经》一卷，甄鸾撰，李淳风等注释。元丰间(1084年)秘书监赵彦若等校定，皆以物设为乘除法。《唐志》、《崇文目》：魏刘徽撰，云海岛者取其首篇所算言之。《注九章算经》九卷，不知作者。魏刘徽注并序，淳风释。其序言：《九章》，九九之数也。《周官》测日影求地中，亦《九章》立四表望远及因木望山之术，故辄造重差、并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。《张丘建算经》三卷，凡一百问，设为乘除法。中言臣淳风等，当是注释。《隋志》：二卷。《夏侯阳算经》三卷，以明乘除法为首篇，条五策五除之异。《隋志》：二卷。《缉古算经》一卷，唐太史丞王孝通撰并注。赵彦若等校定。以《九章》商功篇，有平地役功受袤之术，世人不达，遂于平地之余，续狭斜之

法，凡二十术，名曰《缉古》。《崇文目》云：淳风注。《唐志》：四卷，《缉古》三年，唐令算学习业，今亡其三。《孙子算经》三卷，淳风注，彦若等校定，首言度量所起，次言乘除之法，亦设为之数。《谢察微算术》三卷；设为乘除法，凡一百六事。《五曹算经》五卷，淳风注，彦若等校定。以地利生人之本，故首田曹；田畴必资人功，故次兵曹；人众必用饮食，故次集曹；会集必务储蓄，故次仓曹；仓廪货币，交贸变易，故次金曹。或云五曹法出于孙武。《九章音义》一卷李籍。又《周髀音义》一卷同上。

（五）历　算　等(《文献通考》)

元马端临《文献通考》[1]（年代未详）。

以下见卷二一九，经籍考四十六，天文算法类：天文，历算。

《周髀算经》二卷；音义一卷：

陈氏曰：题赵君卿注，甄鸾重述，李淳风等注释。周髀者盖天文书也。称周公受之商高，而以勾股为术，故曰《周髀》。《唐志》有赵婴、甄鸾注，多一卷；李淳风释二卷；今曰君卿者，岂婴之字邪。《中兴书目》又云：君卿名爽，盖本《崇文总目》。然皆莫详时代。甄鸾者，后周司隶也。《音义》假承务郎李籍撰。

……

《数术大略》九卷：

陈氏曰：鲁郡秦九韶道古撰。前世算术，自《汉志》皆属历谱家。要之数居六艺之一，故今解题，列之杂艺类。惟《周髀经》为盖天遗书，以为历象之冠。此书本名《数术》，而前二卷大衍、天时

---

① 《文献通考》用元泰定元年(1324年)西湖书院刻，元、明递修本。

二类，于治历测天为详；故亦置之于此。秦博学多能，尤邃历法；凡近世诸历，皆传于秦。所言得失，亦悉著其语云。

以下见卷二二九经籍考五十六，杂艺类，杂艺术。

《九章算经》九卷：

晁氏曰：未详撰人姓名，或曰周公。九章者：一方田、二算粟、三衰分、四少广、五商功、六均输、七盈不足、八方程、九勾股。魏刘徽、唐李淳风尝为之注。则此术起于汉之前矣。

《算经》一卷：

陈氏曰：夏侯阳撰，大抵乘除法也。《隋志》二卷；唐一卷，甄鸾注。今本无注，元丰京监本。

《求一算经》一卷：

晁氏曰未详撰人。

《六问算法》五卷：

晁氏曰：唐龙受益撰，并《化零歌》附。

《算经》三卷：

陈氏曰：张邱建撰，有序。首言算者不患乘除之为难，而患分之为难；是以序列诸分之本元，宣明约通之要法。按《唐志》作一卷，甄鸾注。今本称汉中郎守前司隶甄鸾注，太史令李淳风等注释，算学博士刘孝孙撰细草。细草者乘除法实之详悉也。

《应用算法》一卷：

陈氏曰：夷门叟郭京元丰三年序称：平阳奇士蒋舜元撰。凡八篇：曰释数、田亩、粟米、端匹、斤秤、修筑、差分、杂法，总为百五十七问。前志在历算类；按射御书数均一艺也。不专为历算设，故列于此。

39. 日本口游(公元970年)书内的中国古代数学史料

日本十世纪私人教科书《口游》一书，是天禄元年(公元970年，当我国宋开宝三年)源为宪[1]为教授当时参议藤原为光的七岁长子松雄所撰写的。也是日本现存较早的书。全书分十九门，即：

"口游　　目录

乾象门，时节门，年代门，坤仪门，诸国门，田舍门，宫城门，居处门，内典门，人伦门，官职门，阴阳门，药方门，饮食门，书籍门，音乐门，伎艺门，禽兽门，杂事门，(人事门)。"

据《口游》乾象门，年代门，田舍门，阴阳门，杂事门，(人事门)所记，便可以看到，当时中国历算在日本流传的情况。如：乾象门称："日、月、星"为"三辰"；乾象门又阴阳门称："木、火、土、金、水"为"五行"，为"五星"；又"日、月、五星"为"七曜"；又："罗、土、水、金、日、火、计、月、木"为"行年曜"，并注称："今案，罗：罗睺星；计：计都星也，自余七曜"。此项七曜和罗、计即系九执。又举"二十八宿"，"三十六禽"，子、丑等十二辰；甲、乙等十干。并于"九宫"下注

---

① 源为宪通佛学，另撰《三宝绘词》(公元984年)上、中、下三卷，有文永十年(1273年，宋咸淳九年)传写本，讲述佛教故事。

称："今案诵曰：二四为角，左三右七，六八为足，九头五身一尾"，为日本较早传达我国古籍中所述"九宫"的记载，即：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

现将《口游》原文，和注文，分列左右。记录如下：

（《口游》原文）	（注文）
"田舍门　九曲 大帐，调帐，税帐，朝集帐。谓之四度公文。(1)① 出举，检田，计帐，收纳使。谓之四度使。(2) 六尺为步，三百六十步为段，十段为町。谓之田数。(3)	大帐、调帐、税帐、朝集帐等四项帐，指日本当时的税法项目。 出举、检田、计帐、收纳使，指日本当时照料税法的官吏。 按《孙子算经》卷上称："六尺为一步。"又《夏侯阳算经》卷上"论步数不等"内称："田曹：以六尺为步，三百步为一里。此古法。"
上田　卅六步一束 中田　卌五步一束 下田　六十步一束。(4)	又此处所记上，中，下田以及下行下下田的束数，是日本大化改新（公元648年）以后男女分田地的标准单位，又和中国《夏侯阳算经》卷中"上田法，卅；中田法，卌八；下田法，六十，"的比率相类。
下下田　百廿步一束。谓之地子，田地子， 田一段全得租谷一斗五升。(5)	此外上项方法，日本在七世纪和九世纪已有文字记录可考。查《日本书纪》：孝志天皇二年（公元646年）春正月定："田长卅步，广十二步为一段（即360步），十段为町，段租二束二把，町租二十二束"。《令义解》（公元833年）卷三引同，《令义解》卷三又续记："每段地获稻五十束，束：稻舂米得五升"，"……段租稻二束二把"。都和《口游》所记相同。 再参考原书下文："一束为卅斤"，"束，糙谷一斗舂米五升。"这说明 上田$\frac{1}{10}$段，可得一束，一斗或30斤　糙谷或稻＝5升米； 中田$\frac{1}{8}$段，可得一束、一斗或30斤　糙谷或稻＝5升米；

① 此处亚拉伯数字(1)，(2)，……等指"田舍门"内原文各行数。此据北京中国科学院图书馆所藏大正十三年（1924年）影印弘长三年（1263年）古写本的行数。

(续)

(《口游》原文)	(注文)
	下田$\frac{1}{6}$段,可得一束,一斗或30斤　糙谷或稻=5升米; 下下田$\frac{1}{3}$段,可得一束,一斗或30斤 糙谷或稻=5升米。 或: 上田1段可得300斤或10束或1斛稻 =50升米; 中田$1\frac{1}{4}$段可得300斤或10束或1斛稻 =50升米; 下田$1\frac{1}{6}$段可得300斤或10束或1斛稻 =50升米; 下下田$3\frac{1}{3}$段可得300斤或10束或1斛稻 =50升米。
一步租四勺六分之一,田一段若只得七租谷一斗五合,一步租二勺(6)十二分之十,一。平山谛按:此"一"字可不用,六铢为一分,四分为一两,十六两为一斤。(7)	《口游》原文又接着记,却和《令义解》(公元833年)略有不同,原文记录如左(5),(6),(7)行。 再参看原文下文"十撮为勺,十勺为合,十合为升,十升为斗,十斗为斛"的标准,则: "全得":一段(亩)租谷一斗五升: 一步　租谷:$\frac{1500}{360}=4\frac{1}{6}$勺。 "若只得七":一段(亩)租谷1500×0.7 =1斗5合; 一步　租谷:$\frac{1050}{360}=2\frac{10}{12}$勺。 计算所得,和原文相符。而租率因此处:1段田360步,出1斛或10000勺糙谷或稻出租1500勺等$\frac{15}{100}$或15%的租,若十只得七,只出$10\frac{1}{2}$%等的租,是比《令义解》(公元833年)所记加重二倍以上。因《令义解》(公元833年)记50束稻,出租二束二把(十分为把,十把为束)。租率是4.4%,可能此时(公元970年)租税又加重了①。

① 参看平山谛,《东西数学物语》,166页。

（续）

（《口游》原文）	（注文）
三斤为大一斤，大十斤为一束一束糙谷一斗，舂米五升；十撮为勺。(8) 十勺为合，十合为升，十升为斗，十斗为斛；十厘为毫。(9) 十毫为分，十分为把，十把为束。(10)”	《口游》此处(7,8)行，记：“六铢为一分，四分为一两，十六两为一斤”，又“三斤为大一斤”。查镰仓时代(1192～1333)藤原定长著《薰集类抄》亦记有：“六朱为一分，四分为一两，十六两为小一斤，四十八两为大一斤。小三两为大一两，小三分为大一分”之例。在前则日本在七世纪《正仓院文书》曾记有：斛，斗，升，合，勺，撮；束，把，分；町，段，步。各诸等数名称。 在中国，则《别录》，和唐慧琳《一切经音义》亦引有：“六铢为一锱(即分)，四分为一两，十六两为一斤。” 又宋唐慎微著《经史证类备急本草》在宋大观二年(1108年)经医官艾晟等重修之后，作为官定本刊行，改名《经史证类大观本草》。此书“序例上”亦称：“古秤惟有铢，两，而无分名；今则以十黍为一铢，六铢为一分，四分成一两，十六两为一斤，……，十撮为一勺，十勺为一合，……”云云。 又《口游》此处将糙谷或稻“一束”的重量30斤和它“一斗”的容量加以统一，作为相对称的单位，因“束”以下除“斤、两、分、铢”诸等单位之外，又有“把、分、毫、厘”的十进位小数，和“斗”以下的“升、合、勺、撮”的十进位小数，可以取得相对照。 《口游》左方记：“三斤为大一斤，大十斤为一束(即三十斤)”，也是汉，唐遗制。 查《居延汉简甲篇》曾记有“大斗三斗”，意即“三斗为大一斗”，此外又有“用茭十二束，入茭二百束”等例。另《故唐律疏义》卷四，亦有：“三斗为大斗一斗，三两为大两一两”之例，又原文“勺”字亦作“夕”，中国旧书简写文亦有此例。如《永乐大典》卷15948“运”条，引“宋漕运”，即作“勺”为“夕”。

(续)

(《口游》原文)	(注文)
又 杂事门　十一曲(A) "十物为勿,十勿为毛,十毛为(毫),十毫为厘,(十厘)为分,十分为(二十八)寸,十寸为尺,五尺为步,八尺为寻,为常;或曰六尺为常,十尺为丈,四丈为匹(五丈为端),十丈为引。" 又"十抄为撮,十撮为勺,十勺为圭,十圭为合,十合为升,十升为斗,(十斗为斛)。"(A)①	先就原文校补(毫),(十厘),(五丈为端),(十斗为斛)各字,并删去(二十八)各字。 又《夏侯阳算经》卷上"论步数不等"引:"杂令:诸度地以五尺为一步……[此今用之]"云。此外约公元650年唐释玄应撰《一切经音义》(即《大唐众经音义》)卷二十五,《阿毗达磨俱舍论》第六十卷注引:[《小尔雅》四尺为仞,倍仞为寻,倍寻为常,和《方言》:寻,常也]。
又 杂事门　十一曲(B) "四升为豆,四豆为遍,一升卅砌,十遍为釜,六升(斗)四升十六遍为庾,或云二四升,十六庾为康,六十斛,四康为莒,六十四斛,十复为氍,六十四斛,六石四升(斗)为锤韩诗云十一分也"(B)②	
又 杂事门　十一曲(C) "十粟为累,十累为铢,六铢为锱忽诵也今,二锱为龠,四锱为两,六两	按唐慧琳《一切经音义》卷一百,《念佛三昧宝王论》上卷,"锱铢"条注引称:"案《孙子》、《九章算经》

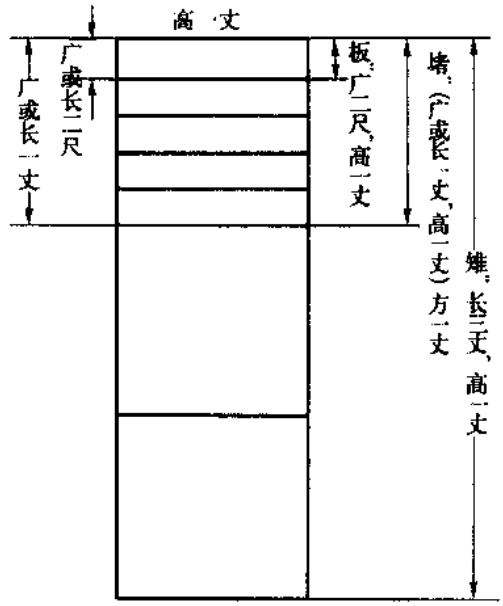
① 从此之后,择要注释,原引文作(A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)为志。

② 此段(B)错字过多,为保留原文面目,除有(斗),(斗)二处外,暂不作注。

（续）

（《口游》原文）	（注文）
为锱，十六两为斤，卅四两为溢，或云卅两，卅斤为钧，四钧为石百卅斤。”	云：凡称之所起，始于黍，十黍为一絫，十絫为一铢，六铢为一锱[锱即分也，音汾门反]，四分为一两，十六两为一斤，三十斤为钧，四钧为一石，即一百二十斤也。”又“案《风俗通义》云：铢六则锤，二锤则锱，二锱则两。”
“今案世俗诵曰：六铢为一分，四分为两，十六两为一斤，册八两为大一斤是则近于俗了。”(C)	原文“六两为锱”，又“二十两为溢”。按贾达曾说：“俗儒以将重六两”，“锱”，似为“将”之误。 又据《五经算术》卷上《仪礼》卷第十一，丧服制食米溢数，记：“朝一溢米，夕一溢米。”郑注云：“二十两曰溢。”
又 杂事门　十一曲(D) “三尺为武，六尺为步，七尺为刃(仞)， 三百步为里； 二百四十步为亩，百亩为顷；	按唐慧琳《一切经音义》卷二十二，“圆光一寻”条引：“何承天(370～447)《纂要》云，……三尺曰武，五尺曰墨，六尺曰步，七尺曰仞，……。” 又唐代另有“七尺为刃”之例。唐释玄应《一切经音义》(即《大唐众经音义》，约公元650年)卷十二，引：“《论语》：夫子之墙数仞，包咸曰七尺曰仞”，又同书卷一，《大方广佛华严经》第二十卷，“七仞”条，又引：“故《论语》夫子之墙数仞，包(咸)曰七尺曰仞，今皆作刃，非也”，说明唐代有作仞为刃之例。和《口游》原文所记：“七尺为刃”，作仞为刃之例相同。 又据《唐六典》卷三，“户部尚书”条，记明：“凡天下之田，五尺为步，二百有四十步为亩，百亩为顷”，是唐代制度。
一丈为板广二尺，五板为堵，三堵为雉高一丈，长三尺(丈)； 方十里为城，方一百里为国，方千里为圻；	又《口游》原文称：“一丈为板广二尺，五板为堵，三堵为雉高一丈，长三尺(丈)，和《国策注》所举相符。又按《左传》隐元年“都城过百雉”，注：“方丈曰堵，三堵曰雉，一雉之墙：长三丈高一丈”。又《周礼》冬官《考工记》匠人：“王宫门阿之制五雉，……”，注：“雉长三丈，高一丈”，又敦煌千佛洞“算经一卷并序”，亦曾记“方丈曰堵”，看附图：

(续)

(《口游》原文)	(注文)
	 关于"板"、"堵"、"雉"的记事,中国古代,除上举之外,又有如下各条: 《战国策》记:"智伯攻晋阳城,城不浸者三板;沈灶生蛙,悬釜而炊"。又《礼记·檀弓》。"儒有一亩之宫,环堵之室。"
八十缕为一升(缕,音縷)"。(D)	又《口游》原文称:"八十缕为一升"邹伯奇(1819~1869),《补小尔雅释度量衡》,称:"布八十缕为升,亦谓之缕。《仪礼》丧服:冠六升,注布八十缕为升。《国语·鲁语》:妾衣不过七升之布,注同。《汉书·王莽传》中,缕布二匹,注引孟康曰:缕八十缕也。《史记》孝景本纪,令徒隶衣七缕布,正义同。"
又 杂事门　十一曲(E) "十、百、千、万、万万为亿,亿亿为兆,兆兆为京,京京为嫁,嫁嫁为卡,卡卡为壤,壤壤为溪,溪溪为调,调调为正,正正为载。副夕り本尺"。(E)	此处万以上,作:"亿、兆、京、嫁、卡、壤、溪、调、正、载"。和本书后面本文,所记:"亿、兆、京、嫁、穰、讲、同、正","亿、兆、经、嫁、穰"。以及《孙子算经》,《数术记遗》,敦煌千佛洞:《算经》一卷并序;《立成算经》一卷内"亿、兆、京、陔(或垓)、秭,穰(壤,让)、沟、涧(间)、正、载"。又唐释玄应撰《一切经音义》(即《大唐众经音义》,约公元650年)卷六,《妙法莲华经》第六卷,内:"亿载"条:"案,《算经》:皇(黄)帝为法,数有十等谓:'亿、兆、京、垓、壤、秭、沟、涧、正、载'"和宋法云《翻译名义集》(1143年)引注《俱舍论》五十二数,内:

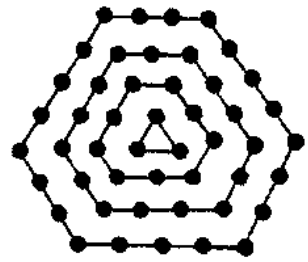
（续）

（《口游》原文）	（注文）
	“亿、兆、京（经）、秭、垓、壤、沟、涧、正、载”。次序都略有出入，都是本自唐代以后的佛经。
又 杂事门　十一曲（F） “绢，绝六丈为匹（或云绢涓裹）。 调：布四丈二尺为端 庸：布二丈八尺为端 商：布二丈五尺为端或云二丈六尺载谓之笔信。官三、国四、郡五、私六谓之官数。五、十、廿、卅，四各二里，各三丈谓之七约； 今案近代物直踊跃各及五六丈。” （F）	案《口游》此段记录，可能和中国唐代租庸调制度，以及《夏侯阳算经》所记有关。 《夏侯阳算经》卷上“课租庸调”条引：“赋役令：诸户一丁租粟二斛，其调各随乡土所出，绢、绝音诗，丝纻兼织为绝各二丈，布二丈五尺。输绢、绝者绵三两，输布者麻三斤，若当户不成端、匹、屯、綟者，皆丈尺折半之。” 《旧唐书》志第二十八，食货上。又《通典》，食货典六，赋役下篇，所载与上文相同。 《新唐书》卷四十八，百官志第三十八，亦记明：“锦、罗、纱、縠、绫、绝、绝、绢、布皆广尺有八寸，四丈为匹。布五丈为端，绵六两为屯，丝五两为绚，麻三斤为綟。” 日本《养老令》（公元 718 年）和此处《口游》（公元 970 年）亦有称： 绢，绝，绝，纱，帛，……作匹（四丈） 布……作端（五丈） 绵……作屯（六两） 丝……作绚（五两） 麻……作綟（三斤） 之例。
又 杂事门　十一曲（G） “九九八十一，　八九七十二， 七九六十三，　六九五十四，	案九九数，在中国，则一二世纪敦煌汉简，和居延汉简，都已著录，却未曾记着： “一九九；……　一二二；　一一一”。 又敦煌千佛洞内“《算经》一卷［并序］”，和“《立成算经》一卷”，虽九九次序亦从大到小，方记着： “一九九；……一二二；一一一”，

(续)

(《口游》原文)	(注文)
五九卌五，　四九三十六， 三九廿七，　二九十八， 一九九； (中略) 三三九，　二三六，　一三三； 二二四，　一二二； 一一一。谓之九九。" "十、百、(千)、万、亿、兆、京、嫁、穰、讲、门、正。"(G)	则和《口游》所记相同。 朝鲜南秉吉在公元1867年所编《算学正义》共三编，其中"九九"尚从"九九八十一，八九七十二……"开始记录。

《口游》杂事门最后"人事篇第十"记产妇问题一问之外，又记病者问题二问，其中产妇问题一问，和中国《孙子算经》所记相同。至病者问题，以后吴敬《九章算法比类大全》(1450年)卷首亦有记录，文句略有不同。



《口游》又有竹束一问如下：

"今有竹束，周员二十一，问总数几卜ル？

曰：卌八。

术曰：置周员加三竿，自乘得五百七十六，以十二除，得卌八。

口传曰：不尽法半已上者，取一从总数，以六为法半。"

如题意：

$$3+(3+6)+(3+6+6)+(3+6+6+6)=48$$

$$(21+3)^2\div 12=48$$

或　$3+(3+6)+(3+2\times 6)+\cdots\cdots+(3+6n)$

$$=3(n+1)+6n(n+1)\times\frac{1}{2}=\frac{6(n+1)^2}{2}$$

$$=\frac{(6n+6)^2}{12}=\frac{\{(6n+3)+3\}^2}{12}$$

其中 3＝首项， P＝周＝末项

n＝项数， S＝总数＝$\frac{(P+3)^2}{12}$

此项等差级数求总数方法，在中国算书：《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》都有著录。

《口游》最后称：

世俗云：十千曰万，十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰(经)，十经曰嫁。嫁犹是大数也，百千俱胝，即十万亿。

《口游》最后又续称：

亿有四位：一者十万，二者百万，三者千万，四者万万。今者言亿者，即是万万。为显此义，举那由多已。

按《数术记遗》引："黄帝为法，数有十等。及其用也，乃有三焉。……三等者，谓上、中、下也。其下数者十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也；……上数者数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。"唐贞观末(约公元650年)唐释玄应撰《一切经音义》(《大唐众经音义》)卷六注：《妙法莲华经》第六卷内"亿载"条称："《算经》皇(黄)帝为法，数有十等，……及其用也有三，谓上中下，下数十万曰亿，中数百万曰亿，上数万万曰亿。"又同书卷二十一注：《大乘十轮经》第一卷内"三兆"条称："黄帝算有三品，或十亿(曰兆)，或百亿(曰兆)，或千亿(曰兆)也。"是唐代已有十进，百进，千进，倍进的解说。至宋法云归纳为四等。故宋法云《翻译名义集》(1143年)引称：

亿分四等，一：以十万为亿，二：以百万为亿，

三:以千万为亿,四:以万万为亿。

和《口游》上文所记"亿有四位……"意义相同。《口游》以前本文引"十亿曰兆,十兆曰经"等等,是第一种下数(十进)记法,又以前本文引"亿亿为兆,兆兆为京"等等,是第四种上数(倍进)记法,连同"俱胝","那由多"各名词,都是受中国所翻译佛经的影响。

中算家的内插法研究

李 俨

编 者 说 明

插值法是中国古代数理天文学中的一项重要成就，自清初梅文鼎以来不少学者都对它作过研究，其中富有创意的先后有李善兰、薮内清、严敦杰和钱宝琮等人的工作，李俨先生于1957年出版的《中算家的内插法研究》则是一部系统论述这一课题的专著。全书以散见于历代史志和数学著作中的原始文献为基础，加以数理分析，不但给出了自隋刘焯迄元郭守敬以来诸历家所应用之插值方法的演进脉络，亦旁及同时代数学著作中的相关内容及对东邻日本的影响，是该研究领域中的经典著作和后来一系列研究工作的一个现代起点。

《李俨钱宝琮科学史全集》编辑委员会

目　录

(一)自变数等间距内插法说明…… 289
1. 内插法绪言 …… 289
2. 内插法的差分表 …… 290
3. 自变数等间距内插公式的计算 …… 294
(二)自变数不等间距内插法说明…… 298
1. 基础均差表 …… 298
2. 自变数不等间距内插公式的计算 …… 302
(三)中国历法对内插法的应用…… 313
1. 刘焯 …… 313
2. 刘焯《皇极历术》第一 …… 314
3. 刘焯《皇极历术》第二 …… 320
4. 刘焯《皇极历术》第三 …… 322
5. 刘焯《皇极历术》第四 …… 325
6. 傅仁均《戊寅历》 …… 326
7. 李淳风 …… 327
8. 李淳风《麟德历术》第一 …… 327
9. 李淳风《麟德历术》第二 …… 329
10. 李淳风《麟德历术》第三 …… 331

11. 李淳风《麟德历术》第四 …… 332
12. 李淳风《麟德历术》第五 …… 333
13. 僧一行《大衍历术》法 …… 335
14. 僧一行以后各家历法 …… 345
15. 秦九韶《数书九章》对内插法的应用 …… 350
16. 郭守敬《授时历》,平立定三差法 …… 357
(四)中国算法对内插法的应用…… 371
1. 绪论 …… 371
2. 沈括 …… 374
3. 朱世杰 …… 375
4. 元丁巨、贾亨和《透帘细草》…… 382
5. 清梅文鼎、李子金 …… 383
6. 珠算蝉联法 …… 386
(五)日本历算法对内插法的应用…… 394

(一)自变数等间距内插法说明

1. 内插法绪言

我们首先简单的说明内插法，因“近似计算法”方面“内插法”(интерполирование)是重要的一个节目。如我们提出自变数的 n 个数值：

$$X: \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n,$$

便可算出它的相应函数 $f(x)$ 的 n 个数值：

$$f(x) \text{ 或 } U_x: \quad U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}, U_{x_4}, \cdots, U_{x_n}。$$

如举数值列表来说明，就是：

$$X: \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$$

可以和

$$f(x) \text{ 或 } U_x = x^3: \quad 1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots$$

相对照。以上所列 X 的各值，间距是相等的，这是自变数有等间距的条件。现在根据这个条件，如在 $x=4.26$ 内插数值上，求内插函数 $U_x=(4.26)^3$ 的数值，或求自变数用有限增量 $h=0.5$ 递加时各函数值，都需要内插公式来计算。在国外说明比较明显的，是公元

1670 年的格列高里(James Gregory)①。

内插法在天文学、统计学、人寿保险学以及应用工程学和数学本身,都有应用。我国《九章算术》第七章盈不足术是一种最简单的内插法,就是一次内插法。隋刘焯(544～610)在其《皇极历》中所用的是等间距二次内插法。

唐僧一行(683～727)《大衍历》(公元 724 年)用不等间距二次内插法来计算。元郭守敬(1231～1316)《授时历》(1281 年)用等间距三次内插法来计算,是比较显著的,宋元算家,即公元十一到十四世纪中国数学家,还应用这原则来研究高次方程内近似解法和级数的计算。内插法还和贾宪开方作法本原图以及增乘开方法都有关系,所以内插法是中国数学家知道较早,研究较成熟的科目。现在先说明内插法的基础理论。

2. 内插法的差分表

"内插法"的重要作用是差分(разность)表。例如记录自变数 x 的函数成 U_x,这自变数 x,是由等间距 h,逐渐改变成 $x+h$,$x+2h$,$x+3h$,…,因此和它相对照的函数 U_x,也逐渐改变成 U_{x+h},U_{x+2h},U_{x+3h},…。

其中 $U_{x+h}-U_x$ 称做函数 U_x 的第一次有限差分(一差),写成 ΔU_x,$U_{x+2h}-U_{x+h}$称做函数 U_{x+h}的第一次有限差分,写成 ΔU_{x+h},$U_{x+3h}-U_{x+2h}$称做函数U_{x+2h}的第一次有限差分,写成 ΔU_{x+2h},逐次如此

$$U_{x+nh}-U_{x+(n-1)h}=\Delta U_{x+(n-1)h}; \qquad \text{(一差)}$$

① 参看本编第 3 节"自变数等间距内插公式的计算"内注文。

又 $\Delta U_{x+h}-\Delta U_x$ 称做 U_x 的第二次差分(二差),写成 Δ^2U_x,$\Delta U_{x+2h}-\Delta U_{x+h}$称做 U_{x+h}的第二次差分,写成 Δ^2U_{x+h},逐次如此

$$\Delta U_{x+nh}-\Delta U_{x+(n-1)h}=\Delta^2U_{x+(n-1)h}; \qquad (二差)$$

又 $\Delta^2U_{x+h}-\Delta^2U_x$ 称做 U_x 的第三次差分(三差),写成 Δ^3U_x;又逐次如此 $\Delta^{n-1}U_{x+h}-\Delta^{n-1}U_x$ 称做 U_x 的第 n 次差分(n 差),写成 Δ^nU_x。

如将上述差分,记录如下表(表见次页)。

同理,

$$\Delta^nU_x=\Delta^{n-1}U_{x+h}-\Delta^{n-1}U_x$$

或

$$\Delta^{n-1}U_{x+h}=\Delta^nU_x+\Delta^{n-1}U_x$$

或

$$\Delta^{n-1}f(x+h)=\Delta^nf(x)+\Delta^{n-1}f(x)$$

又如 x 相续两值的差数都等于 1,或等于某一个等数 h,因此在函数 $f(x)$或 $U_x=x^3-17x^2-23x+159$ 方面就得到差分表如:

x	U_x	ΔU_x	Δ^2U_x	Δ^3U_x
0	159			
		−39		
1	120		−28	
		−67		+6
2	53		−22	
		−89		+6
3	−36		−16	
		−105		+6
4	−141		−10	
		−115		
5	−256			

基础差分表

自变数 $X=x+nh$ $n=0,1,2,3,4,\cdots$	随变数 $f(X)$或U_x	差分					
		第一次	第二次	第三次	……	第 $n-1$ 次	第 n 次
x	U_x				⋮		
		$\Delta U_x=\Delta_1$①			⋮		
$x+h$	U_{x+h}		$\Delta^2U_x=\Delta_1^2$		⋮		
		$\Delta U_{x+h}=\Delta_2$		$\Delta^3U_x=\Delta_1^3$	⋮		
$x+2h$	U_{x+2h}		$\Delta^2U_{x+h}=\Delta_2^2$		⋮	$\Delta^{n-1}U_x=\Delta_1^{n-1}$	
		ΔU_{x+2h}		$\Delta^3U_{x+h}=\Delta_2^3$	⋮		$\Delta^nU_x=\Delta_1^n$
$x+3h$	U_{x+3h}		Δ^2U_{x+2h}		⋮	$\Delta^{n-1}U_{x+h}=\Delta_2^{n-1}$	
		ΔU_{x+3h}			⋮		$\Delta^nU_{x+h}=\Delta_2^n$
$x+4h$	U_{x+4h}				⋮		

① 为简便起见，ΔU_x 或 $\Delta f(x)$写成 Δ_1；Δ^2U_x 或 $\Delta^2f(x)$写成 Δ_1^2，…余类推。

我们由上述定义，知道：

$$\Delta U_x = U_{x+h} - U_x,$$

$$\Delta^2 U_x = \Delta U_{x+h} - \Delta U_x = U_{x+2h} - 2U_{x+h} + U_x,$$

$$\Delta^3 U_x = \Delta^2 U_{x+h} - \Delta^2 U_x = U_{x+3h} - 3U_{x+2h} + 3U_{x+h} - U_x,$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 U_x &= \Delta^3 U_{x+h} - \Delta^3 U_x \\ &= U_{x+4h} - 3U_{x+3h} + 3U_{x+2h} - U_{x+h} - \\ &\quad - U_{x+3h} + 3U_{x+2h} - 3U_{x+h} + U_x,\end{aligned}$$

即：

$$\Delta^4 U_x = U_{x+4h} - 4U_{x+3h} + 6U_{x+2h} - 4U_{x+h} + U_x。$$

第四次差分(四差)$\Delta^4 U_x$ 左旁各随变数系数的数字 1,4,6,4,1。也就是和二项四次幂的各项系数相同。

同理：

$$\begin{aligned}\Delta^n U_x = U_{x+nh} - nU_{x+(n-1)h} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} U_{x+(n-2)h} - \cdots + \\ + (-1)^{n-1} nU_{x+h} + (-1)^n U_x。\end{aligned} \tag{1.1}$$

各系数又和二项式的系数相同。

再设一代数符号 E 表示自变数 x，渐加等间距 h 的随变数，如

$$EU_x = U_{x+h} = \Delta U_x + U_x$$

或

$$Ef(x) = f(x+h) = \Delta f(x) + f(x)。$$

两边的共同代数符号 U_x 或 $f(x)$ 同时省略，则

$$E = \Delta + 1$$

或

$$\Delta = E - 1,$$

$$\Delta^n = (E-1)^n。$$

上式(1.1)是由各随变数值来求各次差分值。以下再考虑如何

由各次差分值来求各随变数值。由上面差分表，可以看出：

$$U_{x+h}=U_x+\Delta U_x,$$

$$\begin{aligned}U_{x+2h}&=U_{x+h}+\Delta U_{x+h}=\Delta U_{x+h}+\Delta U_x+U_x\\&=(U_x+\Delta U_x)+(\Delta U_x+\Delta^2U_x)\\&=U_x+2\Delta U_x+\Delta^2U_x。\end{aligned}$$

在 ΔU_x，Δ^2U_x 式中，符号 Δ 和 Δ^2 本来不代表因子，不过为便利起见，在这符号上，上式也可改写成公式：

$$U_{x+2h}=U_x(1+2\Delta+\Delta^2)=(1+\Delta)^2U_x。$$

3. 自变数等间距内插公式的计算

$$\begin{aligned}U_{x+3h}&=U_{x+2h}+\Delta U_{x+2h}=\Delta U_{x+2h}+(\Delta U_{x+h}+\Delta U_x+U_x)\\&=(U_x+2\Delta U_x+\Delta^2U_x)+\Delta U_{x+h}+\Delta^2U_{x+h}\\&=U_x+2\Delta U_x+\Delta^2U_x+\Delta U_x+\Delta^2U_x+\Delta^2U_x+\Delta^3U_x\\&=U_x+3\Delta U_x+3\Delta^2U_x+\Delta^3U_x\end{aligned}$$

如前例改写成：

$$\begin{aligned}U_{x+3h}&=U_x(1+3\Delta+3\Delta^2+\Delta^3)\\&=(1+\Delta)^3U_x。\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}U_{x+nh}&=(1+\Delta)^nU_x\\&=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2U_x\\&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3U_x+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^tU_x+\cdots\end{aligned}$$

$$+\Delta^n U_x. \tag{1.2}$$

这公式即说明如何通过 $E=\Delta+1$,可以由各次差分值 ΔU_x,$\Delta^2 U_x$,$\Delta^3 U_x$,…,$\Delta^n U_x$ 来计算相对照随变数 U_{x+nh}的数值。

又以上

$$\begin{aligned} U_{x+nh} = U_x &+ \frac{n}{1}\Delta U_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 U_x \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 U_x + \cdots\cdots \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^t U_x + \cdots + \\ &+ \Delta^n U_x \end{aligned} \tag{1.2}$$

公式,还可以不通过 $E=\Delta+1$,同样直接由各次差分值 ΔU_x,$\Delta^2 U_x$,$\Delta^3 U_x$,…,求到相对照随变数 U_{x+nh}的数值。这里不再具述。

上式(1.2)格列高里(James Gregory)在公元 1670 年已经发现①。不过在教科书和在数学史上都称做自变数等间距的牛顿(Newton)内插公式。

至现在所称招差术,在欧洲实始于十七世纪。公元 1673 年莱白尼慈(Leibniz)曾由招差术法求算立方数,如

		0	0	0		
		6	6	6	6	
	6	12	18	24	30	
1	7	19	37	61	91	
0	1	8	27	64	125	216

(1.2)式中如令

① 见裘宗尧译,Whittaker-Robinson 著,《内插法》,引 *Rigand*,*Correspondence of Scientifie Men of the 17th Century*,2,p. 209.

$$x + nh = X,$$

即得

$$n = \frac{X - x}{h}, \frac{n-1}{2} = \frac{X - x - h}{2h}, \frac{n-2}{3} = \frac{X - x - 2h}{3h} \cdots$$

(1.2)式可改写成：

$$U_X = U_x + \frac{X - x}{h}\Delta U_x + \frac{(X - x)(X - x - h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 U_x +$$

$$+ \frac{(X - x)(X - x - h)(X - x - 2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^3}\Delta^3 U_x + \cdots +$$

$$+ \frac{(X - x)(X - x - h)\cdots(X - x - (n-2)h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)h^{n-1}}\Delta^{n-1} U_x +$$

$$+ \frac{(X - x)(X - x - h)\cdots(X - x - (n-1)h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot h^n}\Delta^n U_x。 \quad (1.3)$$

(1.2)式和(1.3)式，如 $\Delta^2 U_x$ 以后，即第三次差分 $\Delta^3 U_x$ 之值为零。还令

$$n = \frac{X - x}{h},$$

则

$$U_{x+nh} = U_x + \frac{n}{1}\Delta U_x + \frac{n(n-1)}{2!}[\Delta U_{x+h} - \Delta U_x]。$$

又令

$$\Delta U_x - \Delta U_{x+h} = s,$$

$$\Delta U_x + \Delta U_{x+h} = T,$$

则

$$\Delta U_x = \frac{T}{2} + \frac{s}{2}。$$

代入上式，得：

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + \frac{n(1-n)}{2}s + \frac{ns}{2}\right]$$

$$= U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2} \cdot s\right], \tag{1.4}$$

其中 $s = \Delta U_x - \Delta U_{x+h}$,

$T = \Delta U_x + \Delta U_{x+h}$。

上式称做"自变数等间距二次内插公式"。

我国古代历法对内插法用处很大。如已知两个节气的数值,再求两个节气中间某一天的数值,隋代刘焯(544～610)曾应用

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2} \cdot s\right], \tag{1.4}$$

公式来计算"每日迟速数"(600),这就是中国历法上应用内插公式的开始。其中

$$\Delta U_x - \Delta U_{x+h} = s,$$

$$\Delta U_x + \Delta U_{x+h} = T\ 。$$

唐代李淳风也是应用刘焯的方式来计算《麟德历》(公元 664 年),所以也应用刘焯同样的公式

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2} \cdot s\right] \tag{1.4}$$

来算"各日消息数"。

可是刘焯和李淳风等历法家,对于这种内插法,都没有提出什么名称,也没说明它的做法。

(二)自变数不等间距内插法说明

1. 基础均差表

在“自变数等间距内插法说明”内指出自变数 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$ 各数的间距是相等的，此项计算手续比较简单，可是机会甚难遇到，这里因另对自变数不等间距内插法的计算作一说明。

同样我们给自变数的 n 个数值

$$a: \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

和它们的相对应函数的 n 个数值

$$f(a): \qquad f(a_0), f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots, f(a_n)$$

相对照，其中 $a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots, a_n-a_{n-1}$ 间距不相等。另外还有下列的记号，就是：

$$\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=f(a_1,a_0), \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f(a_2,a_1),$$

$$\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}=f(a_3,a_2), \cdots\cdots$$

称做第一次被除差，或第一次均差(разделённая разность)。

又

$$\frac{f(a_2,a_1)-f(a_1,a_0)}{a_2-a_0}=f(a_2,a_1,a_0),$$

$$\frac{f(a_3,a_2)-f(a_2,a_1)}{a_3-a_1}=f(a_3,a_2,a_1),$$

$$\frac{f(a_4,a_3)-f(a_3,a_2)}{a_4-a_2}=f(a_4,a_3,a_2),\cdots\cdots$$

称做第二次被除差,或第二次均差。

$$\frac{f(a_3,a_2,a_1)-f(a_2,a_1,a_0)}{a_3-a_0}=f(a_3,a_2,a_1,a_0),$$

$$\frac{f(a_4,a_3,a_2)-f(a_3,a_2,a_1)}{a_4-a_1}=f(a_4,a_3,a_2,a_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

称做第三次被除差,或第三次均差。

如将上述均差,记录如下表:

基础均差表

自变数 a	随变数 $f(a)$	被除差或均差		
		第一次	第二次	第三次
a_0	$f(a_0)$			
		$f(a_0,a_1)$		
a_1	$f(a_1)$		$f(a_0,a_1,a_2)$	
		$f(a_1,a_2)$		$f(a_0,a_1,a_2,a_3)$
a_2	$f(a_2)$		$f(a_1,a_2,a_3)$	
		$f(a_2,a_3)$		$f(a_1,a_2,a_3,a_4)$
a_3	$f(a_3)$		$f(a_2,a_3,a_4)$	
		$f(a_3,a_4)$		$f(a_2,a_3,a_4,a_5)$
a_4	$f(a_4)$		$f(a_3,a_4,a_5)$	
		$f(a_4,a_5)$		
a_5	$f(a_5)$			

现在先说明

$$f(a_1,a_0)=f(a_0,a_1),$$

$$f(a_2,a_1,a_0)=f(a_0,a_1,a_2)=\cdots,$$

$$f(a_3,a_2,a_1,a_0)=f(a_0,a_1,a_2,a_3)=\cdots$$

即函数内 $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots$ 各数字的次序可以互相换用，也说明它们和自变量次序无关。

如上述

$$f(a_1,a_0)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}\ \frac{f(a_1)}{a_1-a_0}-\frac{f(a_0)}{a_1-a_0}$$

$$=\frac{f(a_0)}{a_0-a_1}-\frac{f(a_1)}{a_0-a_1}\equiv f(a_0,a_1),$$

这说明

$$f(a_1,a_0)\equiv f(a_0,a_1);$$

又

$$f(a_2,a_1,a_0)=\frac{f(a_2,a_1)-f(a_1,a_0)}{a_2-a_0}$$

$$=\frac{1}{a_2-a_0}\left[\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}\right]$$

$$+\frac{1}{a_0-a_2}\left[\frac{f(a_1)}{a_1-a_0}+\frac{f(a_0)}{a_0-a_1}\right]$$

$$=\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}+\frac{f(a_1)}{a_2-a_0}\left(\frac{1}{a_1-a_2}-\frac{1}{a_1-a_0}\right)$$

$$+\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}$$

$$=\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

$$+\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}。$$

同样

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

$$f(a_0,a_1,a_2)=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

又

$$f(a_0,a_2,a_1)\text{ 或 }f(a_1,a_2,a_0)=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

或

$$=\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}+\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}。$$

这又说明

$$f(a_2,a_1,a_0)\equiv f(a_0,a_1,a_2)\equiv f(a_0,a_2,a_1)\equiv f(a_1,a_2,a_0)\text{ 等;}$$

同理,

$$f(a_3,a_2,a_1,a_0)\equiv f(a_0,a_1,a_2,a_3)\equiv f(a_0,a_2,a_1,a_3)\text{ 等等。}$$

同样

$$f(a_3,a_2,a_1,a_0)\text{ 或 }f(a_0,a_1,a_2,a_3)\text{ 或 }f(a_0,a_2,a_1,a_3)$$

$$=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{f(a_3)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

例如：

自变数 a	随变数 $f(a)$	被除数或均差			
		第一次	第二次	第三次	第四次
		$f(a_1,a_0)$	$f(a_2,a_1,a_0)$	$f(a_3,a_2,a_1,a_0)$	$f(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)$
$a_0=5$	150				
		121			
$a_1=7$	392		24		
		265		1	
$a_2=11$	1452		32		0
		457		1	
$a_3=13$	2366		46		
		917			
$a_4=21$	9702				

其中

$$\frac{392-150}{7-5}=121,\ \frac{1452-392}{4}=265,\ \frac{2366-1452}{2}=457,$$

$$\frac{9702-2366}{8}=917;\ \frac{265-121}{11-5}=\frac{144}{6}=24,$$

$$\frac{457-265}{13-7}=\frac{192}{6}=32,\qquad \frac{917-457}{21-11}=\frac{460}{10}=46;$$

$$\frac{32-24}{13-5}=\frac{8}{8}=1,\qquad \frac{46-32}{21-7}=\frac{14}{14}=1。$$

2. 自变数不等间距内插公式的计算

在前“自变数等间距内插公式的计算”中证明内插公式是：

$$f(x+nh)=f(x)+n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x)+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^t f(x)+\cdots$$

$$+\Delta^n f(x)。\tag{1.2}$$

或

$$U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 U_x+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^t U_x+\cdots$$

$$+\Delta^n U_x。\tag{1.2}$$

在上述基础均差表内，说明自变数 $a=a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots$ 时，随变数 $f(a)=f(a_0),f(a_1),f(a_2),f(a_3),\cdots$ 各值为已知。假令第三次均差各值相等，则第四次均差各值为零，或第 t 次均差各值相等，则第 $t+1$ 均差各值为零。

此时假定某值 U 为已知，则 $f(u)$ 的对照值也可求出。

如此组第三次各均差值皆相等，即

$$f(U,a_0,a_1,a_2)\equiv f(a_0,a_1,a_2,a_3)。$$

按定义

$$\frac{f(U,a_0,a_1)-f(a_0,a_1,a_2)}{U-a_2}=f(U,a_0,a_1,a_2),$$

即

$$f(U,a_0,a_1)=f(a_0,a_1,a_2)+(U-a_2)f(U,a_0,a_1,a_2)。$$

因第三次各均差值皆相等，所以得

$$f(U,a_0)=f(a_0,a_1)+(U-a_1)f(U,a_0,a_1)$$

$$=f(a_0,a_1)+(U-a_1)f(a_0,a_1,a_2)$$

$$+(U-a_1)(U-a_2)f(U,a_0,a_1,a_2)。$$

又

$$f(U)=f(a_0)+(U-a_0)f(U,a_0)$$

$$=f(a_0)+(U-a_0)f(a_0,a_1)$$

$$+ (U - a_0)(U - a_1)f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+ (U - a_0)(U - a_1)(U - a_2)f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \cdots。 \quad (2)$$

所以

$$f(U) = f(a_0) + (U - a_0)\{f(a_0a_1) + (U - a_1)$$
$$\times [f(a_0a_1a_2) + (U - a_2)f(a_0a_1a_2a_3)]\} + \cdots, \quad (2)$$

这是自变数不等间距内插公式，其中

$$f(U) = V_0 = f(a_0) + (U - a_0)V_1,$$
$$f(U, a_0) = V_1 = f(a_0, a_1) + (U - a_1)V_2,$$
$$f(U, a_0, a_1) = V_2 = f(a_0, a_1, a_2) + (U - a_2)V_3,$$
$$f(U, a_0, a_1, a_2) = V_3 = f(a_0, a_1, a_2, a_3) + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

现在如将不等间距的“基础均差表”内自变数，和等间距的“基础差分表”内自变数相对照，又令间距相等，可得：

自 变 数	随 变 数	第一次均差	第二次均差
$a_0=x$	$f(a_0)=U_x$		
		$f(a_0,a_1)$	
$a_1=x+h$	$f(a_1)=U_{x+h}$		$f(a_0,a_1,a_2)$
		$f(a_1,a_2)$	
$a_2=x+2h$	$f(a_2)=U_{x+2h}$		$f(a_1,a_2,a_3)$
		$f(a_2,a_3)$	
$a_3=x+3h$	$f(a_3)=U_{x+3h}$		$f(a_2,a_3,a_4)$
		$f(a_3,a_4)$	
$a_4=x+4h$	$f(a_4)=U_{x+4h}$		
……	……	……	……
$a_n=x+nh$	$f(a_n)=U_{x+nh}$	……	……

如已求得“自变数不等间距的内插公式”$f(a_n)=f(x+nh)$，代入(2)式得

$$f(a_n) = f(a_0) + (a_n - a_0)f(a_0, a_1) + (a_n - a_0)$$

$$(a_n - a_1)f(a_0,a_1,a_2) + (a_n - a_0)(a_n - a_1)$$
$$(a_n - a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3)。 \tag{2}$$

此时间距是相等的。

又

$$f(a_0,a_1) = f(x,x+h)$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x)}{h},$$
$$f(a_0,a_1,a_2) = \frac{\Delta f(x+h) - \Delta f(x)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{2h^2},$$
$$f(a_0,a_1,a_2,a_3) = \frac{\Delta^3 f(x)}{2 \times 3h^3}。$$

即可求得，

$$f(U) = f(x+nh) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x)$$
$$+ \cdots \tag{1.2}$$

和等间距内插公式相同。这说明可以由自变数不等间距内插公式，算出自变数等间距内插公式。

现在先举几个例来说明自变数不等间距内插公式的应用，如：

(例一)

在

$$f(a_n) = f(x+nh) = f(a_0)$$
$$+ (a_n - a_0)f(a_0,a_1)$$
$$+ (a_n - a_0)(a_n - a_1)f(a_0,a_1,a_2)$$
$$+ (a_n - a_0)(a_n - a_1)(a_n - a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3) + \cdots \tag{2}$$

式内，其中自变数不等间距，列表如下：

自变数	随变数	第一次均差	第二次均差	第三次均差	第四次均差
a	$f(a_0)$	$f(a_0,a_1)$	$f(a_0,a_1,a_2)$	$f(a_0,a_1,a_2,a_3)$	$f(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)$
$a_0=5$	150				
		121			
$a_1=7$	392		24		
		265		1	
$a_2=11$	1452		32		0
		457		1	
$a_3=13$	2366		46		
		917			
$a_4=21$	9702				

现求 $a_4=21$ 的函数(随变数)。

因为此组第三次各均差值皆相等,即

$$f(U,a_0,a_1,a_2)=f(a_0,a_1,a_2,a_3),$$

则

$$U=a_4=21$$

$$V_3=1,$$

$$V_2=32+(21-13)\times 1=40,$$

$$V_1=265+(21-11)\times 40=665,$$

$$V_0=392+(21-7)\times 665=9702。(合问)$$

或

$$U=a_4=21,$$

$$V_3=1,$$

$$V_2=24+(21-11)\times 1=34,$$

$$V_1=121+(21-7)\times 34=597,$$

$$V_0=150+(21-5)\times 597=9702。(合问)$$

(例二)

自变数	随变数	第一次均差	第二次均差	第三次均差	第四次均差
$a_0=5$	150				
		121			
$a_1=7$	392		26		
		329		1	
$a_3=13$	2366		42		0
		917			
$a_4=21$	9702				

求 $a_2=11$ 的函数(随变数)。

假如此组第三次各均差值皆相等,即

$$f(U,a_0,a_1,a_3)=f(a_0,a_1,a_3,a_4),$$

$$U=a_2=11,$$

$$V_3=1,$$

$$V_2=26+(11-13)\times 1=24,$$

$$V_1=121+(11-7)\times 24=217,$$

$$V_0=150+(11-5)\times 217=1452。(合问)$$

(例三)

自变数	随变数	第一次均差	第二次均差	第三次均差	第四次均差
a	$f(a)$	$f(a_0,a_2)$	$f(a_0,a_2,a_3)$	$f(a_0,a_2,a_3,a_4)$	$f(a_0,a_2,a_3,a_4,a_5)$
$a_0=5$	150				
		217			
$a_2=11$	1452		30		
		457		1	
$a_3=13$	2366		46		0
		917		1	
$a_4=21$	9702				

求 $a_1=7$ 的函数(随变数)。

假如此组第三次各均差皆相等,即

$$f(U,a_0,a_2,a_3)=f(a_0,a_2,a_3,a_4)。$$

即

$$U=a_1=7,$$

$$V_3=1,$$

$$V_2=30+(7-13)\times 1=24,$$

$$V_1=217+(7-11)\times 24=121,$$

$$V_0=150+(7-5)\times 121=392。(合问)$$

或

$$U=a_1=7,$$

$$V_3=1,$$

$$V_2=46+(7-21)=32,$$

$$V_1=457+(7-13)\times 32=265,$$

$$V_0=1452+(7-11)\times 265=392.(合问)$$

又在自变数不等间距内插公式中,

令 $$U=a_0+W_0,$$

则

$$\begin{aligned}f(U)&\equiv f(a_0+W_0)\\&=f(a_0)+(U-a_0)f(a_0,a_1)\\&\quad+(U-a_0)(U-a_1)f(a_0,a_1,a_2)\\&\quad+(U-a_0)(U-a_1)(U-a_2)f(a_0,a_1,a_2,a_3)。\end{aligned}\tag{2}$$

又令 $a_0=x$

自　变　数	随变数	第一次均差	第二次均差
$a_0=x$			
	$f(a_0)$		
$a_1=x+W_1$		$f(a_0,a_1)$	
	$f(a_1)$		$f(a_0,a_1,a_2)$
$a_2=x+(W_1+W_2)$		$f(a_1,a_2)$	
	$f(a_2)$		$f(a_1,a_2,a_3)$
$a_3=x+(W_1+W_2+W_3)$		$f(a_2,a_3)$	
	$f(a_3)$		
……	……	……	……
$a_n=x+(W_1+W_2+W_3+\cdots+W_n)$			

其中 $W_1,W_2,W_3\cdots$ 都不相等，自变数互减：

$U-a_0=W_0$,

$U-a_1=W_0-W_1$,　　又 $a_1-a_0=W_1$,　$a_1-a_0=W_1$,

$U-a_2=W_0-(W_1+W_2)$,　　$a_2-a_1=W_2$,　$a_2-a_0=W_1+W_2$,

$U-a_3=W_0-(W_1+W_2+W_3)$,　$a_3-a_2=W_3$,　$a_3-a_0=W_1+W_2+W_3$,

……　　……　　……

再如“基础差分表”的例，

令

第一次差分	第二次差分	第三次差分
$f(a_1)-f(a_0)=\Delta_1$		
	$\Delta_2-\Delta_1=\Delta_1^2$	
$f(a_2)-f(a_1)=\Delta_2$		$\Delta_2^2-\Delta_1^2=\Delta_1^3$
	$\Delta_3-\Delta_2=\Delta_2^2$	
$f(a_3)-f(a_2)=\Delta_3$		$\Delta_3^2-\Delta_2^2=\Delta_2^3$
	$\Delta_4-\Delta_3=\Delta_3^2$	
$f(a_4)-f(a_3)=\Delta_4$		

因此第一次被除差或均差应当写成：

$$f(a_0,a_1)=\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=\frac{\Delta_1}{W_1},$$

$$f(a_1,a_2)=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=\frac{\Delta_2}{W_2}。$$

又第二次被除差或均差应当写成：

$$f(a_0,a_1,a_2)=\frac{\frac{\Delta_2}{W_2}-\frac{\Delta_1}{W_1}}{a_2-a_0}=\frac{\frac{\Delta_2}{W_2}-\frac{\Delta_1}{W_1}}{W_1+W_2}=$$

$$=\frac{W_1\Delta_2-W_2\Delta_1}{W_1W_2(W_1+W_2)}。$$

这说明“不等间距内插法”也可通过“等间距内插法”的差分方式，来求不等间距的随变数。上面(2)式可改写成：

$$\begin{aligned}f(U)&=f(a_0+W_0)=f(x+W_0)\\&=f(x)+W_0\frac{\Delta_1}{W_1}+W_0(W_0-W_1)\frac{1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_2}{W_2}-\frac{\Delta_1}{W_1}\right)\\&=f(x)+W_0\frac{\Delta_1}{W_1}+\frac{W_0W_1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\&\quad-\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $f(a_0,a_1,a_2,a_3)=0$，即第三次被除差或均差等于零。

上式

$$\frac{\Delta_1}{W_1}+\frac{W_1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right),$$

因此(2)式，又可改写成：

$$\begin{aligned}f(U)&=f(x+W_0)\\&=f(x)+W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\cdot\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\end{aligned}\tag{2.2}$$

或

$$
\begin{aligned}
f(U) &= f(x+W_0) \\
&= f(x) + W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2} + W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right) \\
&\quad - \frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

其中 $f(a_0,a_1,a_2,a_3)=0$,即第三次被除差或均差等于零。

以上(2.1),(2.2),(2.3)各式称做"自变数不等间距二次内插公式"。

前此隋刘焯(544～610)根据"自变数等间距二次内插公式"来计算《皇极历》(公元600年),唐李淳风也根据这公式来计算《麟德历》(公元664年),即用下式:

$$
U_{x+nh} = U_x = \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2}\cdot s\right], \tag{1.4}
$$

其中

$$
s = \Delta U_x - \Delta U_{x+h},
$$

$$
T = \Delta U_x + \Delta U_{x+h}。
$$

僧一行(张遂,683～727)就根据"自变数不等间二次内插公式"来计算《大衍历》(公元724年),以后一百年徐昂还根据这公式来计算《宣明历》(公元822年)。

不过僧一行是用(2.2)式来算(三)"步日躔术"内"求每日先后定数",和(六)"步交会术"内"求每日积差定数"。

徐昂是用(2.1)式来算"每日盈朒分"。

元耶律楚材《庚午元历》(1216年)还用(2.1)式来"求每日盈缩朓朒"①。

---

① 见《元史》卷五十六,历志第八,历五,庚午元历上。

参 考 文 献

裘宗尧译，Whittaker-Robinson 著，《内插法》，第 1～98 页，上海，1936。

徐润炎、陆智常译，别席考维奇（Я. С. Безикович）著，《近似计算法》内第五章，插入法，第 104～140 页，北京，1954 年。

叶达译，А. И. Маркумевич 著，“有限差分学”，《苏联大百科全书》22 卷，载《数学通报》，1955 年 7 月号，第 14～17 页。

斯梯芬逊，《插补论》（Стефенсен И. Ф.，*Теория интерполяции*，пер. с. англ.，М.-Н. 1935）。

(三)中国历法对内插法的应用

上面(一)自变数等间距内插法说明,和(二)自变数不等间距内插法说明,是说明近代内插法的计算方法,以后再说明公元六世纪到十三世纪,在中国历算方面也有这项问题。不过只是二三次内插法的范围。它的演算,可能用比较简单的方式,就可得到说明。现在为读者认识统一起见,还应用内插法来说明。

1. 刘　焯

刘焯,字士元,信都昌亭人。父刘洽官郡功曹,……,焯少时和河间刘炫结盟为友,又和刘智海相交,刘智海家多旧藏书,焯和炫在家读书,前后十年,学问大有进步,因以儒学知名为州博士。刺史赵煚引做从事。到举秀才,射策甲科,又和著作郎王劭同应国史,兼参议律历,且直门下省,以待顾问。开皇六年(公元 586 年)运洛阳石经到京师,其中文字有磨灭不能知的,也由刘焯和刘炫共同考订。后来因为在国子学释奠礼时,刘焯和刘炫言论挫败诸儒士,他们都妬忌和怨恨刘焯,遂谤他,因被除名为平民。以后他就不问外事,专做著述和教书工作。生平又精通《九章算术》,《周髀》,《七曜历书》等十余部书。关于推步日月之经,量度山海之术,都核它的根

本，穷它的秘奥。刘焯在开皇二十年（公元600年）、仁寿元年（公元601年、四年（公元604年）前后上书论历，又上他所著的《七曜新术》、《皇极历》。又另著《稽极》十卷，《历书》十卷，其中《稽极》是说明理论，《历书》是说明应用。所以《隋书》卷十八《律历志》说："此但略校其总，若精，存于《稽极》云。"现在《稽极》已经失传，刘焯大业六年（公元610年）卒，年六十七（544～610）。

刘焯所上《七曜新术》和《皇极历》，前后都没有被采用。当时历算家已知它有特点，所以《隋书》第十八卷志第十三律历下还录存他的《皇极历法》。

因刘焯此时是深悉各节气中间陟降率，不是平行而是差行。换言之，即经过的线路，不是直线，而是曲线。因此在《皇极历》就用自变数等间距二次内插方法，来计算两气中间某段日的迟速。

实际上日行不平行，此时已引起天文家和历算家的注意，所以《新唐书》卷二十七下历志第十七下也说："北齐张子信积候合蚀加时，觉日行有入气差，然损益未得其正，至刘焯立盈缩躔衰术与四象升降，《麟德历》因之，更名躔差。"①

2. 刘焯《皇极历术》第一

"推每日迟速数术：

见求所在气陟降率（Δ_1），并后气率（Δ_2）半之；

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$$

n_1＝段日，或段日，$n_1=\frac{日限}{泛总}$。

① 李延寿《北史》卷八十二，列传第七十，儒林下，刘焯。
欧阳修《新唐书》第二十七卷下，历志第十七下。
魏征《隋书》第十八卷，志第十三，律历下，又第十九卷，志第十四，天文上，又第七十五卷，列传第四十，儒林。

以日限乘，而泛总除，得气末率。又日限乘，二率相减之残，泛总除，为总差。

其总差，亦日限乘而泛总除，为别差。率：前少者以总差减末率为初率(乃别差加之)①。

前多者，即以总差加末率，皆为初日陟降数。以别差〔半之〕*，前多者日减，前少者日加初数，得每日数。"

气末率：$n_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}=n_1\cdot\frac{T}{2}$。

总差：$n_1(\Delta_1-\Delta_2)=n_1s$。

别差：$n_1^2(\Delta_1-\Delta_2)=n_1^2s$。

$$n_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-n_1(\Delta_1-\Delta_2),$$

$$n_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-n_1(\Delta_1-\Delta_2)+n_1^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

其中，$\Delta_1<\Delta_2$。

又 $n_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+n_1(\Delta_1-\Delta_2)$，

$$n_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+n_1(\Delta_1-\Delta_2)-n_1^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

其中 $\Delta_1>\Delta_2$。

设段日：$n_1=\frac{1}{W_1}$。 $\Delta_1>\Delta_2$：

第一日末的每日陟降数是：

$$\frac{1}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

第 W_0 日末的每日陟降数是：

$$\frac{1}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{W_0}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

第 W_1 日末的每日陟降数是：

$$\frac{1}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{W_1}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$=\frac{1}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\quad\text{(即是气末率)。}$$

① (乃别差加之)，此五字衍文。

* 此括号中的〔半之〕为作者在其修改本中留下的笔迹，我们则对右边的公式作了相应的修改补充。——编者

入某气一日内陟降数是：

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{W_1}\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{W_1}\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)\right]\right\}。$$

入某气 W_0 日内陟降数是：

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{W_1}\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{W_1}\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)+\frac{1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{W_0}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)\right]\right\}$$
$$=\frac{W_0}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{W_0}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{W_0^2}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

入某气 W_1 日内陟降数是：

$$\frac{W_1}{W_1}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{W_1}{W_1}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{W_1^2}{W_1^2}(\Delta_1-\Delta_2)=\Delta_1。$$

与文义合。

$\Delta_1<\Delta_2$：

同理命 $n=\frac{W_0}{W_1}$，则入气 W_0 日内陟降数是：

$$n\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+n(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{n^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

“所历推定气日随算其数，陟加降减其迟速，为各迟速数”。

即 $\Delta_1>\Delta_2$ 时，

$$U_{x+nh}=U_x+\left[\frac{nT}{2}+ns-\frac{n^2}{2}s\right]。$$

上式和“自变数等间距二次内插公式”所举

$$U_{x+nh}=U_x+\left[\frac{nT}{2}+ns-\frac{n^2}{2}s\right] \tag{1.4}$$

式相同。

刘焯第一术是已知两气的陟降率和前一气的迟速数，求此两气间每日的迟速数。

刘焯段日，n_1 是用“日限乘，泛总除”，即：段日 $n_1=\frac{日限}{泛总}$。本来两气相隔约 15 日，但因迟速不平派，故段日不用$\frac{1}{15}$，分别用 16、17 除而 11 乘。

刘焯，《皇极历》(公元 600 年)用

日限，11 为分子，

(分别：秋分后用)盈泛，16 为分母，

(春分后用)亏总，17 为分母。

即段$n_1=\frac{11}{16}=\frac{日限}{盈泛}$，秋分后用盈泛此数除，

$n_1=\frac{11}{17}=\frac{日限}{亏总}$，春分后用亏总此数除。

以后李淳风《麟德历》(公元 664 年)称“泛总”做“纲纪”，并设：

进纲，16[秋分后]也用此数，

退纪，17[春分后]也用此数。

所称 16、17，即在盈泛(进纲)期内节气日数(定气)和在亏总(退纪)期内节气日数(定气)的比若 16∶17。

设　　盈泛(进纲)期内定气日数为 a，

亏总(退纪)期内定气日数为 b，

《皇极历术》第一附表(太阳行度计算)

(月中节)	(气)	(蹢衰) ΔU_{x_1}	(衰总) U_{x_1}	(陟降率) ΔU_x	(迟速数) U_x
十一月	大雪 冬至中	增+28	先端(0)	陟 50	速本(=0)
十二月	小寒节 大寒中	增+24 增+20	先 28 先 52	陟 (43)① 陟 36	速 50 速 93

① 凡表文内有括弧的数字和文字，都是校补的。

（续）

（月中节）	（气）	（疃衰）ΔU_{x1}	（衰总）U_{x1}	（陟降率）ΔU_x	（迟速数）U_x
正月	立春节 雨水中	增＋20 增＋24	先 72 先 92	陟 36 陟 43	速 129 速 165
二月	惊蛰节 春分中	增＋28 损－28	先 116 先 144	陟 50 （降）50	速（208） 速 258
三月	清明节 谷雨中	损－24 损－20	先 116 先 92	（降）43 （降）36	速 208 速 165
四月	立夏节 小满中	损－20 损－24	先 72 先 52	（降）36 （降）43	速 129 速 93
五月	芒种节 夏至中	损－28 增＋28	先（28） 后端（0）	（降）50 （陟）50	速 50 （速末，迟本＝0）
六月	小暑节 大暑中	增＋（24） 增＋20	后（28） 后 52	（陟）（43） （陟）36	迟（50） 迟 93
七月	立秋节 处暑中	增＋20 增＋24	后 72 后 92	（陟）36 （陟）（43）	迟 129 迟（165）
八月	白露节 秋分中	增＋28 损－28	后 116 后 144	（陟）50 （降）50	迟 208 迟 258
九月	寒露节 霜降中	损－24 损－20	后 116 后 92	（降）43 （降）36	迟 208 迟（165）
十月	立冬节 小雪中	损－20 损－24	后 72 后 52	（降）36 （降）43	迟 129 迟 93
十一月	大雪节 冬至	损－28 ＋（28）	后 28 （0）	（降）50 （50）	迟 50 迟 0

则

$$12(a+b)=365.25(\text{约数})$$

$$17a=16b$$

$$\therefore\quad a=\frac{16}{33}\times\frac{365.25}{12}。$$

在进纲时不用$\frac{1}{15}$，而用$\frac{1}{a}=\frac{1}{\frac{16}{12}\times\frac{365.25}{33}}$，其中$\frac{365.25}{33}\doteq 11$（《麟德历》称为泛差，及有“各以泛差通其纲纪以同差辰也”句。）

$$\frac{12}{12a}=\frac{12}{16\cdot\frac{365.25}{33}}=\frac{12}{16\cdot 11}$$

即

$$进纲时\frac{12}{16\cdot 11}=\frac{12}{176},$$

$$退纪时\frac{12}{17\cdot 11}=\frac{12}{187},$$

这 12 就是《大衍历》内的倍六爻，176 或 187 就是《大衍历》内的辰数。

《皇极历》不用上式的$\frac{12}{16\cdot 11}$或$\frac{12}{17\cdot 11}$，$\frac{12}{11}$约等于$\frac{11}{10}$，故上式变为$\frac{11}{16.10}$或$\frac{11}{17.10}$，当为《皇极历》所本。

如求入清明气后三日内速数：

$$\Delta_1=43,\Delta_2=36,$$

$$\left[\frac{11}{17\times 10}\times 3\times\frac{43+36}{2}+\frac{11}{17\times 10}\times 3\times(43-36)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{17\times 10}\right)^2\times 3^2\times(43-36)\right]$$
$$=\left[\frac{3.3}{17}\times 39.5+\frac{3.3}{17}\times 7-\frac{9}{2}\times\frac{1.21}{289}\times 7\right]$$
$$=\left[\frac{3.3}{17}\times 46.5-\frac{10.89}{578}\times 7\right]$$
$$=[9.026-0.131]=[8.895]。$$

检表清明节是“降”故

入清明气后三日内速数＝清明速数－8.895

＝258－8.895＝249.105。

3. 刘焯《皇极历术》第二

“求月朔弦望应平会日所入迟速：

各置其经余为辰，以入气辰减之。乃日限乘日，日内辰为入限。以乘其气前多之末率，前少之初率，日限而一，为总率。其前多者入限减泛总之残。乘总差，泛总而一为入差。并于总差，入限乘，倍日限除，〔加〕以总率；前少者入限〔自乘〕①，再乘〔别差〕。日限自乘，倍而除。亦加总率，皆为总数，及以陟加降减其气迟速数为定。”

如上述总结得：

$$U_{x+nh}=U_x+$$
$$+\left[\frac{nT}{2}+ns-\frac{n^2}{2}\cdot s\right],(1.4)$$

其中 $s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h}$，

$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h}$。

本术是加入小余后，求其段日，$n_2=\frac{入限}{泛总}$的迟速。

现先求 $n_2=\frac{入限}{泛总}$之值。

又因： 气末率$=\frac{n_1T}{2}$，

则 $\frac{入限}{日限}\times$（气末率）

$$=\frac{入限}{日限}\left(\frac{日限}{泛总}\cdot\frac{T}{2}\right)$$
$$=\frac{入限}{泛总}\cdot\frac{T}{2}=n_2\frac{T}{2}$$
$$=总率.$$

其中 $n_2=\frac{入限}{泛总}$。

又 总差$=n_1(\Delta U_x-\Delta U_{x+h})=n_1s=\frac{日限}{泛总}\times s=n_1s$ 。

① 以后引文内凡方括弧的字，都是校补（或改）的文字和数字。此处〔自乘〕二字，系严郭杰校补，其余由本人校补。

由本术术意

前多者：

$$入差=\frac{(泛总-入限)\times\frac{日限}{泛总}\times s}{泛总}=(1-n_2)n_1s。$$

又 $$总数=(入差+总差)\times\frac{入限}{2\cdot日限}+总率\left(=n_2\cdot\frac{T}{2}\right)$$

$$=[(1-n_2)n_1s+n_1s]\times\frac{1}{2}\times\frac{n_2}{n_1}+n_2\cdot\frac{T}{2},$$

其中 $$\frac{n_2}{n_1}=\frac{入限}{日限}=\frac{入限}{泛总}\div\frac{日限}{泛总},$$

即 $$总数=\left[\frac{n_2T}{2}+\frac{n_2(1-n_2)s}{2}+\frac{n_2}{2}s\right],$$

如前亦得

$$总数=\left[\frac{n_2T}{2}+n_2s-\frac{n_2^2}{2}s\right]。\tag{1.4}$$

前少者：

$$总数=\frac{(入限)^2\times(别差)}{2(日限)^2}+总率\left(=\frac{n_2T}{2}\right)$$

$$=\frac{(入限)^2+\frac{(日限)^2}{(泛总)^2}\cdot s}{2(日限)^2}+总率,$$

其中 $$别差=n_1^2(\Delta U_x-\Delta U_{x+h})=n_1^2\cdot s=\frac{(日限)^2}{(泛总)^2}\cdot s,$$

即 $$总数=\left[\frac{n_2T}{2}+\frac{n_2(1+n_2)s}{2}-\frac{n_2s}{2}\right]。$$

如前得：$$总数=\left[\frac{n_2T}{2}+0+\frac{n_2^2s}{2}\right],$$

$$定=f(a)+总数。$$

4. 刘焯《皇极历术》第三

"推朔弦望定日术：

各以月平会所入之日加减限，〔前〕[1] 限并后限而半之为通率，又二限相减为限衰。前多者，以入余减终法，残，乘限衰，终法而一，并于限衰而半之；前少者半入余乘限衰，亦终法而一。皆加通率，入余乘之，日〔终〕法而一，所得为平会加减限数"。

"其限数又别从转余为变余，朓减朒加本入余限。前多者，朓以减与未减，朒以加与未加，皆减终法，并而半之，以乘限衰；前少者亦朓朒各并二入余半，以乘限衰，皆终法而一，加于通率，变余乘之，日〔终〕法而一，所得以朓减朒加限数，加减朓朒积(U_x)而定朓朒"。

$$通率=\frac{\Delta U_x+\Delta U_{x+h}}{2}=\frac{T}{2}。$$

$$限衰=\Delta U_x-\Delta U_{x+h}=s,$$

$$n_3=\frac{入余}{终法}。$$

平会加减限数：(前多者)：

$$\frac{入余}{终法}\left\{通率+\frac{1}{2}\left[(终法-入余)\times\frac{限衰}{终法}+限衰\right]\right\},$$

即

$$限数=n_3\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_3)s+s]\right\}=\left[\frac{n_3T}{2}+n_3s-\frac{n_3^2s}{2}\right].\quad(1.4)$$

(前少者)：同理

$$限数=\left[\frac{n_3T}{2}+0+\frac{n_3^2s}{2}\right]。$$

$$n_m=\frac{变余}{终法}+\frac{入余}{终法}。$$

又令

$$n_m=\frac{变余}{终法}+n_3,即\ n_m-n_3=\frac{变余}{终法}。$$

---

① 引文内方括弧的字，都是校补的文字和数字。

又〔前多者〕术称："朓以减〔变余〕与未减〔变余〕，朒以加〔变余〕与未加〔变余〕，皆减终法，并而半之。"如

$$\frac{1}{2}\{[\text{终法}-(\text{入余}+\text{变余})]+[\text{终法}-\text{入余}]\}$$

$$=\left[\text{终法}-\left(\text{入余}+\frac{\text{变余}}{2}\right)\right]。$$

将

$$\frac{\text{变余}}{\text{终法}}=n_m-n_3\text{的}\left[\text{终法}-\left(\text{入余}+\frac{\text{变余}}{2}\right)\right]\frac{\text{限衰}}{\text{终法}}$$

和

$$\frac{\text{入余}}{\text{终法}}=n_3\text{的}\frac{1}{2}\left[(\text{终法}-\text{入余})\frac{\text{限衰}}{\text{终法}}+\text{限衰}\right]$$

相对照，所以"变余的限数"为

$$\frac{\text{变余}}{\text{终法}}\left\{\text{通率}+\left[\text{终法}-\left(\text{入余}+\frac{\text{变余}}{2}\right)\right]\frac{\text{限衰}}{\text{终法}}\right\},$$

即

$$(n_m-n_3)\left\{\frac{T}{2}+\left[1-\left(n_3+\frac{n_m-n_3}{2}\right)\right]s\right\}$$

$$=(n_m-n_3)\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[1-n_3+1-n_m]s\right\},$$

如再加 n_3 的限数，即得 n_m 的限数，因

$$(n_m-n_3)\left\{\frac{T}{2}+\left[1-\left(n_3+\frac{n_m-n_3}{2}\right)\right]s\right\}$$

$$+n_3\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_3)s+s]\right\}$$

$$=(n_m-n_3)\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_3)+1-n_m]s\right\}$$

$$+n_3\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_3)s+s]\right\}$$

$$=n_m\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_m)+1-n_3]s\right\}+\frac{1}{2}n_mn_3s$$

$$=n_m\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_m)+1]s\right\}-\frac{1}{2}n_mn_3s+\frac{1}{2}n_mn_3s,$$

$$n_m\text{的限数}\equiv\left[\frac{n_mT}{2}+n_ms-\frac{n_m^2}{2}s\right]。$$

《皇极历术》第三附表

(转日)	(速分)U_{x_1}	(违差)ΔU_{x_1}	(加减)ΔU_x	朓朒积 U_x
1	764	消 7	加 68	朓初
2	757	8	61	朓 123
3	749	11	53	(朓 234)
4	(738)	12	42	朓 331
5	726	13	31	朓 408
6	713	13	18	(朓 463)
7	700	消 13	加 5;减秒太,9 分:8 加 1 减	朓 496
8	688	消 14	减 7	朓 505
9	674	消 14	减 21	朓 492
10	660	消 12	减 34	朓 454
11	648	消 9	减 46	朓 391
12	639	消 7	减 55	朓 307
13	632	消 6	减 62	朓 207
14	626	息 2	减 56;减 7 加 16,2 加	朓 94
15	628	息 7	加 66	朒 28
16	635	息 9	加 59	朒 148
17	644	息 11	加 50	朒 256
18	655	息 11	加 39	朒 347
19	666	息 13	加 29	(朒 418)
20	679	息 14	加 16	朒 471
21	693	息 12	加 36 加 减 6;3 减	朒 500
22	705	息 14	减 17	朒505 当日自见为 504
23	719	息 13	减 23	朒 488
24	(731)	息 12	减 36	朒 446
25	744	息 10	减 48	朒 380
26	754	息 7	减 58	朒 293
27	761	息 5 篾 4	减 65	朒 188
28	766	篾平 5 息 4 消	减 70、38 少终余 41 太全余	朒 70

5. 刘焯《皇极历术》第四

"求月入交去日道：

皆同其数，以交余为秒积，以后衰并去交衰，半之为通数，进(者)秒积减衰法，以乘衰，交法除而并衰以半之；退者半秒积以乘衰，交法而一，皆加通数，秒积乘，交法除，所得以进退衰积(U_x)"。

如术意

$$\text{通数}=\frac{\Delta U_x+\Delta U_{x+h}}{2}=\frac{T}{2},$$

$$\text{衰法}=\Delta U_x-\Delta U_{x+h}=s。$$

$$n_4=\frac{\text{秒积}(=\text{交余})}{\text{交法}},$$

又

$$s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h},$$

$$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h},$$

则

$$U_{x+n_4h}=U_x+n_4\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_4)s+s]\right\}$$

$$=U_x+\left[\frac{n_4T}{2}+n_4s-\frac{n_4^2}{2}s\right], \tag{1.4}$$

其中

$$s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h},$$

$$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h}$$

亦和以前各术相类，都由内插公式

$$U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n(n-1)}{2!}[\Delta U_{x+h}-\Delta U_x]$$

得来。

6. 傅仁均《戊寅历》

唐傅仁均《戊寅历》(公元619年),是在刘焯《皇极历》(公元600年)之后,李淳风《麟德历》(公元664年)之前。《戊寅历》(公元619年)章岁676,章闰249的数值,是和北齐宋景业《天保历》(公元550年)和刘焯《皇极历》(公元600年)的相同,并曾假定天体行度有平行和差行两项。

刘昫《旧唐书》卷三十二律历志注文说明平行和差行称:

〔求〕平行分者,置定行度率,以分法乘之,以定日率除之,所得即平行一日之分,不尽为小分。

求差行分者,置日之数减一,讫,又半之,加平行一日之分,为初日行分。

这说明在公式

$$U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2U_x+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3U_x+\cdots \qquad (1.2)$$

中:

平行一日之分,是以 Δ^2U_x 项,及以下各项全为零。

全式以: $U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x$ 入算;

差行一日之分,以 Δ^3U_x 项,及以下各项全为零。

全式以: $U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n-1}{2}\left(\frac{n}{1}\Delta^2U_x\right)$ 入算。

7. 李 淳 风[1]

唐李淳风《麟德历》(公元 664 年),唐麟德元年(公元 664 年)李淳风造。刘昫《旧唐书》第三十二卷志第十二历一称:

初隋末刘焯造《皇极历》,其道不行,淳风约之为法,时称精密。

又《旧唐书》第三十三卷志第十三历二"求朔弦望盈朒日辰入变迟速定数术"注称:

此法微密至当,以示算理通涂,若非朔望有交,及欲考校(据)速要者,但以入余乘增减率,总法而一,增减速为要耳。

其中　　李淳风《麟德历》的躔差率,消息总,

即　　刘焯《皇极历》的躔衰,衰总。

8. 李淳风《麟德历术》第一

求次气日检盈虚术[2]:

见所在〔前〕气躔差率,并后气(躔差)率半之,总辰(=12)乘之,纲纪而一,得气末率,各以泛差通其纲纪以同差辰也。又二率相减,余以总辰(=12)乘(之),而〔纲〕纪除之为总差。〔总差又以总〕辰(=12 乘)之,纲纪除之,为别差。率前少者以总差减末率,前多者以总差加〔末率〕。〔加〕减讫皆为其气初日损益率。

---

① 李淳风,《旧唐书》卷七十九列传第二十九,下同。李淳风,和《新唐书》卷二百零四列传第一百二十九方技李淳风传。

② 以下引《旧唐书》,据《新唐书》校字,并参看刘焯《皇极历术》第一,下同。

前多者以别差〔半〕日减〔初率〕，前少者以别差〔半〕日加〔初率〕。加减气初日损益率讫，即次日损益率亦名每日躔差率。以次加减得每日所求，各累所损益，随历定气损益消息总，各为其日消息数。

如前例，先令：　　前气躔差率$=\Delta U_x$，

后气躔差率$=\Delta U_{x+h}$，

$$n_1=\frac{\text{总辰}(=12)}{\text{纲纪}},\text{气末率}=\frac{n_1(\Delta U_x+\Delta U_{x+h})}{2}=\frac{n_1T}{2},$$

$$\text{总　差}=n_1(\Delta U_x-\Delta U_{x+h})=n_1s,$$

$$\text{别差率}=n_1^2(\Delta U_x-\Delta U_{x+h})=n_1^2s,$$

其中　$s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h}$，

$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h}$。

则　$U_{x+nh}=U_x+$ 次日损益率(每日躔差率)。

（前多者）　$$=U_x+\underbrace{\left[\frac{nT}{2}+ns\right.}_{\text{气初日损益率}}\underbrace{\left.-\frac{n^2}{2}\cdot s\right]}_{\text{半别差率}}\qquad(1.4)$$

如附表冬至至春分消息总为前多。

（前少者）　$U_{x+nh}=U_x+\left[\frac{nT}{2}-ns+\frac{n^2}{2}\cdot s\right]$。

如附表春分至夏至消息总为前少。

《麟德历术》第一附表

(气)	(月中节)	(躔差率)ΔU_{x_1}	(消息总)U_{x_1}	(先后率)ΔU_x	(盈朒积)U_x
冬至	子月中	益+722	息初(0)	先+54	盈(初)=0
小寒	丑月(节)	益+(618)①	息 722	先+46	盈 54
大寒	丑月中	益+514	息 1340	先+38	盈 100
立春	寅月节	益+514	息 1854	先+38	盈 138

① 凡表文内有括弧的数字和文字都是据《新唐书》校补的。

(续)

(气)	(月中节)	(朔差率)ΔU_{x_1}	(消息总)U_{x_1}	(先后率)ΔU_x	(盈朒积)U_x
惊蛰	寅月中	益+618	息 2368	先+46	盈 176
雨水	卯月节	益+722	息 2986	先+54	盈 222
春分	卯月中	损−722	息 3708	后−54	盈 276
清明	辰月节	损−618	息 2986	后−46	盈 222
谷雨	辰月中	损−(514)	息 2368	后−38	盈 176
立夏	巳月节	损−514	息 1854	后−38	盈 138
小满	巳月中	损−618	息 1340	后−46	盈 100
芒种	(午)月节	损−(722)	息 722	后−54	盈 54
夏至	午月中	益 722	消初(0)	先 54	朒(初)=0
小暑	未月节	益 618	消 722	先 46	朒 54
大暑	未月中	益 514	消 1340	先 38	朒 100
立秋	申月节	益 514	消 1854	先 38	朒 138
处暑	申月中	益 618	消 2368	先 46	朒 176
白露	酉月节	益 722	消 2986	先 54	朒 (222)
秋分	酉月中	损−722	消 3708	后−54	朒 276
寒露	戌月节	损−618	消 2986	后−46	朒 222
霜降	戌月中	损−514	消 2368	后−38	朒 176
立冬	亥月节	损−514	消 1854	后−38	朒 138
小雪	亥月中	损−618	消 1340	后−46	朒 100
大雪	子月节	损−722	消 722	后−54	朒 54

9. 李淳风《麟德历术》第二

求朔弦望恒日恒所入盈缩数术：

各以总辰乘其所入定气日算朒朔弦望夜半后辰数，乃以

所入定气夜半后辰数减之，余为辰总，其恒朔弦望与定气同日而辰多者，其朔弦望，即在前气气末，而辰总时有多于进纲纪通数者，疑入后气之初也。以乘其气前多之末率，前少之初〔率〕，总辰（＝12）而一为总率，凡须相乘有分余者，母必通全子乘记报母，异者齐同也。其前多者辰总减〔纲〕纪乘总〔辰〕（＝12）纲纪而一为（x）差，并于总率差，辰总乘之，倍总辰（24）除之，以加总率。前少者辰总再乘别差，总辰自乘倍（288）而除之，以加总率，皆为总数。

乃以先加后减其气〔盈〕朒积为定积。凡分余不成全，而更不复须者，过半更不后夜无气也。

李淳风《麟德历术》第二，和刘焯《皇极历术》第二，术意完全相同，只有术语数处不同，如：

刘焯《皇极历术》	入限	终法	限衰	日　限	泛总	入差	总差
李淳风《麟德历术》	辰总	总法	率差	总辰（＝12）	纲纪	（入）差	总（率）差

余照旧。亦可算得，

$$总数=\left[\frac{n_2T}{2}+n_2s-\frac{n_2^2s}{2}\right]。\tag{1.4}$$

《麟德历术》第二附表

（变日）	（离差）	（离程）	（增减率）ΔU_x	（迟速积）U_x
1	985	退 11	增 134	速初
2	974	退 12	增 117	速 134
3	962	退 14	增 99	速 251
4	948	退 15	增 78	速 350
5	933	退 15	增 56	速 428
6	918	退 16	增 33	速 484
7	902	退 16	初增 9 末减隐	速 517
8	886	退 16	减 14	速 526
9	870	退 16	减 38	速 512

(续)

(变日)	(离差)	(离程)	(增减率)ΔU_x	(迟速积)U_x
10	854	退 15	减(62)	速 474
11	839	退 13	减 85	速 412
12	826	退 11	减 104	速 327
13	815	退 7	减 121	速 223
14	808	进 2	初减 102 末增 29	速 102
15	810	进 9	增 128	迟 29
16	819	进 13	增 115	迟 157
17	832	进 14	增 95	迟 272
18	846	进 15	增 74	迟 367
19	861	进 16	增 52	迟 441
20	877	进 16	增 28	迟 493
21	893	进 16	初增 4 末减隐	迟 521
22	909	进 16	减 20	迟 525
23	925	进 16	减 44	迟 505
24	941	进 14	减 68	迟 461
25	955	进 13	减 89	迟 393
26	968	进 11	减 108	迟 304
27	979	进 6	减 125	迟 196
28	985	平 进 5 退 5	初减 71 末增入微	迟 71

10. 李淳风《麟德历术》第三

求朔弦望盈朒日辰入变迟速定数术：

各〔列〕其〔朔弦望盈朒经辰〕所入日增减率，并后率而半之为通率，又二率相减，余为率差。增者以入〔变历日〕余减总法，余乘率差。总法而一，并率差而半之。减者半入余乘率差，亦总〔法〕而一，并以加于通率，入余乘之，总法而一，所得为经辰变转〔率〕。

半经辰变速减法迟加盈朒经辰所入余为转余。〔其转余〕应增者减法，应减者因余，皆以乘率差，总法而一，加于通率，变率乘之，总法而一，以速减迟加变率为定率。乃以定率增减迟速积为定。此法微密至当，以示算理通涂〔途〕，若非朔望有交，及欲考校〔据〕速要者，但以入余乘增减率，总法而一，增减速为要耳。

如术意

$$\Delta U_x = \text{其所入日增减率},$$

$$\Delta U_{x+h} = \text{其所入日增减率后率},$$

$$\text{通率} = \frac{\Delta U_x + \Delta U_{x+h}}{2} = \frac{T}{2},$$

$$\text{率差} = \Delta U_x - \Delta U_{x+h} = s,$$

$$n_3 = \frac{\text{入余}}{\text{总法}}。$$

增者：

$$\text{定率} = \frac{\text{入余}}{\text{总法}}\left\{\text{通率} + \frac{1}{2}\left[(\text{总法} - \text{入余})\frac{\text{率差}}{\text{总法}} + \text{率差}\right]\right\}$$

$$= n_3\left\{\frac{T}{2} + \frac{1}{2}[(1 - n_3)s + s]\right\}$$

$$= \left[\frac{n_3 T}{2} + n_3 s - \frac{n_3^2 s}{2}\right],$$

其中

$$n_3 = \frac{\text{入余}}{\text{总法}} = 1 - \frac{(\text{总法} - \text{入余})}{\text{总法}},$$

$$1 - n_3 = \frac{\text{总法} - \text{入余}}{\text{总法}}。$$

11. 李淳风《麟德历术》第四

求月入交去日道远近术：

置所入日差并后差半之为通率。进〔者〕以入日余减总法

以乘差，总法而一，并差以半之。退者半入余以乘差，总法而一。皆加通率，为交定率。乃以入余乘定总法，乃进退差积。如术意

$$通率=\frac{\Delta U_x(入日差)+\Delta U_{x+h}(后差)}{2}=\frac{T}{2},$$

$$(率)差=\Delta U_x-\Delta U_{x+h},$$

又

$$s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h},$$

$$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h},$$

$$n_4=\frac{入余}{总法},$$

则

$$U_{x+nh}=U_x+n_4\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_4)s+s]\right\}$$

$$=U_x+\left[\frac{n_4T}{2}+n_4s-\frac{n_4^2s}{2}\right]。\tag{1.4}$$

12. 李淳风《麟德历术》第五

(1)求恒气初日影泛差术：

见所求气陟降率并后气率半之，十五而一为泛末率。

又二率相减，余十五而一为总差。

前少〔者〕以总差减泛末率，前多〔者〕以总差加泛末率，加减泛末率讫即为泛初率。其后气无同率，因前末率即为泛初率，以总差减初率，余为泛末率。

(2)求恒气初日影定差术：

$$泛末率=\frac{1}{15}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}。$$

$$总\quad 差=\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

$$泛初率=泛末率\pm总差$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$$

$$\pm\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

十五除总差为别差为限。

$$别\quad 差=\frac{1}{15}\left[\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)\right]$$
$$=\frac{1}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

前少者以限差加泛初末率，前多者以限差减泛初末率，加减泛初末率讫，即为定初末率。

$$定初率=泛初率\mp别差$$
$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$$
$$\pm\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)$$
$$\mp\frac{1}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

(3)求次日影差术：

以别定差前少者加初日影定差，前多者减初日影定差，加减初〔日〕影定差讫，即为次日影定差，以次积累岁即各得所求。每气皆十五日为限，其有皆以十六除取泛末率及总差别差。

次日为

$$\frac{1}{15}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{1}{15}(\Delta_1-\Delta_2)$$
$$\mp\frac{2}{15^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

积累方法见刘焯《皇极历术》第一。

《麟德历术》第五附表

检律候术气日①

(中气)	(律名)	(日中影)尺	(陟降率)	(中气)	(律名)	(日中影)尺	(陟降率)
冬至	黄钟	12.75	陟(0.47)①	立春		9.62	陟1.55
小寒		12.28	陟(1.13)	雨水	太簇	(8.07)	陟1.53
大寒	大吕	11.15	陟(1.53)	惊蛰		6.54	陟(1.21)

① 见《(旧)唐书》第三十三卷，志第十三，历二。
凡表文内有括弧的，都是校补的数字和文字，下同。

(续)

(中气)	(律名)	(日中影)尺	(陟降率)	(中气)	(律名)	(日中影)尺	(陟降率)
春分	夹钟	5.33	陟 1.09	立秋		2.49	降 0.81
清明		(4.24)	陟 0.94	处暑	夷则	(3.30)	降 0.94
谷雨	姑洗	3.30	陟 0.81	白露		(4.24)	降 1.09
立夏		(2.49)	陟 0.51	秋分	南吕	5.33	降 1.21
小满	仲吕	1.98	陟 0.34	寒露		6.54	降 1.53
芒种		1.64	陟 0.15	霜降	无射	8.07	降 1.55
夏至	蕤宾	1.49	降 0.15	立冬		9.62	降 1.53
小暑		1.64	降 0.34	小雪	应钟	11.15	降 1.13
大暑	林钟	1.98	降 0.51	大雪		12.28	降 0.47

13. 僧一行《大衍历术》法

唐僧一行(683～727)原名张遂。唐开元十二年(公元 724 年)编《大衍历》,《旧唐书》和《新唐书》都有记录,如:

《旧唐书》志第十四历三有:

大衍步中朔第一
大衍步发敛术第二
大衍步日躔术第三
大衍步月离术第四
大衍步轨漏术第五
大衍步交会术第六
大衍步五星术第七

《新唐书》二十八上下历志第十八上下有:

一曰步中朔术
二曰(步)发敛术
三曰步日躔术
四曰步月离术
五曰步轨漏术
六曰步交会术
七曰步五星术

其中:

(三)"步日躔术":

相当于刘焯《皇极历术》第一，和李淳风《麟德历术》第一。

(四)“步月离术”：

相当于刘焯皇极历术第二，和李淳风麟德历术第三。

(七)“步五星术”：

相当于刘焯皇极历术第四，和李淳风麟德历术第四。

又以上“步日躔术”是用“自变数不等间距二次内插公式”，其余“步月离术”和“步五星术”是用“自变数等间距二次内插公式”，由下面可看到。

《新唐书》卷二十八上历志第十八上《开元大衍历》：

三曰步日躔术，其中求辰数法先说：

以盈缩分盈减缩加三元之策为定气所有日及余，乃十二乘日，又三其小余，辰法约而一，从之为定气辰数。不尽，十之，又约为分。

如求冬至盈缩分＝盈 2353 的辰数。

则

定气(冬至)辰数

$$\equiv\underbrace{\left[15(\text{日})+\frac{664\frac{7}{24}(\text{小余})}{3040(\text{大衍通法})}(\text{以上是“三元之策”})-\frac{2353(\text{定气冬至的盈缩分})}{3040(\text{大衍通法})}\right]\times 12}_{\text{定气所有日及余}}$$

$$=\left[15(\text{日})\times 12+\frac{3\times 664\frac{7}{24}(\text{小余})}{760(\text{辰法})}-\frac{12}{3040(\text{大衍通法})}\left(=\frac{3}{760}\right)\times 2353(\text{定气冬至的盈缩分})\right]$$

$$=180+2.62-9.29=182.62-9.29=173.3$$

或

$$\left\{\left[15(\text{日})\times 3040(\text{通法})+664\frac{7}{24}(\text{小余})\right]\right.$$

$$\left.-2353(\text{定气盈缩分})\right\}\times\left(\frac{12}{3040(\text{通法})}=\frac{3}{760(\text{辰法})}\right),$$

即：
$$(K-\Delta)\left(\frac{12}{3040(\text{大衍通法})}=\frac{3}{760(\text{辰法})}\right),$$

其中 K＝恒气或常气，Δ＝定气盈缩分①。

又　　谷雨盈缩分＝缩 976，

则　　定气(谷雨)辰数 $=180+2.62+\dfrac{3\times 976}{760(\text{辰法})}$

$$=182.62+3.85=186.5。$$

《新唐书》卷二十八上历志第十八上《开元大衍历》(公元 724 年)。

三曰步日躔术：

"以盈缩分……又约为分"，已见前，是说明辰数的做法。

以所入气并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一；以少减多，余为气差。至后以差加末率，分后以差减末率[《旧唐书》亦于'加减末率'后注称：'至后以差加，分后以差减']为初率。倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数〔以〕除〔之〕，为日差。半之，以加减初末各为定率。以日差至后以减，分后以加，气初定率《旧唐书》此十四字作：'以日差累加减气初定率'又注称：'至后以差减，分后以差加'为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日加减气下先后数，各其日定数。

① "恒气，定气"定义，见江永《数学》卷三"恒气注历辩"，《丛书集成初编》本(1937 年)。

又《新唐书》二十八下历志第十八下。

六曰步交会术。

（求每日积差定数）“以所入气并后气增损差，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为气末率。又列二气增损差，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，少减多，余为气差。加减末率，冬至后以差减，夏至后以差加。为初率。倍气差〔亦倍六爻乘之，复〕[1] 综两气辰数〔以〕除〔之〕为日差。半之，〔以〕加减初末，〔各〕为定率，以〔日〕差累加减气初定率，冬至后以差加，夏至后以差减。为每日增损差。乃循积之，随所入气日增损气下差积，各其日定数。

《大衍历》（三）“步日躔术”和（六）“步交会术”同时用以下所列公式，即：

$$f(x+W_0)=f(x)+W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$
$$-\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right) \tag{2.2}$$

或 $$f(x+W_0)=f(x)+W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}(\text{末率})+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)(\text{气差})$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right) \tag{2.3}$$

入算。

其中　　倍六爻$=W_0$，

前后气盈缩分（或增损差）$=\Delta_1,\Delta_2$，

前后气辰数$=W_1,W_2$。

上述(2.2)公式在“自变数不等间距内插法说明”中已经说明。

《大衍历》“步日躔术”有附表，和《麟德术》第一附表相同，不过多“辰数”一行。“辰数”做法，《新唐书·历志》第十八上，有说明，见

---

① 此七字据《旧唐书·历志》卷第十四校补。

下表：

《大衍历》"步日躔术"附表

定气	辰数 W	盈缩分 $\Delta U_{x_1}=\Delta$	先后数 U_{x_1}	损益率 ΔU_x	朓朒积 U_x
冬至	173.3	盈 2353	先端	益 176	朒初
小寒	175.3	盈 1845	先 2353	益 138	朒 176
大寒	177.1*	盈 1390	先 4198	益 104	朒 314
立春	178.8*	盈 976	先 5588	益 73*	朒 418
雨水	180.3	盈 588	先 6564	益 44	朒 491
惊蛰	181.8	盈 214	先 7152	益 16	朒 535
春分	183.5	缩 214	先 7366	损 16	朒 551
清明	184.9	缩 588	先 7152	损 44	朒 535
谷雨	186.5	缩 976	先 6564	损 73	朒 491
立夏	188.1	缩 1390	先 5588	损 104	朒 418
小满	189.9	缩 1845	先 4198	损 138	朒 314
芒种	191.9	缩 2353	先 2353	损 176	朒 176
夏至	191.9	缩 2353	后端	益 176	朓初
小暑	189.9	缩 1845	后 2353	益 138	朓 176
大暑	188.1	缩 1390	后 4198	益 104	朓 314
立秋	186.5	缩 976	后 5588	益 73	朓 418
处暑	184.9	缩 588	后 6564	益 44	朓 491
白露	183.5	缩 214	后 7152	益 16	朓 535
秋分	181.8	盈 214	后 7366	损 16	朓 551
寒露	180.3	盈 588	后 7152	损 44	朓 535
霜降	178.8	盈 976	后 6564	损 73	朓 491
立冬	177.1	盈 1390	后 5588	损 104	朓 418
小雪	175.3	盈 1845	后 4198	损 138	朓 314
大雪	173.3	盈 2353	后 2353	损 176	朓 176

如用(2.2)式，求入大寒气后一日的朒积，$W_0=12$，

$$W_1, W_2 = 177.1, 178.8,$$

$$\Delta_1, \Delta_2 = 104, 73,$$

则

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}=\frac{104+73}{177.1+178.8}=\frac{177}{355.9}=0.4973,$$

$$\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=\left(\frac{104}{177.1}-\frac{73}{178.8}\right)=0.5872-0.4083$$

$$=0.1789,$$

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=0.6762,$$

$$W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=12\times0.6762=8.1144,$$

$$\frac{1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=\frac{1}{355.9}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$

$$=\frac{1}{355.9}\left(\frac{104}{177.1}-\frac{73}{178.8}\right)$$

$$=\frac{1}{355.9}\times0.1789,$$

$$\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)=12^2\times\frac{0.1789}{355.9}=0.0724,$$

$$f(x+W_0)=f(x)+\left[W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right]$$

$$-\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$

$$=f(x)+(8.1144-0.0724)$$

$$=314+8=322。$$

按大寒辰数 177.1 即大寒定气 $14\frac{2314\frac{7}{24}}{3040}$ 日，每日十二辰。

$$辰数=12\times14\frac{2314\frac{7}{24}}{3040}=177.1。$$

今求大寒气后 1 日， $W_0=12$(倍六爻)$\times 1$，

今求大寒气后 2 日， $W_0=12\times 2$，

今求大寒气后 $14\dfrac{2314\frac{7}{24}}{3040}$日， $W_0=12\times 14\dfrac{2314\frac{7}{24}}{3040}=177.1$。

如 $W_0=177.1$ 时，即 $W_0=W_1$。

$$
\begin{aligned}
f(x+W_1)&=f(x)+W_1\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_1\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\
&\quad-\frac{W_1^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\
&=f(x)+W_1\frac{\Delta_1}{W_1}+\frac{W_1^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\
&\quad-\frac{W_1^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\\
&=f(x)+\Delta_1,
\end{aligned}
$$

$\Delta_1=104$，

$f(x+W_1)=314+104=418$，

与表合。

《大衍历》“步月离术”第四，和刘焯术第二，《麟德》术第三相同，不过名词互有不同，如

(《皇极历》)	入余	泛总
(《大衍历》)	入限	大衍通法

亦用刘焯第二术

$$U_{x+n_2h}=U_x+\left[\frac{n_2T}{2}+n_2s-\frac{n_2^2}{2}\cdot s\right] \tag{1.4}$$

公式，其中： 通率 $=\dfrac{T}{2}=\dfrac{1}{2}[\Delta U_x+\Delta U_{x+h}]$。

率差 $=[\Delta U_x-\Delta U_{x+h}]$，

《大衍历》“步月离术”第四求朔弦望入朓朒定数：

各列其〔朔弦望〕所入〔转〕日损益〔率并后率〕而半之为通率，又二率相减为率差。前多者以入余减大衍通法，余乘率差，盈大衍通法得一，并率差而半之；前少者半入余乘率差，亦如大衍通法除，为加时转率。乃半之，以损益加时所入，余为转余。其转余应益者，减法，应损者，因余；皆以乘率差，盈大衍通法得一，加于通〔率〕，转率乘之。大衍通法约之，以朓〔减〕朒加转率，为定率。乃以定率损益朓朒积，为定数。其后无同率者，亦因前率；〔应〕益者以通率为初数，半率差而减之，应〔损者即为〕通率。其转益入余进退日，分为二日，随余初末，如法求之。所得并以损益转率。此术本出《皇极历》(公元600年)，以究算术之微变。若非朔望有交者，直以入余乘损益〔率〕，如大衍通法而一，以损益朓朒为定数，各得所求①。

即：

$$
\begin{aligned}
\text{定率}&=\frac{\text{入余}}{\text{通法}}\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[(\text{大衍通法}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\text{入余})\frac{\text{率差}}{\text{通法}}+\text{率差}\right]\right\}\\
&=n_3\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}\left[(1-n_3)s+s\right]\right\}\\
&=\frac{n_3T}{2}+n_3s-\frac{n_3^2s}{2}。
\end{aligned}
$$

《大衍历》“步五星术”第七② 求平合入进退定数：

各置其星平合所人爻之算差半之，以减其入算损益率。损者以入余乘限差，辰法〔除〕并差而半之，益者半入余乘差，亦辰法除，〔皆〕加所减之率，乃以入余乘之，辰法而一，所得以损益其算下进退各为平合所入进退定数。此法微密，用算稍繁，若从省求之，亦可置其所入算余，以乘其下损益率，如辰法而一，所得以损益其算下进退

① 此段据《旧唐书》文，用《新唐书》文校。

② 此段据《旧唐书》文，用《新唐书》文校。

各为定数。

大衍历“步月离术”第四附表①

转日	转分	列衰	转积度	损益率 ΔU_x	朓朒积 U_x	校文
1	917	进 13	度初	益 297	朒初	
2	930	进 13	12 度 5 分	益 259	朒 297	
3	943	进 13	24 度 23 分*	益 220	朒 556	《旧唐书》25 分
4	956	进 14	36 度 54 分	益 180	朒 776	
5	970	进 14	49 度 22 分	益 139	朒 956	
6	984	进 16	62 度 4 分	益 97	朒 1095	
7	1000	进 18	75 度空*	初益 48 末损 6	朒 1192	《旧唐书》空=0
8	1018	进 19	88 度 12 分	损 64	朒 1234	
9	1037	进 14	101 度 42 分	损 106	朒 1170	
10	1051	进 14	115 度 15 分	损 148	朒 1064	
11	1065	进 14	129 度 02 分	损 189*	朒 916	《旧唐书》188
12	1079	进 13	142 度 03 分	损 229*	朒 727	《旧唐书》129
13	1092	进 13	157 度 18 分	损 267*	朒 498	《旧唐书》167
14	1105	进 10 退 3	171 度 46 分	初损 231 末益 66	朒 231	《旧唐书》240
15	1112	退 13	186 度*11 分	益 289	朓 66	《旧唐书》180 度
16	1099	退 13	200 度 59 分	益 250	朓 355*	《旧唐书》朓 255
17	1086	退 13	215 度 18 分	益 211	朓 605	
18	1073	退 14	229 度 40 分	益 171*	朓 816	《旧唐书》益 172

① 照《新唐书》,用《旧唐书》校,有校文。

（续）

终日	转分	列衰	转积度	损益率 ΔU_x	朓朒积 U_x	校文
19	1059	退 14	243 度 49 分	益 130	朓 987	
20	1045	退 17	257 度 44 分	益 87	朓 1117	
21	1028	退 18	271 度 25 分	初益 36 末损 18	朓 1204	
22	1010	退 18	284 度 65 分	损 73	朓 1222*	《旧唐书》朓 1223
23	992	退 14	298 度 11 分	损 116	朓 1149	
24	978	退 14	311 度*15 分	损 157	朓 1033	《旧唐书》311 度
25	964	退 14	324 度 5 分*	损 198	朓 876	《旧唐书》15 分
26	950	退 13	336 度 57 分	损 237	朓 678	
27	937	退 13	349 度*19 分	损 276	朓 441	《旧唐书》339 度
28	924	退 7 进 6	361 度 44 分	初损 165 末益入后	朓 165	

这段和刘焯《皇极历》术第四，李淳风《麟德历》术第四相类，也用下列公式

$$U_{x+n_4h}=U_x+n_4\left\{\frac{T}{2}+\frac{1}{2}[(1-n_1)s+s]\right\}$$

$$=U_x+\left[\frac{n_4T}{2}+n_4s-\frac{n_4^2s}{2}\right],\qquad(1.4)$$

其中 $s=\Delta U_x-\Delta U_{x+h}$，

$T=\Delta U_x+\Delta U_{x+h}$。

因上文略有脱误。当译成：

$$\text{定数}=\text{损益率}+\frac{\text{入余}}{\text{辰法}}\left\{\frac{\text{交差}}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{(\text{辰法}-\text{入余})}{\text{辰法}}\times\text{限差}+\text{限差}\right]\right\}。$$

如

$$\text{交差} = T = \Delta U_x + \Delta U_{x+h},$$

$$\text{限差} = s = \Delta U_x - \Delta U_{x+h},$$

$$\frac{\text{入余}}{\text{辰法}} = n_4, \text{损益率} = U_x,$$

$$\text{定数} = U_{x+h}。$$

上术,即:

$$U_{x+n_4h} = U_x + n_4\left\{\frac{T}{2} + \frac{1}{2}[(1-n_4)s + s]\right\}$$

$$= U_x + \left[\frac{n_4T}{2} + n_4s - \frac{n_4^2s}{2}\right]。 \tag{1.4}$$

14. 僧一行以后各家历法

僧一行以后郭献之《五纪历》(公元 762 年),徐承嗣《正元历》(公元 784 年)也是写《麟德历》,即写《皇极历》。所以步日躔,步月离术附表也和《皇极历》,《麟德历》相似,不过名词互异。如

"步日躔术"附表

皇极历	躔　衰	衰　总	昏降率	迟速数
麟德历	躔差率	消息总	先后率	盈朒积
大衍历 五纪历 正元历	盈缩分	先后数	损益率	朓朒积

又"步月离术"附表

皇极历	速　分	违　差	加　减	朓朒积
麟德历	离　程	进退差	增减率	迟速积
大衍历 五纪历 正元历	转　分	列　衰	损益率	朓朒积

又唐僧一行(683～727)《大衍历》步日躔术是用新法(即自变

数不等间距二次内插法)入算,其余用刘焯(544～610)旧法(即自变数等间距二次内插法)入算。后来元郭守敬(1231～1316)《授时历》(1281年)用自变数等间距三次内插法。此项演进是循序渐近的。

唐徐昂《宣明历》(公元822年),《新唐书》三十上历志第二十上称:"其气朔发敛,日躔月离,皆因大衍旧术。"又称:

> 凡刻法乘盈缩分,如定气而一,曰气中率。与后气中率相减为合差。以定气乘合差,并后定气以除为中差。加减气率为初末率。倍中差百乘之,以定气除,为日差。半之以加减初末各为定率。以日差累加减之,为每日盈缩分。

如术意:

刻法$=W_0$,

盈缩分$=\Delta_1,\Delta_2$,定气$=W_1,W_2$,

(前)气中率$=W_0\cdot\dfrac{\Delta_1}{W_1}$,

合差$=\left(\dfrac{W_0\Delta_1}{W_1}-\dfrac{W_0\Delta_2}{W_2}\right)$,

中差$=\dfrac{W_0W_1}{W_1+W_2}\left(\dfrac{\Delta_1}{W_1}-\dfrac{\Delta_2}{W_2}\right)$,

初末率=(前)气中率+中差

$$=W_0\frac{\Delta_1}{W_1}+\frac{W_0W_1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right),$$

日差$=\dfrac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\dfrac{\Delta_1}{W_1}-\dfrac{\Delta_2}{W_2}\right)$,

定率=初末率$+\dfrac{1}{2}$日差,

每日盈缩分=定率-日差。

即用下式:

$$f(x+W_0)=f(x)+W_0\frac{\Delta_1}{W_1}+\frac{W_0W_1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$
$$+\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right) \quad (2.1)$$

先算"每日盈朒分"再算定数。

和僧一行一样是用"自变数不等间距二次内插法",所以《新唐书》历志称:"日躔月离,皆因大衍旧术。"

《新唐书》三十上历志第二十上记徐昂《宣明历》(公元822年)说:"佗亦皆准大衍历法,其分秒不同,则各据本历母法云,起长庆二年(公元822年)用《宣明历》,自敬宗(825～826)至僖宗(874～888)皆遵用之。虽朝廷多故,不暇讨论,然《大衍历》后,法制简易,合望密近,无能出其右者,讫景福元年(公元892年)。

徐昂《宣明历》(公元822年)之后,就是边冈的《崇玄历》(公元892年),也是《大衍》之旧。

边冈《崇玄历》(公元892年)《新唐书》三十下历志第二十下称:"(边)冈用算巧,能驰骋反复于乘除间,由是简捷超径等接之术与,而经制远大衰序之法废矣,……气朔、发敛、盈缩、朓朒、定朔、弦望、九道、月度、交会入蚀限、去交前后,皆大衍之旧……。"

三上义夫《中国算学之特色》以为边冈《崇玄历》(公元892年)内"先相减后相乘",即招差之二差。严敦杰以为当指内插法,查内插法进行的步骤就是"先相减后相乘",如

$$U_{x+nh}=U_x+\frac{n}{1}\Delta U_x+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2U_x+\cdots \quad (1.2)$$

《新唐书》三十一天文志二十一称:

> 昭宗时(889～905)太子少詹事边冈修历术,服其精粹,以为不刊之数也。

边冈《崇玄历》算"每日先后定数"是用"等间距内插法",未用

“不等间距内插法”可以在以下对照术文看到。

《崇玄历》在《新唐书》曾七次说“先相减后相乘”，当是指“内插法”，因《宋史》卷七十七律历志观天历步日躔内亦曾称“相减相乘求盈缩分”。不过刘焯以来历法虽用“内插法”，还未有专名。至今方有专名，作为“先相减后相乘”。

《大衍历》(公元724年)和《崇玄历》(公元892年)可以互相比较如下：

《大衍历》(公元724年，据《旧唐书》)	《崇玄历》(公元892年，据《新唐书》)
求每日先后定数	“盈缩朓朒皆用常气，盈缩分曰升降，先后曰盈缩。
“以所入气，并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除入之为末率。	凡升降损益皆进一等，倍象统乘之，除法而一，为平行率。
又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，少减多，余为气差。	与后率相减为差。
加减末率为初率。	半之，以加减平行率为初末率。
倍气差，亦(倍)六爻乘之，复综两气辰数以除之为日差。	倍差进一等，以象统乘之，除法而一，为日差。
半之，以加减初末各为定率。	以加减初末为定。
以日差累加减气初定率为每日盈缩分”。	以日差累加减为每日分”。

(大衍)	通法	策实	揲法	减法	策余
	3040	1,110,343	89,773	91,300	15,943
(崇玄)	通法	岁实	朔实		岁余
	13,500	4,930,801	398,663		70,801
(大衍)	用差	挂限	三元之策	四象之策	
	17,124	87,018	15 余 664 秒 7	29 余 1613	
(崇玄)		闰限	气策	平会	
		386,425[23]	15 余 2950[1]	29 余 7163	
(大衍)		中盈分	朔盈分	爻数	
		1328 秒 14	1427	60	
(崇玄)	弦策	(中盈分)	(朔盈分)		
	7 余 5165 太	5900 秒 2	6337		
(大衍)	象统	天中之策		地中之策	
	24	5 余 221 秒	31 秒 法 72 秒	6 余 165 秒	86 秒 法 120 秒
(崇玄)		候策		卦策	
		5 余 983 秒	25 秒 母 72	6 余 1180 秒	1 秒 母 60
(大衍)	贞悔之策		辰法	刻法	
	3 余 132 秒	103 法 120	760	304	
(崇玄)	土王策		半辰法	(刻法)	
	3 余 590 秒	1 秒 母 120	$562\frac{1}{2}$	135	
(大衍)	乾实		太岁差	周天度	
	110,379 太		36 太	365 度,虚分 779 太	
(崇玄)	周天分		岁差	周天度	
	4,930,961 秒 24		160 秒 24	365 度,虚分 3461 秒 24	

15. 秦九韶《数书九章》对内插法的应用

宋秦九韶《数书九章》(1247 年)有二处应用内插法。

第一处是卷十三"计造石坝"有一题问,

第二处是卷三"缀术推星"有一题问。

现在分别来说述:

其中卷十三"计造石坝"题问术曰:"以商功求之,招法入之。"其中算石片,亦只是等差级数总和的方法,如:

$$\begin{aligned} S &= a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) \\ &\quad + \cdots + [a + (n-1)b] \\ &= na + \frac{(n-1)n}{2}b。 \end{aligned} \tag{2.2}$$

至卷三"缀术推星",则是用"自变数不等间距二次内插法"

$$\begin{aligned} f(x+W_0) &= f(x) + W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2} + W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1} - \frac{\Delta_2}{W_2}\right) + \\ &\quad + \frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1} - \frac{\Delta_2}{W_2}\right) - \frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1} - \frac{\Delta_2}{W_2}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

公式来计算的。

秦九韶《数书九章》(1247 年)卷十三"计造石坝"。

问创石坝一座,长三十丈,水深四丈二尺,令面阔三丈,石版每片长五尺,阔二尺,厚五寸,用灰一十斤。每层高二尺,差阔一尺,石匠每工九片,般扛五片,用工四人。兼工般灰兼用。每工一百一十斤,火头每名管六十人,都押每名管一百二十人。所用石,须依原段,不许凿动,欲知坝下阔,及用石并灰共工各几何?

答曰:坝下阔五丈,

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

石版一十万八百片，

石灰一百万八千斤，

用夫一十万三千五百二十八功，一十一分功之八。

术曰：以商功求之，招法入之，置层高尺数，乘面阔及长，为初率。次以差阔尺数，乘高，又乘长，为次率。却以石版长阔厚相乘，为法。以除二率，各得石版，为上积及次积。置深，以层高尺数约之得层数，对二积列之一行，各添一拨天地数各以累乘对约之，得乘率。以对上次积并之为石版。以每片用灰乘石为灰数。以匠功片数约版得石匠。以般夫数乘石版为实。以扛片数为法除之得人数，以般用灰数除灰得人数。并诸工，以火头管数约之，为火头，半之，为都押。

如术意：

石坝层高 $=2$ 尺，面阔 $=30$ 尺，长 $=300$ 尺，

初率 $=2\times30\times300=18000$(立方)尺，

次率 $=2\times1\times300=\quad 600$(立方)尺，

石版每片 $=0.5\times2\times5=\quad 5$(立方)尺，

初积 $=$ 初率 $\div$ 石版每片(积) $=\dfrac{18000}{5}=3600$ 片，

次积 $=$ 次率 $\div$ 石版每片(积) $=\dfrac{600}{5}=120$ 片，

又 $\dfrac{\text{水深 }42\text{ 尺}}{\text{每层高 }2\text{ 尺}}=21$ 层，

石版(常数) $21(=n)\times3600\quad=75600$ 片，

石版(差数) $\dfrac{21\times20(=n(n-1))}{2}\times120=25200$ 片。

每层石版差数“以招法入之”，即用等差级数方式来算得。

上面石版总数 $=100800$ 片，

又石灰(每片十斤):10×100800=1008000 斤,

坝下阔:30(坝上阔)+(21−1)×1=50 尺,

用夫: $\left[\frac{1}{9}(100800)+\frac{4}{5}(100800)\right.$

$$\left.+\left(\frac{1008000}{110}\right)\right]\left(1+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right)$$

$$=\left(101003\frac{7}{11}\right)\left(1+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right)$$

$$=1111040\times\frac{123}{120\times11}$$

$$=103528\frac{960}{1320}=103528\frac{8}{11}$$功。

此项 $a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(a+(n-1)b)$

$$=na+\frac{1}{2}(n-1)nb$$

虽可由等差级数方法算出,不过朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)"如像招数"门最后一问,是先设:

$$a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+\cdots+(a+(n-1)b)^3$$

$$=n\Delta+\frac{1}{2!}(n-1)n\Delta^2+\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n\Delta^3$$

$$+\frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n\Delta^4$$

和

$$na^3+(n-1)(a+b)^3+(n-2)(a+2b)^3$$

$$+\cdots+1[a+(n-1)b]^3$$

$$=\frac{1}{2!}n(n+1)\Delta+\frac{1}{3!}(n-1)n(n+1)\Delta^2$$

$$+\frac{1}{4!}(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^3$$

$$+\frac{1}{5!}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^4。$$

其中： $\Delta=a^3$

$$\Delta^2=(a+b)^3-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3。$$

$$\Delta^3=[3a^2b+3(3ab^2)+7b^3]-[3a^2b+3ab^2+b^3]$$
$$=2(3ab^2)+6b^3。$$

$$\Delta^4=[2(3ab^2)+12b^3]-[2(3ab^2+6b^3)]=6b^3$$

的总公式，朱世杰作“如像招数”，秦九韶作“以招法入之”，实具有相同的意义。

宋秦九韶《数书九章》(1247 年)卷三，有“缀术推星”一题如下，即：

问岁星合伏，经一十六日九十分，行三度九十分，去日一十三度乃见，后顺行一百一十三日，行一十七度八十三分乃留。欲知合伏段、晨疾初段：常度、初行率、末行率、平行率各几何？

答曰：合伏：一十六日九十分，

常度：三度九十分，

初行率：二十三分九十七秒，

平行率：二十三分二秒，

末行率：二十二分七秒。

晨疾初：三十日，

常度：六度一十三分，

初行率：二十一分九十六秒，

平行率：二十分三十三秒，

末行率：一十八分六十九秒。

术曰：以方程法求之。置见日，减一，余半之，为见率。以伏日并见日，为初行法。以法半之，加见率共为伏率。以伏日乘伏率为伏差，以见日乘见率为见差。以伏日乘见差于上，以

见日乘伏差，减上，余为法，以见日乘伏度，为泛，以伏日乘见度，减泛，余为实，满法而一，为度，不满，退除为分秒，即得日差。

在原术的第一段，我们可以看出秦九韶《数书九章》(1247 年)此题求"日差"是和唐僧一行《大衍历》(公元 724 年)、唐徐昂《宣明历》(公元 822 年)一样，用(2.3)公式

$$f(x+W_0)=f(x)+W_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+W_0\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$
$$+\frac{W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$
$$-\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$

内的

$$日差=\frac{2W_0^2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)，方法相同，$$

其中 $W_0=1$。

因命 伏日 $=W_1=16.90$，

伏度 $=\Delta_1=3.90$，

见日 $=W_2=113.00$，

见度 $=\Delta_2=17.83$。

如术意：

$$见率=\frac{W_2-1}{2}，\quad 初行法=W_1+W_2，$$

$$伏率=\frac{W_1+W_2}{2}+\frac{W_2-1}{2}=\frac{初行法}{2}+见率，$$

$$伏差=W_1\times\frac{W_1+2W_2-1}{2}=W_1\left(W_2+\frac{W_1-1}{2}\right)$$
$$=伏日\times伏率，$$

$$见差=W_2\left(\frac{W_2-1}{2}\right)=见日\times见率，$$

$$
\begin{aligned}
\text{日差}&=\frac{\text{见日}\times\text{伏度}-\text{伏日}\times\text{见度}}{\text{见日}\times\text{伏差}-\text{伏日}\times\text{见差}}\\
&=\frac{W_2\Delta_1-W_1\Delta_2}{W_2W_1\left(W_2+\frac{W_1-1}{2}\right)-W_2W_1\left(\frac{W_2-1}{2}\right)}\\
&=\frac{W_2\Delta_1-W_1\Delta_2}{\frac{1}{2}W_1W_2(W_1+W_2)}\\
&=\frac{2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right),
\end{aligned}
$$

其中　$W_0=1$。

这说明宋秦九韶《数书九章》(1247)卷三"缀术推星"题算"日差"也是通过"自变数不等间距二次内插法"公式来计算的。

原术续称：

求初行率：置初行法，减一，余乘日差，为寄，以半初行法，乘寄得数，又加伏见度，共为初行实。以法退除之，得合伏日初行率。

求末行率：以段日乘日差，减初行率，余为末行率。

求平行率：以初行率并末行率而半之，为平行率。

求交段差：以各段常日下分数，减全日一百分，余乘末日行率，为交段差。累减前段积度，以益后段积度，各为常度。

如术意：

初行实

$$=(\text{伏度}+\text{见度})+(\text{初行法})(\text{初行法}-1)\times\frac{\text{日差}}{2},$$

合伏日初行率

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left\{(W_1+W_2-1)\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right\}\\
&=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)。
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

此式系由前(2.1)、(2.2)和(2.3)，令 $W_0=1$，得到：

$$f(x+1)-f(x)$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)。$$

求末行率 $f(a+(W_1+1))-f(a+W_1)$，以段日(W_1)乘日差，减初行率，余为末行率。

$$f(a+(W_1+1))-f(a+W_1)$$

$$=\left[\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right]$$

$$-\frac{2W_1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{2W_1+1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)。$$

求晨疾初段初行率，以日差减合伏末行率，余为晨疾初段初行率。

晨疾初段初行率$=f(a+(W_1+2))-f(a+(W_1+1))$

$$=\left[\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{2W_1+1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right]$$

$$-\frac{2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)。$$

求晨疾初末行率，置晨疾初常日(30)减一余二十九，乘日差，以减晨疾初段初行率为晨疾初末行率。

晨疾初末行率$=f(a+(W_1+31))-f(a+(W_1+30))$

$$=\left\{\left[\frac{\Delta_1+\Delta_2}{W_1+W_2}+\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)-\frac{2W_1+1}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{2}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)\right\}-\frac{2\times 29}{W_1+W_2}\left(\frac{\Delta_1}{W_1}-\frac{\Delta_2}{W_2}\right)。$$

16. 郭守敬《授时历》平立定三差法

元郭守敬(1231～1316)同王恂(1235～1281)共撰《授时历》(1281年),《元史》卷五十四历志第六历三《授时历经》上步日躔第三记有"求盈缩差"方法。

郭守敬因太阳太阴以及五星行天有盈有缩,其盈缩之差或由多而渐少,或由少而渐多,绝非平派。如某两段间,求某日太阳的盈缩积差,则需要用内插法来计算。所以"《授时历》于日躔盈缩,月离迟疾,并云以算术垛积招差立算。"①

《元史·历志》记录不十分详细。清梅文鼎(1633～1721)据《授时历草》和《大统历通轨》编成《大统历法》,载在《明史》卷三十二至三十六之内。梅文鼎《勿庵历算书目》另载有"郭太史历草补注"二卷。《书目》称:"《历草》……有算例、有图、有立成,历经立法之根,多在其中。"

《明史》卷三十三历三《大统历法》一下"法原","太阳盈缩平立定三差之原"称:

"冬至前后盈初缩末限88日91刻[就整],离为六段,每段各得14日82刻[就整],各段实测日躔度数与平行相较以为积差。"	1日=100刻。 88日91刻÷6=14日82刻。

① 见梅文鼎勿《庵历算书目》"平立定三差详说一卷"内引。

	积日	积 差	差 分			
			加分 第一次	平立合差 第二次	加分立差 第三次	第四次
初段	0	0				
			7058.0250			
第1段	$h=14.82$	7058.0250		−1139.6580		
			5918.3670		−61.3548	
第2段	$2h$	12976.3920		−1201.0128		0
			4717.3542		−61.3548	
第3段	$3h$	17693.7462		−1262.3676		0
			3454.9866		−61.3548	
第4段	$4h$	21148.7328		−1323.7224		0
			2131.2642		−61.3548	
第5段	$5h$	23279.9970		−1385.0772		
			746.1870			
第6段	$6h$	24026.1840				

上表按内插法方法计算，在第四次差分时，数值等于零数，即

$$\Delta^4 f(x) = 0。$$

故上式在 $f(x+nh)$ 中，可以有：

$$f(x+nh)=f(x)+n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^3 f(x) \tag{1.2}$$

的记录。

又因上例 $x=0$ 初段 $f(x)=0$，并设 $nh=n_1$，即 $n=\frac{n_1}{h}$，上式可改成

$$f(x+n_1)=\frac{n_1}{h}\Delta f(x)+\frac{n_1}{2h}\left(\frac{n_1}{h}-1\right)\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{n_1}{6h}\left(\frac{n_1}{h}-1\right)\left(\frac{n_1}{h}-2\right)\Delta^3 f(x)$$
$$=\frac{n_1}{h}\left[\Delta f(x)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(x)+\frac{1}{3}\Delta^3 f(x)\right]$$
$$+\frac{n_1^2}{2h^2}[\Delta^2 f(x)-\Delta^3 f(x)]+\frac{n_1^3}{6h^3}\Delta^3 f(x)。$$

因上式 $f(x+n_1)$方程或函数中，即自变数，随变数间 $x=0, n_1=h, 2h, 3h, 4h, 5h, 6h$，如有 $f\frac{(x+nh)}{x+nh}=F(x+nh)$关系的条件，就可化原方程或函数成低一次的方程，即差分亦可降成低一次的差分，如

自变数 $(x+nh)$ $x=0$	随变数 $\frac{f(x+nh)}{x+nh}=F(x+nh)$
$x+h$	$\frac{f(x+h)}{x+h}=F(x+h)=\mu_1$
$x+2h$	$\frac{f(x+2h)}{x+2h}=F(x+2h)=\mu_2$
$x+3h$	$\frac{f(x+3h)}{x+3h}=F(x+3h)=\mu_3$
$x+4h$	$\frac{f(x+4h)}{x+4h}=F(x+4h)=\mu_4$
$x+5h$	$\frac{f(x+5h)}{x+5h}=F(x+5h)=\mu_5$
$x+6h$	$\frac{f(x+6h)}{x+6h}=F(x+6h)=\mu_6$

原有“积差”$f(x+nh)$，可化成“日平差”$F(x+nh)$。

	nh 积日	$\frac{f(nh)}{nh}=F(nh)$ 积差/积日=日平差	差分 第一次 一差	第二次 二差	第三次
第1段	$h=14.82$	$\frac{7058.0250}{14.82}=476.25=\mu_1$			
			$-38.45=V_1$		
第2段	$2h$	$\frac{12976.3920}{29.64}=437.80=\mu_2$		$-1.38=W_1$	
			$-39.83=V_2$		0
第3段	$3h$	$\frac{17693.7462}{44.46}=397.97=\mu_3$		$-1.38=W_2$	
			$-41.21=V_3$		0
第4段	$4h$	$\frac{21148.7328}{59.28}=356.76=\mu_4$		$-1.38=W_3$	
			$-42.59=V_4$		0
第5段	$5h$	$\frac{23279.9970}{74.10}=314.17=\mu_5$		$-1.38=W_4$	
			$-43.97=V_5$		
第6段	$6h$	$\frac{24026.1840}{88.92}=270.20=\mu_6$			

此时差分次数，已较上次减少一次。

故《明史》续称：

“各置其段积差，以其段积日除之，为各段日平差。置各段日平差与后段日平差相减为一差。置

此处$\frac{f(nh)}{nh}=F(nh)$称为“日平差”，$\mu_1,\mu_2,\cdots$。

一差与后段一差相减为二差。”

$F(2h)-F(h)=\Delta F(h)$称为“一差”$V_1,V_2,\cdots$。

$\Delta F(2h)-\Delta F(h)=\Delta^2F(h)$称为“二差”$W_1,W_2,\cdots$。

梅文鼎《平立定三差详说》一卷亦称:“载考《历草》,并以盈缩日数,离为六段。各以段日除其段之积度,得数乃相减为一差,一差又相减为二差,则其数齐同。”

其中先:“各以段日除其段之积度”,即求

$$y=bx+cx^2$$

或求

$$y=bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

先以段日 x,除其段之积度 y,因此上二式可化为

$$\frac{y}{x}=b+cx$$

或

$$\frac{y}{x}=b+cx+dx^2+ex^3$$

入算的方法。

后来日本数学家关孝和(1637 或 1642~1708)《括要算法》四卷(1709 年出版),第一卷说“招差法”还是接着这个步骤。

此时又可写成等间距二次内插法公式,如:

$$F(x+nh)=F(x)+n\Delta F(x)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2F(x) \tag{1.2}$$

或

$$F(x+nh)=F(x)+n\left[\Delta F(x)-\frac{1}{2}\Delta^2F(x)\right]+\frac{n^2}{2}\Delta^2F(x)。$$

按定义：

$$F(x+h)-F(x)=\Delta F(x),$$

$$\Delta F(x+h)-\Delta F(x)=\Delta^2 F(x),$$

$$\Delta^2 F(x+h)-\Delta^2 F(x)=\Delta^3 F(x)。$$

因此时，

$$\Delta^3 F(x)=0,$$

故

$$\Delta^2 F(x)=\Delta^2 F(x+h),$$

故

$$\begin{aligned}F(x+nh)&=F(x)+n\left[\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2 F(x)\right]\\&\quad+\frac{n^2}{2}\Delta^2 F(x)\\&=F(x)+n\left[\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2 F(x+h)\right]\\&\quad+\frac{n^2}{2}\Delta^2 F(x+h)。\end{aligned}$$

再以 $nh=n_1$ 代入上式，得：

$$\begin{aligned}F(x+n_1)&=F(x)+n_1\left[\frac{\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2 F(x+h)}{h}\right]\\&\quad+n_1^2\frac{\Delta^2 F(x+h)}{2h^2},\end{aligned}$$

其中，按定义

$$F(x)=F(x+h)-\Delta F(x),$$

即：

$$\begin{aligned}F(x)&=F(x+h)-\Delta F(x+h)+\Delta^2 F(x+h)\\&=\mu_1-V_1+W_1=d,\end{aligned}$$

称为“定差”，

$$\frac{1}{h}\left[\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2F(x+h)\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[V_1-W_1-\frac{W_1}{2}\right]=q,$$ 称为“平差”，

$$\frac{\Delta^2F(x+h)}{2h^2}=\frac{1}{h^2}\left(\frac{W_1}{2}\right)=c,$$ 称为“立差”。

上式又可改书成：

$$F(x+n_1)=F(x)+n_1q+n_1^2c$$

或 $$=d+n_1q+n_1^2c。$$

故《明史》续称：

“置第一段日平差 476 分 25 秒为泛平积。	476 分 25 秒$=F(x+h)$ $=\mu_1=$泛平积
以第二段二差 1 分 38 秒去减第一段一差 38 分 45 秒余 37 分 07 秒为泛平积差。	$-38.45-(-1.38)=-37.07$ $=\Delta F(x+h)-\Delta^2F(x+h)=$ $=V_1-W_1=$“泛平积差”。
另置第一段二差 1 分 38 秒，折半得 69 秒为泛立积差。	$\frac{-1.38}{2}=-0.69$ $=\Delta^2\frac{F(x+h)}{2}=\frac{W_1}{2}$ $=$“泛立积差”。
以泛平积差 37 分 07 秒加入泛平积 476 分 25 秒共得 513 分 32 秒为定差。	$476.25-(-37.07)=513.32$ $=F(x+h)-[\Delta F(x+h)$ $-\Delta^2F(x+h)]$ $=F(x+h)-\Delta F(x+h)$ $+\Delta^2F(x+h)$ $=\mu_1-V_1+W_1=d=$“定差”。
以泛立积差 69 秒去减泛平积差 37 分 07 秒，余 36 分 38 秒	$\frac{-37.07-(-0.69)}{14.82}=\frac{-36.38}{14.82}$

为实，以段日 14 日 82 刻为法，除之得 2 分 46 秒为平差。

$$=-2.46$$

$$=\frac{1}{h}\left[\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2F(x+h)\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[V_1-W_1-\frac{W_1}{2}\right]$$

$$=q=\text{“平差”。}$$

置泛立积差 69 秒为实，以段日为法，除二次得 31 微，为立差。”

$$\frac{-0.69}{14.82^2}=-0.0031$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\frac{\Delta^2F(x+h)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\frac{W_1}{2}\right]=c=\text{“立差”。}$$

总结上述计算知道：

$$\text{“定差”}=d=F(x+h)-\Delta F(x+h)+\Delta^2F(x+h)$$

$$=\mu_1-V_1+W_1=F(x),$$

$$\text{“平差”}=q=\frac{1}{h}\left[\Delta F(x+h)-\frac{3}{2}\Delta^2F(x+h)\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[V_1-W_1-\frac{W_1}{2}\right],$$

$$\text{“立差”}=c=\frac{1}{2h^2}\cdot\Delta^2F(x+h)=\frac{1}{h^2}\left[\frac{W_1}{2}\right]。$$

其中因举例在冬至前后盈初缩末限内，故 q,c 值是负数，其中段日 $=h$。

《元史》卷五十四《授时历经》“步日躔第三，求盈缩差”因称：

“置立差…，以初末限乘之加平差…，又以初末限乘之，用减定差…，余，再以初末限乘之……即得所求盈缩差”。

n_1 日末盈缩积：

$$f(x+n_1)$$

$$=n_1[d-n_1(q+n_1c)]$$

$$=n_1d-n_1^2q-n^3c。$$

因举例 q,c 之值是负数，就得：

$$f(x+n_1)=n_1d-n_1^2q-n_1^3c。$$

如 q、c 之值是正数，即得：

$$f(x+n_1)=n_1d+n_1^2q+n_1^3c。$$

又因

$$F(x+n_1)=\frac{1}{n_1}f(x+n_1),$$

故

$$F(x+n_1)=d+n_1q+n_1^2c。$$

由上述计算，知道郭守敬授时历(1281)也是通过“自变数等间距二次内插法”公式来计算。

上述 $f(x+n_1)=n_1d+n_1^2q+n_1^3c$ 中，如

$$x=0,n_1=0,1,2,3,4,5,\cdots,(n-1),n;$$

q，c 值为负数时，则

	积　差	加　分	平立合差	加分立差
	$f(x)=0$			
		$d-q-c=a=\Delta f(x)$		
第1段	$f(x+1)=d-q-c$		$-2q-6c=b=\Delta^2f(x)$	
		$d-3q-7c=\Delta f(x+1)$		$-6c=K$ $=\Delta^2f(x)$
第2段	$f(x+2)=2d-2^2q-2^3c$		$(-2q-6c)-6c=\Delta^2f(x+1)$	
		$d-5q-19c=\Delta f(x+2)$		$-6c$

（续）

	积　差	加　分	平立合差	加分立差
第 3 段	$f(x+3)=3d-3^2q-3^3c$		$(-2q-6c)-2\times 6c=\Delta^2 f(x+2)$	
		$d-7q-37c=\Delta f(x+3)$		$-6c$
第 4 段	$f(x+4)=4d-4^2q-4^3c$		$(-2q-6c)-3\times 6c=\Delta^2 f(x+3)$	
				$-6c$
第 5 段	$f(x+5)=5d-5^2q-5^3c$			
……	……	……	……	
			$(-2q-6c)-(n-3)6c=$ $=\Delta^2 f(x+(n-3))$	
		$d-(2n-3)q-(3n^2-9n+7)c=$ $=\Delta f(x+(n-2))$		$-6c$
第$(n-1)$段	$f(x+(n-1))=(n-1)d-$ $-(n-1)^2q-(n-1)^3c$		$(-2q-6c)-(n-2)6c=$ $=\Delta^2 f(x+(n-2))$	
		$d-(2n-1)q-(3n^2+3n-1)c=$ $=\Delta f(x+(n-1))$		
第 n 段	$f(x+n)=nd-n^2q-n^3c$			

即

$$初日加分=d-q-c=a=\Delta f(x),$$

$$次日加分=(d-q-c)+(-2q-6c)=\Delta f(x+1),$$

$$初日平立合差=(-2q-6c)=b=\Delta^2 f(x),$$

$$次日平立合差=(-2q-6c)-6c=\Delta^2 f(x+1),$$

$$n\ 日平立合差=(-2q-6c)-(n-2)6c=\Delta^2 f(x+n),$$

$$加分立差=-6c=K=\Delta^3 f(x)。$$

又

$$1\ 日末盈缩积,f(x+1)=\Delta f(x),$$

$$2\ 日末盈缩积,f(x+2)=\Delta f(x)+\Delta f(x+1),$$

$$3\ 日末盈缩积,f(x+3)=\Delta f(x)+\Delta f(x+1)+\Delta f(x+2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n\ 日末盈缩积,f(x+n)=f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x+1)+\cdots$$
$$\cdots+\Delta f(x+(n-1)),$$

其中 $f(x)=0$。

此时可以看出:n 日末盈缩积等于此段各日盈缩加分的总和(其中 $f(x)=0$)。此项算就累积的总和,授时历称做"立成",大统历称做"钤",即由 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots$,求得

$$a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,a_1+a_2+a_3+a_4,a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,\cdots,$$

即数表的意义。

又按上表:

初日末盈缩积:

$$f(x+1)=d-q-c=a,$$

次日末盈缩积:

$$f(x+2)=2(d-q-c)+(-2q-6c)=2a+b,$$

三日末盈缩积:

$$f(x+3)=3(d-q-c)+3(-2q-6c)-6c$$
$$=3a+3b+K,$$

四日末盈缩积：

$$f(x+4)=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c),$$

五日末盈缩积：

$$f(x+5)=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c),$$

……

……

n 日末盈缩积：

$$f(x+n)=n(d-q-c)+\frac{n(n-1)}{2}(-2q-6c)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(-6c),$$

即

$$f(x+n)=na+\frac{n(n-1)}{2!}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}K$$
$$=nd-n^2q-n^3c$$

或

n 日末盈缩积：

$$f(x+n)=a+(a+b)+(a+2b+K)+(a+3b+3K)$$
$$+(a+4b+6K)+(a+5b+10K)+\cdots$$
$$+\left[a+(n-1)b+\frac{(n-1)(n-2)}{2}K\right]$$
$$=na+\frac{n(n-1)}{2!}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}K$$
$$=nd-n^2q-n^3c,$$

即和上页上的 n 日末盈缩积：

$$f(x+n)=\Delta f(x)+\Delta f(x+1)+\cdots+\Delta f(x+(n-1))$$

相同。

按《元史》卷五十四历志第六历三《授时历经》上步日躔第三：

周天分三百六十五万二千五百七十五分。

周天三百六十五度二十五分七十五秒。

半周天一百八十二度六十二分八十七秒半。

象限九十一度三十一分四十三秒太。

岁差一分五十秒。

周应三百一十五万一千七十五分。

半岁周一百八十二日六千二百一十二分半。

盈初缩末限八十八日九千九十二分少。

缩初盈末限九十三日七千一百二十分少。

推天正经朔弦望入盈缩历

置半岁周以闰余日及分减之即得天正经朔〔弦望〕入盈缩历冬至后盈，夏至后缩，以弦策累加之，各得弦望及次朔入盈缩历日及分秒满半岁周去之即交盈缩。

求盈缩差

视入历盈者在盈初缩末限已下为初限，已上反减半岁周余为末限。缩者在缩初盈末限已下为初限，已上反减半岁周余为末限。

其盈初缩末者，置立差三十一，以初末限乘之，加平差二万四千六百，又以初末限乘之，用减定差五百一十三万三千二百，余，再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒。缩初盈末者，置立差二十七，以初末限乘之……加平差二万二千一百，又以初末限乘之，用减定差四百八十七万六百余，再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒。即所求盈缩差。

又术置入限分，以其日盈缩分乘之，万约为分，以加其下

盈缩，积万约为度，不满为分秒，亦得所求盈缩差。

$$n\{d-[n(q+nc)]\}=nd-n^2q-n^3c。$$

参 考 文 献

李延寿《北史》，第八十二卷，百衲本《二十四史》本。

魏征《隋书》第十五，十八，七十五卷，百衲本《二十四史》本。

欧阳修《新唐书》，第二十七卷下，百衲本《二十四史》本。

宋濂《元史》，第五十四卷，百衲本《二十四史》本。

张廷玉《明史》第三十二至三十六卷，百衲本《二十四史》本。

李善兰《麟德术解》三卷，《则古昔斋算学十三种》本(1867 年)。

(四)中国算法对内插法的应用

1. 绪　论

中国历法对内插法的应用，在隋刘焯(544～610)《皇极历》(公元600年)已正式开始。以后唐傅仁均《戊寅历》(公元619年)，李淳风《麟德历》(公元664年)，僧一行(683～727)《大衍历》(公元724年)，以及郭献之《五纪历》(公元762年)，徐承嗣《正元历》(公元784年)，徐昂《宣明历》(公元822年)，边冈《崇玄历》(公元893年)都继续应用，元耶律楚材《庚午元历》(1216年)也继续应用。

在前则

杨伟《景初历》(公元237年)

何承天《元嘉历》(公元443年)

祖冲之《大明历》(公元463年)

都已了解月行迟速不同。

宋秦九韶《数书九章》(1247年)卷三"缀术推星"也有一历法题问是应用内插法。到元郭守敬(1231～1316)《授时历》(1281年)提到"加分，平立合差，加分立差"是和"自变数等间距内插法"内"第一次，第二次，第三次差分"相同。《明史》"大统历法"内有专篇说到："太阳盈缩平立定三差之原"，确定"平差，立差，定差"等三

差。总上所引，中国从公元六世纪到公元十三世纪，在历法上确已应用“内插法”来计算，是较国外牛顿公式的应用早一千年。因国外1670年方由格列高里(James Gregory)提出此项的应用。

中国算法对内插法的应用，最先是朱世杰(1303年)，称这方法做“招差术”可能是由《授时历》(1281年)演变出来。因为第一，学术名称大体相同，如

现在“内插法”	自变数 x	随变数 $f(x)$	第一次差分 $\Delta f(x)$①	第二次差分 $\Delta^2 f(x)$	第三次差分 $\Delta^3 f(x)$	第四次差分 $\Delta^4 f(x)$
郭守敬(1281年)	积日	积度	加分	平立合差	加分立差	—
朱世杰(1303年)	—	—	上差	二差	三差	下差

第二，采用“内插法”演算方式，朱世杰(1303年)及郭守敬(1281年)和现在“内插法”步骤相同。

如照内插法“基础差分表”

自变数	随变数	第一次差分	第二次差分	第三次差分	第四次差分
x	$f(x)$				
		$\Delta f(x)$			
$x+h$	$f(x+h)$		$\Delta^2 f(x)$		
		$\Delta f(x+h)$		$\Delta^3 f(x)$	
$x+2h$	$f(x+2h)$		$\Delta^2 f(x+h)$		$\Delta^4 f(x)$
		$\Delta f(x+2h)$		$\Delta^3 f(x+h)$	
$x+3h$	$f(x+3h)$		$\Delta^2 f(x+2h)$		……
		$\Delta f(x+3h)$		……	
$x+4h$	$f(x+4h)$		……		
		……			$\Delta^4 f(x+$ $+(n-4)\cdot h)$

① 表中 $\Delta f(x)$，$\Delta^2 f(x)$，$\Delta^3 f(x)$，$\Delta^4 f(x)$ 或简写做 Δ_1，Δ_1^2，Δ_1^3，Δ_1^4。

（续）

自变数	随变数	第一次差分	第二次差分	第三次差分	第四次差分
……	……			$\Delta^3 f(x+$ $+(n-3)\cdot h)$	
		……	$\Delta^2 f(x+$ $+(n-2)\cdot h)$		
$x+(n-1)\cdot h$	$f(x+$ $+(n-1)\cdot h)$				
		$\Delta f(x+$ $+(n-1)\cdot h)$			
$x+nh$	$f(x+nh)$				

按定义：

$$f(x+nh)=f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x+h)$$
$$+\Delta f(x+2h)+\cdots+\Delta f(x+(n-1)h)。$$

在元郭守敬《授时历》(1281 年)也已算出，

$$f(x+n)=f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x+1)$$
$$+\Delta f(x+2)+\cdots+\Delta f(x+(n-1)),$$

其中　$f(x)=0,h=1,$

则两式所算结果相同。

又内插法算出

$$f(x+nh)=f(x)+n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(x)+\cdots+\Delta^n f(x), \qquad (1.2)$$

即

$$n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(x)$$
$$+\cdots+\Delta^n f(x)$$

$$=\Delta f(x)+\Delta f(x+h)+\Delta f(x+2h)$$
$$+\cdots+\Delta f(x+(n-1)h)。$$

所以如具有：

$$\Delta f(x),\Delta f(x+h),\Delta f(x+2h),$$
$$\Delta f(x+3h)\cdots,\Delta f(x+(n-1)h)$$

形式的函数或方程。可以假定是某组随变数的第一次差分数。再由此“第一次差分数”进求第二次、第三次、…以至第 n 次差分，则此各数(即所拟的第一次差分数)的总和，可记成下式，即

$$S=n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(x)+\cdots+\Delta^n f(x)。$$

朱世杰“招差术”即根据此项原理算出，意义十分明显。

又按上述定义：

$$f(x+nh)=f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x+h)$$
$$+\Delta f(x+2h)+\cdots+\Delta f(x+(n-1)h)。$$

在刘焯(公元 600 年)第一“推每日迟速数术，李淳风(公元 664 年)第一“求以气日检盈虚术”，僧一行(公元 724 年)各历法附表内都可看到。

2. 沈　括

宋沈括(1031～1095)[①]《梦溪笔谈》卷七象数一称：

日之盈缩，其消长以渐，无一日顿殊之理。……大凡物有定形，形有真数。方圜端斜，定形也；乘除相荡，无所附益，泯然

① 据胡道静《梦溪笔谈校证》内“沈括事迹年表”，第 1141～1150 页，1956年。

冥会者,真数也。其术可以心得,不可以言喻。黄道环天正圜,圜之为体,循之则其妥至均,不均不能中规衡;绝之则有舒有数,无舒数则不能成妥。以圜法相荡而得衰,则衰无不均;以妥法相荡而得差,则差有疏数。相因以求从,相消以求负,从负相入,会一术以御日行。以言其变,则秒刻之间,消长未尝同;以言其齐,则止用一衰,循环无端,终始如贯,不能议其隙。此圜法之微,古之言算者,有所未知也。以日衰生日积,反生日衰,终始相求,迭为宾主,顺循之以索日变,衡别之求去极之度,合散无迹,泯如运规。非深知造算之理者,不能与其微也。

此段称为"圆法"或"妥法"即是招差术。

清张文虎(1808～1885)《舒艺室杂著》甲编卷下"书梦溪笔谈后三"称此段:

"黄道环天正圜,……会一术以御日行"所言尤为入微。当为郭瀛台(守敬)平立定三差所自出,惜其术不传。

3. 朱 世 杰

朱世杰《四元玉鉴》(1303年)"如像招数"最后一问专说明"招差",其中"筑堤差夫"和秦九韶《数书九章》(1247年)卷十三"计造石坝"题同术,秦九韶明言"以招法入之"。不过《四元玉鉴》"如像招数"说述比较详细,如

招差

《四元玉鉴》"如像招数"门最后一问称

今有官司依立方招兵,初招方面三尺,次招方面转多一尺,每人日支钱二百五十文,已招二万三千四百人,支钱二万三千四百六十二贯,问招来几日?

答曰：一十五日。

原书此问自注称：

或问还原依立方招兵：初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五日，每人日支钱二百五十文，问招兵及支钱各几何？

答曰：兵 23,400 人，钱 23,462,000。

术曰：求得上差[$=\Delta f(x)$]27，二差[$\Delta^2 f(x)$]37，三差[$\Delta^3 f(x)$]24，下差[$\Delta^4 f(x)$]6。

此处如《授时历》(1281 年)之例，列表如下：

上差 Δ	二差 Δ^2
$(27)=a^3$	$(37)=3a^2b+3ab^2+b^3$
$(64)=(a+b)^3$	$(61)=3a^2b+3\times 3ab^2+7b^3$
$(125)=(a+2b)^3$	$(91)=3a^2b+5\times 3ab^2+19b^3$
$(216)=(a+3b)^3$	$(127)=3a^2b+7\times 3ab^2+37b^3$
$(343)=(a+4b)^3$	

三差 Δ^3	下差 Δ^4
$(24)=2\times 3ab^2+6b^3$	$(6)=6b^3$
$(30)=2\times 3ab^2+12b^3$	$(6)=6b^3$
$(36)=2\times 3ab^2+18b^3$	

即

上差	二差
$\Delta=\mu_1$	$\Delta^2=\mu_2-\mu_1$
μ_2	$\mu_3-\mu_2$
μ_3	$\mu_4-\mu_3$
μ_4	$\mu_5-\mu_4$
μ_5	

三差

$$\Delta^3=\mu_3-(2\mu_2-\mu_1)$$
$$=\mu_3-(2\Delta^2+\Delta)$$
$$\mu_4-(2\mu_3-\mu_2)$$
$$\mu_5-(2\mu_4-\mu_3)$$

下差

$$\Delta^4=\mu_4-[3(\mu_3-\mu_2)+\mu_1]$$
$$=\mu_4-[3(\Delta^3+\Delta^2)+\Delta]$$

因此

上差

$$\Delta=\mu_1,$$

二差

$$\Delta^2=\mu_2-\mu_1,$$

三差

$$\Delta^3=\mu_3-(2\Delta^2+\Delta),$$

下差

$$\Delta^4=\mu_4-[3(\Delta^3+\Delta^2)+\Delta]。$$

原书此问自注称：

求兵者，今招为上积；又今招减一为茭草底子积，为二积；又今招减二为三角底子积，为三积；又今招减三为三角落一(底子)积，为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。

即

$$a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+\cdots+(a+(n-1)b)^3$$
$$=n\Delta$$
$$+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot\Delta^2+ \qquad \text{茭草形}$$
$$+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\cdot\Delta^3 \qquad \text{三角形}$$
$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n\cdot\Delta^4。 \qquad \text{三角落一形}$$

原书此问自注又称：

求支钱者，以今招为茭草(底子)积，为上积；又今招减一为三角底子积，为二积；又今招减二为三角落一(底子)积，为三积；又今招减三为三角撒星(底子)积，为下积。以各差乘各积，四位并之，所得又以每日支钱乘之，即得支钱之数也。

即

$$
\begin{aligned}
& na^3+(n-1)(a+b)^3+(n-2)(a+2b)^3+\cdots \\
& \quad +(a+(n-1)b)^3 \\
& =\frac{1}{2}n(n+1)\Delta && \text{茭草形} \\
& \quad +\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\Delta^2 && \text{三角形} \\
& \quad +\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^3 && \text{三角落一形} \\
& \quad +\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^4。 \\
& && \text{三角撒星形}
\end{aligned}
$$

按(1)茭草形是：

$$1+2+3+\cdots+n\equiv\frac{1}{1\cdot 2}n(n+1)。$$

(2)三角形是：

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$$

或 $$1+3+6+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\left(=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)n(n+1)(n+2)。$$

(3)三角落一形是：

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots$$

$$+\left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2}n(n+1)\right]$$

或 $$1+4+10+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{24}\left(=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

(4)三角撒星形是：

$$1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots$$

$$+\left[1+4+10+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}n(n+1)(n+2)\right]$$

或 $$1+5+15+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{1}{120}\left(=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)。$$

所以照两处自注,补列公式如上。

在《四元玉鉴》"如像招数"术中又体会到,如:上差各值即 $\Delta f(x)$,$\Delta f(x+1)$,…等函数(或方程),x 之最高幂数为 n,则 $\Delta^{n+2}f(x)=0$。例如"立方招兵"方程,即上差内的幂数为 3,即 $\Delta f(x)=a^3$,所以 $\Delta^{3+2}f(x)$或 $\Delta^5 f(x)=0$。

又"平方招兵"方程,上差内的幂数为 2,即 $\Delta f(x)=a^2$,所以 $\Delta^{2+2}f(x)$或 $\Delta^4 f(x)=0$。同理"筑堤差夫",它上差 $\Delta f(x)$的幂数为 1,所以此处 $\Delta^3 f(x)=0$。

又"圆箭束招兵"它上差 $\Delta f(x)$的幂数为 2,所以此处 $\Delta^4 f(x)=0$。

如:

(1)筑堤差夫:

上差 $\Delta=a$,

下差 $\Delta^2=b$, $\Delta^3=0$。

$$a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(a+(n-1)b)$$

$$=n\Delta+\frac{1}{2}(n-1)n\Delta^2。$$

差夫给米:

$$na+(n-1)(a+b)+(n-2)(a+2b)+\cdots$$

$$+1\cdot(a+(n-1)b)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\Delta+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\Delta^2。$$

(2)圆箭束招兵：

$$\Delta=\mu_1,$$

$$\Delta^2=\mu_2-\mu_1,$$

$$\Delta^3=\mu_3-(2\Delta^2+\Delta),$$

$$\Delta^4=0。$$

$$\begin{aligned}&[1+K(1+2+3+\cdots+b)](=\mu_1)\\&\quad+\{1+K[1+2+3+\cdots+(b+1)]\}+\cdots\\&\quad+\{1+K[1+2+3+\cdots+(b+n-1)]\}\\&=n\Delta+\frac{1}{2}(n-1)n\Delta^2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Delta^3。\end{aligned}$$

招兵给米：

$$\begin{aligned}&n[1+K(1+2+3+\cdots+b)]\\&\quad+(n-1)[1+K\{1+2+3+\cdots+(b+1)\}]+\cdots\\&\quad+1[1+K\{1+2+3+\cdots+(b+n-1)\}]\\&=\frac{1}{2}n(n+1)\Delta+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\Delta^2\\&\quad+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^3。\end{aligned}$$

(3)平方招兵：

$$\Delta=\mu_1=a^2,$$

$$\Delta^2=\mu_2-\mu_1,$$

$$\Delta^3=\mu_3-(2\Delta^2+\Delta),$$

$$\Delta^4=0。$$

$$\begin{aligned}&a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots+(a+(n-1)b)^2\\&=n\Delta+\frac{1}{2}(n-1)n\Delta^2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Delta^3。\end{aligned}$$

招兵给银：

$$na^2+(n-1)(a+b)^2+(n-2)(a+2b)^2+\cdots$$

$$+(a+(n-1)b)^2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\Delta+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\Delta^2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^3。$$

招兵给米：

$$a^2+[a^2+(a+b)^2]^2$$

$$+[a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2]3+\cdots$$

$$+[a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots$$

$$+a+(n-1)b)^2]n$$

$$=1(\Delta)+2(2\Delta+\Delta^2)+3(3\Delta+3\Delta^2+\Delta^3)$$

$$+4(4\Delta+6\Delta^2+4\Delta^3)+5(5\Delta+10\Delta^2+10\Delta^3)+\cdots$$

$$+(n-1)\left[(n-1)\Delta+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\Delta^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)\Delta^3\right]$$

$$+n\left[n\Delta+\frac{1}{2}(n-1)n\Delta^2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Delta^3\right]$$ ①

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\Delta$$

$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)\Delta^2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)\Delta^3。$$

(4)立方招兵：

$$\Delta=\mu_1=a^3,\Delta^2=\mu_2-\mu_1,\Delta^3=\mu_3-(2\Delta^2+\Delta),$$

$$\Delta^4=\mu_4-[3(\Delta^3+\Delta^2)+\Delta],\Delta^5=0。$$

$$a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+\cdots+(a+(n-1)b)^3$$

① 由“平方招兵”式内化得。

$$=n\Delta+\frac{1}{2}(n-1)n\Delta^2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Delta^3$$
$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n\Delta^4。$$

招兵支钱：

$$na^3+(n-1)(a+b)^3+(n-2)(a+2b)^3+\cdots$$
$$+1\cdot(a+(n-1)b)^3$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\Delta+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\Delta^2$$
$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^3$$
$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\Delta^4。$$

4. 元丁巨、贾亨和《透帘细草》

元丁巨《丁巨算法》(1355 年)和贾亨《算法全能集》都记着平尖草垛、三角果垛、四角果垛和四角长垛(贾亨作酒坛垛)且设立歌诀，就中四角长垛亦出于沈括公式，即

$$1\cdot a+2(a+1)+\cdots+dc=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3}。$$

因由沈括公式，

$b=0$，代入得

$$V=\frac{h}{6}[da+2dc]+\frac{h}{6}(c-a)。$$

因

$$a+h-1=c,$$
$$1+h-1=d \text{ 或 } d=h,$$
$$\therefore\quad V=\frac{3c-d}{2}+1\cdot\frac{d(d+1)}{3}。$$

此外《透帘细草》亦说到三角堆垛、四角堆垛、茭草积、方箭束、圆箭束。

5. 清梅文鼎、李子金

清初梅文鼎(1633～1721)曾解析《授时历》平立定三差方法,著有《平立定三差详说》一卷。在他《勿庵历算书目》曾举有提要,说:

> 《授时历》于日躔盈缩,月离迟疾,并云以算术垛积,招差立算,而今所传《九章》诸书,无此术也,岂古有而今逸耶。载考"历草"并以盈缩日数,离为六段,各以段日除其段之积度,得数乃相减为一差。一差又相减为二差,则其数齐同。乃缘此以生定差及平差立差。定差者盈缩初日最大之差也。于是以平差立差减之,则为每日之定差矣。若其布立成法。则直以立差六因之,以为每日平立合差之差。此两法者,若不相蒙,而其术巧会,从未有能言其故者。余因李世得孝廉之疑,而试为思之。其中原委,亦自历然,受命孙毅成衍为垛积之图,得书一卷①。

宋秦九韶的《数书九章》(1247 年)和元朱世杰的《四元玉鉴》(1303 年)在当时还没有流传。所以梅文鼎说"今所传《九章》诸书无此术也",梅文鼎《平立定三差详说》不过就"二次方程"的范围加以说明。

江永《数学》卷八引(勿庵先生)"又云:平立定差之法,古无其术,乃郭太史所创为以求七政盈缩之度,所以造立成之根本也。据云依立招差,又云依垛叠(一作积)招差,则是古算术中原有其法,而今采用

① 见梅文鼎《勿庵历算书目》第 25 页,《丛书集成初编》本(1940 年),又见江永《数学》卷八第 385～386 页,《丛书集成初编》本(1937 年)。

之，然不可考矣，愚因李问，为之衍算，颇觉其用法之巧矣。”

江永对此术还不明了，所以《数学》卷八“授时平立定三差辩”以为：“……平圆中亦必无此差率也。以至圆之体，而欲以平方立方之差求之，圆凿方枘，岂能相入哉。”①

梅文鼎《平立定三差详说》称：

1. 平方面积之差

81	64	49	36	25	16	9	4	1	平方幂积
17	15	13	11	9	7	5	3		廉隅积
2	2	2	2	2	2	2	2		加法

如图

100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	
J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	1
J	I	H	G	F	E	D	C	B	B	3
J	I	H	G	F	E	D	C	C	C	5
J	I	H	G	F	E	D	D	D	D	7
J	I	H	G	F	E	E	E	E	E	9
J	I	H	G	F	F	F	F	F	F	11
J	I	H	G	G	G	G	G	G	G	13
J	I	H	H	H	H	H	H	H	H	15
J	I	I	I	I	I	I	I	I	I	17
J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	19

① 见江永《数学》卷八，第385～387页，《丛书集成初编》本(1937年)。

每次所加之 3,5,7,9,11,13,15,17,19,…是为廉隅积①。又如图

G

A G A

B A G A B

C B A G A B C

D C B A G A B C D

E D C B A G A B C D E

F E D C B A G A B C D E F

廉隅积之 1,3,5,7,9,11,13,…;每次递加之 2,2,…是为加法。

2. 立方体积之差

729	512	343	216	125	64	27	8	1	立方体积
217	169	127	91	61	37	19	7		廉隅积
48	42	36	30	24	18	12	6		加法

每次外围所加之 6,12,18,24,30,…是为加法。

每六角形之积,7,19,37,61,91,…是为廉隅积。

中心 1 逐次与廉隅积 7,19,37,61,91,…相加,是为立方体积。

梅氏各图不独说明招差术原理,同时还解释平方数,立方数的成就。

清初中算家曾研究三角函数表的计算法。

清李子金《算法通义》(1677 年)卷五,有"径背求弦新法说",

① 陈岳生译,鲁生达著,《折纸几何学》,T. Sundara Row,*Geometric Exercises in Paper Folding*,第 62~63 页,商务,上海(1931 年),书内也有同样说明。

即用“立、曲、平、定”四差，求各弧的正弦[1]。

6. 珠算蝉联法

珠算用内插法开平方和开立方的方法称做：“珠算蝉联法”，流传有二歌诀。

（一）

“左旁记一减首幅　递次加二递减之（1）
无减再加一十一　移入次幅递减之　（2）
两数多喈相等时　加一折半即方根　（3）
添幅无减再添幅　左边宜加一零一　（4）
开至多位开不绝　说明它是不尽根”。（5）

（二）

“平方方积列于右　两位一幅先分剖（1）
左边记一减首幅　左边加二递减右　（2）
无减左加一零一　添入次幅减斯受　（3）
又不受减再添幅　一零零一加左首　（4）
仍递加二递减之　方积减尽左数有　（5）
加一折半即方根　开平如是无他谬”。（6）

现举一例，用第一歌诀来说明它。

例如：求 89453764 的平方根。

法：先分 $\sqrt{89453764}$ 做四幅，将左端最前的“89”称做“首幅”，再次的“45”称做“次幅”余类推。

这歌诀，是深悉平方数的原则和定义，知道平方数的第二次差

---

① 参看李俨《中算史论丛》第三集，第 497～500 页（＊见本书第七卷第 470～473 页。——编者）。

分值 Δ^2U_x 等于 2。

如：

平方根 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，

平方数 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，

第一次差分值，ΔU_x 3，5，7，9，11，13，15，17，19，

第二次差分值，Δ^2U_x 2，2，2，2，2，2，2，2。

查此数 89，45，37，64 求平方根，原需要先减"首幅"较小的平方值，如"89"需要减较小的 $9^2=81$ 平方值，即 $89-81=8$。但为着算盘计算便利起见，也可盲目先减一，以后逐次加二递减，而得同等的结果，如下表：

平方数	递减数	首幅递减数	首幅和余值
			"89"首幅
$1^2=1$	1	1	-1(首幅第一递减数)
$2^2=1+3$	$3=1+2$	$+2$ 3	88 即得 $89-1^2$ 余值 -3(递减数)
$3^2=1+3+5$	$5=3+2$	$+2$ 5	85 即得 $89-2^2$ 余值 -5(递减数)
$4^2=1+3+5+7$	$7=5+2$	$+2$ 7	80 即得 $89-3^2$ 余值 -7(递减数)
$5^2\cdots$	$9=7+2$	$+2$ 9	73 即得 $89-4^2$ 余值 -9(递减数)
$6^2\cdots$	$11=9+2$	$+2$ 11	64 即得 $89-5^2$ 余值 -11(递减数)
$7^2\cdots$	$13=11+2$	$+2$ 13	53 即得 $89-6^2$ 余值 -13(递减数)
$8^2\cdots$	$15=13+2$	$+2$ 15	40 即得 $89-7^2$ 余值 -15(递减数)
$9^2\cdots$	$17=15+2$	$+2$ 17	25 即得 $89-8^2$ 余值 -17(递减数)
			8 即得 $89-9^2$ 余值。

此时余值 8<17，不复再减，而“首幅”最后递减数是 17。所以歌诀首句称：

左旁记一减首幅　递次加二递减之。　(1)

此诀是深悉某数接联两平方数的第一次差分值(U_n-U_{n-1})加一，等于最后平方根的两倍。即

$$[n^2-(n-1)^2]+1=2n,$$

如：　$[81-64=17]+1=2\times 9=2\times\sqrt{81}$。

《九章算术》筹算开方即商除法原有：“倍法为定法”的原则，即求“次幅”以后的平方根，原需要先成立第一数的倍值，进位，再约次商值。

现因 $2\times n\times 10+1^2\equiv 10[n^2-(n-1)^2]+11$ 是等式，则最先盲目利用前幅的最后递减数，进位后，加一十一，亦可得相同的数值，如此例：

$$2\times 9\times 10+1^2\equiv 10[81-64=17]+11$$
$$\equiv 2\times 90+1^2\equiv 181,$$

其中 181 可作为次幅的第一递减数，以后再加二递减，一如前例，即：

次幅递减数	次　幅　和　余　值
10×17+11	“845”次幅
=181	−181(次幅第一递减数)
+2	664 即得 845−(2×90+1^2)余值
183	−183(递减数)
+2	481 即得 845−(2×90×2+2^2)余值
185	−185(递减数)
+2	296 即得 845−(2×90×3+3^2)余值
187	−187(递减数)
	109 即得 845−(2×90×4+4^2)余值

此时余值 109<187,不复再减,而"次幅"最后递减数是 187,所以歌诀次句,又称:

无减再加一十一,移入次幅递减之。 (2)

"次幅"之后,如有"三幅","四幅",也如前例递减。在"三幅"中,因:

$$(2\times 94)\times 10+1\equiv 10[187]+11$$
$$\equiv 2\times 940+1^2=1881,$$

其中 1881 可作为三幅的第一递减数,以后再加二递减,一如前例,即:

三幅递减数	三 幅 和 余 值
10×187+11	"10937"三幅
=1881	−1881(三幅第一递减数)
+2	9056 即得 10937−(2×940+1^2)余值
1883	−1883(递减数)
+2	7173 即得 10937−(2×940+2^2)余值
1885	−1885(递减数)
+2	5288 即得 10937−(2×940+3^2)余值
1887	−1887(递减数)
+2	3401 即得 10937−(2×940+4^2)余值
1889	−1889(递减数)
	1512 即得 10937−(2×940+5^2)余值

此时余值 1512<1889,不复再减,而"三幅"最后递减数是 1889,"四幅"亦如前例递减,在"四幅"中,因:

$$(2\times 945)\times 10+1=10[1889]+11$$
$$=2\times 9450+1^2=18901,$$

其中 18901 可作为四幅的第一递减数,以后再加二递减,一如前例,即:

四幅递减数	四 幅 和 余 值
10×1889+11	"151264"四幅
=18901	−18901(四幅第一递减数)
+ 2	132363 即得:151264−(2×9450+1^2)余值
18903	−18903(递减数)
+ 2	113460 即得:151264−(2×9450×2+2^2)余值
18905	−18905(递减数)
+ 2	94555 即得:151264−(2×9450×3+3^2)余值
18907	−18907(递减数)
+ 2	75648 即得:151264−(2×9450×4+4^2)余值
18909	−18909(递减数)
+ 2	56739 即得:151264−(2×9450×5+5^2)余值
18911	−18911(递减数)
+ 2	37828 即得:151264−(2×9450×6+6^2)余值
18913	−18913(递减数)
+ 2	18915 即得:151264−(2×9450×7+7^2)余值
18915	−18915(递减数)
	0 即得:151264−(2×9450×8+8^2)余值

至此余值适尽,而算盘上却左右都现着相等的数字,即最后的递减数,和余值相等,如此例:"18915"。

前已说过:"此诀是深悉某数接联两平方数的第一差分值(U_n-U_{n-1})加一,等于最后平方根的两倍",即:

$$[n^2-(n-1)^2]+1=2n,$$

或

$$\frac{[n^2-(n-1)^2]+1}{2}=n。$$

所以歌诀第三句,又称

两数多喈相等时　加一折半即方根。　(3)

如此例:18915=18915 时,则

$$\frac{1}{2}(18915+1)=9458\text{ 为平方根。}$$

原第一歌诀第四句：

添幅无减再添幅　左边宜加一零一。　(4)

再举一例来说明它。

例如：求

$$\sqrt{234567889767900649}$$

的平方根。

法：先分　$\sqrt{23,45,67,88,97,67,90,06,49}$

做九幅(见下页)。

在第1排起，“左旁记一减首幅，递次加二递减之”(1)减到第5排，右边得7，此时余值7<14，不复再减，进位后，加一十一，所以将第4排左边7下“再加一十一”得81，“移入次幅递减之”(2)，照样到第13排，第17排，第20排，第22排，都是按

无减再加一十一　移入次幅递减之。　(2)

的步骤办理。到第24排右边“添幅”得：9008390，而

$$9008390<10\times968643+11$$

又“无减”所以第24排右边“再添幅”得：900839006，而“左边宜加一零一(4)”，其原因为：

第一次添幅 $2\times n\times10+1=10[n^2-(n-1)^2]+11$，

第二次添幅 $2\times n\times10^2+1=100[n^2-(n-1)^2]+101$，

……

第25排以后，又“递次加二递减之”(1)到第33排又系“无减再加一十一，移入次幅递减之”(2)，到第35排左右“两数”968644185“相等时”，“加一折半即方根”(3)，如此例：

$$968644185=968644185,$$

$$\frac{1}{2}(968644185+1)\equiv484322093$$ 即得方根。

第1排	1	“左旁记一减首幅	23 $\boxed{4567889767900649}$
	3	逆次加二递减之”(1)	22
	5		19
	7		14
第5排	81	“无减再加一十一	745 $\boxed{6788976790064 9}$
	83	移入次幅递减之”(2)	664
	85		581
	87		496
	89		409
	91		320
	93		229
	95		136
第13排	961	“无减再加一十一	4167 $\boxed{889767900649}$
	963	移入次幅递减之”(2)	3206
	965		2243
	967		1278
第17排	9681	“无减再加一十一	31188 $\boxed{9767900649}$
	9683	移入次幅递减之”(2)	21507
	9685		11924
第20排	96861	“无减再加一十一	213997 $\boxed{67900649}$
	96863	移入次幅递减之”(2)	117136
第22排	968641	“无减再加一十一	2027367 $\boxed{900649}$
	968643	移入次幅递减之”(2)	1058726
第24排	96864401	“添幅无减再添幅	900839006 $\boxed{49}$
第25排	96864403	左边宜加一零一”(4)	803974605
	96864405		707110202
	96864407		610245797
	96864409		513381390
	96864411		416516981
	96864413		319652570
	96864415		222788157
	96864417		125923742
第33排	968644181	“无减再加一十一	2905932549
	968644183	移入次幅递减之”(2)	1937288368
第35排	968644185	“两数多嗒相等时	968644185
		加一折半即方根”(3)	

如陆续添幅,因而“开至多位”,还“开不绝”,说明此平方数“它是不尽根”,所以此歌诀第5句称,

开至多位开不绝　说明它是不尽根。　(5)

参 考 文 献

崔朝庆,杨冰同编《算表合璧》,光绪壬寅(1902年)江楚书局刊本。其中平方积表和立方积表都用“珠算蝉联法”,由崔朝庆和李鹏飞同撰,韩保徵和鲍诚镛同校。

(五)日本历算法对内插法的应用

中国古代历法经日本正式采用的,有:

宋何承天《元嘉历》(公元443年)　唐郭献之《五纪历》(公元762年)

唐李淳风《麟德历》(公元664年)　唐徐昂《宣明历》(公元822年)

唐僧一行《大衍历》(公元717年)　明元统《大统历》(1384年)

等六历,对元郭守敬《授时历》(1283 年)采用时期较短。其中《宣明历》,最先于日本清和天皇贞观元年己卯(公元 859 年)由渤海大使马孝慎输入日本,公元 862 年即被采用颁行。在日本还流传有钞本《宣明历立成》七册(1639 年),和刻本《宣明历》七册(1644 年)。至《授时历》或《大统历》则民间研究的人甚多。关孝和(1637 年或 1642～1708)在 1680 年即著有"《授时发明》"一书。

上述自《麟德历》(公元 664 年)到《大统历》(1384 年)都采用内插法入算,所以日本在历法和算法方面对中国招差法即内插法都有相当了解,并加应用①。

---

① 参看林鹤一(1873～1935),《和算研究集录》卷下内 46。《本邦编历史》第 529～530 页,第 548 页,日本,东京,1937 年。

并参看藤原松三郎,M. Fujiwara: *Newton's Interpolation Formula in Wazan, Miscellaneous Notes on the History of Wazan*, VI. (日文)《东北数学杂志》47 (1940 年),第 322～338 页。

日本数学家关孝和(1637年或1642～1708)遗稿《括要算法》四卷(1709年出版),其中第一卷专述"招差法",方法和郭守敬(1231～1316)《授时历》(1281年)相同。如由不等间距的自变数 x 或 a 得出随变数或函数 $f(x)$ 或 $f(a)$ 之值,求原函数之值。如在二次方程 $\frac{y}{x}=b+cx$ 或 $y=bx+cx^2$ 中

(第一题)假如(一段限数)7[$=a_0$](元积),

637[$=f(a_0)$](一段限数)11[$=a_1$](元积),

957[$=f(a_1)$](求原二次方程 $y=bx+cx^2$)。

第一术

$$(\text{一段定积})=\frac{f(a_0)}{a_0}=\frac{637}{7}=91[=F(a_0)],$$

$$(\text{二段定积})=\frac{f(a_1)}{a_1}=\frac{957}{11}=87[=F(a_1)],$$

第一次		自变数 a	随变数 $\frac{f(a)}{a}=F(a)$	a_1-a_0	$F(a_1)-F(a_0)$	$\frac{F(a_1)-F(a_0)}{a_1-a_0}=F(a_1a_0)$
		限数	定积	平积法	平积实	平积=c
	一段	7	91	4	−4	−1
	二段	11	87			
授时历		积日	$\frac{\text{积差}}{\text{积日}}$=日平差		一差	

其中

$$(\text{二段定积})-(\text{一段定积})=(\text{一段平积实})$$
$$=F(a_1)-F(a_0)=87-91=-4,$$
$$(\text{二段限积})-(\text{一段限积})=(\text{一段平积法})$$
$$=a_1-a=11-7=4。$$

$$\frac{(\text{一段平积实})}{(\text{一段平积法})}=(\text{一段平积})=(\text{平差})$$

$$=\frac{-4}{4}=-1,$$

$$\frac{F(a_1)-F(a_0)}{a_1-a_0}=F(a_1a_0)=c。$$

第二术

$$(\text{第二术一段定积})=(\text{第一术一段定积})$$
$$-(\text{限数})\times(\text{平差})$$
$$=91-7\times(-1)=+98,$$
$$(\text{第二术二段定积})=(\text{第一术二段定积})$$
$$-(\text{限数})\times(\text{平差})$$
$$=87-11\times(-1)=+98。$$

因此处(定积)相等(+98=+98),即作为(定差)。

第二次		自变数 a	$F(a_0)-a_0F(a_1a_0)=F(a_0)-a_0c=b$。
		限数	定积
	一段	7	+98
	二段	11	+98

即

$$y=(98-1\cdot x)x=98x-x^2。$$

因令

$$a_0=x,\qquad F(a_0)=\frac{y}{x},$$

所以

$$\frac{y}{x}=b+cx,\ y=bx+cx^2。$$

又如

四次方程 $y = bx + cx^2 + dx^3 + cx^4$。

假如

(5,57100),(11,44374),(16,183424),

限数,元积

(18,345024)。求 b,c,d,e 各数。

第一术

(第一术各段定积)=(各段元积)÷(各段限数)。

限	定积	平积法	平积实	平积	立积法	立积实	立积
5	11420						
		6	−7386	−1231			
11	4034				11	2717	247
		5	7430	1486			
16	11464				7	2366	338
		2	7704	3852			
18	19168						

限	定积		立积	三乘法	三乘实	三乘积
5	11420					
11	4034		247			
				13	91	7
16	11464		338			
18	19168					

此时 7 为“三乘积”即“三乘差”,$e=7$。

第二术

（第二术各段定积）=（第一术各段定积）−（限数）^{3}×（三乘差）。

限数	定　积	平积法	平积实	平　积	立积法	立积实	立　积
5	10545						
		6	−15828	−2638			
11	−5283				11	253	23
		5	−11925	−2385			
16	−17208				7	161	23
		2	−4448	−2224			
18	−21656						

此时 23 为“立积”，即“立差”，$d=23$。

第三术

（第三术各段定积）=（第二术各段定积）−（限数）^{2}×（立差）。

限　数	立　积	平积法	平积实	平　积
5	9970			
		6	−18036	−3006
11	−8066			
		5	−15030	−3006
16	−23096			
		2	−6012	−3006
18	−29108			

此时−3006 为“平积”即“平差”，$c=-3006$。

第四术

（第四术各段定积）=（第三术各段定积）−（限数）×（平差）。

限　数	定　积
5	25000
11	25000
16	25000
18	25000

此时 25000 为“定积”,即“定差”,$b=25000$。即原方程为

$$y = 25000x - 3006x^2 + 23x^3 + 7x^4。$$

其中第一术

平积 $\dfrac{F(a_1)-F(a_0)}{a_1-a_0}=F(a_1a_0)$, $\dfrac{F(a_2)-F(a_1)}{a_2-a_1}=F(a_2a_1)$,

$$\frac{F(a_3)-F(a_2)}{a_3-a_2}=F(a_3a_2)。$$

立积 $\dfrac{F(a_2a_1)-F(a_1a_0)}{a_2-a_0}=F(a_2a_1a_0)$,

$$\frac{F(a_3a_2)-F(a_2a_1)}{a_3-a_1}=F(a_3a_2a_1)。$$

三乘积 $\dfrac{F(a_3a_2a_1)-F(a_2a_1a_0)}{a_3-a_0}=F(a_3a_2a_1a_0)$

$=e$,三乘差。

第二术

限　数	定　数	平　积
a_0	$F(a_0)-a_0^3e$	
		$\dfrac{F(a_1)-F(a_0)}{a_1-a_0}-\dfrac{e(a_1^3-a_0^3)}{a_1-a_0}=F(a_1a_0)-e(a_1^2+a_1a_0+a_0^2)$
a_1	$F(a_1)-a_1^3e$	
		$\dfrac{F(a_2)-F(a_1)}{a_2-a_1}-\dfrac{e(a_2^3-a_1^3)}{a_2-a_1}=F(a_2a_1)-e(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)$
a_2	$F(a_2)-a_2^3e$	
		$\dfrac{F(a_3)-F(a_2)}{a_3-a_2}-\dfrac{e(a_3^3-a_2^3)}{a_3-a_2}=F(a_3a_2)-e(a_3^2+a_3a_2+a_2^2)$
a_3	$F(a_3)-a_3^3e$	

限　数	平　积	立　积
a_0		
	$F(a_1a_0)-e(a_1^2+a_1a_0+a_0^2)$	
a_1		$F(a_2a_1a_0)-e(a_2+a_1+a_0)=d$
	$F(a_2a_1)-e(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)$	
a_2		$F(a_3a_2a_1)-e(a_3+a_2+a_1)=d$
	$F(a_3a_2)-e(a_3^2+a_3a_2+a_2^2)$	=立差
a_3		

第三术

限　数	定　积	平　　积
a_0	$F(a_0)-a_0^3e-a_0^2d$	
		$F(a_1a_0)-e(a_1^2+a_1a_0+a_0^2)-d(a_1+a_0)=c$
a_1	$F(a_1)-a_1^3e-a_1^2d$	
		$F(a_2a_1)-e(a_2^2+a_2a_1+a_1^2)-d(a_2+a_1)=c$
a_2	$F(a_2)-a_2^3e-a_2^2d$	
		$F(a_3a_2)-e(a_3^2+a_3a_2+a_2^2)-d(a_3+a_2)=c$
a_3	$F(a_3)-a_3^3e-a_3^2d$	=平差

第四术

限数	定　　积
a_0	$F(a_0)-a_0^3e-a_0^2d-a_0c=b$
a_1	$F(a_1)-a_1^3e-a_1^2d-a_1c=b$
a_2	$F(a_2)-a_2^3e-a_2^2d-a_2c=b$
a_3	$F(a_3)-a_3^3e-a_3^2d-a_3c=b$
	=定差

此时“定积”相等。

已审阅
子居 09-10-26, 17:48

如以 x 代 a_0, a_1, a_2, a_3,

y 代 $f(a_0), f(a_1), f(a_2), \cdots$,

$\frac{y}{x}$ 代 $F(a_0), F(a_1), F(a_2), \cdots$,

则

$$\frac{y}{x} = b + cx + dx^2 + ex^3,$$

或

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4。$$

十三、十四世纪中国民间数学

李　俨

编 者 说 明

本书由科学出版社于1957年11月出版。十三、十四世纪中国民间数学有相当进展，它的资料除有专书出版外，还散见于《永乐大典》、《诸家算法》以及各丛书之内。李俨先生将这些问题辑录在一起，未经他处发表的，计《透帘细草》17问，《丁巨算法》27问，《锦囊启源》30问，《通原算法》64问，总共138问。此外，还对筹算四则算法以及歌诀加以说明。此书出版后，作者作过补充、校订。今依作者补充校订本排印，并核对了原文。

《李俨钱宝琮科学史全集》编辑委员会

目　　录

一、绪言 …… 409
二、算书 …… 411
三、算法 …… 461
四、歌诀 …… 472
五、《详明算法》札记 …… 479

一、绪　　言

十三、十四世纪在中国是指宋金元和明初时期。这时期宋代公家的数学教育制度和宋刊《算经十书》情形我们是已经知道的[1]。北宋南渡之后，公家办理数学教育事业，亦受到停顿，这也是事实。所以庆元庚申(1200年)鲍澣之序《九章算术》称：

> (算学)……本(宋)朝崇宁亦立于学官，故前世算数之学，相望有人。自衣冠南渡以来，此学既废，非独好之者寡，而《九章算经》亦几泯没无传矣。

十二世纪《算经十书》曾由公家审定，作为教科用书。可是民间还另有日用需要的算书。在此时之前如敦煌发现的算书，是唐末宋初的著作。其中有一种题："均田法第一，……"，又一种题："……营造部第八，……"；又宋刊《算经十书》内《五曹算经》：次序是第一，田曹；第二，兵曹；第三，集曹；第四，仓曹；第五，金曹。可是宋钱希白《南部新书》(有子明逸嘉祐元年序)癸集称："……王仁岫，善工算，因集八卦五曹算法，……五曹：秤、尺、地、仓、金。"都是民间所用的算书。又《家山图书》载有"九数算法之图"，说明"圆径、方斜、

---

① 见李俨《中算史论丛》，第四集，第252～279页，北京，1955(*见本书第八卷第237～265页。——编者)。

直田、方田、圭田、勾股、梯田、弧矢田、三广田、三角田、方台、城子各形计算方法，并附图式。《读书敏求记》以为系（朱熹，1130～1200）晦庵私塾中弟子学习用书[①]。郑樵《通志》内“校雠略”称：“古之书籍，有上代所无，而出于民间者。按漳州吴氏书目，算术一家，有数件古书，皆三馆、四库所无者，臣已收入求书类矣……”。这也是十三、十四世纪民间另有算书的一个例子。可是此期即十三、十四世纪算书，著录在《宋史·艺文志》、《崇文总目》、《郡斋读书志》、《秘书省续编》到《四库书目》、宋王应麟《玉海》、郑樵《通志》和明程大位《算法统宗》（1592年）的，还有数十种，可惜多半散失。就现有史料知当时算法民间另有一种“小法”，并应用“俗称”和歌诀，又在筹法计算法范围内尽量应用小数，此时称做“省数”。至正十五年（1355年）丁巨序所著《丁巨算法》八卷称：

> 因于算术：上自九章，下至小法，数十百家，摘取要略，述《算法》八卷，以今俗称寓之古法。

又在本文注称：

> 今从省数者，两下止言钱、分、厘、毫、丝、忽，如银钱法。犹田亩之不用里角，而丛顷、分、厘、毫、丝、忽也。

就是洪迈《容斋续笔》卷六也称“九九合数”做“俗语算数”。

这些事实都说明民间数学进展情况。它的算书也有现在还流传的，或现在还散失的。

---

① 见李俨《中算史论丛》，第四集，第267～270页，北京，1955（*见本书第八卷第252～255页。——编者）。

二、算　　书

十三、十四世纪中国算书现在流传的，有：

秦九韶：《数书九章》18卷(1247年)。

李治：《测圆海镜》12卷(1248年)。

李治：《益古演段》3卷(1259年)。

杨辉：《详解九章算法》12卷(1261年)，现仅存有残本。

杨辉：《日用算法》2卷(1262年)，现仅存有残本。

杨辉：《杨辉算法》七卷，内：

《乘除通变本末》3卷(1274年)。

《田亩比类乘除捷法》2卷(1275年)。

《续古摘奇算法》3卷(1275年)。

郭守敬(1231～1316)：《授时历》(1280年)，有《授时历捷法立成》，1346年朝鲜印本。

朱世杰：《算学启蒙》3卷(1299年)。

朱世杰：《四元玉鉴》3卷(1303年)。

亦有散见在丛书或专门著作之内的，如：

《事林广记》(1264～1324)列有算法类。

《授时历捷法立成》(1346年朝鲜印本)书末附有乘除法歌诀。

《应用碎金》(1371年)，卷上有算法。

《河防通议》(1321年,沙克什序),卷下"算法第六"有杂法、积垛、竹索积寸、卷帚、开河各项。

元刘瑾《律吕成书》卷一,也据宋《彭氏律法》列有开方方法。

此外载在《永乐大典》和《诸家算法》(抄本,李俨藏)的,有:

杨辉:《详解九章算法》(1261年),又称《详解算法》。

杨辉:《日用算法》(1262年)。

《透帘细草》

《丁巨算法》(1355年)

《锦囊启源》

《通原算法》(1372年)

和

贾亨:《算法全能集》二卷。

安止斋、何平子:《详明算法》二卷。

《永乐大典》现已散失不全。其中《算法全能集》和《详明算法》还有传本,其余各书除《知不足斋丛书》曾收有《透帘细草》54问,《丁巨算法》62问,他处未有记录。

现在将《透帘细草》、《丁巨算法》、《锦囊启源》及《通原算法》四种残本收集在一处,计有提纲4条,题问138问,如附表所记。

另外短文,如《事林广记》算法类,《授时历捷法立成》乘除歌诀,《应用碎金》算法,亦附录在后。

又秦九韶、李治(1192~1279)、杨辉、郭守敬(1231~1316)、朱世杰各家还有专著,卷帙较多,都有单行本,除引用些文献外,暂时不专在这里讨论。

(1)杨辉《日用算法》陈几先序

万物莫逃乎数。是数也,先天地而已存,后天地而已立。盖一而二,二而一者也。自非参错妙用,隐括众微,未易穷此。钱

塘杨辉以廉饬己，以儒饰吏，吐胸中之零机，续前贤之奥旨，从奇而耦，由晦而彰。内可以知外，表可以识里。其用心岂为运牙筹，计金谷而已哉？国学前庶永嘉陈几先跋。

杨辉自序：

夫黄帝《九章》乃法算之总经也。辉见其机深法简，尝为详注。有客谕曰：谓无启蒙日用，为初学者病之，今首以乘除加减为法称斗尺田为问，编诗括十三首，立图草六十六问，用法必载源流，命题须责实有。分上下卷首少补日用之万一，亦助启蒙之观览云耳。景定壬戌(1262年)季夏钱塘杨辉谨序。

附表：

算书名	他处已经收录的	由《永乐大典》①收集得	由《诸家算法》收集得	本篇收录的
杨　辉 《详解算法》(1261年) 《日用算法》(1262年)	参看李俨《中算史论丛》第二集，第61—72页	4问 1问	2问 9问	
《透帘细草》	《知不足斋丛书》本收54问	12+5问		17问
《丁巨算法》(1355年)	《知不足斋丛书》本收62问	提纲1条 24+3问		1条 27问
《锦囊启源》		9问	提纲2条 21问	2条 30问
《通原算法》(1372年)		35问	提纲1条 29问	1条 64问
《算法全能集》二卷	见《玄览堂丛书》三集，第二十九册 计：总说五项 常用法二十项			
《详明算法》二卷	有1373年朝鲜重刊本 计：卷上，十六项 卷下，十一项			

① 现有印本，在168本第十七函之内，中华书局，1960年。

(2)《透帘细草》原文

一、今有客持银一千七百二十八两。出关税之，九而取一。今税了银二百两，除贴与客钱一十贯文。今将钱七十二贯五百文，问买银多少？

答曰：五十八两。

法曰：置都银在地，以九约之，得一百九十二两，即为合税之银。以反减税了银二百两外，有八两。以乘今将钱数，得五百八十贯为实。以一十贯为法而一，得五十八两，合问。

草曰：银八两，除贴得钱一十贯，得每两价钱一贯二百五十为法，除今将钱，合问。

二、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今添重三百六十斤，行一千三百里，问与钞几何？

答曰：一百二十六两七钱五分。

草曰：元与钱七千五百，乘今行道一千三百里，得九百七十五万，又以今载重一千五百六十乘之，得一百五十二亿一千万为实。元行道一千里，乘元载重一千二百斤得一百二十万为法，除之，得今与脚钱，合问。

三、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今增重四百九十二斤，与钞六十七两六钱八分，行道几何？

答曰：六百四十里。

草曰：元行道一千(里)，乘今与钱六千七百六十八文，得六百七十六万八千，以元载重一千二百乘之，得八十一亿二千一百六十万为实。今载重一千六百九十二乘元与钱七千五百(文)，得一千二百六十九万，为法。除之，合问。

四、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今与钞七十六两五钱，行一千七百里，问载重几何？

答曰：七百二十斤。

草曰：元载重乘元行道，得一百二十万，以今与钱七千六百五十乘之，得九十一亿八千万为实。今行道一千七百乘元与钱七千五百，得一千二百七十五万为法。除之，合问。

五、今有七人八日淘金一十七铢。今有二十一人一月淘金，合得多少？

答曰：七两二十三铢二絫五黍。

法曰：置元淘金一十七铢，以今二十一人乘之，又以三十日乘之，得一万七百一十铢为实。以元七人乘八日得五十六为法，除实得一百九十一铢二絫五黍，以二十四约之为两，得七两二十三铢二絫五黍，合问。

草曰：是五十六人一日得金一十七铢，用人数除金，得一人一日得金三絫二十八分絫之一。去通分内子得八十五铢。又三十日乘二十一人，得六百三十头位相乘，得五万三千五百五十，却用分母二十八除之，得合问。

六、今有九人，九日淘金一十八铢。今三十人共淘金一斤。问合用几日？

答曰：五十七日五分日之三。

法曰：置今淘金三百八十四铢，以九人乘之，又九日乘之，得三万一千一百四铢为实。以元淘金一十八铢，乘今三十人，得五百四十为法。以除其实，得五十七日，余与法各以一百八约之，得五分日之三，合问。

七、今有九人九日得金一十八铢。今淘得金来五十七日五分日之三，得一斤，问用人多少？

答曰：三十人。

法曰：置今淘金三百八十四铢，以元用九人乘之，又以九日乘之，以分母五因之，得一十五万五千五百二十为实。又置五十

七日，以分母五因，内子三，得二百八十八，以元淘金一十八铢乘之，得五千一百八十四为法，除实得三十人，合问。

八、今有拿手六十九人，每五人四日破錾三个。今教阅来一月，问用錾多少？

答曰：三百一十个半。

法曰：以三十日乘六十九人。又以三个乘之，得六千二百一十为实。以五人乘四日，得二十为法。实如法而一，合问。

草曰：是一人一日破錾一分半也。又六十九人乘三十日，得二万七百，以一分半乘之，合问。

九、今有省钱二百三十一贯文，问得七十五陌钱多少？

答曰：二百三十七贯一百六十文。

法曰：置省钱以七十七乘之，见足钱，去以七十五除之，合前问。

十、今有官库帐管省钱与七十二陌钱，共二百七十三贯七百五十文。为年深索子烂断，共穿排得足陌钱二百六贯四百七十文，问元本二色钱各多少？

答曰：省钱一百八十七贯四百文。

七十二陌钱八十六贯三百五十文。

法曰：置共管钱数，以七十七乘之，一百约之，得二百一十贯七百八十七文五分。内减了共排得钱余有四贯三百一十七文五分为实。又以七十二减七十七，余五文为法。除之为百。得八十六贯三百五十文，为七十二陌钱，以反减元管钱数，其余即省钱，合问。

十一、今有麻麦共三十八石七斗二升，总粜钞五十九两二钱四分九厘七毫。麻每斗价钞一钱八分五厘，麦每斗价一钱三分六厘。问麻麦之各数，并该钞几何？

答曰：麦二十五石二斗七升。该钞三十四两三钱六分七厘

二毫。

麻一十三石四斗五升。该钞二十四两八钱八分二厘五毫。

法曰：置麻麦共数，以麻斗价乘之得七十一两六钱三分二厘。于数内减讫总粜钞，余一十二两三钱八分二厘三毫。别置麻斗价，于内减讫麦斗价，余四分九厘为法。以法除余钞一十二两三钱八分二厘三毫，得麦数于共数内。减讫麦数，余为麻数。却以麦斗价乘麦数，得麦总价。麻总价仿此。

十二、今有钱五百一十四贯七十六文，粜到粟、麦共八百一十一石五斗。麦每斗七十二文，粟每斗五十六文，问粟麦各多少？

答曰：麦三百七十三石四斗二升五合。

粟四百三十七石八斗七升五合。

法曰：下粟、麦共数在地。以麦斗价七十二文乘之，得五百八十四贯一百三十六文，内减了粟钱数，余有七十贯六十文为实。以粟、麦斗价以少减多，余有一十六文为法。除实，得四百三十七石八斗七升五合为粟数。反减共数，余者为麦数也，乃合前问。

《透帘细草》原文

一、今有平方积五万五千六百九十六尺，问一面方多少？

答曰：二百三十六尺。

法曰：平方开之。

草曰：置积为实，借一算子为约法。常超一位；进二度，合商百，乃上商二百尺。二因常隅，又名下法，又名约法，得二万为方法；命商除实四万三。倍方法一退得四十，约法二退于百之下，续商三十尺。三因隅法，得三百尺，并入方法，得四千三百；命商三十

除实，余有二千七百九十六。在方法内又添隅法三百，一退得四百六十，隅法二退为一尺，上续商六尺。又于方法内添隅法六尺，一步，得四百六十六尺，乃命商六尺除实，恰尽。

二、今有立方积四千九百八十三万六千三百三十二尺，问立方一面多少？

答曰：三百六十八尺。

法曰：开立方除之。旧草冗繁，今以透帘开之①。

草曰：列积为实，借一算子名立隅，又名约法，常超二位约实。两度进上，合商三百，三因立隅得三百万，别置为廉法，又三因得九百万为方法。只以方法命商除实二千七百万。三因方法为二千七百万一退，三因廉得九百万二退。立隅法三退。续商六十寸，廉法内添隅，添立隅六千，共九万六千，六因加入方法得三百二十七万六千，命续高除实，余有三百一十八万三十二。在廉法内更添隅法六千，得十万二千，六因加入方法得三百八十八万八千一退，廉法内又添六千共十万八千二退，下法三退，续商八寸，廉法内添隅法八寸共一千八十八，乃八因加入方法得三十九万七千五百四寸，命商八寸除实恰尽。

三、今有立方圆积九百二十七寸，问径多少？

答曰：一尺二寸。

法曰：置积寸以十六乘之，九而一，得一千七百二十八寸为实。开立方除之，即得，合问。

草曰：十六乘之九除者，添入角积也，改立圆为立方，是以开立方见一面数。

$$\text{一}\ \text{丌} = \text{丌}\ 0\ 0\ 1$$

① 透帘之名取此。此项透帘开方法和秦九韶(1247年)方法相同。

隅法三进在千之下，置廉一千。方一千，除实一千，方三因为三千，一退；廉三因得三千，二退；下位三退。续商二寸，廉法内添隅法二寸得三十二寸，二因添入隅法，得三百六十四，命商除实尽也。

四、今有立方，圆，平方各一所，共计积二十二万九千六百七尺。只云立方面多如立圆径七尺，其平方面如立圆径三分之二，问三事各多少？

答曰：立方面五十五尺，

立圆径四十八尺，平方面三十二尺。

法曰：以立方开之。

草曰：置共积二十二万九千六百七尺在地。于头位以多七尺自乘得数，又以七尺再乘之得三百四十三尺，减于头位共积余有二十二万九千二百六十四，又以一百四十四为分母乘之。头位共得三千三百一万四千一十六尺为实，置于头位。又多数七尺自乘得数，以四百三十二乘之得二万一千一百六十八尺为从法。又多七尺乘四百三十二得三千二十四，又添入六十四共得三千八十八为廉常。以二百二十五为隅。立方开之，计积为实三千三百一万四千一十六于头位，从法二万一千一百六十八于下位，廉法三千八十八于从法下，隅法二百二十五于廉之下。从法一进，廉法二进，隅法三进，上商四。共隅法相呼四因廉法得一百二十万八千八百。廉法相呼生于从法得五百四万六千八百八十。命商除之，余有一千二百八十二万六千四百九十六，又四因隅法生于廉法得二百一十万八千八百，又生于从法得一千三百四十八万二千八十，又四因于廉法得三百万八千八百，又八因隅法一退，于廉得三百一十八万八千八百，从法一退，廉法二退，隅法三退，上商八。生于廉法得三万一千八百八十八，又八

生于从法得一百六十万三千三百一十二，命商除之恰尽，得立圆径。内加七尺为立方面，二因三除为平方面也，合问。

五、今有圆球一只，径一尺二寸，问计积寸多少？

答曰：九百七十二寸。

法曰：径再自相乘得一千七百二十八寸，又以九之。如十六而一，得积寸，合问。

草曰：径再自乘为立方，比立圆球子多四角积寸，一十六分之九。立圆积是十六分之九。先九因而后十六除者，恐有不尽，免通分也。

案以上《透帘细草》十七题问，见《永乐大典》卷一六三四三之一六三四四中。

(3)《丁巨算法》序

稽古河图五十有五。一二三四互为七八九六，大衍之数五十。隶首作算数。羲和以闰月定四时成岁。舜在璇玑玉衡，以齐七政。禹别九州，五十而贡。殷人七十而助，具有法术。《周礼·大司徒》始列九数。一曰方田，以御田畴界域。二曰粟布，以御交质变易。三曰衰分，以御贵贱禀税。四曰少广，以御积幂方圆。五曰商功，以御功程积实。六曰均输，以御道里远近。七曰盈朒，以御隐杂互见。八曰方程，以御错糅正负。九曰勾股，以御高深广远，备矣。汉建《九章》之学，《夏侯阳》，《孙子》方仓荡杯。谓未尽微分，新术，徽率，密率复古曰盈不足，损有余，差分，衰分，方程之属。注疏又为令法。由唐及宋，皆有专门。自后时尚浮辞，动言大纲，不计名物，其有通者，不过胥吏。士类以科举故，未暇笃实。独余幼贱，不伍时流，经籍之余事，法物度轨，则间尝用心。因于算术上自九章，下至小法，数十百

家，摘取要略，述算法八卷。以今俗称，寓之古法。其曰田亩，虽不啻百里当百二十一里，百亩当百四十六亩之步，亦方田之属。粟布交质变易。差分法衰分。仓窖堆垛法少广。修筑营运，以见商功。双头交易，抽分答价，以见均输。折变相和，异乘同除。以知隐杂，诸分之通为方程，可以通期闰。海岛望算为勾股，可以通广轮。凡纲乘以聚之，除以散之。通乘除已，斯可为法。乘之积为加，除之散为减。加减为乘除之变，故以乘除加减四法为之首。为数始于一，终于十。积于一二，成于九九。大为十百十千十万百万千万万万亿兆京垓神穰沟涧正载极。小则分厘毫丝忽微纤沙尘埃渺漠幽虚空清净无为尽。一十百千万，互为消长。由是而天高地厚。日月往来，律吕声音，阴阳幽显。因此测彼。精入鬼神。伊游于艺，玩物丧志。至正十有五年(1355)青龙在乙未，八月甲寅朔丁巨记。

《丁巨算法》

方求圆二十二乘，七除。

圆求方七乘，二十二除。

平面求周圆十二乘，方四乘。

外圆求积圆物，六乘十二除。

方物，八乘十六除。

立圆求径九乘，十六除。

立方求圆十六乘，九除。

见斜求方五乘，七除。

见方求斜七乘，五除。

《丁巨算法》原文

一、今有鸡三只，价直二两；鸭七只，亦直二两。今持钱一百两，欲买

二色各停，问鸡鸭各价多少？

答曰：各买一百零五只。鸡价七十两，鸭价三十两。

以钞一百两，以二十一乘之，得二千一百为实。以二十为法除之，得一百零五只，乃鸡鸭数也。求价者，倍鸡数三除之，倍鸭数七除之也。

二、今有盐四千三百五十引，欲令大小船适等载之。只云大船三只，载五百引，小船四只，载三百引。问船及盐各载多少？

答曰：各一十八只。大船载三千引，小船载一千三百五十引。

列盐四千三百五十引。以十二乘之，得五万二千二百为实。以十五除之，得二千九百为法。除实得大小船一十八只也。求载盐者，五因大船数，三除之；三因小船数，四除之。

三、今有官支钞一十两八钱，买丝二十四斤。若有钞三十五锭三十七两四钱，问买丝几斤？

答曰：三千九百七十二斤。

以若有与买丝相乘为实，以今有为法除之。凡异乘同除法者准此。若以元钞除丝数得每斤之数，以乘若有，亦通也。

四、今有钞二十四两七钱七分二厘五毫，买面三百六十七斤。若有钞二十三锭三十六两一钱四分三厘七毫五丝，问买面几何？

答曰：一千七百五十七斤四两。

以若有与买面相乘为实，以今有为法除之。余二五留为斤下两。若以元钞除面数为每斤之数也。以乘若有钞亦通。

五、今有米七斗，直钞三两二钱四分八厘。若有米五石六斗八升，问直钞若干？

答曰：二十六两三钱五分五厘二毫。

六、今有钞三两二钱四分八厘，粜米七斗。若有钞二十六两三钱五

分五厘二毫，问得米多少？

答曰：五石六斗八升。

七、今有布九千三百八十四匹，出关税之，每三十尺税布一尺。今共税讫三百一十三匹，却贴与客人钞一两七钱，问每匹价多少？

答曰：八两五钱。匹法二丈八尺。

下布以二丈八尺乘之，得二十六万二千七百五十二尺为实。以三十尺为法。除之，得八千七百五十八尺四寸为合税之布也，寄左。又下税布三百一十三匹，以二丈八尺乘之，得八千七百六十四尺，以合税布直减之，余多客人布五尺六寸，却贴与钞一两七钱。又下布一匹二丈八尺，以一两七钱加之为实，以五尺六寸为法除之，得一匹之钱。

八、今有罗八尺买红花二斤，染罗三丈二尺。今只有罗五十六匹一丈六尺八寸。今欲减买花自染，问得红罗多少？

答曰：买红花罗一十一匹八尺九寸六分。红花七十九斤三两八钱四分，染罗四十五匹七尺八寸四分。二丈八尺，匹法。

下匹，以匹法二八通之，入零尺，得一千五百八十四尺八寸，以八尺因之为实。又以八尺与三丈二尺相并得四十尺为法。除实，见买红花罗也。又下买红花罗，以二斤因之为实，以八尺除之得斤。下有分加六为两，见红花也。又下总尺，以染罗三丈二尺乘之为实，以前并四十尺为法，除实得染罗。

九、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今添重三百六十斤，行一千三百里，问与钞几何？

答曰：一百二十六两七钱五分。

此两头交易也，以今行道乘今载重，与元与钞相乘为实。却以元行道乘元载重为法，除之。

如减斤重，减行道数，皆同此法，此双头交易乘除也。

有草：

一 ， 一|| ， 丄||||，

一||| ， 一||||丄 ， 已负。

十、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今增重四百九十二斤，与钞六十七两六钱八分，行道几何？

答曰：六百四十里。

以元行乘元载重，与今与钞相乘为实，却以元与钞乘今载重为法除之。

一 ， 一|| ， 丄||||，

丁怯， 一丅≡||， 丄π丄π。

十一、元雇车一两，议行道一千里，载重一千二百斤，与钞七十五两。今与钞七十六两五钱，行一千七百里，问载重几何？

答曰：七百二十斤。

以元载重乘元行道与今与钞相乘为实。却以今行道乘元与钞为法。除之。

一 ， 一|| ， 丄||||，

一π ， 戊缺， 丄丅≡。

十二、雇车一两，行九百里，载二千五百斤，与钱一百八十两。今又载三千六百五十斤，行一千六百里，问与几钱？

答曰：四百六十七两二钱。

π ， 二|||| ， |≡ ，

一丅 ， 三丅≡ ， 已负。

十三、雇车一两，行九百里，载二千五百斤，与钱一百八十两。今又载三千六百五十斤，与钱四百六十七两二钱，问行几里？

答曰：一千六百里。

𝍠　，　𝍡𝍡𝍡　，　𝍢𝍣𝍤　，

丁怯，　𝍥𝍦𝍧　，　𝍨𝍩𝍪𝍫。

十四、雇车一两，行九百里，载二千五百斤，与钱一百八十两。今行一千六百里，与钱四百六十七两二钱，问载重几何？

答曰：三千六百五十斤。

𝍠　，　𝍡𝍡𝍡　，　𝍢𝍣𝍤　，

一𝍦　，　戊缺，　𝍨𝍩𝍪𝍫。

十五、有六人八日淘金七钱四分。今二十四人淘一月，问得多少？

答曰：一十一两一钱。

𝍦，　𝍠，　𝍪𝍧，

𝍡𝍡𝍡，　𝍥○[1]，　已负。

十六、今有弓匠四人，造弓五日，得三张。今二十四日，造弓五十四张，问几人造弓？

答曰：一十五人。

𝍨𝍨，　𝍨𝍨，　𝍩𝍩，

丁怯，　𝍡𝍨𝍨，　𝍧𝍨𝍨

十七、有八成金重三两五钱，倒钞一百二十两。又有九成金，倒钞一百六十二两，问得金几两？

---

① 原无此○字。

答曰：四两二钱。

凡两头交易，先布六草为法。已负者：甲乙乘为法，丁戊乘为实。丁怯者丙戊乘为法，甲乙已乘为实。戊阙者丙丁乘为法，甲乙已乘为实。甲乙丙。丁戊已。若以复乘之除之亦通。

十八、今有人典钞，不记本钱，每月息三分。今二十四个月二十一日，通该本息钞五十四锭三十三两三钱七分，问本息各几何？

答曰：本钞三十一锭二十两。

息钞二十三锭一十三两三钱七分。

以本息共钞为实，以二十四个月二十一日三除日数为月下之分，以月息三分乘之，得七钱四分一厘。即每两之息也。加入本钞一两得一两七钱四分一厘。为法除实。先将本钞，反减得息钞。

十九、今有芝麻、黑豆共六十三石六斗，共粜钞四百五十八两八钱五分。芝麻每斗九钱，黑豆每斗六钱，问二色各几何？

答曰：芝麻二十五石七斗五升，钞二百三十一两七钱五分。

黑豆三十七石八斗五升，钞二百二十七两一钱。

以共数与芝麻价相乘，得五百七十二两四钱，与共钞相减，余一百一十三两五钱五分为实。却以二价相减，余三为法除之，得三十七石八十五升为黑豆数。反减共数得芝麻数。

二十、今有钞二两六钱三分，买核桃、雪梨，共五百五十五个。核桃一钱买一十二个，雪梨一钱买三十个，问桃李各几个？

答曰：桃一百五十六个，钞一两三钱。

梨三百九十九个，钞一两三钱三分。

以总钞与核桃个数相乘得三百一十五个六分，与核桃梨共数相减，余二百三十九个四分为实。以三除之，折半得梨数，反减

得桃数。此一法仅存，旁通不可为例。要之前法通例也。

二十一、今有甲乙药二件，该六百九十五斤一十三两，共卖钞二千一百六十三两六钱九分六毫二丝五忽。甲药每斤三两四钱五分，乙药每斤二两七钱五分。问二药价各几何？

答曰：甲药三百五十七斤七两，钞一千二百三十三两一钱五分九厘三毫七丝五忽。

乙药三百三十八斤六两，钞九百三十两五钱三分一厘二毫五丝。

置共六百九十五斤八一二五，先以甲价乘之，得二千四百两五钱五分三厘一毫二丝五忽。内减去共卖钞二千一百六十三两六钱九分六毫二丝五忽，得二百三十六两八钱六分二厘五毫为实，以价相减，余七分为法。除之，得三百三十八斤三分七厘五毫，加六零分得六两为乙药斤数。反减共数，余为甲药斤数，以各价乘之。

二十二、今有钱五万三百四十六两八钱，买米一千引。只云末茶每引六十三两八钱，叶茶每引四十六两五钱。问二色各几引？

答曰：叶茶七百六十四引，

末茶二百三十六引，

二十三、今有蜜、蜡一百四十六斤六两，共值钞二十九贯六百八十七文五分。只云蜡斤价三百八十文，蜜斤价六十八文，问各多少？

答曰：蜜八十三斤二两，蜡六十三斤四两。

其带两者，留之以麻麦法求之，通矣。凡贵贱相和，即盈朒之类也。不可以例通。惟通分于分术，当自知之。

二十四、今有鸡、兔一百，共足二百七十二只。只云鸡足二，兔足四，问二色各几何？

答曰：鸡六十四只，兔三十六只。

置共一百，以四乘之，得四百，与总足相减，余一百二十八，折半得鸡数。反减得兔。倍一百得二百，减总足，余七十二，折半得兔。反减得鸡，亦通。

《丁巨算法》原文

一、今有平方积五万五千六百九十六尺，问一面方多少？

答曰：二百三十六尺。

术曰：置积在地，商二二如四，除了四万。另于退二位，置二合商百，并于下置二为方，倍之得四，将四问得四三一十二，又除一万二千。于上续商三，下方亦续三，又将上下三为三三如九，又除九百，实有二千七百九十六，又将方三，倍为六，共得四六，却以四商得四六二十四，又除二千四百。续商六以六除尽。

二、今有平方积六十二万二千五百二十一尺，问一面几何？

答曰：七百八十九尺。

置积尺，以一算于一尺之下，为隅，常超一位，至二万尺之下。上商七，呼一七生方七，即于隅法之上布七作方法，呼七七四十九，去积四十九万尺。倍方法为一十四，方法一退，隅法二退。上商八，呼一八生方八，于方法之后，对上商八之，下布方法八；呼一八如八，去积八万尺，余积五万二千五百二十一尺；呼四八三十二，去积三万二千尺；又呼八八六十四，去积六千四百尺；倍方法八得方法一百五十六，方法一退，隅法二退。上商九，呼一九生方九，即于生法之后，对上商九之，下布方法九；呼一九如九，去积九千尺；呼五九四十五，去积四千五百尺；呼六九五十四，去积五百四十尺，九九八十一，去积八十一尺，适尽。此平方之法颇难通，故复二例。若有积九千六百零四尺，开平方一面几

何？然九十八尺，置积在地，如上除也。

三、今有积一万五千六百二十五尺，问为立方一面几何？

答曰：二十五尺。

置积尺，以一算于五尺之下，常超二位，至位之下。上商二，呼一二生廉二，二二生方四，呼二四如八，去积八千尺，余七千六百二十五尺。呼一二添廉二，二四添方八，又呼一二添廉二，方法一退，廉法二退，下法三退。上商五，呼五六生方三十，五五生方二十五，命商除积，一五如五，去积五十尺，五五二十五，去积二千五百尺，二五一十，去积一百尺，五五二十五，去积二十五尺适尽。

案以上《丁巨算法》二十七题问见《永乐大典》卷一六三四三之一六三四四中。

(4)《锦囊启源》原文

黍者轻之末也，故十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，三百八十四铢为一斤，即一十六两也。又云一两为四分，二斤为一裹。古者三十四两为一裹，十五斤为一称，即二百四十两。二称为一钧，四钧为一石，即一百二十斤也。又名一驮。二百斤为一袋，二袋为一引，即六千四百两也。增减数目，随意取用。

斤见两歌：

一退一六　二退三二　三退四八　四退六四
五退八　六退九六　七为一一二　八为一二八
九为一四四

《锦囊启源》原文

一、今有茜草六百六十六斤六两，每斤价银二钱三分四厘，问银多

少?

答曰:一百五十五两九钱三分一厘七毫半。

二、今有紫草七百七十七斤七两,每斤价银三钱六厘八毫,问银多少?

答曰:二百三十八两五钱一分七厘八毫三丝半。

三、今有白沙蜜八千八百八十八斤八两,每斤铜钱一百五十六文,问钱多少?

答曰:一百三十八万六千六百六文。

四、今有黑沙糖九百九十九斤九两,每斤白银一钱三厘四毫,问银多少?

答曰:一百三两三钱五分四厘七毫六丝二忽半。

五、今有白沙糖一千一百一十一斤一十两,每斤白银二钱三分四厘,问银多少?

答曰:二百六十两一钱二分二毫半。

六、今有需香一万一千一百一十一斤一十一两,每斤直银一两一钱六分,问银多少?

答曰:一万二千八百八十九两五钱五分七厘半。

七、今有白檀二千二百二十二斤一十二两,每斤价钱四贯三百六十文,问钱多少?

答曰:九千六百九十一贯一百九十文。

八、今有降真三百三十三斤一十三两,每斤白银五钱一分四厘,问银多少?

答曰:一百七十一两五钱七分九厘六毫二丝半。

九、今有笺香四百四十四斤一十四两,每斤直银一两三钱八分,问银多少?

答曰:六百一十三两九钱二分七厘五毫。

十、今有血竭一十二斤一十二两，每两价钱四百五十贯，问都钱该多少？

答曰：九万一千八百贯。

法曰：下一十二斤在地，以六加之，见一百九十二两加上一十二两，共得二百四两为实，用价钱乘之合问。余者准此。

十一、今有木香十万三千四百九十两，每斤直银二十四两五钱，该银多少？

答曰：十五万八千四百六十九两六分二厘五毫。

法曰：下数总两在地，用十六除之，见六千四百六十八斤一分。二厘五毫为实，以斤价作法乘之，合问。均称仿此，求之是也。

十二、今有丹参三百八十五称一十三斤，每斤直铜钱三十四文，该钱多少？

答曰：一十九万六千七百九十二文。

十三、今有元参一十万八千三百两，只云每一称直赤金二毫八忽，该多少？

答曰：九分三厘八毫六丝。

法曰：下两在地，用二十四除之，见四百五十一称二分半，以价乘之是也。

十四、今有黄苓十万二千六百称零一十二斤，每斤直白银三分二厘，该银多少？

答曰：四万九千二百四十八两三钱八分四厘。

法曰：下称在地，一五加之，见一百五十三万九十斤加入零斤共见一百五十三万九千一十二斤为实，用价钱乘之合问。

十五、今有青盐一千二百三十四称* 一十二斤一十二两，每两价银

* 称，原文讹作"乘"，此为李俨校正。

二钱七分半。

答曰：八万一千五百两一钱。

法曰：下称在地，用一五加之，见一万八千五百一十斤，加入一十二斤，共得一万八千五百二十二斤，用一六加之，见二十九万六千三百五十二两，加入一十二两，共得二十九万六千三百六十四两为实，用价钱乘之是也。余准此。

十六、今有朱砂一十二斤一两，每斤赤金四钱三分八厘，问赤金多少？

答曰：五两二钱八分三厘三毫七丝五忽。

十七、今有心红二十二斤二两，每斤直铜钱九百七十八文，问该铜钱多少？

答曰：二万一千六百三十八文二分半。

十八、今有脂丹三十三斤三两，每斤直白银一钱八分七厘六毫，该银多少？

答曰：六两二钱二分五厘九毫七丝五忽。

十九、今有红豆四十四斤四两，每斤价钱白银一两二钱五分，该白银多少？

答曰：五十五两三钱一分二厘五毫。

二十、今有沉香五千五百五十五斤一十五两，每斤赤金三两六钱四分八厘，问金多少？

答曰：二万二百六十八两六分。

法曰：列各各斤两数目在地。两用斤分为实，各以价钱为法乘之，各得所求钱也，合问。右一十五问一体求之是也。余者准此。

二十一、今有课银三十六两九钱三分六厘，欲换安息香。每斤用银九分六厘，该多少？

答曰：三百八十四斤一十二两。

法曰：下银在地为实，以斤价作法除之，得三百八十四斤七分五厘。零数加六为两也。但见一等之法，准此求之是也。

案以上《锦囊启源》二十一题问，见《诸家算法》中。

《锦囊启源》原文

一、今有温州打染杂色布一十四匹，共直米三十三石六斗。又有杂色布二百八十六匹，问直米多少？

答曰：四百石四斗。

法曰：下又有布二百八十六匹在地，用直米乘之，见九千六百九石六斗为实，用布二十四匹除之合问。一等之法，准此求之。

二、今有水银二百八十四两，直银七锭五两，只有课银三百八锭三十一两二钱五分，该水银多少？

答曰：一万二千三百四十五两。

法曰：下只有课银在地，锭用五通之，见一万五千四百三十一两二钱五分。用水银乘之见四百三十八万二千四百七十五两为实。列银七锭，以五通之，共见三百五十五两，作法。除之。

三、今有小麦一十六石，磨到白面一千四百八十斤。只有白面一千一百四十一斤一十两六钱，该小麦多少？

答曰：一十二石三斗四升五合。

法曰：下只有面在地。两已下用斤分为实，用小麦十六石乘之。见一十八万二千七百六为实，用磨到白面一千四百八十斤除之，合问。

四、今有川芎四十五斤，共直白银二百一十三两七钱五分。只有川芎三百八十四斤一十二两，问银多少？

答曰：三十六锭二十七两五钱六分二厘半。

法曰：下只有川芎在地。两用斤分，以直银乘之，得八万二千二百四十两三钱一分二厘半，为实。以四十五斤除之，锭用五约，合问。

五、今有钟乳粉二百四十六斤，该牙钱米三十石三斗五升六合四勺。今收讫牙钱米七千七石七斗六升二合六勺，问钟乳粉几斤？

答曰：五万六千七百八十九斤。

法曰：下收讫牙钱米在地，用钟乳粉乘之，见一百七十二万三千九百九石五斗九升九合六勺为实，用牙钱米作法，除之，合问。

六、今有赤金三厘七丝二忽，得常行篦子二十四付。只有赤金一十万两，问该篦子多少？

答曰：七亿八千一百二十五万付。

七、今有秋粮地二十三顷四十五亩，共该正耗二百五十石九斗一升五合，照依地亩又科下秋粮五百二十三石七斗六升半，问该地若干？

答曰：四十八顷九十五亩。

八、今有上号三梭布三百六十五匹，共得净花四千五百六十二斤八两，匹法二丈四尺。只有净花五千三百五十八驮四十四斤一两，每驮一百二十斤，该三梭(布)多少？

答曰：五万一千四百四十匹七尺八寸。

法曰：下只有花在地，两用斤分，驮法加二，共见六十四万三千四斤六厘二毫半。用三梭布乘之得二亿三千四百六十九万六千四百八十二斤八分一厘二毫半为实。用原净花作法除之，见五万一千四百四十匹三分二厘半。零数用匹法二丈四尺乘之，得七尺八寸，合(问)。此法是异乘同除带驮法斤秤并端匹也。

九、今本郡库内收讫净花一十万三千四十驮一钧一秤一十一斤一十三两。只云每花地七亩带加耗，纳着二斤一两，问该地几顷？

答曰：四十一万九千六百七十六顷一十一亩。

法曰：置收到净花在地，驮数内加二见一千二百三十六万五千四百斤，加入钧秤斤两，两用斤分，共见一千二百三十六万五千四百五十六斤八分一厘二毫半，以亩法乘之为实。用纳花二斤一两，两用斤分，作法。除之，得所求顷亩也。合问。但遇相应之法准此求之。

案以上《锦囊启源》九题问，见《永乐大典》卷一六三四三之一六三四四中。

(5)严恭《通原算法序》

天下之理一，散之则为万，殊有是理则有是数。数由理而出，故亦原于一，推之而后有十百千万，以至于无穷者焉。上古结绳而治，何有于数，伏羲画八卦，造书契，而数始形。至轩辕氏《九章》之数出，而乘除加减之法于是乎备。后世又有所谓《张丘建》，《夏侯阳》，《缉古》，《五曹》，《五经》，《孙子》，《周髀》，《海岛》，《数术记遗》者谓之九经，并《九章》为十经。唐李淳风注释而编辑之，以为一家之书，以通天下之变，以传后世，而训蒙士。古人之于数，其用心精且博如此哉。姑苏严君名恭，幼读之以明其理，长试吏术，其绪余乃及于数学，而益致其精。一日袖书一卷示予，各曰《通原算法》。自言以兵乱失故传，此特其默集者尔。欲锓诸梓，以广其术，属予引其端。予惟《周礼》六艺之教，终之九数。人生八岁入小学，则诵其文。比其长也，习其法以济诸用，故孔子为委吏曰会计当而已。无严君颖悟之资，何由一本万殊之理达之于通原之法，其视天下事物，

若金谷之出纳，田土之度量，户口之增减，大而山堆土积，小而毫分缕析。如庖丁解牛，迎节中窾，恢恢乎有余刃，而无全牛矣。方今分教设科，一循古制，数之所系，尤为不轻，俾通原之法，得行于时，岂曰小补之哉。洪武壬子(1372年)迎夏日朝列大夫潮州府赵瑀序。

严恭《通原算法》原文

称有二：官称一斤准足称一十二两八钱。足称一斤准官称一斤四两。

严恭《通原算法》原文

一、今有荒丝一千三百八十七斤。每荒丝一十两得净线九两，问净线若干？

答曰：一千二百四十八斤四两八钱。

术曰：置丝数通准两加六，然后九因之再准斤减六，即得。

二、今有净线一千二百四十八斤四两八钱，每净线一两练熟线七钱五分，问熟线若干？

答曰：九百三十六斤三两六钱。

术曰：置线数通准两，从斤至上加六。然后以七钱五分乘之，再准斤，减六准斤。即得。

三、今有织染段匹，每荒丝一十两得生线九两，每生线一两练熟线七钱五分，每熟线一两，却加颜料三分。今织成段子五百八十四匹，通称重九百六十四斤四两九钱八分八厘，问通用荒丝及每匹斤重料例各若干？

答曰：通用荒丝一千三百八十七斤。

每匹该用荒丝二斤六两，得生丝二斤二两二钱，练熟

线一斤九两六钱五分。

加颜料七钱六分九厘五毫，计重一斤一十两四钱一分九厘五毫。

术曰：置通称重数通准两得一万五千四百二十八两九钱八分八厘为实。别以生丝九两以七钱五分乘之，得六两七钱五分，却以每两加颜料三分共得六两九钱五分二厘五毫为法。除之，得通用荒丝数。再以五百八十四匹，除之，得每匹该用荒丝；以九乘之得生线数，又以七钱五分乘得熟线数。又以三分乘之得颜料数；加熟线，总之，得每匹斤重。合前问。

四、今有官称五百六十八斤，问准足称若干？

答曰：四百五十四斤六两四钱。

术曰：置官称通准两，即斤上加六。然后八因之得足称，两减六准斤。即得。

五、今有足称四百五十四斤六两四钱，问准官称若干？

答曰：五百六十八斤。

术曰：置足称通准两，即从斤上加六。然后八除，或身外加二五亦可得。官称两减六准斤，即得。

六、今有官称一斤价钱五两七钱六分，问准足称价钱若干？

答曰：七两二钱。

术曰：置价钱为实以八除之即得。

七、今有物每斤价钱四两，问每两价钱若干？

答曰：二钱五分。

术曰：置每斤价钱四两，以一十六两减之即得。

八、今有金方八寸问重若干？

答曰：五百一十二斤。

按《夏侯阳算经》云：金方寸重一斤，银方寸重一十四两，玉方

寸重一十二两，锡方寸重九两五钱，铜方寸重七两五钱，铁方寸重六两，石方寸重三两。

术曰：列方八寸再自乘得五百一十二寸，以一寸为一斤乘之，即得。

九、今有金围圆一尺二寸，厚一寸，问重若干？

答曰：一十二斤。

术曰：列围圆一尺二寸，自乘得一千七百二十八寸，以九乘之，得一万五千五百五十二寸。十六除得九百七十二寸，以一寸为一斤乘之，即得。

十、今有玉围圆九寸，厚三寸，问重若干？

答曰：一十五斤三两。

术曰：列围圆九寸，自乘，以厚三寸乘之，得二百四十三寸。十二除得二十寸二分五厘，以一寸重十二两乘之，得二百四十三两，以一十六两除之，即得。

十一、今有铜方八寸五分，问重若干？

答曰：二百八十七斤一十三两九钱三分七厘五毫。

术曰：列方八寸五分，再自乘得六百一十四寸一分二厘五毫，以一寸重七两五钱乘之为实，以斤法一十六两除之，即得。

十二、今有铁墩面方一尺，底方一尺三寸，高八寸，问重若干？

答曰：三百九十九斤。

术曰：面方自乘，底方自乘，面底方相乘，三位并之，得三百九十九寸，以高乘之，三除得一千六十四寸，以一寸重六两乘之，得六千三百八十四两，以一十六两除之，即得。

十三、今有锡铅面阔五寸，长二尺，底阔四寸，长一尺九寸，厚三寸，问重若干？

答曰：一百五十六斤七两二钱五分。

术曰：倍面长加底长，以面阔五寸乘之，得二百九十五寸；又倍底长加面长，复以底阔四寸乘之，得二百三十二寸；二位并之，得五百二十七寸；以厚三寸，乘一千五百八十一寸，如六而一，得二百六十三寸五分。以一寸重九两五钱乘之，为实。以斤法十六两除之，即得。

十四、今有石磉面方二尺三寸，底方二尺一寸，厚一尺五寸，问重若干？

答曰：一千三百六十二斤三两。

术曰：面方自乘，底方自乘，面底方相乘三位并之，以厚一尺五寸乘之，得二万一千七百九十五寸，如三而一，得七千二百六十五寸。以一寸重三两乘之为实。以斤法一十六两除之，即得。

十五、今有三色金共二十两，内九分色四两，七分色七两，五分色九两。欲通溶炼，问合得分数若干？

答曰：六分半色。

术曰：以九乘四两得三十六，七乘七两得四十九，五乘九两得四十五，三位并之，得一百三十分为实。以共金二十两为法。除之，即得。

十六、今有三色银共一百两，内九成色二十两，八成色三十五两，七成色四十五两，欲准作十成色，问得若干？

答曰：七十七两五钱。

术曰：以九乘二十两得一百八十两，八乘三十五两得二百八十两，七乘四十五两得三百一十五两，三位并之，得七百七十五两。十成色为法。除之，即得。

十七、今有铜，一经入炉，每十斤得八斤。令三经入炉过铜一百七十五斤一十三两四钱四分，问原本生铜若干？

答曰：三百四十三斤七两。

术曰：以八斤再自乘得五百一十二为法，置铜通准两，即从斤上加六。为实，以法除之，再准斤，减六。即得。

十八、今有铁，一经入炉，每十斤得七斤。令三经入炉过铁七十九斤一十两九钱三分一厘，问原本生铁若干？

答曰：二百三十二斤五两。

术曰：以七斤再自乘得三百四十三为法，置铁通准两，即从斤上加六。为实，以法除之，再准斤，减六。即得。

十九、今有给与人钱，初一人与三钱，次一人与四钱，以次转多一钱。与讫还收聚，却均分之，各人得一百钱，问人数若干？

答曰：一百九十五人。

术曰：置一百钱减初与三钱，余九十七，倍之，得一百九十四，加初一人，即得。

二十、今有户出银二两，今以家有贫富不等，令户品搭高下出之最下户出银四银以次户差，各多二银，问几户可以通滚？

答曰：一十七户。

术曰：列出银二两减最下户出银四钱余一两六钱，倍之得三两二钱，又加户差二钱，共三两四钱为实。以户差二钱为法。除之，即得。

二十一、今有负货期约如违限一日罚钱二两五钱，二日罚钱五两，如是日多二两五钱。今违限一十二日，问罚钱若干？

答曰：一百九十五两。

术曰：置一十二日加一乘之得一百五十六，又以二两五钱乘之，得三百九十两，半之，即得。

二十二、假如丁年正月二十六日假钱一百两，月息五分。其年有闰，于戊年四月初八日付还，问利息若干？

答曰：七十七两。

术曰：先下四月初八日，连闰共加一十三月，减去正月二十六日，余剩一十五月零一十二日将零以三十日除之，得四分，别以借钱一百两，以月息五分因之，得五两乘之，即得。

二十三、假如前年正月初九日借银一百两，月息三分。于今年十一月十二日，入利银五十两，问余欠利若干？

答曰：五十二两三钱。

术曰：置十一月，十二月加上二十四月，减去正月初九日，余将三十四月零三日，除作一分。乘原借银两并月息分数，该利银一百二两三钱，减去入利银五十两，余合前问。

二十四、假如上年五月十三日，借钱二千二百五十两，月息五分。于今年正月二十二月入还本利钱一千五百两，问净欠钱若干？

答曰：净欠一千六百八十三两七钱五分。

术曰：先下还钱日加上十二月，减去原借月日，余得八月零九日，除作三分。乘原借钱并月息分数，该利钱九百三十三两七钱五分，更加原借本钱，共三千一百八十三两七钱五分，减去今入钱，即得。

二十五、今有丁年五月十六日借人钱作本，于戊年七月二十八日付还，其年有闰，失记原借本钱，止知月息五分。今凭放钱主算，该本利一百七十七两，问原借本钱并利息各若干？

答曰：原借本钱一百两，利息七十七两。

术曰：先下还钱日期，连闰加上十三月，除去原借日月，余得一十五个月零一十二日，化为四分。却以五分乘之，得七钱七分。加上本钱一两，共一两七钱七分为法。别以本利一百七十七两为实，除之，得一百两，是本钱。再以五分乘月息得五两，再以月日乘之得利息数，合前问。

二十六、今有丁年五月十六日，借钱一百两，于戊年七月二十八日

付还，其年月闰不知月息分数。今算该利息七十七两，问月息几何？

答曰：五分。

术曰：先下还钱月日连闰加十三个月，减去原借月日，余得一十五个月零一十二日，化作四分。为法。别以今算利钱七十七两为实。以法除之，即得。

二十七、今有未年六月十二日，斛钱一百八十两，月息二分五厘。今入利钱三十七两八钱，问展至何年月日？

答曰：入利八个月零一十二日，展至申年二月二十四日。

术曰：列借钱一百八十两，月息二分五厘乘之，得月息四两五钱为法。以入利钱三十七两八钱为实。以法除之，得八个月零四分，以三十日通之得一十二日，于原典月日上加之，即得。

二十八、今有散钱不知其数，作七十七陌穿之，欠五十文揍穿；若作七十八陌穿之，不多不少，问钱数若干？此系管数，却非不足适足。

答曰：二千一百六文。

术曰：列七十八自乘得六千八十四，又以七十七减欠五十余二十七，乘头位得一十六万四千二百六十八为实。别以七十八，七十七相乘得六千六，减除头位，实不满法，却合前问。若以七十八数有零，当五千九百二十九乘。

二十九、今有瓦不知其数，若三十四片作一堆，剩五片；若三十六片作一堆，剩七片；问瓦若干？亦非两盈也。

答曰：二千一百九十五片。

术曰：以三十四片加一乘之，得一千一百九十，半之，得五百九十五。却以七片乘之，得四千一百六十五片，别以三十六减一乘之，得一千二百六十，半之，得六百三十，却以五片乘之，得三千一百五十片，并之，得七千三百一十五片为实。却以三十

四，三十六相乘得一千二百二十四，减除头位，实不满法即（瓦）数，合前问。

案以上《通原算法》二十九题问，见《诸家算法》中。

严恭《通原算法》原文

一、今有客借去木，周围三尺二寸，长四丈八尺。今却有周围三尺六寸木，问合还长若干？

答曰：三丈七尺九寸二十七分之七。

术曰：以原借木周围自乘，又以长乘得四十九万一千五百二十寸，十二除得四万九百六十寸为实。却以今有木周围自乘一千二百九十六寸。十二除得一百八寸为法，除之即得。

二、今有施材木阔三尺二寸，厚一尺四寸，长二丈三尺，价钱二十五两。别有木，阔二尺八寸，厚一尺二寸，长二丈一尺，问该价若干？

答曰：一十七两一钱四十六分之九。

术曰：以先有木厚阔相乘，又以长乘得一十万三千四十寸为法。却以别有木厚阔相乘，又以长乘得七万五百六十寸，再以原价二十五两乘之，得一百七十六万四千两为实。以法除之，即得。

三、今有斋僧。不知其数。初日每五人支衬八两，次日每九人支衬七两，凡三日共支衬钱三百二十一两，问计若干？

答曰：一百三十五人。

术曰：互乘之。以九人乘八两得七十二，以五人乘七两得三十五，并之得一百七，为法。别以九人五人相乘得四十五。乘共支衬钱得一万四千四百四十五。以法除之，即得。

四、今有钱一万二千四百八十两，欲买黄白蜡各半。其黄蜡每三斤该价一两一钱，白蜡每斤三两一钱。问买黄白蜡各若干？

答曰：黄白蜡各三千六百斤。

术曰：列白蜡斤价三两一钱，以三斤乘之，得九两三钱，并黄蜡三斤价一两一钱共得一十两四钱为法。置钱一万二千四百八十两，以三斤乘之为实。以法除之，即得。

五、今有布匹价二十一两，绢匹价四十一两。欲将布易绢，问多少可以价停？

答曰：布四十一匹，易绢二十一匹。

术曰：布绢匹价相乘，得各该价钱，得八百六十一两为实。以布匹价为法。除之得布数。绢匹价为法，除之得易绢数，合前问。

六、今有绢一匹，买紫草三十斤，染绢二丈四尺。今却有绢七匹，欲减绢买紫草，还自染绢，问减绢买草染绢各若干？

答曰：减绢四匹一丈五尺，买紫草一百三十一斤四两，染绢二匹二丈五尺。

术曰：买绢七尺以四十尺通之，得二百八十尺，以乘买草绢四十尺，得一万一千二百尺。并本绢得六十四尺为法除之，得减绢数。别以二百八十尺乘草三十斤，得八千四百斤，仍用六十四尺为法除之，得买草数。又以二百八十尺乘染绢二十四尺，得六千七百二十尺，仍用前法除之，得染绢数，合前问。

七、今有丝一斤八两，换绢一匹[即四十尺]，及将丝九两贴钱四两，得绢二丈。今有钱五两，问买绢得若干？

答曰：六尺二寸五分。

术曰：列丝九两乘换绢四十尺得三百六十尺，以丝一斤八两准二十四两为法，除之，得一丈五尺，为丝所得绢。减二丈，减余五尺为钱所值，却乘今有钱五两得二十五尺为实。以贴钱四两为法除之，即得。

八、今有人担茶九十斤，行五百步，得钱一两。今担茶一百二十斤，

得三百五十步，问得钱若干？

答曰：九钱三分三厘三分之一。

术曰：以今担茶一百二十斤乘三百五十步。又以得钱一两乘之为实。别以先担米九十斤乘五百步为法除之，即得。

九、假如甲年十二月二十八日典钱五十两，月息三分。于丙年六月初八日取赎，问利息若干？

答曰：二十六两。

术曰：先下六月初八日，加上二十四月，除去十二月二十八日，余剩一十七月零一十日，以三十日通月计五百二十日。却以典钱五十两，以月息乘之，得一两五钱，乘之以三十日为法除之，即得。

十、今有人借他布三匹，匹四十尺。约每月匹息三尺。今已七个月取去布二匹，贴还钱三两，问布匹价若干？

答曰：七两五分八厘八毫一十七分毫之四。

术曰：列借布三匹，以匹息三尺乘之，得月息九尺，又乘七月得六十三尺。以取去布五匹准八十，又减余一十七尺为法。以贴还钱三两，却以四十尺乘之得一百二十两为实，以法除之，即得。

十一、今有系官民田，共纳正米四百七十一石四斗八升六合。共纳过耗米二十六石五斗三合一抄五撮。问系官民苗正耗米各若干？

答曰：系官正米一百八十五石七斗四升三合。

耗米六石五斗一合五撮。

民苗正米二百八十五石七斗四升三合。

耗米二十石二合一抄。

术曰：置正米总数以七升乘之得三十三石四合二抄。减去纳过

耗米二十六石五斗三合一抄五撮，余得六石五斗一合五撮为实。却以民苗耗米七升，减去系官耗米三升五合，余三升五合为法。除之，得一百八十五石七斗四升三合为官正米。别置共该正米以三升五合乘之，得一十六石五斗二合一抄，却以纳过耗米三十六石五斗三合一抄五撮，减余得一十石一合五撮为实。仍以三升五合为法除之，得是民苗正米，依前法各乘耗米，合前问。此贵贱相和一体。

十二、今有米麦共一千石，共该价一万六千八百一十四两七钱一分。只云米石价一十七两二钱，麦石价一十四两五钱，问米麦各若干？

答曰：米八百五十七石三斗，麦一百四十二石七斗。

术曰：置米麦共数，以米价乘之，得一万七千二百两。减去共价，余有三百八十五两二钱九分为实。米麦价相减余二两七钱为法。除之，得麦数。别置米麦共数，以麦价乘之，得一万四千五百两，却以共价减余二千三百一十四两七钱一分，仍以二两七钱为法除之，得米数，合前问。

十三、今有大鱼一斤值钱二两，小鱼七斤值钱五两。今买鱼一百斤价钱八十七两五钱，问大小鱼各若干？

答曰：大鱼一十二斤半，小鱼八十七斤半。

术曰：置鱼一百斤，以二两乘之，得二百两，减去八十七两五钱，余有一百一十二两五钱。以七斤乘之，得七百八十七两五钱为实。却以小鱼七斤，以二两乘之，得一十四两，减去五两，余九两。为法，除之，得小鱼数。别置鱼一百斤，以五两乘之，得五百两，又置钱八十七两五钱，以七斤乘之，得六百一十二两五钱，减去五百两，余一百一十二两五钱。仍以九两为法，除之，得大鱼数，合前问。

十四、今有鸡兔同笼，上有二十五头，下有六十四足，问鸡兔各若干？

答曰：鸡一十八个，兔七个。

术曰：上置头，下置足，半其足，以足减头，以头减足。

十五、今有钱三十五两四钱，买到桃子四百个，李子三百个，枣子二百个。只云桃子一个价钱可比李子八个，比枣子四十个，问三色各价若干？

答曰：桃子每个八分，计钱三十二两。

李子每个一分，计钱三两。

枣子每个二厘，计钱四钱。

术曰：置李子三百个，以八除之，得三十七个半；枣子二百个，以四十除之，得五个；并桃子共四百四十二个半为法。置钱三十五两四钱为实。以法除之，得八分为桃子每个价。又以八除为一分，为李子每个价。又以四十除为二厘，为枣子每个价。各以原买个数乘之，得总价，合前问。

十六、今有绫一百五十匹，罗三百匹，绢四百五十匹，总该价钱二万九千二百八十两。只云绫匹价比罗匹价较多四两七钱。又罗匹价比绢匹价较多一十三两五钱。问绫罗绢各价若干？

答曰：绫匹价四十三两二钱，罗匹价三十八两五钱，绢匹价二十五两。

术曰：列罗三百匹，以一十三两五钱相乘得四千五百两；又绫一百五十匹，以一十八两二钱相乘得二千七百三十两；并之得六千七百八十两；以总价减余得二万二千五百两为实。以三项匹数并之，得九百匹为法。除之，得绢匹价；增上一十三两五钱是罗匹价；又增四两七钱是绫匹价。合前问。

十七、今有钱一千八两，买到丝、绵、线共三百六十两。只云其中丝

三，绵二，线一，其线价一两* 及绵价一两六钱，及丝价二两，问三色并价各若干？

答曰：丝一百八十两，每两价钱二两二钱四分。

绵一百二十两，每两价钱二两八钱。

线六十两，每两价钱四两四钱八分。

术曰：先列丝、绵、线共三百六十两为三位，头位三乘，中位二乘，下位一乘。副并三二一得六分为法，各除之，头位是丝，中位是绵，下位是线。以二两除头位得九十，又一两六钱除中位得七十五，连下位并得二百二十五两为法。置钱一千八两为实，以法除之得四两四钱为线价。又以一两六钱除得二两八钱为绵价，二两除二两二钱四分为丝价。

十八、今有积七万一千八百二十四步，问为方几何？

答曰：二百六十八步。

严恭《通原算法》术曰：置积为实，借一算，步之超一等。言百之面十也，言万之面百也。上商二百，乘下隅为廉二百：呼除本积，二二除去四万，余积三万一千八百二十四步为实。倍廉为方法得四百。续上商六十。乘下隅为廉六十。于四百之下，与上商六十呼除本积，四六除去二万四千。六六除去三千六百，余积四千二百二十四步，为实。又倍廉六十得一百二十，并入方法共五百二十。续上商八步，乘下隅为廉八步，于五百二十之下，与上商八步呼除本积，五八除去四千，二八除去一百六十，八八除去六十四步，适尽，得方面二百六十八步，合前问。

十九、今有积五十六万四千七百五十二步四分之一，问为方几何？

答曰：七百五十一步半。

---

* 价一两，《永乐大典》倒作"一两价"。李俨校正。——编者

严恭《通原算法》术曰：列积步，以四分通之，纳子。又以四分再自乘得六十四，乘之为实。以开方法除之，得一万二千二十四分。却以四分自乘之，得一十六为法，除之，即得。

二十、今有积八万步，问为方若干？

答曰：二百八十二步五百六十五分步之四百七十六。

术曰：置积为实。借一算，步之，超一等。上商二百，乘下隅为廉二百。呼除本积，二二除去四万，余积四万步为实。倍廉为方法，得四百。续上商八十，乘下隅，为廉八十，于四百之下。与上商八十呼除本积，四八除三万二千。八八除去六千四百，余积一千六百步，为实。又倍廉八十得一百六十，并入方法共五百六十。续上商二步，乘下隅为廉二步，于五百六十之下，与商二步呼除本积，二五除去一千，二六除去一百二十，二二除去四步，余积四百七十六步。又倍廉二步得四，并入方法，并借一隅算，共得五百六十五。是得方面二百八十二步五百六十五分之四百七十六，合前问。

二十一、今有积一百二十一步，问为方若干？

答曰：一十一步。

二十二、今有积三百六十一步，问为方若干？

答曰：一十九步。

二十三、今有积七百步，问为方若干？

答曰：二十六步五十三分步之二十四。

二十四、今有积一千步，问为方若干？

答曰：三十一步六十三分步之三十九。

术曰：俱以前开方除之，即得。

二十五、今有积一千五百一十八步四分步之三，问为圆周几何？

答曰：一百三十五步。于徽术，当周一百三十八步一十分步之一。淳

风等按此依密率，为周一百三十八步五十分步之九。

严恭《通原算法》术曰：列积步，以四分通之，纳子，十二乘之；又以四分再自乘得六十四，乘之为实。以开方除之，得二千一百六十分。却以四分自乘得一十六，为法除之，即得。

二十六、今有积一千二百步，欲为圆，问径若干？

答曰：四十步。

术曰：列积步，以四乘三除，得一千六百步。以开方除之，即得。

二十七、今有积六万三千四百一尺五百一十二分尺之四百四十七，问为立方几何？

答曰：三十九尺八分尺之七。

严恭《通原算法》术曰：置积，以分母相乘，纳子，三千二百四十六万一千七百五十九分为积实，开立方除。借一算为下隅，常超二位约实。上商三百，乘下隅，得三百为廉法，以上商三百与廉三百乘得九万为方法。与上商三百呼除本积，三九除去二千七百万，余积实存五百四十六万一千七百五十九分为实。三因廉得九百，三因方得二十七万。续上商一十，乘下隅得一十，却乘廉九百得九千，并入方法，又以上商一十，乘下隅一十得一百，亦并入方法，共二十七万九千一一百分为方法。与上商一十呼除本积一二除去二百万，再呼一七除去七十万，一九除去九万，一一除去一千，余积存二百六十七万七百五十九分为实。以于方法内更加原廉九千，又倍商乘隅得二百并入方法；次以上商三百一十，三因得九百三十为廉法。续上商九分，乘下隅得九分，却乘廉得八千三百七十，并入方法；又上商九分乘下隅九分，得八十一分，亦并入方法，共二十九万六千七百五十一分为方法。与上商九分呼除本积二九除去一百八十万，再呼九九除去八十一万，六九除去五万四千，七九除去六千三

已审阅
子居 09-10-26，17:49

百，五九除去四百五十，一九除去九分适尽。得三百一十九分为实。次置分母五百一十二，亦以开立方除之得八为法，实如法而一，合前问。

二十八、今有立方积四千九百八十三万六千三十二尺，问立方一面多少？

答曰：三百六十八尺。

严恭《通原算法》术曰：置本积为实，借一算为下隅。常超二位约实，上商三百尺乘下隅得三百尺为廉法，以上商三百尺与廉三百尺相乘得九万尺为方法，与上商呼除本积，三九除去二千七百万，余积实积上存二千二百八十三万六千三十二尺为实。三因廉得九百尺，三因方得二十七万尺。续上商六十尺乘下隅得六十尺，却乘廉得五万四千尺，并入方法；又上商六十尺与下隅六十尺相乘得三千六百尺，亦并入方法，共三十二万七千六百尺为方法。与上商六十尺，呼除本积三六除一千八百万，再呼二六除去一百二十万，再呼六七除去四十二万，再呼六六除去三万六千尺，余存三百一十八万三十二尺。再于方法内更加原廉五万四千尺，又倍商隅三千六百得七千二百尺，亦并入方法共三十八万八千八百尺；次以上商三百六十，三因得一千八十为廉法。续上商八尺乘下隅得八尺，却乘廉得八千六百四十，又上商八尺与下隅八相乘得六十四尺，亦并入方法，共三十九万七千五百四尺为方法；与上商八尺呼除本积，三八除去二百四十万，再呼八九除去七十二万，再呼七八除去五万六千，再呼五八除去四千尺，再呼四八除去三十二尺适尽。得立方面三百六十八尺，合前问。

二十九、今有积四万六千六百五十六尺，问立方面若干？

答曰：三十六尺。

术曰：置本积为实，借一算为下隅，常超二位约实。上商三十尺，乘下隅得三十尺为廉法。以上商三十尺，与廉三十尺相乘得九百尺为方法，与上商呼除本积。三九除去二万七千尺，余积实存一万九千六百五十六尺为实。再以三因廉得九十尺，三因方得二千七百尺。续上商六尺，乘下隅得六。又却乘廉得五百四十尺，并入方法，又上商六尺与下隅六尺相乘得三十六尺，亦并入方法，共三千二百七十六尺为方法，与上商六尺呼除本积，三六除去一万八千，再呼二六除去一千二百，再呼六七除去四百二十，再呼六六，除去三十六适尽，合前问。

三十、有积七亿尺，问立方面若干？

答曰：八百八十七尺二百三十六万二千九百六十九分尺之二百一十三万五千八百九十七。

术曰：置本积为实，借一算为下隅，常超二位约实。上商八百尺，乘下隅得八百尺为廉法，以上商八百尺与廉八百尺相乘得六十四万尺为方法，与上商呼除本积。六八除去四亿八千万，再呼四八除去三千二百万，余积实存一亿八千八百万尺为实。三因廉法得二千四百尺，三因方得一百九十二万，续上商八十尺，乘下隅得八十尺，却乘廉得一十九万二千，并入方法，又上商八十尺与下隅八十尺相乘得六千四百尺，亦并入方法，共二百一十一万八千四百尺为方法，与上商八十呼除本积，二八除去一亿六千万，再呼一八除去八百万，再呼一八除去八十万，再呼八八除去六十四万，再呼四八除去三万二千，余积实存一千八百五十二万八千尺为实。次于方法内更加原廉一十九万二千，又倍商乘隅得一万二千八百，亦并入方法，共二百三十二万三千二百，次以上商八百八十，三因得二千六百四十为廉法。续上商七尺，乘下隅得七尺，却乘廉得一万八千四百八十，

并入方法，又上商七尺与下隅七尺相乘得四十九尺，亦并入方法，共二百三十四万一千七百二十九尺为方法，与上商七尺呼除本积，二七除去一千四百万，三七除去二百一十万，四七除去二十八万，一七除去七千，七七除去四千九百，二七除去一百四十，七九除去六十三尺，余积存二百一十三万五千八百九十七尺。又于方法内更加原廉一万八千四百八十，又倍商乘隅得九十八尺，亦并入方法，次又以上商八百八十七尺，三因得二千六百六十一尺，更加原借算一隅算，亦并入方法，是得方面八百八十七尺二百三十六万二千九百六十九分尺之二百一十三万五千八百九十七，合前问。

三十一、今有积七亿二千一百七十三万四千二百七十三尺，问立方面若干？

答曰：八百九十七尺。

三十二、今有积七十亿尺，问立方面若干？

答曰：一千九百一十二尺一千九十七万二千九百六十九分尺之一千二十一万七千四百七十二。

三十三、今有积八十亿尺，问立方面若干？

答曰：二千尺。

术曰：俱以前开立方除之即得。

三十四、今有积二十六万六千九百三十五尺半，欲为立圆，问径若干？

答曰：七十八尺。

术曰：置本积，以十六乘之，得四百二十七万九百六十八尺，九除之，得四十七万四千五百五十二尺为实，以开立方除。借一算为下隅，常超二位约实。上商七十尺，乘下隅为七十尺为廉法，以七十尺与上商七十尺相乘得四千九百尺为方法，与

上商七十尺，呼除本积，四七除去二十八万，七九除去六万三千，余积实存一十三万一千五百五十二尺为实。三因廉得二百一十尺，三因方得一万四千七百尺。续上商八尺，乘下隅得八尺，却乘廉得一千六百八十尺，并入方法，以上商八尺乘下隅得六十四尺，亦并入方法，共一万六千四百四十四尺为方法。与上商八尺呼除本积。一八除去八万，六八除去四万八千，四八除去三千二百，四八除去三百二十，四八除去三十二，适尽。得圆径七十八尺，合前问。

三十五、今有积七百三十五万七千五百尺，欲为立圆，问径若干？

答曰：七百六十尺一百四十九万七千四百二十七分尺之一百二十六万四千一百八十四。

术曰：置积以一百四十四乘得一十亿五千九百四十八万，又三除之，得三亿五千三百一十六万尺为实，以前开立方除之即得。

案以上《通原算法》三十五题问，见《永乐大典》卷一六三四三之一六三四四中。

(6)《事林广记》(1264～1324)

《事林广记》亦称"《新编纂图增新群书类要事林广记》"记录中统五年(1264年)迄泰定二年(1324年)时事。就中辛集上卷有"算法类算附——尺法"，计有：

《算法源流》

夫算法者：伏羲始画八卦，周公叙述《九章》。至于玄元益古，如积细草，其旨渊奥，难可寻绎，初学者无所措手。其加减因折乘除之法，所以上揆星躔，下营地理，巨无不揽。细无不规。其间谷帛买卖，赋役均输，冈弗备具。至于修筑积垛，浅深

广远，高厚长短，于纵横之间，举一至万，如示诸掌，苟能通此，其求上驱、怯飞归之法自解矣。

（按求上驱方法曾见沈括《梦溪笔谈》。）

算至极数

十一曰十　十十曰百　十百曰千　十千曰万

十万曰亿　十亿曰兆　十兆曰京　十京曰垓

十垓曰秭　十秭曰穰　十穰曰沟　十沟曰涧

十涧曰正　十正曰载　十载曰极

累算数法

二二单四　三二如六　四二单八　五二是十

六二十二　七二十四　八二十六　九二十八

十二二十；二三如六　三三如九　四三十二

五三十五　六三十八　七三廿一　八三廿四

九三廿七　十三三十；二四如八　三四十二

四四十六　五四二十　六四廿四　七四廿八

八四卅二　九四卅六　十四四十；二五是十

三五十五　四五二十　五五廿五，六五三十

七五卅五　八五四十　九五四十五　十五五十；

二六十二　三六十八　四六廿四　五六三十

六六卅六　七六四二　八六四十八　九六五十四

十六六十；二七十四　三七廿一　四七廿八

五七卅五　六七四十二　七七四十九　八七五十六

九七六十三　十七七十；二八十六　三八廿四

四八卅二　五八方四十　六八四十八　七八五十六

八八六十四　九八七十二　十八八十；二九十八

三九廿七　四九卅六　五九四十五　六九五十四

七九六十三　八九七十二　九九八十一　十九九十。

足数展省

一加三　二加六　三加九　四加十二　五加十五

六加十八　七加廿一　八加廿四　九加廿七　十与一同

省数归足

一．七七　二．一五四　三．二卅一　四．三小八

五．(三)八五　六．四六二　七．五卅九　八．六一六

九．六九三　十．与一同

九九算法

丨．一一如一	丨丨．一二如二	丨丨丨．二二如四
丨丨丨．一三如三	丅．二三如六	丅丅．三三如九
丨丨丨丨．一四如四	丅丅．二四如八	一丨丨．三四十二
一丅．四四十六	丨丨丨丨．一五如五	一〇．二五一十
一ㄅ．三五十五	二〇．四五二十	二丨丨丨．五五廿五
三〇．五六三十	三丅．六六卅六	丅丅．一七如七
一丨丨丨．二七十四	二丨．三七廿一	二丅丅．四七廿八
三丨丨丨．五七卅五	三丨丨．六七四十二	三丅丅．七七四十九
丅丅．一八如八	一丅．二八十六	二丨丨丨．三八廿四
三丨丨．四八卅二	三〇．五八方四十	三丅丅．六八四十八
三丅．七八五十六	丄丨丨丨．八八六十四	丅丅．一九如九
一丅丅．二九十八	二丅丅．三九廿七	三丅．四九卅六
三丨丨丨．五九四十五	三丨丨丨．六九五十四	丄丨丨．七九六十三
丄丨丨．八九七十二	丄丨．九九八十一	

置位加减因折

横千竖百　卧十立一　五不单张　六不积聚

因从上因　折从下折　加从下加　减从上减

算细数长短之法谓之度起于忽，忽者蚕口中初出丝也，若有若无。

十忽成一丝　十丝为一毫　十毫成一厘

十厘成一分　十分为一寸　十寸为一尺

十尺成一丈　四丈为一匹　五丈为一端

斤秤数轻重之法谓之衡起于黍，黍者轻之末也。

十黍为一絫　十絫为一铢　六铢为一分

四分为一两　十六两为一斤　三斤二两为一袤

十五斤为一(称)　三十斤为一钧　四钧为一石

斛粟数多少之法谓之量起于粟之一粒。

六粟为一圭　十圭为一撮　十撮为一抄

十抄为一勺　十勺为一合　十合为一升

十升为一斗　十斗为一石

(7)《应用碎金》

《应用碎金》有明洪武四年(1371年)本大字《应用碎金》。卷上有算法,计:

"九九数

一一如一　一二如二　……九九八十一

尺法:

度之所起于忽忽者如蛛蚕吐丝方成形。

十忽为丝　十丝为毫　十毫为厘　十厘为分

十分为寸　十寸为尺　十尺为丈　四丈为匹

或四十二尺,或三十八尺　五丈为端　十丈为引

八寸为咫　九寸为扼　八尺为仞　九尺为寻

倍寻曰常

斛法:

量之所起曰圭六粟也。

十圭为撮　十撮为抄　十抄为勺　十勺为合

十合为升　十升为斗　十斗为石

秤法:

衡之所起于黍

十黍为絫　十絫为铢　……

又衡之所起于忽:

十忽为丝　　十丝为毫　　十毫为厘　　十厘为分

十分为钱　　十钱为两二十四铢亦为两。　　十五斤为秤

三十斤为钧　　四钧为石谓计量一百二十斤，一千九百二十两。

亩法：

引之所起于步五尺也。

六十步为角　　二百四十步为亩

三百六十步为里　百亩为顷

…

… …”

(8)《授时历捷法立成》序

大元至元《授时历经改炼序》

夫邦家之所重者，授时之法而已矣。苟不精其术，则正朔之变，日月之蚀，与夫千岁日至，可得知乎？此上古之时，分命羲和、日官之职所由设也。国初设太史局，今改为书云观。宣明历法虽存，而编秩脱遗，而义亦未备。故昔我忠宣王，宣戊戌年(1298 年)入侍天庭，久留辇下，见太史院官之精于此术，欲以其学，流传我邦家。越大德癸卯甲辰间(1303～1304)命光阳君崔公诚之，捐内帑金百斤，求师而受业，具得其不传之妙。及还本国，欲传其术者，久之难得其人。万索而得今之书云正姜公保，一学而尽通其法，捷而神明，精通之闻，传播人口，忠肃王嘉其能。越乙亥年(至元元年，1335 年)擢为书云司历，累迁而即今为正，于是欲广其传。今进士李仁实，传写其本规，欲藏之于本观，以劝后来，传示无极，是亦士君子诲人不倦之意也。噫，乐道人之善，是吾心也。姜公以余为观中人，嘱为之序，故不敢以芜拙为让，仅再拜书本末耳。

至正六年(1346年,即忠惠王七年)十一月通直郎书云丞孙光嗣序。

按郭守敬(1231～1316)《授时历》(1280年创造)至元十八年(1281年)颁行,1298年传入朝鲜。《授时历捷法立成》内《大元至元授时历经改炼序》,孙光嗣记录朝鲜忠烈王二十四年(1298年)戊戌,世子忠宣王入元,见授时历法,以后青云正姜保尽通其法,先传写置青云观中,忠惠王四年(1343年)刊行。

书末附有"乘除法歌诀"如下:

"留头乘法

初呼言十下靠身　　若言如者隔位陈
乘到留头一位数　　逢十就身如退加
明指留头定数诀　　一下能知手算真

飞归除法

头位须当用归歌　　次位还将除剪那
有减之时即须减　　不及减者借身过
本数不满飞作九　　不言十数隔位蹉
大小算法皆如此　　览尽诸径捷要多

因法

言十当身下　　言如退位加

加法

言十过身下　　言如本位加　　定数同因法
细意自无蹉

半法

折半与再折　　口中不忘五　　与二归法同"

"飞归除法歌

一归　如一归　　逢一进成十　　见一无除作九一
二归　二一添作五　　逢二进成十　　见二无除作九二

三归	三一三十一	三二六十二	逢三进成十
	见三无除作九三		
四归	四一二十二	四二添作五	四三七十二
	逢四进成十	见四无除作九四	
五归	见者加倍	逢五进成十	见五无除作九五
六归	六一下加四	六二三十二	六三添作五
	六四六十四	六五八十二	逢六进成十
	见六无除作九六		
七归	七一下加三	七二下加六	七三四十二
	七四五十五	七五七十一	七六八十四
	逢七进成十	见七无除作九七	
八归	八一下加二	八二下加四	八三下加六
	八四添作五	八五六十二	八六七十四
	八七八十六	逢八进成十	见八无除作九八
九归	随身下	逢九进成十”	

三、算　　法

中国古代是用筹策来算数。在十三、十四世纪还是这样。这种筹策《汉书·律历志》称：长六寸，径三分，北周甄鸾注《数术记遗》称长四寸，方三分；《隋书·律历志》称：长三寸，广二分；都是逐渐由长减短，由粗减细。大体长由 1.4 公寸减到 0.9 公寸；粗由 0.7 公分减到 0.6 公分。到十三、十四世纪可能续有减缩。

筹策是列在算盘上，算盘上画有方格，以便安置筹策。它用纵式的筹，记一（$=1=10^0$），百（$=100=10^2$），万（$=10000=10^4$）……各位的数，即：

纵式：𝍠，𝍡，𝍢，𝍣，𝍤，𝍥，𝍦，𝍧，𝍨。

1，2，3，4，5，6，7，8，9。

又用横式的筹，记十（$=10=10^1$），千（$=1000=10^3$），十万（$=100000=10^5$）……各位的数，即：

横式：𝍩，𝍪，𝍫，𝍬，𝍭，𝍮，𝍯，𝍰，𝍱。

1，2，3，4，5，6，7，8，9。

所以 6728 记成𝍮𝍦𝍪𝍧。如是负数，则另加一个斜筹，如－23 记成𝍪𝍲。

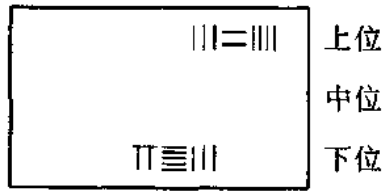
此时还开始应用零号“〇”，和五的简号“ㄅ”，如《事林广记》（1264～1324）“算法类”内“九九算法”记：“一〇：二五一十；一ㄅ：

三五十五；＝〇：四五二十。”就是例子。

先就筹算乘除各法举例说明：

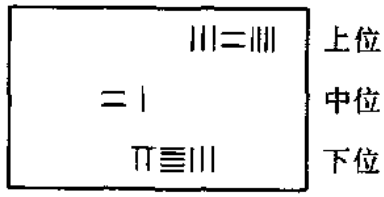
（一）乘法

如求 324×753，先排列筹位如图（一）：

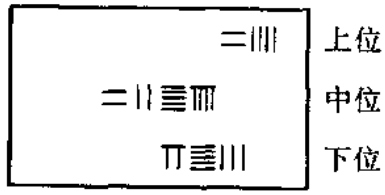


图（一）

第一次用上位第一数|||，乘下位第一数Ⅺ，得＝｜，列在中位，以＝｜的｜，对照下位的Ⅺ；

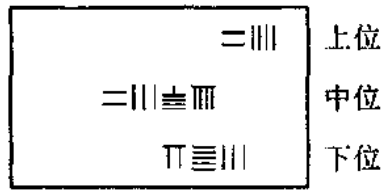


以后继续以第一数|||乘下位第二数≡，和第三数|||，相加得二||≡Ⅲ。此时上位第一数|||可以去掉。同时将下位的Ⅺ≡|||向右移一位，如图（二）：

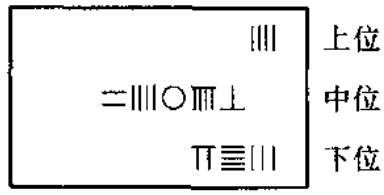


图（二）

第二次用上位第二数二，乘下位第一数Ⅺ得｜≡，列在中位，以｜≡的≡，对照下位的Ⅺ；加入原有二||≡之内。

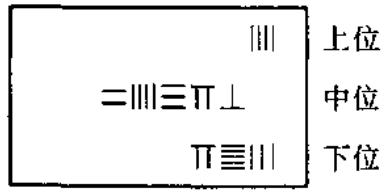


以后继续以第二数二乘下位第二数三，和第三数|||，相加得||三〇ⅢⅢ⊥，此时上位第二数二可以去掉，同时将ⅡⅡ三|||再向右移一位，如图(三)：

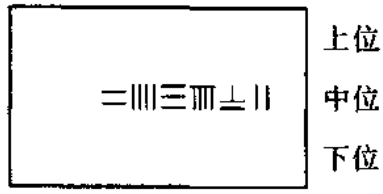


图(三)

第三次用上位第三数||||，乘下位第一数ⅡⅡ，得＝ⅢⅢ，列在中位，以＝ⅢⅢ的ⅢⅢ对照下位的ⅡⅡ，加入原有〇ⅢⅢ之内。



以后继续以第三数||||乘下位第二数三，和第三数|||，相加得二||||三ⅢⅢ⊥||，此时上下位都可以去掉，如图(四)：



图(四)

即 324×753＝243972。

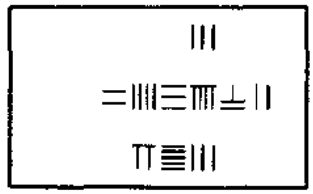
(二)除法

如求 243972÷753，先置被除数即实数〓||||〓|||||||||于中位。又置除数即法数||||||||||于下位，如图(一)：

上位，商
中位，实
下位，法

图(一)

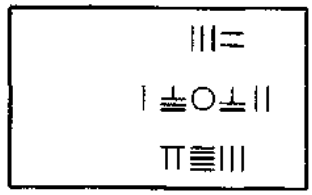
法数||||||||||向左移二位，即商数当在百位。此时开始进行除法，议得商数第一数|||，如图(二)：



上位，商
中位，实
下位，法

图(二)

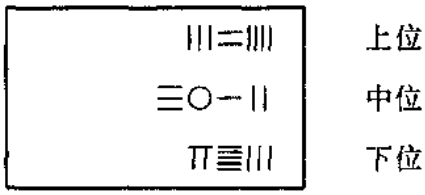
第一次用商数第一数|||，遍乘下位法数，从中位实数内减去，后余|||||||||，次将下位法数向右移一位，议得商数第二数〓，如图(三)：



上位
中位
下位

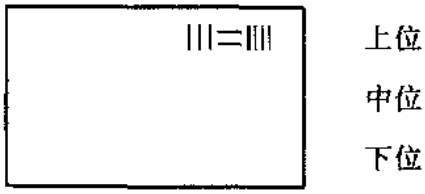
图(三)

第二次用商数第二数〓，遍乘下位法数，从中位实数内减去，后余〓〇一||，将下位法数向右移一位，议得商数第三数||||，如图(四)：



图(四)

第三次用商数第三数|||，遍乘下位法数，从中位实数内减去后，无余，中位，下位去掉后，仅余上位商数|||二||||，如图(五)：

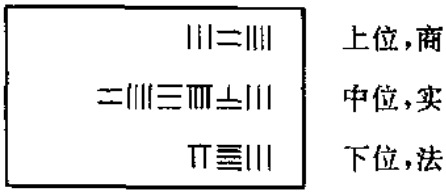


图(五)

即 243972÷753＝324。

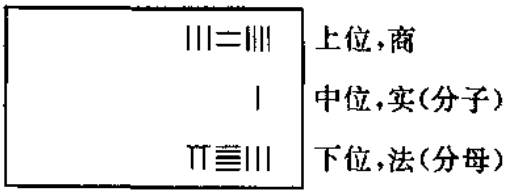
如求 243973÷753。

此时如上例所举排列筹位如图(一)至图(四)。



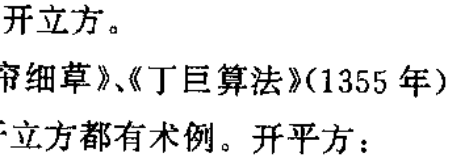
图(一)至图(四)

最后中位实数内减去后，尚余｜。下位亦不去掉，如图(五)：

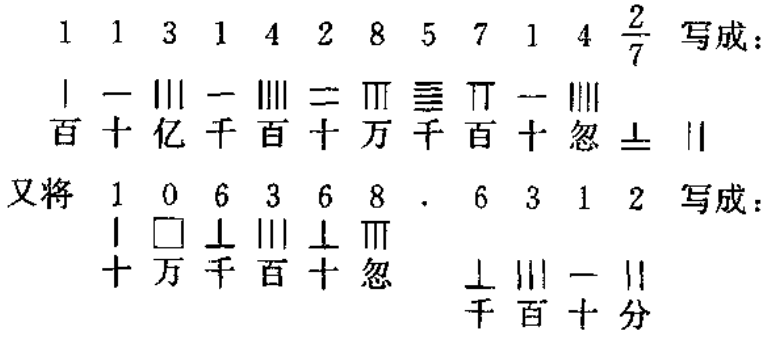


即 $243973 \div 753 = 324\frac{1}{753}$。

宋秦九韶《数书九章》(1247 年)也将 3056 $\frac{1}{4}$ 写成：



又元刘瑾《律吕成书》将



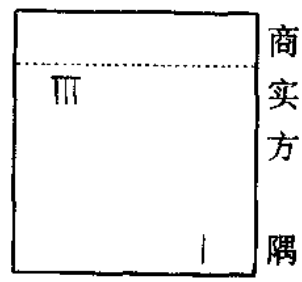
(三)开方

开平方、开立方，《算经十书》已有记载。如《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》都言开平方。《九章算术》、《张丘建算经》又言开立方。

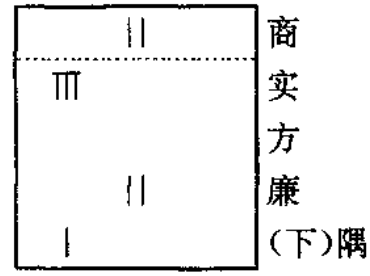
到十三、十四世纪：《透帘细草》、《丁巨算法》(1355 年)、《通原算法》(1372 年)对开平方、开立方都有术例。开平方：

《通原算法》(1372 年)“今有积八万步，问为方若干？”题“术曰：

置积为实，借一算步之，超一等。

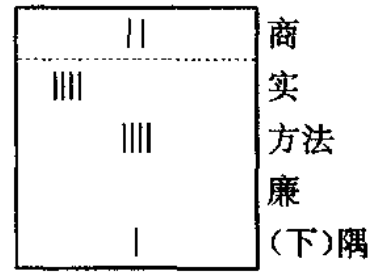


上商二百，乘下隅，为廉二百。

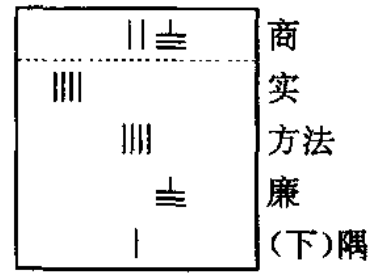


呼除本积，二二除去四万，余积四万步为实。

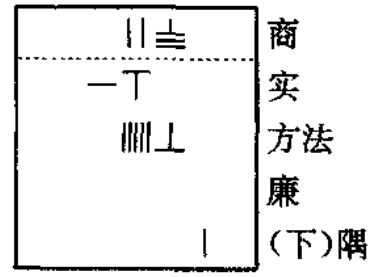
倍廉为方法，得四百。



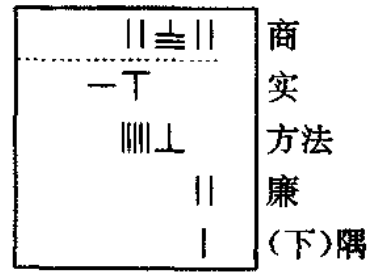
续上商八十，乘下隅为廉八十，于四百之下，与上商八十呼除本积：四八除去三万二千，八八除去六千四百。

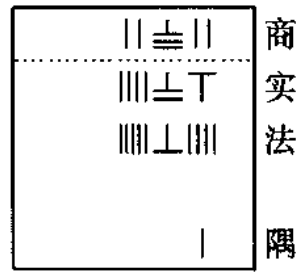


余积一千六百步为实，又倍廉八十得一百六十，并入方法，共五百六十。



续上商二步，乘下隅为廉二步，于五百六十之下。





与商二步呼除本积：二五除去一千，二六除去一百二十，二二除去四步，余积四百七十六步。又倍廉二步得四，并入方法，并借一隅算共得五百六十五。是得方面二百八十二步五百六十五分之四百七十六。”

这说明《通原算法》(1372 年)开平方演算步骤，并说明：

$$\sqrt{80000} \doteqdot 282\frac{476}{565},$$

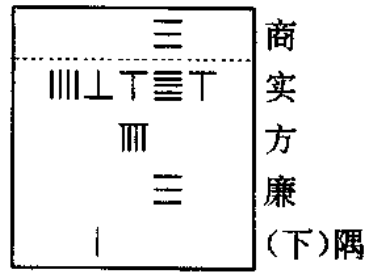
即

$$\sqrt{a^2+r} \doteqdot a\frac{r}{2a+1}。$$

开立方：

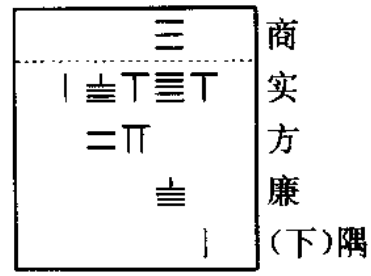
《通原算法》(1372 年)，“今有积四万六千六百五十六尺，问立方面若干？”，题“术曰：

置本积为实，借一算为下隅，常超二位约实。

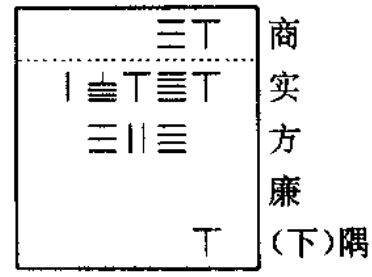


上商三十尺，乘下隅得三十尺为廉法，以上商三十尺与廉三十尺相乘得九百尺为方法，与上商呼除本积三九除去二万七千尺。

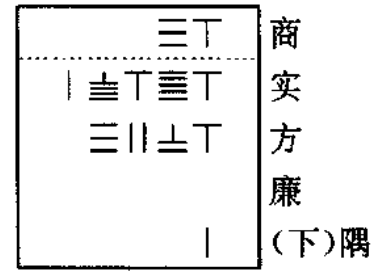
余积实存一万九千六百五十六尺为实，再以三因廉得九十尺，三因方得二千七百尺。



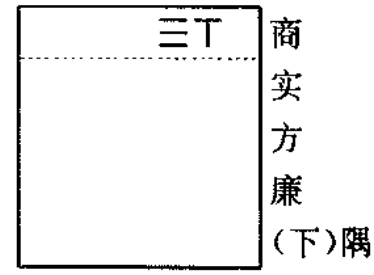
续上商六尺，乘下隅得六。又却乘廉得五百四十尺，并入方法。



又上商六尺与下隅六尺相乘，得三十六尺，亦并入方法，共三千二百七十六尺为方法。



与上商六尺呼除本积，三六除去一万八千，再呼二六除去一千二百，再呼六七除去四百二十，再呼六六除去三十六，适尽。”



(四)方程

联立方程，古代《九章算术》卷八已有记录。《知不足斋丛书》本《丁巨算法》也记有对三元一次联立方程演算的例子，如：

“今有壮军一名，弱军二名，老军三名，各拖船一只，皆载八十石至滩下，俱不得上。若壮军借弱军一名，弱军借老军一名，老军借壮军一名，皆得上滩。问壮弱老军各力拖几何？

答曰：壮力引四十五石七分石之五，

弱力引三十四石七分石之二，

老力引一十一石七分石之三。”

即

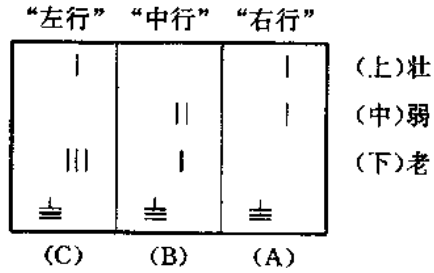
$$x+y=80 \quad (A)$$

$$2y+z=80 \quad (B)$$

$$x+3z=80 \quad (C)$$

求壮 x，弱 y，老 z。

在算盘上记录如下式(甲)图：



(甲)图

“复除也。如方程。以正负术入之：

先以中行加左行：上 I，中 II，下 IIII。

以右行直除之：上空，中 I，下 IIII。”

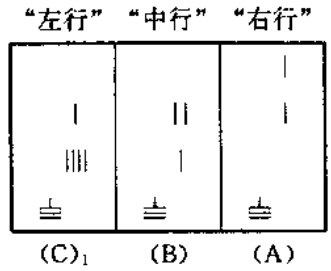
即 (B)+(C)−(A)得$(C)_1$，

$$x+y=80 \quad (A)$$

$$2y+z=80 \quad (B)$$

$$y+4z=80。 \quad (C)_1$$

在算盘上记录如下式(乙)图：



(乙)图

"又二因左行,中||下|||,

又以中行直除之,上⊥下≡,

上法下实,即老军七人,力引八十石。以七除八十石,得一十一石七分石之三。即老军数。"

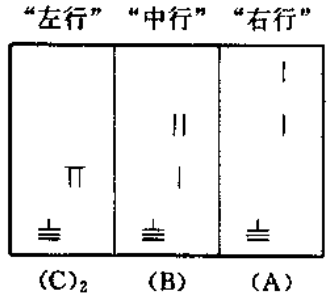
即　$2(C)_1-(B)$得$(C)_2$。

$$x+y=80 \qquad (A)$$

$$2y+z=80 \qquad (B)$$

$$7z=80,\text{或}\ z=11\frac{3}{7}。 \qquad (C)_2$$

在算盘上记录如下式(丙)图:



(丙)图

"求中行:减一十一石七分石之三。中行得六十八石七分石之四,折半得三十四石七分石之二,即弱军数。

以求右行,减去三十四石七分石之二,余四十五石七分石之五,即壮军数。"

四、歌　　诀

十三、十四世纪数学书，曾应用歌诀来帮助计算。如长沙贾亨季通类编《算法全能集》算法上，常用法二十项，即：

(一)因法	(二)加法	(三)乘法
(四)减法	(五)归法	(六)归除
(七)求一	(八)商除	(九)异乘同除
(十)就地抽分	(十一)差分	(十二)和合差分
(十三)端匹	(十四)斤秤	(十五)堆垛
(十六)盘量仓窖	(十七)丈量田亩	(十八)修筑
(十九)约分	(二十)开方	

此二十项，每项都有歌诀。如：

(一)因法。歌曰：

九因之法甚分明　　合数常将记在心
下十过身前一位　　如今只就本身寻
…… ……　　…… ……

(二十)开平方。歌曰：

开方以积使商除　　除得其间上置诸
下另倍为方法数　　却将方倍减其余
得其次数上商续　　方下傍边也续软

上下再将续除续　　积之数尽自昭如
若还不尽倍方次　　逐一将方位数除
除见数来商又续　　只将此续取空虚。

宋杨辉《算法通变本末》卷上(1274年)称："口诵者为因。"此时已用到口诀。另外以为：

(一)乘除可以互换，如：

因　$\frac{1}{3}=0.333\dot{3}$(三烦)，则$\frac{1}{0.333\dot{3}}=3$，如$\frac{x}{3333}=\frac{3x}{10000}$。

$\frac{1}{4}=0.2500$，　$\frac{1}{0.2500}=4$，　$\frac{x}{25}=\frac{4x}{100}$。

$\frac{1}{5}=0.2000$，　$\frac{1}{0.2000}=5$，　$\frac{x}{2}=\frac{5x}{10}$。

……　……　……

$\frac{1}{8}=0.1250$，　$\frac{1}{0.1250}=8$，　$\frac{x}{125}=\frac{8x}{1000}$。

$\frac{1}{9}=0.111\dot{1}$(繁一)，　$\frac{1}{0.111\dot{1}}=9$，　$\frac{x}{1111}=\frac{9x}{10000}$。

(二)加减可以代乘除，如：

因　$9=10-1$，　则$9x=10x-x$。

$8=10-2$，　$8x=10x-2x$。

$7=10-3$，　$7x=10x-3x$。

……　……

(加一位)加减代乘除

(加一)因$11=10+1$，　则 $11x=10x+x$。

(加二)　$12=10+2$，　$12x=10x+2x$。

(加三)　$13=10+3$，　$13x=10x+3x$。

……　……　……

(加二位)加减代乘除

同理 $111=110+1$， 则 $111x=110x+x$。

$112=110+2$， $112x=110x+2x$。

……， ……

（三）截两为斤分数（就中分数是分数和小数）

因 16 两＝1 斤，

所以 1 两$=\frac{1}{16}$斤＝0.0625 斤， 12 两$=\frac{3}{4}$斤＝0.7500 斤，

2 两$=\frac{1}{8}$斤＝0.1250 斤， 13 两$=\frac{13}{16}$斤＝0.8125 斤，

3 两$=\frac{3}{16}$斤＝0.1875 斤， 14 两$=\frac{7}{8}$斤＝0.8750 斤，

4 两$=\frac{1}{4}$斤＝0.2500 斤， 15 两$=\frac{15}{16}$斤＝0.9375 斤。

此外在除法方面，它的歌诀是随时演进的。如一位归除法歌诀，杨辉（1274 年）、朱世杰（1299 年）、贾亨、丁巨（1355 年）都有记录，朱世杰，贾亨较杨辉已有改进。如一位除法：

（三归）杨辉（1274 年）称："见一下二十一，即七。"

即：$\frac{10}{3}=1+(2+\frac{1}{3})=1+\frac{7}{3}$。

朱世杰（1299 年）称："三一三十一。"

即：$\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$。

贾亨称："三归：见一三十一。"

即：$\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$。

（七归）丁巨（1355 年）称："呼七一下加三。"

即：$\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}$。

（八归） "呼八二下加四。"

即：$\frac{20}{8}=2+\frac{4}{8}$。

二位除法，杨辉也设有歌诀，如

(八十三归)称：

“见一下十七。”　即：$\frac{100}{83}=1+\frac{17}{83}$，

“见二下三十四。”　$\frac{200}{83}=2+\frac{34}{83}$，

“见三下五十一。”　$\frac{300}{83}=3+\frac{51}{83}$，

“见四下六十八。”　$\frac{400}{83}=4+\frac{68}{83}$，

“见四一五作五。”　$\frac{415}{83}=5$.

这是后来飞归口诀记录的轮廓。

二归到九归，除法的撞归法，元贾亨、丁巨(1355 年)，安止斋都已采用。事实上在朱世杰(1299 年)著作上已可看到，即

贾亨“撞归法”记：

“二归为九十二。”因$\frac{20}{2}=9+\frac{2}{2}$，丁巨称：(二归)“撞归九十二。”

“三归为九十三。”因$\frac{30}{3}=9+\frac{3}{3}$，

……　……

“九归为九十九。”因$\frac{90}{9}=9+\frac{9}{9}$。

以上用撞归法的原因，是被除数和除数首位相同，又不能除一，只好先假定最大的商数作“9”，如发现商数过大，则将商数退一作“8”。

有(一归)“无除减一下还一”

(二归)“无除减一下还二”

……

（九归）“无除减一下还九”

的“减一”歌诀，可是在朱世杰（1299 年）只说：“但遇无除还头位。”此项演算方法，举例说明：

例如：$\frac{210}{24}=9\frac{10+20}{24}=9\frac{30(<9\times4)}{24}$，　因 $30<9\times4$，知道商数 9 过大。

$=(9-\bar{1})+\frac{30+\overline{20}}{24}$

$=8\frac{50(>8\times4)}{24}$，　此时 $50>8\times4$，可减去 32 余 18。

$=8\frac{18}{24}$。

上述归除、撞归、减一各法，经过一个阶段，到吴敬（1450 年）、程大位（1592 年）整理各项歌诀，便十分成功地应用它到算盘上面去。

《丁巨算法》（1355 年）。在算果子三角垛、果子四角垛、茭草垛、圆箭等前有歌诀：

“歌曰：草垛添尖，以元乘今，折半积真；…… (A)

三角添一，又添二乘，六而一精；…… (B)

四角添一，又添半乘，三而一盈；…… (C)

四角长垛，长阔相减，余数折半，添半长揽，以阔乘既，添一乘次，如三一是；…… (D)

圆箭添六，以乘实数，十二除之，入心一个；…… (E)

方箭副置，各添以四，自乘见数，十六一嗣，须辩归例。…… (F)

即茭草垛：$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，…… (A)

三角垛：$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

四角垛：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2}), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

四角长垛：$1\cdot a+2(a+1)+\cdots+dc$

$$=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3},$$

其中 $c=$长，$d=$阔 …… (D)

圆　　箭：$1+(6+12+18+\cdots+l)=1+\frac{(6+l)l}{12}$，　…… (E)

方　　箭：$1+(8+16+24+\cdots+l)=\frac{(l+4)^2}{16}$。　…… (F)

《丁巨算法》(1355 年)算仓窖有歌诀如下：

“仓窖歌曰：

方是阔乘　高乘斛除
圆周自乘　以高乘之　十二而一　以斛除施
上下之方　则各自乘　相乘三并　深乘见真
方三面一　圆四九成　平地四九　倚壁二九
内角一九　外角三九　斛法先定。”

元贾亨季通类编《算法全能集》亦有“堆垛歌和盘量仓窖歌”。元安止斋何平子撰《详明算法》(有洪武六年，1373 年，朝鲜重刻本)所载“盘量仓窖歌”又和《算法全能集》相同，即

“盘量仓窖歌曰：

方仓长与阔相乘　堆与圆仓周自行
各再以高乘见积　圆仓十二一中分
尖堆法用四九是　倚壁须分十八停
内角九归最详细　外角三九甚分明；

若还方窖兼圆窖　　上下周方各自乘
乘了另将上乘下　　并三为一再乘除
如三而一为方积　　三十六兮圆积成
斛法却将除见数　　一升一合不差争。”

五、《详明算法》札记

明程大位《算法统宗》(1592年)卷十二"算经源流"条记有：

"《详明算法》元儒安止斋，何平子作，有乘除而无九章，不备。"未记著作和刊刻年月。

《永乐大典》(1403～1407)将此书列在严恭《通原算法》(1372年)之前。现在《详明算法》有洪武癸丑(1373年)刻本。

明宦官刘若愚撰《酌中志》二十四卷，其中卷十八"内板经书记略"内记有：

"《详明算法》一本一百十页。"

又《畿辅丛书初编·史部》之内清灵寿傅维鳞纂《明书》卷七十七"内府经籍板"内也记有：

"《详明算法》一百十页。"

《详明算法》二卷现在有：

日本东北大学所藏，明刊本；

日本早稻田大学所藏(小仓文库抄本)；

日本宫内省图书寮所藏；各一本。

《详明算法》上下二卷，卷首有安止斋仅述序文，卷下记明："洪武癸丑(1373年)春庐陵李氏明经堂刊"字样。

根据上列史料，知《详明算法》系元儒安止斋、何平子所撰，洪

武癸丑(1373年)有印本,系十三、十四世纪民间数学书之一。

《详明算法》上下二卷共114问,分配如下:

卷上:

(一)因法(1—2)
(二)加法(3—7)
(三)乘法(8—10)
(四)归法(11)
(五)减法(12—16)
(六)归除(17—20)
(七)求一(21—25)
(八)商除(26,27)
(九)约分(28—31)

卷下:

(十)异乘同除(32—41)
(十一)就物抽分(42,43)
(十二)差分(44—56)
(十三)和合差分(57,58)
(十四)端匹(59—65)
(十五)斤秤(66—79)
(十六)堆垛(80—83)
(十七)盘量仓窖(84—91)
(十八)丈量田亩(92—103)
(十九)田亩纽粮(104,105)
(二十)修筑(106—114)

和《详明算法》同时的有《算法全能集》。

贾亨《算法全能集》上下二卷。贾亨,《永乐大典》引作贾通,有明刊本。《玄览堂丛书》三集第二十九册,有传印本,未记著作和刊刻年月共有126问。和《详明算法》对照如下:

《算法全能集》:

卷上:

(一)因法
(二)加法
(三)乘法
(四)减法
(五)归法
(六)归除
(七)求一
(八)商除
(九)异乘同除
(十)就物抽分

卷下：

(十一)差分　　(十六)盘量仓窖

(十二)和合差分　　(十七)丈量田亩

(十三)端匹　　(十八)修筑

(十四)斤秤　　(十九)约分

(十五)堆垛　　(二十)开平方

《详明算法》：

卷上：

(一)因法　　(六)归除

(二)加法　　(七)求一

(三)乘法　　(八)商除

(四)九归(法)　　(九)约分

(五)定身除(即减法)

卷下：

(十)异乘同除　　(十六)堆垛

(十一)就物抽分　　(十七)盘量仓窖

(十二)差分　　(十八)丈量田亩

(十三)和合差分　　(十九)田亩纽粮

(十四)端匹　　(二十)修筑

(十五)斤秤

这说明《算法全能集》多(二十)开平方一项，《详明算法》多(十九)田亩纽粮一项。现将《算法全能集》歌诀和《详明算法》歌诀比较如下：

《算法全能集》卷上

(一)因法歌曰：

九因之法甚分明　　合数常将记在心

下十过身前一位　　如令只就本身寻

《详明算法》卷上

因法：二以上单位算者用之，从末位小数算起用九归还元。

合数九因须熟记　　呼如下位算为先

变其身数呼求十　　从上因之十进前

《算法全能集》卷上

（二）加法歌曰：

加法元来一是宗　　算家弃一使令通

十须就位零居次　　下手先从末用工

《详明算法》卷上

加法：一，十，一百，一千，一万之类但首位一者用此法，先从末位小数算起，用定身除还元。

加法仍从下位先　　如因位数或多焉

十居本位零居次　　一外添余法更玄

《算法全能集》卷上

（三）乘法歌曰：

下乘之法此为真　　位数先将第二因

三四五来乘遍了　　却将本位破其身

《详明算法》卷上

乘法：二以上位数多者用此法，从末位小数算起，用归法还元。

下乘之法此为真　　位数先将第二因

三四五来乘遍了　　却将本位破其身

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌完全一致。）

《算法全能集》卷上

（四）减法即定身除。歌曰：

除法不问百千余　　算者都将一弃诸

只使余零作除数　　法中须要定身除

《详明算法》卷上。

定身除：即减法也，一十一百一千一万之类但首位一数者以此法分之从首位大数算起，用加法还元。

减法须知先定身　　得其身数始为真

法虽有一何曾用　　身外除零妙入神

《算法全能集》卷上

（五）归法歌曰：

九归之法乃分平　　凑数从来有见成

数若有多归作十　　归如不倒答添行

《详明算法》卷上

九归：十以下单位分者用此法先从首位大数算起，用因法还原。

九归之法乃分平　　凑数从来有见成

数若有多归作十　　归如不尽搭添行

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除一字外余尽相同。）

《算法全能集》卷上

（六）归除歌曰：

惟有归除法更奇　　将身归了次除之

有归若是无除数　　起一回将元数施

或值本归归不得　　撞归之法莫教迟

若还识得中间法　　算者并无差一厘

《详明算法》卷上

归除：二十以上至百千万以上首位有二三四五六七八九者皆以此法分之。从首位大数算起用乘法还元。

惟有归除法更奇　　将身归了次除之

有归若(是)无除数　　起一回将元数施

或遇本归归不得　　撞归之法莫教迟
若人识得中间意　　算学虽深可尽知

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除十字外，余尽相同。）

《算法全能集》卷上

（七）求一歌曰：

求一明教置两停　　二三折半四三因
五之以上二因见　　去一除零要定身

《详明算法》卷上

求一：

求一明教置两停　　二三折半四三因
五之以上二因见　　去一除零要定身。

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌完全一致。）

《算法全能集》卷上

（八）商除歌曰：

法使商除把总张　　却将分数作商量
可除一面除将去　　除尽其间数便当

《详明算法》卷上

商除：

数中有术号商除　　商总分排两位居
唯有开方须用此　　续商不尽命其余

《算法全能集》卷上

（九）异乘同除千斤百里附。歌曰：

异乘同除法何如　　物卖钱来做例儿
先下元钱乘只物　　却将元物法除之
将钱买物互乘着　　百里千斤以类推
算者若还能善用　　一丝一忽不差池

《详明算法》卷下

异乘同除：

异乘同除法何如　　物卖钱来做例儿
先下元钱乘只物　　却将元物法除之
将钱买物互乘着　　百里千斤以类推
算者留心能善用　　一丝一忽不差池

（按此段《详明算法》和《算法全能集》除二字外余尽相同。）

《算法全能集》卷上

（十）就物抽分歌曰：

抽分法就物中抽　　脚价乘他都物休
另用脚钱答物价　　以为其法要除周
除来便见脚之总　　余者皆为主合留
算者不须求别诀　　只将此法记心头

《详明算法》卷下

就物抽分：

抽分法就物中抽　　脚价乘他都物求
别用脚钱搭物价　　以其为法要除周
除来便见脚之总　　余者皆为主合留
算者不须求别诀　　只将此法记心头

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除四字外余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十一）差分歌曰：

差分之法并来分　　须要分教一分成
将这一分为定实　　以乘各数自均平

《详明算法》卷下

差分：

差分之法并来分　　须要分教一分成
将此一分为定实　　以乘各数自均平

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌，除一字外余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十二）和合差分歌曰：

差分和合法还深　　高价先乘共物情
却用都钱减今数　　余留为实甚分明
另将二价也相减　　使这余钱为法行
除了先为低物价　　自余高价物方成

《详明算法》卷下

和合差分：

差分和合法尤精　　高价先乘共物情
却用都钱减今数　　余留为实甚分明
别将二价也相减　　用此余钱为法行
除了先为低物价　　自余高价物方成

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除四字外余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十三）端匹歌曰：

四十为匹五为端　　或减或加二尺宽
端匹乘来方见尺　　尺求端匹法除看

《详明算法》卷下

端匹：

四十为匹五为端　　或减或加二尺宽
端匹乘来方见尺　　尺求端匹法除看

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌完全相同。）

《算法全能集》卷下

(十四)斤秤歌曰：

铢求斤两要相登　　二四明为一两秤
三八四除斤便是　　两斤求此则相乘
斤如求两身加六　　减六留身两见斤
斤两较时无别诀　　法中惟以五除增

《详明算法》卷下

斤秤：

铢求斤两要相登　　二四明为一两秤
三八四除斤便是　　两斤求此则相乘
斤如求两身加六　　减六留身两见斤
斤两较时无别诀　　法中惟以五除增

(按此段《详明算法》和《算法全能集》歌完全一致。)

《算法全能集》卷下

(十五)堆垛员尖等法见仓窖内。歌曰：

缺坛堆垛要推详　　底脚先将阔减长
余数折来添半个　　并归长内阔乘相
再将阔答一乘实　　三以除之数便当
若算平尖只添一　　乘来折半法还强

又

三角果垛也须知　　底脚先求几个儿
一二添来乘两遍　　六而取一不差池
要知四角盘中果　　添半仍添一个随
乘此数来以为实　　如三而一去除之

《详明算法》卷下

堆垛：员尖等法见仓窖法内。

缶瓶堆垛要推详　　脚底先将阔减长

余数折来添半个　　并归长内阔乘相
再将阔搭一乘实　　三以除之数便当
若算平尖只添一　　乘来折半法如常
三角果垛也须知　　脚底先求几个儿
一二添来乘两遍　　六而取一不差池
要知四角盘中果　　添半仍添一个随
乘此数来以为实　　如三而一去除之

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除六字外余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十六）盘量仓窖：古斛法以二尺五寸为一石。今斛法或有过与不及。算者宜加减用之。

歌曰：

方仓长用阔相乘　　堆与圆仓周自行
各再以高乘见积　　唯圆十二一中分
尖堆法用三十六　　倚壁须分十八停
内角取时如九一　　外角三九积分明
若还方窖兼圆窖　　上下周方各自乘
乘了另将上乘下　　并三为一再乘深
如三而一为方积　　三十六兮圆积成
斛法却将除见数　　一升一合不差争

《详明算法》卷下

盘量仓窖：古斛法以二尺五寸为一石。

方仓长用阔相乘　　堆与圆仓周自行
各再以高乘见积　　唯圆十二一中分
尖堆法用三十六　　倚壁须分十八停
内角聚时如九一　　外角三九积分明

若还方窖兼圆窖　　上下周方各自乘
乘了另将上乘下　　并三为一再乘深
如三而一为方积　　三十六兮圆积成
斛法却将除见数　　一升一合不差争

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除一字外，余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十七）丈量田亩歌曰：

古者量田较阔长　　全凭绳尺以牵量
一形虽有一般法　　唯有方田法易详
若见涡斜并凹曲　　直须裨补取为方
却将乘实为田积　　二四除之亩法强

《详明算法》卷下

丈量田亩：

古者量田较阔长　　全凭绳尺以牵量
一形虽有一般法　　唯有方田法易详
若见涡斜并凹曲　　直须裨补取其方
却将乘实为田积　　二四除之亩法强

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌除一字外余尽相同。）

《算法全能集》卷下

（十八）修筑歌曰：

算中有法筑长城　　上下将来半折平
高以乘之长又续　　此为城积甚分明
五因其积三而一　　是壤求坚法并行
穿地四因于壤积　　法中仍用五归成

《详明算法》卷下

修筑：修台筑堤各有法具各条之下。

算中有法筑长城　　上下将来半折平
高以乘之长又续　　此为城积甚分明
五因其积三而一　　是壤求坚法并行
穿地四因于壤积　　法中仍用五归成

（按此段《详明算法》和《算法全能集》歌完全一致）。

《算法全能集》卷下

（十九）约分歌曰：

算家约法要分之　　母主其多少主儿
将少减多余减少　　少之数尽以余推

《详明算法》卷上

约分：

数有参差不可齐　　须凭约法命分之
法为分母实为子　　不与差分一例推

《算法全能集》卷下

（二十）开平方歌曰：

开方以积使商除　　除得其问上置诸
下另倍为方法数　　却将方倍减其余
得其次数上商续　　方下傍边也续欤
上下再将续除续　　积之数尽自昭如
若还不尽倍方次　　逐一将方位数除
除见数来商又续　　只将此续取空虚

上面所引“因法，……，加法，……，乘法，…”是属于现在的乘法。

“（九）归法，减法，归除，求一，商除”都属于现在的除法。

原书内附有“布算”，系用筹算方式，《算法全能集》只在每题下附有“法曰”，未列有“布算”方式。

中国数学史话

钱宝琮

编 者 说 明

1956 年，中国召开了第一次全国科学大会，发出了向科学进军的号召，广大青年迫切希望了解祖国古代的科学成就。本书正是为了帮助有中等程度的青年了解中国古代的数学遗产而写的。作者在这本书里，开始先把我国的数学史实作了简要的叙述，接着又将它的主要部分分为专题来论述和介绍，最后分析和总结了我国数学的特征。本书于 1957 年 12 月由中国青年出版社出版。这次重印，我们对所引古算经的文字作了订正，并改正了原印本中的个别错字。

《李俨钱宝琮科学史全集》编辑委员会

序　言

为了向科学进军，全国青年同志急迫地希望了解祖国历史上的科学成就，研究各门科学的发展历史。祖国古代的数学是自己发展起来的。古代数学家的伟大成就还传播到国外，做了有世界意义的数学发展的先驱。本书的第一节概括地叙述中国初等数学发展的史实，最后一节总结出中国数学的特征，其他各节写出中国数学各个主要部分的历史发展。目的在使读者对祖国优越的数学传统有初步的认识。关于十七世纪初年以后，西洋数学流传中国，清代数学家在高等数学方面的光辉成就，本书不加讨论。

在中国数学史研究中，有些问题是细致而复杂的，只有深入的讨论才能取得正确的结论；也有些问题虽然经过考证有了一定的结论，现在还不能作为定论。为了适应青年读者的要求，本书只介绍一些我自己认为满意的结论，琐碎的考据文字概从省略。

编写本书的时候，李俨先生和严敦杰先生提供了很多宝贵的意见，我向他们致诚恳的谢意。

钱宝琮

1956 年 11 月

目　录

一　中国古代数学简史…… 499
二　算筹记数·四则运算…… 505
三　分数…… 510
四　各种比例问题的解法…… 515
五　盈不足术…… 520
六　方程…… 527
七　正负数加减法则…… 532
八　平面积和立体积…… 535
九　开平方和开立方…… 544
一〇　开带从平方和开带从立方…… 551
一一　勾股测量…… 555
一二　重差术…… 558
一三　勾股弦定理和它的应用…… 561
一四　勾股形的各种容圆…… 567
一五　圆周率…… 571
一六　球的体积…… 576
一七　度量衡单位的十进制…… 579
一八　十进小数…… 582

一九 四舍五入法…… 585
二〇 筹算乘除捷法…… 587
二一 珠算术…… 592
二二 数码…… 595
二三 开方作法本源图…… 599
二四 增乘开方法…… 602
二五 天元术…… 608
二六 四元术…… 614
二七 等差级数、垛积术和招差术 …… 620
二八 剩余定理和大衍求一术…… 626
二九 百鸡问题…… 632
三〇 中国古代数学的特征…… 635

一　中国古代数学简史

数学是一连串的抽象理论和计算方法。我们从实践中获得数量和形象的概念，因而产生了数学，由感性认识提升到理性认识，再把它应用到实践中去。从中国古代数学史的研究中可以得到深切的体验。

我国古代在黄河流域一带开化极早。在农业生产方面有测量田地面积、推算仓库容量的经验，商业方面有物资交易的经验。为了日常生活上的实际需要，劳动人民对于数学必定有很多的认识。后来到封建社会初期，统治阶级为了要收纳赋税，必须建立一个会计制度；要防止河流泛滥，必须修建堤防，知道土方的计算；要修订一个适应农业生产的历法，必须知道日、月、星辰循环周期的统计；要制造各种器具，必须知道圆规、方矩的应用。各方面都需要些数学理论和计算方法，当时的数学家必定很早就有了伟大的成就。

春秋战国时期，学术文化各方面都有蓬勃的发展，数学也不能例外。但《汉书·艺文志》里没有著录秦以前的数学书籍，只说有杜忠《算术》十六卷，许商《算术》二十六卷。杜忠时代无考。许商是汉成帝时人，时代已相当迟了。现在有传本的古代数学书是《九章算术》九卷。这本书包含二百四十六个应用问题和各题的解法，分别隶属于下列九章，所以称为《九章算术》。

章名	主要内容
一、方　田	面积的量法和分数算法。
二、粟　米	粮食交易——简单比例问题。
三、衰　分	配分比例问题。
四、少　广	开平方和开立方。
五、商　功	体积的量法。
六、均　输	政府征收实粮——“均输”法的计算，其他算术难题。
七、盈不足	盈亏类问题的解法。其他类型的难题也用盈亏类问题解法处理。
八、方　程	联立一次方程组解法，正负数。
九、勾　股	勾股定理的应用问题，勾股测量。

方田到商功五章起源很古，但也有汉朝人加入的问题。均输章无疑是汉武帝太初元年（公元前 104 年）实行均输法后写成的*。又，《周礼·地官》说到“九数”，第一世纪中郑众注解说，“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要，今有重差，勾股也。”可见勾股算法原来不属于东汉初年的“九数”，用“勾股”代替“旁要”作为《九章算术》的第九章，大概是第一世纪末年的编制。杜忠《算术》和许商《算术》没有传本，它们的成就大概包含在后出的《九章算术》之内。

在《九章算术》成书之前，还有一部讨论天文测量的书，叫《周髀》，里边引用繁复的分数乘除、勾股定理和开平方法，有不少数学史料。《周髀》有三国初年赵爽的注，他总结了东汉时期的勾股算法，用面积图形证明各个定理。

---

* 本世纪 80 年代初湖北张家山出土的汉初墓葬竹简中已有均输律。——编者

已审阅
子居 09-10-26，17:49

《九章算术》有魏末晋初刘徽的注(约公元263年)。他把《九章》中的各项算法一一说明,并且批判了旧术不正确的地方,补充了新的计算方法,创立了准确的圆周率。他又编写"重差"一章补在《九章算术》的后面。后来这一章单行,称为《海岛算经》。

从三国到唐初四百年中,数学研究有显著的进步。《隋书·经籍志》著录的数学书有三十余种之多。除了赵爽注的《周髀》、刘徽注的《九章算术》和《海岛算经》外,还有《五曹算经》五卷、《孙子算经》三卷、《张丘建算经》三卷、《五经算术》一卷、《数术记遗》一卷五种,现在有传本。其中《孙子算经》大约是第四世纪中的书,卷下的"物不知数"问题是一个一次同余式问题。《张丘建算经》是第五世纪末元魏朝的书,有等差级数问题和"百鸡"问题。

失传数学书中,有一种是祖冲之(429～500)的《缀术》五卷。根据《隋书·律历志》和其他参考资料,我们知道《缀术》的内容是非常丰富的,有比刘徽的更精密的圆周率近似值,有正确的球体积量法公式,有三次方程解法等辉煌成就。

第七世纪初,王孝通撰《缉古算术》一卷,现在有传本。他选取的立体积问题和勾股问题,都需要列出三次方程,求它的正根来解答。

隋朝和唐朝在国立大学内设置"算学"馆,有"算学博士"和"助教"指导大学生学习数学。唐显庆元年(公元656年)明文规定《周髀》、《九章》、《海岛》、《五曹》、《孙子》、《夏侯阳》、《张丘建》、《五经算》、《缀术》、《缉古算术》十部算书为"算学"课本,因而这十部书有《算经十书》的名称。

唐朝大学中虽然重视数学,但为《算经十书》所局限,没有在祖冲之、王孝通的数学基础上作更进一步的发展。在另一方面,唐朝工商业比较发达,劳动人民要求简化数字计算工作,因而出现了不

少的实用算术书。其中有第九世纪初年韩延所编写的一部实用算术。因为他在这部书的开始征引了《夏侯阳算经》的几节，宋朝欧阳修等编订《新唐书·艺文志》时(1060年)，误认这本是晋朝流传下来的《夏侯阳算经》。元丰七年(1084年)，秘书省刻"算经十书"时就用这个伪本充数。唐、宋两朝的实用算术书大都失传，只有韩延的书借《夏侯阳算经》的名义流传到现在，可以说是不幸中的大幸了。

约在1050年前后，贾宪撰《黄帝九章算法细草》，在"少广"章中介绍"开方作法本源"和"增乘开方法"。此后刘益撰《议古根源》，又推广增乘开方法的应用。这二部书现在都已失传，靠南宋杨辉《详解九章算法》(1261年)和《田亩比类乘除捷法》(1275年)所引，我们可以了解这些伟大成就。杨辉的《乘除通变本末》三卷(1274年)中还保存了不少其他宋朝失传数学书中的各种乘、除捷法。

南宋秦九韶撰《数书九章》十八卷(1247年)。他把唐、宋天文学家的"上元积年"算法发展为"大衍求一术"。在高次方程解法和联立一次方程组解法上也有相当重要的贡献。

在十三世纪中，中国北方的数学家发明一种新的代数学，叫"天元术"。从已知的条件列出方程，利用天元术要便利得多。许多不容易对付的数学问题，有了天元术就有办法解决了。因此，十三世纪中国数学的发展获得飞跃的进步。那时的代表著作现在有传本的有李冶的《测圆海镜》十二卷(1248年)、《益古演段》三卷(1259年)，朱世杰的《算学启蒙》三卷(1299年)、《四元玉鉴》三卷(1303年)。

十四世纪以后，天元术进入停滞不前的阶段。珠算术渐渐流行起来，到十六世纪中有很多种珠算实用算术书出版，如程大位的《算法统宗》(1592年)里就有关于算盘和它的用法的详细叙述。而

古代算术和元初的天元术，利用算筹演算的方法，很少有人研究。

十六世纪末，意大利天主教耶稣会教士利玛窦(1552～1610)到中国传教，宣扬西洋数学和天文学的优越性，当代知识分子从他学习的很多。徐光启翻译欧几里得的《几何原本》前六卷(1607年)和李之藻编写的《同文算指》十卷(1613年)是初次介绍西洋数学的两种重要文献。崇祯二年(1629年)设立西洋新法历局，在局供职的西洋教士邓玉函、罗雅谷、汤若望等编译关于球面三角法和天文测量的书。波兰教士穆尼阁在南京介绍对数计算法给薛凤祚，译成《历学会通》书(1652年)。清康熙帝提倡西洋学术，聘请法国教士多人翻译西洋数学，编成《御制数理精蕴》四十五卷(1723年)等书。

清初的数学家如梅文鼎(1633～1721)等大都研究西洋数学有心得，编写了数学各科的入门书。

乾隆、嘉庆两朝(1736～1820)学术潮流偏向古典，考证学一路发展，数学研究转到古代数学方面去。湮没四百余年的《算经十书》和宋、元数学名著又陆续从《永乐大典》中和旧家藏书中发掘出来。通过戴震、李潢、焦循、汪莱、李锐、沈钦裴、罗士琳等校勘补注，中国古代数学又发扬光大起来。

鸦片战争以后，五口通商，西洋学术传入中国的机会更多。李善兰和英国基督教士伟烈亚力合译《几何原本》后九卷(1856年)、《代数学》十三卷(1859年)、《代微积拾级》十八卷(1859年)、《曲线说》三卷(1866年)等书。此后华蘅芳又译出《代数术》(1873年)、《微积溯源》(1878年)、《三角数理》(1877年)、《决疑数学》(1888年)等书。从1840年到1911年这个时期内，中国数学家们，包括李善兰、华蘅芳在内，都能会通中西数学，获得很多的辉煌成就。这些成就主要是在高等数学范围内，不预备在这本小书内介绍了。

第七世纪中印度数学曾经传入中国，第十三、四世纪中伊斯兰数学曾经传入中国，是中国数学史上的两件大事。但中国数学的发展很少受到它们的影响。我们可以明确指出来的，只有朱世杰《算学启蒙》所录的“大数法”有恒河沙、阿僧祇、那由他等单位，“小数法”有沙、尘、埃、渺、……弹指、刹那等单位，显然是借用佛教经典中印度大小数单位名目；吴敬《九章比类算法大全》(1450 年)有“铺地锦”乘法，显然是阿拉伯人土盘算法的一种乘法。十七世纪以后西洋数学的传入，情况就大不相同了，利玛窦等传进来的是西洋最新鲜的数学成就，徐光启等的翻译工作又十分认真，所以对于清朝数学的发展影响极大。

中国数学在它的萌芽时期，是适应生产而产生的。后来，数学内在的需要又产生新的概念和新的方法，重复服务于各种生产活动。元朝的《授时历法》(1280 年)和《河防通议》(1321 年)都引用了发明不久的天元术，是一个典型的例子。

中国古代数学家创造出来的许多伟大成就是有世界意义的。为了要理解这些伟大的成就，我们在以下各节里，提出二十多个专题，分别讨论它们的发展历史。

二　算筹记数·四则运算

我国古代用竹筹记数，并且运用竹筹来做加、减、乘、除等等的计算工作。《说文解字》竹部中“算”字下说：“算：从竹从具，长六寸，计历数者。”这是说明“算”是一切数字计算所用的竹制的工具。“算”有时叫做“筹”，后来的人叫它“算子”。《汉书·律历志》说：“其算法用竹，径三分[1]，长六寸。”汉王莽时一尺大约长 0.2304 公尺或 0.6912 市尺。算筹长六寸，合 4.15 市寸，径三分，合 2.07 市分。北周甄鸾《数术记遗》说：“积算，今之常算者也。以竹为之。长四寸，以放四时。方三分，以象三才。”《隋书·律历志》说：“其算用竹，广二分，长三寸。”北周和隋朝的官尺，一尺长王莽时尺的一尺二寸八分，隋朝的算筹长三寸，约等于现在的 2.65 市寸，广二分，约等于现在的 1.77 市分。由此可见从汉到隋计算用的算筹渐渐改得短小，运用起来比较便利了。算筹质料用竹之外，有木制的，也有象牙制的。计算时把筹马放在几上，后来的数学家用一个特制的和围棋盘相仿的算盘。算筹不用时有盛贮的算子筒，出外携带时用算袋。

古代算筹记数的制度，在《周髀算经》和《九章算术》里都没有

---

① 现在流传本的《汉书》都写作“一分”，是错误的（*本世纪 70 年代出土的算筹，表明《汉书》的记载是符合实际的。——编者）。

记录，我们只能在晋朝或南北朝时期的数学书里知道算筹记数的一般法则。古代的算筹的功用大致和后来的算盘珠相仿。五以下的数目，用几根筹表示几，六、七、八、九四个数目，用一根筹放在上边表示五，余下来每一根筹表示一，表示数目的时候有纵横两种方式：

纵式	丨	丨丨	丨丨丨	丨丨丨丨	丨丨丨丨丨	⊤	⊤丨	⊤丨丨	⊤丨丨丨
横式	一	二	三	亖	𠄡	上	丄	丄	丄
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

表示一个多位数，它的各位数目的筹式须要纵横相间，个位数目用纵式表示，十位数目用横式表示。百位、万位用纵式，千位、十万位用横式。例如 6728，用算筹摆下来是丄⊤二⊤。数字有空位的时候，如 6708，算筹布置作丄⊤　⊤，在十位上就空着不放算筹。又如 6020，算筹布置作丄　二　，百位、个位都空着，不放算筹。因为布置算筹须要纵横相间，两个数目中间有没有空位是很容易辨别的。《孙子算经》说："凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千、十相望，万、百相当。"《夏侯阳算经》说得更详尽，"一纵十横，百立千僵。千、十相望，万、百相当。满六已上，五在上方。六不积算，五不单张。"都是用歌诀来教导小学生的。

算筹记数是古人在生产过程中自然形成的制度。用极简单的竹筹，纵横排列，就可以表示出任何数字。虽然没有表示空位的符号 0，而能够实行地位制(principle of local value)的记数法，为加、减、乘、除的运算建立起良好的条件。我国古代数学在数字计算方面有优越的成就，应当归功于算筹记数的合理方法。

古代的筹算术经过长时间的发展过程而演变为现在流行的珠算术，这两种算术所用的工具虽然不同，但是都用地位制记数，加、

减、乘、除的运算法则是基本上相同的。筹算的加、减法，在古代算书里没有记录。但是在二数相乘时，把部分乘积合并起来就是用加法，在做除法时，把部分乘积逐步减去也就是用减法。由此可知，筹算的加、减法都是从左边到右边逐位相加或减去。同一位的二数相加满十以上，即进入左边一位（左边一位增加一筹）。减法，被减数的某位数目小于减数数目时，向左边一位取用一筹。这些都和珠算术的做法一样。

筹算的乘、除法都要用九九口诀。唐朝以前的乘、除口诀四十五句，从“九九八十一”开始，到“一一如一”终止，次序和后世的口诀恰恰相反。因为口诀开始的两个字是“九九”，所以乘法表就叫做“九九”。又因为一般算术离不了乘、除，乘、除都要熟练“九九”，所以在古代，“九九”又是算术的代用名词。《管子·轻重戊》篇说：“宓戏作九九之数。”《周髀算经》中赵爽注：“九九者，乘、除之原也。”《夏侯阳算经》说：“乘、除之法，先明九九。”

乘、除法则在《孙子算经》和《夏侯阳算经》（唐人韩延所引）里说得很详备。二数相乘时先用算筹布置一数于上格，一数于下格，没有被乘数和乘数的名义。把下格的数向左边移动，使下数的末位和上数的首位对齐。以上数首位数目乘下数各位，从左边到右边，用算筹布置逐步乘得的数于上下两格的中间，并且把后得的乘积依次并入前所已得的数，求得了这一个部分乘积之后，把上数的首位去掉，下数向右边移过一位。再以上数的第二位乘下数各位，并入中间已得的积数内。这样继续下去，到末了上数各位一一去掉，中间所列就是二数的相乘积。

例如 78×56，先布置算筹如图 1。以上数首位𝍠乘下数首位𝍠，呼“五七三十五”，即置𝍠𝍠于中格。以𝍠乘下数第二位𝍠，呼“五八得四十”，把𝍠𝍠并入前面所得的𝍠𝍠，得𝍠𝍠。去掉上数首位

≡，把下数向右移过一位如图 2。以上数第二位丅乘下数各位，先得“六七四十二”，并入中格已得的数，作≡川二。次得“六八四十八”，并入已得的数，作≡川丄卌，这时上下数可以完全去掉，只剩中间的 4368 便是所求的乘积，如图 3。

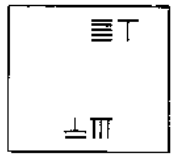


图 1

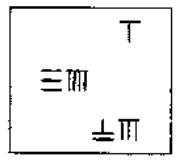


图 2

图 3

在古代筹算法里，被除数叫做“实”，除数叫做“法”，所求的结果叫做“商”。甲数被乙数除得商数，在古代算书里说“实如法而一”，得所求。

古筹算除法的演算步骤和乘法相反。用算筹布置实数于中格，法数于下格，所得的商数布置在上格。先把法数的首位放到实数首位的下边，议好应得商数的首位。如果实数不够大，把法数向右移过一位，再考虑商数的首位。以商数首位乘法数各位，从左边到右边，随即在中格实数内减去每次乘得的数。乘好减好后，把法数向右移一位，再议商数的第二位。以商数的第二位依次乘法数各位，从实数内减去每次乘积。这样，到中格实数减完时，就得到所求的结果。实数减不尽就是有余数。

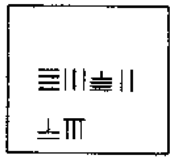


图 4

图 5

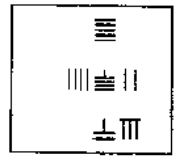


图 6

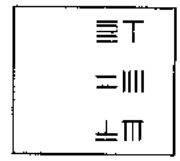


图 7

例如 4392÷78，先用算筹布置实数、法数，如图 4。因实数首二位≡川小于法数丄卌，不够除，把法数向右边移一位如图 5。议得商数首位≡置于实数十位之上，以≡乘法数首位丄，呼“五七三十

五”，从实数内减去，余𝍠𝍡𝍢，再以𝍣乘法数第二位𝍠，呼“五八得四十”，从中格减去，余𝍢𝍡𝍢。把法数再向右移一位如图 6，议得商数的个位数𝍤。以𝍤乘法数首位𝍡，呼“六七四十二”，从中格减去，余𝍡𝍢，以𝍤乘法数次位𝍠，呼“六八四十八”，从中格减去，余𝍣𝍢，如图 7。这样我们就得到商数 56 和余数 24。以七十八除四千三百九十二，得五十六又七十八分之二十四。

三　分　　数

上节叙述筹算除法。以法除实得到整数商后，如果还有多余的实数，那末就用余数作分子，法数作分母，得到商数的奇零分数。例如4392以78除，最后算筹布置如上节图7，得56又78分之24。因78和24二数都可以被6除尽，故$\frac{24}{78}$可以简化作$\frac{4}{13}$，因而上述例题的答是$56\frac{4}{13}$，算筹布置如图8。

化带分数为假分数，在《九章算术》和以后的算书里都叫做“通分内子”（“内”读如纳），它的演算步骤就是除法的还原。以一|||乘≡丅加到中格去便得到丌三||，如图9。也就是把$56\frac{4}{13}$通分内子得$\frac{732}{13}$。

图　8

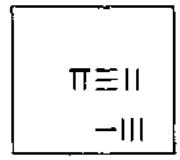


图　9

中国古代数学家很早就知道用公约数约分子、分母来简化一个分数。在分子、分母的公约数不容易发见时，用“更相减损法”去求它。《九章算术》方田章说：“约分术曰：可半者半之。不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”这就是说：如果分子、分母都是偶数，可以折半的先把它们折半，不都是偶数的就求出分子、分母的最大公约数约之。所谓“等数”，就

是被减数和减数相等时的数值，也就是所求的最大公约数。这种更相减损法和欧几里得的辗转相除法理论是相同的。筹算除法须要布置上、中、下三格算筹，手续麻烦。现在商数既然无关重要，用屡减法来替代除法，同样可以求出最大公约数，手续比较简便。例如化简分数$\frac{24}{78}$时，另外用算筹布置24、78二数如图10。从⊥Ⅲ里三次减去二Ⅲ，得余数丅，如图11。再从二Ⅲ里屡次减去丅，到第三次得余数丅，上下所列的数相等，如图12。这个丅叫做“等数”，就是所求的最大公约数。用6约分母得13，约分子得4，原来的分数即可化简为$\frac{4}{13}$。

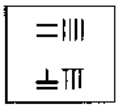


图　10

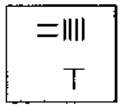


图　11

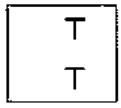


图　12

《九章算术》方田章称，分数相加叫“合分”，相减叫“减分”，都须要通分使分母都相同，然后加、减。“合分术曰：母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一。不满法者以法命之。”“减分术曰：母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一。”例如：

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5+2\times3}{3\times5}=\frac{11}{15}$$

分母互乘分子得1×5和2×3，相加得11为被除数，分母相乘3×5=15为除数。以除数15除被除数11，因11小于15，即以$\frac{11}{15}$为相加的结果。

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{60+80+90+96}{120}=\frac{326}{120}=2\frac{43}{60}$$

第一个分子1以3×4×5乘得60，第二个分子2以2×4×5乘得80，第三个分子3以2×3×5乘得90，第四个分子4以2×3×4乘得96，相加得被除数326。分母相乘得除数120。

$$\frac{8}{9}-\frac{1}{5}=\frac{40-9}{45}=\frac{31}{45}。$$

分子 8 以分母 5 乘得 40，分子 1 以分母 9 乘得 9。从 40 减去 9 余 31，为被除数。分母相乘 $9\times5=45$ 是除数。

此外，还有所谓“课分术”和“平分术”。“课分术”是比较分数的大小，“平分术”是求几个已知分数的平均值，也都要先通分而后计算的。

方田章里的通分法还不知道应用最小公分母，但在少广章里有几个问题的解法却用着最小公倍数作公分母。少广章第六题：“今有田广一步半，三分步之一，四分步之一，五分步之一，六分步之一，七分步之一。求田一亩，问从[1] 几何？”这个题的解法是先求田的广，得：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

$$=\frac{420+210+140+105+84+70+60}{420}=\frac{1089}{420}\text{步。}$$

已知 1 亩＝240(方)步，故得田的长是：

$$240\times420\div1089=92\frac{612}{1089}=92\frac{68}{121}\text{步。}$$

分数相乘叫做“乘分”。方田章：“乘分术曰：母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。”第二十四题：“田广十八步、七分步之五，从二十三步、十一分步之六，问为田几何？”演算步骤大略如下：

$$18\frac{5}{7}\times23\frac{6}{11}=\frac{131}{7}\cdot\frac{259}{11}=\frac{33929}{77}=440\frac{49}{77}$$

即 1 亩 $200\frac{7}{11}$(方)步。

分数除法叫做“经分”。方田章术文笼统，实际算法不大清楚。在刘徽注解里有“以法分母乘实，实分母乘法”等话，知道是用法数

---

① “从”即“纵”，就是田的长。

的分子、分母颠倒而后相乘的。

在西洋古代数学里，奇零分数，或采用埃及人的单分数方法，或采用巴比仑人的六十分制，乘、除演算都很麻烦。近代算术里的分数算法，大概于十五世纪中开始在欧洲各国通行。当时的数学家多说这种算法起源于印度，而由阿拉伯人介绍到欧洲的。然而印度数学有很多部分是承袭中国的，印度分数算法可能是从中国传去的。婆罗笈多(公元628年)和后世数学家所撰算书，记录分数都写分子于分母之上。分数加、减、乘、除算法，也都和《九章算术》里的方法相同。所不同的就是印度人改中国筹算术为笔算，这在数学史上确是进步的。

印度算术传入阿拉伯，阿拉伯人添一条横线于分子、分母之间，和现在的分数记法相同。

意大利人班乞奥利(Pacioli)于1494年写一算术书，求最大公约数也用更相减损法。他自己说这种方法是第六世纪中罗马数学家波伊替斯(Boethius)所传下的方法，它的远源或者还是从中国传去的。

明末西洋笔算术传到中国，李之藻从意大利耶稣会教士利玛窦学习数学，编译《同文算指》"前编"二卷、"通编"八卷。"前编"卷下介绍分数算法，把分母放在横线之上，分子放在横线之下，记六又七分之四作 $\boxed{六\frac{七}{四}}$，和中国古筹算式以及西洋笔算法都不合，不知道他为什么要这样写法。清朝研究西洋数学的人大多盲从《同文算指》的分数记法，现在看起来很容易引起误会。

《同文算指》里，最大公约数叫做"纽数"，也用更相减损法去求它。通分时，先求出二分母的纽数，以纽数除二分母的相乘积便得"共分母"。那时还没有最大公约数和最小公倍数两个名词。

清末新式学校中算术课程采用西洋分数记法和四则算法，和现在教科书完全相同了。

四　各种比例问题的解法

《九章算术》粟米章的开始列举了各种食粮互换的比率如下："粟米之法：粟率五十，粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，……"这是说：谷子五斗去皮可得糙米三斗，又可以舂得九折米二斗七升，或八折米二斗四升。"粟米"章内许多食粮都依这比率计算。

粟米章第一题："今有粟一斗，欲为粝米，问得几何？"它的解法是："以所有数乘所求率为实，以所有率为法，实如法而一。"这个题是有粟求粝米，一斗(10 升)为所有数，5 为所有率，3 为所求率。依术得所求数为 $10\times3\div5=6$ 升。就是一斗谷子可以舂六升糙米。刘徽注说明这种解法的理由，大致说：所求数和所有数相互之比，是以所求率为子，所有率为母的分数。用这分数乘所有数，便得所求的数。因先除后乘在除不尽时计算不大方便，所以术文取先乘后除的说法。这种方法不但能计算食粮的数量，也能解决日常生活上一般的应用问题。因为这类应用问题大都依据"今有"的数据，问所求的数，《九章算术》就用"今有术"作为这类问题解法的专用名词。

在《九章算术》和后来的数学书里，没有把各种比例问题立出像"简比例"、"复比例"、"连锁比例"等名目，分别规定特殊的解法。衰分章、均输章和勾股章中许多不同类型的比例问题，刘徽注一律用"今有术"说明它们的解法。例如衰分章第十题："今有丝一斤，价直二百四十

(钱)[1]。今有钱一千三百二十八,问得丝几何?"这题的解法:以1328钱为所有数,丝1斤为所求率,240钱为所有率,求得丝$1328\times1\div240=5\frac{8}{15}$斤=5斤8两$12\frac{4}{5}$铢(1斤=16两,1两=24铢)。又如第十七题:"今有生丝三十斤,干之(烘干后),(蚀)耗三斤十二两。今有干丝一十二斤,问(原来)生丝几何?"这题的解法:以干丝12斤为所有数,$30\times16=480$两为所求率,三斤十二两是$3\times16+12=60$两,$480-60=420$两为所有率,求得原来生丝$12\times480\div420=13\frac{5}{7}$斤$=13$斤11两$10\frac{2}{7}$铢。又如第二十题:"今有贷(借)人千钱,(每)月(利)息三十(钱)。今有贷人七百五十钱,九日归(还)之。问(利)息几何?"这题的解法:以9日乘750钱为所有数,30钱为所求率,30日乘1000钱为所有率,求得利息$9\times750\times30\div(30\times1000)=6\frac{3}{4}$钱。又如均输章第十题:"今有络丝(生丝)一斤为练(熟)丝一十二两,练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤,问本(来)络丝几何?"这题的解法:以青丝一斤(384铢)为所有数,练丝1斤两数16乘络丝一斤铢数384为所求率,练丝12两乘青丝$384+12=396$铢(1斤12铢)为所有率,求得原来络丝$384\times16\times384\div(12\times396)=496\frac{16}{33}$铢$=1$斤4两$16\frac{16}{33}$铢。

在杨辉《详解九章算法》附"纂类"中,上面所举的"今有术"问题都归入"互换"门,废去"今有术"名目。在朱世杰《算学启蒙》和程大位《算法统宗》中,这类比例问题的解法又叫做"异乘同除法"。

---

① 引文中括号里的字是本书作者所加,目的是帮助读者更容易理解原文的意思,以下同。

《九章算术》里所谓“衰分”就是现在算术教科书里的配分法。“衰分术曰：各置列衰（所配的比率），副并（得所配比率的和）为法，以所分乘未并者各自为实，实如法而一。”刘徽注说：“列衰各为所求率，副并（所得的和）为所有率，所分为所有数。”用“今有术”计算，就可以得到各所求数。例如衰分章第二题：“今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗。羊主曰：‘我羊食半马（所食）。’马主曰：‘我马食半牛（所食）。’今欲衰偿之，问各出几何？”依照羊主人、马主人的话，牛、马、羊所食粟相互之比率是 4∶2∶1，就用 4、2、1 各为所求率，4+2+1=7 为所有率，粟 50 升为所有数。以“今有术”演算得牛主人应偿$\frac{4\times50}{7}=28\frac{4}{7}$升，马主人应偿 $14\frac{2}{7}$升，羊主人应偿 $7\frac{1}{7}$升。

又均输章第五题：“今有粟七斗，三人分舂之，一人为粝米，一人为粺米，一人为糳米。令米数等，问取粟、为米各几何？”“术曰：列置粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，而返衰之。”这是说三人中舂粝米的应少取粟，舂糳米的应多取粟，各以$\frac{1}{30}$、$\frac{1}{27}$、$\frac{1}{24}$或$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{8}$为列衰。按照衰分术算得舂粝米的人应取粟 $7\times\frac{1}{10}\div\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right)=2\frac{10}{121}$斗，舂成粝米 $2\frac{10}{121}\times30\div50=1\frac{151}{605}$斗。

衰分在程大位《算法统宗》里改称“差分”。

在古代印度数学中有所谓“三率法”的（也称三数法则）就是我们的“今有术”。三率各有专名，相当于“今有术”的所有率、所有数和所求率。依照一定的次序列出，第一率和第三率必须是同类的数量。以第二率、第三率相乘，以第一率除，便得所求的数。可见印度三率法和中国今有术是一致的，只是他们强调三率的先后次序。

印度三率法传入阿拉伯回教国家，再由阿拉伯人传到西欧各国，仍旧保持三率法的名义。欧洲人叫它 regula trium，the rule of three，但废去各率的专名。并且写成像下列的算式：

12 码 — 20 先令 — 6 码

欧洲商人重视这种算法，叫它“金法”。十七世纪中一个数学家说，如同黄金是五金中最可宝贵的一样，三率法是各种算法中最可宝贵的算法。在十六世纪以后，三率法也叫做“比例”。现在教科书中所谓“反比例”的问题，原本不属于“今有术”的问题。十六世纪中西洋数学家解这类问题时，也把已知的数据，和三率法相仿，依次排列，但计算时以第一率、第二率相乘，以第三率除，便得所求的结果。因为用右边的数作除数，和正比例算法用左边的数作除数的恰恰相反，所以有反比例的名目。

利玛窦到中国后，李之藻从他学习西洋算术，编译《同文算指》，介绍三率法的应用。清朝的康熙帝也提倡西洋算术，在《数理精蕴》中叙述比例算法更加详备。正比例第一题：“设如有银买米，每米一石银八钱，今买米二百四十石，问共该银若干？”“法以米一石为一率，银八钱为二率，今买米二百四十石为三率。二、三率相乘，一率除之，得四率一百九十二两，即其银数也。”

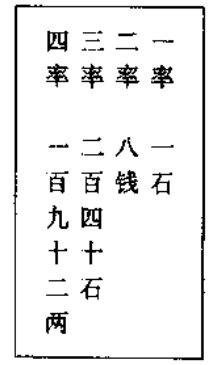


图 13

现在把《同文算指》、《数理精蕴》和现在的算术教科书中所用的各种比例的名称列表对照如下：

《同文算指》	《数理精蕴》	现在的教科书
三率准测法	正比例	正比例
变测法	转比例	反比例

重准测法	合率比例	复比例
合数差分法	按分递折比例	配分比例(比例分配)

在长时期的实践工作中，西洋数学家觉察到印度的三率法和欧几里得《几何原本》里的比例法有同等的作用，但是三率法没有把二个比率相等的意义明白表示出来，终究是一个遗憾。十八世纪以后的欧洲算术教科书才把三率法的第二率、第三率交换过来改写成现在的形式：

$$\text{所有率} : \text{所有数} = \text{所求率} : x$$

从《九章算术》的“今有术”逐渐演变到现在教科书中的比例，足有二千年的发展历史。中间经过印度、阿拉伯和西欧各国数学家的修订和改造，使得各种比例问题更容易得到解决。

五 盈不足术

《九章算术》的第七章叫“盈不足”，里边有二十个问题都是用盈不足术来解决的。这个盈不足术在中国数学史上是一个原始的解题方法，后来的数学家并不十分重视。但是它流传到西洋之后，却有它的辉煌的发展过程，在世界数学史上是有光荣的地位的。

盈不足章开宗明义的第一题是：“今有(人)共买物，(每)人出八，盈三；(每)人出七，不足四。问人数、物价各几何？”这在现在的算术教科书里是一个所谓“盈亏类”的问题。盈不足章这一类问题解法的原文是：“置所出率，‘盈’、‘不足’各居其下。令维乘所出率，并以为‘实’，并‘盈’、‘不足’为法。……置所出率，以少减多，余，以约‘法’、‘实’。‘实’为物价，‘法’为人数。”

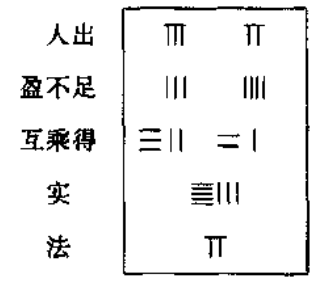


图 14

设每人出钱 a_1，盈 b_1；每人出钱 a_2，不足 b_2。u 为人数，v 为物价。那末，依据术文得下列二公式：

$$u = \frac{b_1 + b_2}{|a_1 - a_2|}, \quad v = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{|a_1 - a_2|} \tag{1}$$

上述第一题的算筹演草大致如图 14：

$$实 = 7 \times 3 + 8 \times 4 - 21 + 32 = 53$$

$$法 = 4 + 3 = 7$$

因 $$8 - 7 = 1$$

故 物价 $v = 53$

人数 $u = 7$。

刘徽注用现在的代数算式表达出来，大致如下：

$$v = a_1 u - b_1,$$

$$v = a_2 u + b_2。$$

以 b_2 乘第一式，以 b_1 乘第二式，相加得

$$(b_2 + b_1)v = (b_2 a_1 + b_1 a_2)u,$$

因而 $$\frac{v}{u} = \frac{b_2 a_1 + b_1 a_2}{b_2 + b_1}。 \tag{2}$$

又，二式相减，得 $(a_1 - a_2)u - b_1 - b_2 = 0$，

故 $$u = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2},$$

$$v = \frac{b_2 a_1 + b_1 a_2}{a_1 - a_2}。$$

《九章算术》盈不足章的最前四个例题所设的盈数 b_1 和不足数 b_2 都是正数，是正规的盈亏类问题。在这四题之后，又提出了“两盈”一题($b_1 > 0, b_2 < 0$)，“两不足”一题($b_1 < 0, b_2 > 0$)，“盈适足”一题($b_1 > 0, b_2 = 0$)，“不足适足”一题($b_1 = 0, b_2 > 0$)。各题的解题术文分别作出了适当的修正。实际上，如果在公式(1)里我们不规定 b_1、b_2 都是正数，这八个问题是可以一并处理，无须为后列的四题另订条文的。由此可见盈不足章写成的时代还是在东汉之前，那时还不知道利用负数的概念来简化解题的方法。

所谓盈不足术并不是专为解决上述的八个例题而设立的。本章内提出了形式上不属于盈亏类的十二个算术难题，但是都用盈不足术来解决。一般算术问题的解法是运用题中已知的数逐步推

算所求的答案。分析问题的性质有许多类型，每一个类型的问题都有它的特殊的解法。初学算术的人遇到稍难的问题，往往摸不着头脑，不知道用什么方法对付。编写盈不足章的数学家，以为一切算术问题不管它属于哪个类型，都可以用盈不足术来解决。把盈不足术看作一种万能的算法。比如上述的第一题里，在“人出八，盈三，人出七，不足四”的条件下，我们可以问：每人应该出多少钱才能适足呢？应用盈不足术我们可以算出代表物价的“实”，和代表人数的“法”。那末以“法”除“实”，就可以得到每人应该分摊的钱数：

$$\frac{v}{u}=\frac{b_2a_1+b_1a_2}{b_2+b_1}=\frac{53}{7}=7\frac{4}{7}。$$

任何算术问题都有所求的答数。我们任意假定一个数值作为答数，依题验算，假使算得的一个结果和题中表示这个结果的已知数相等，那末，这个答数是被猜对了。假使验算所得的结果和题中的已知数不符，而相差的数量或是有余，或是不足，那末，通过两次不同的假设，就把原来的问题改造成一个盈亏类的问题。按照盈不足术，就能解出所求的答数来。

例如第十三题：“今有醇酒一斗，直钱五十；行酒一斗，直钱一十。今将钱三十，得酒二斗。问醇、行酒各得几何？”这题的解法是：“假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余（钱）一十；令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足（钱）二。”依据术文演算如后：假设醇酒有五升，那末行酒有 $20-5=15$ 升。共值钱 $5\times5+15\times1=40$，比题中的 30 钱多余 10 钱。又假设醇酒只有 2 升，那末行酒有 $20-2=18$ 升。共值钱 $2\times5+18\times1=28$，比 30 钱不足 2 钱。以盈不足术解这题得醇酒升数应是 $\frac{5\times2+2\times10}{2+10}=\frac{30}{12}=2\frac{1}{2}$，因而行酒升数是 $20-$

$2\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}$。

又如第十五题："今有漆三(换)得油四，油四(调)和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆，问出漆、得油、和漆各几何？"解题："术曰：假令出漆九升，不足六升；令之出漆一斗二升，有余二升。"依据术文原意是：假设取出漆 9 升，换得油 12 升，可以和漆 15 升。9 升和 15 升相加仅有 24 升，不足 30－24＝6 升。又假设取出漆 12 升，换得油 16 升，可以和漆 20 升。12 升和 20 升相加得 32 升，比 30 升多 2 升。用盈不足术推算出漆升数应是$\frac{9\times2+12\times6}{2+6}=\frac{90}{8}=11\frac{1}{4}$。得油 15 升，和漆 $18\frac{3}{4}$升。

又如第二十题："今有人持钱之(往)蜀，贾利十(分之)三。初返归一万四千，次返归一万三千，次返归一万二千，次返归一万一千，后返归一万。凡五返归钱，本利俱尽。问本持钱及利各几何？"这题的解法，要先假设本钱三万，计算第五返归钱时不足之数，再假设本钱四万，计算五返归钱后多余之数，然后用盈不足术求出原来带去的本钱。

用代数方法解这种算术难题时，我们假设 x 为所求的数，依照题中所给的条件列出一个方程 $f(x)=0$，解这个方程就得到 x 所代表的数值。古人不知道怎样可以列出这个方程，无法直接解决这个问题。但是对于任意的一个 x 值，$f(x)$的对应值是会核算的。这样通过两次假设，算出 $f(a_1)=b_1$ 和 $f(a_2)=-b_2$，于是按照盈不足术公式(2)得出

$$x=\frac{b_2a_1+b_1a_2}{b_2+b_1}=\frac{a_2f(a_1)-a_1f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}。$$

$f(x)$是一次函数时，这样解法是准确的。$f(x)$不是一次函数时，右

边所得的数值是所求数的一个近似值。

运用代数方法解题有困难的时候，这种别开生面的算法未始不是一个办法。后来数学家分析问题的能力加强了，解题的技术提高了，一般不属于盈亏类的算术问题都可以直接解决，无须用盈不足术处理了。盈不足章第二十题的刘徽注，于详解术文之后，添上另一解法如下：

$$本钱=(\{[(10000\times\frac{10}{13}+11000)\frac{10}{13}+12000]\frac{10}{13}+13000\}\frac{10}{13}+14000)\frac{10}{13}$$

比盈不足术要简便得多。《张丘建算经》卷中第四十九题和这个题是同一类型的，也用刘徽解法去解它。又《张丘建算经》卷上第二十四题和盈不足章第十三题同一类型，用配分比例法去解它；卷中第五十题和盈不足章第十一题同一类型，用混合法去解它。在叙述了上列三题的解法之后，张丘建都补上“以盈不足术求之亦得”一句话。盈不足术显然不如各类型问题的特殊解法简便。

南宋杨辉《详解九章算法》盈不足章里有九个问题于原有的盈不足术解法之外，都添上了别种解法。并且在它的附录“九章算法纂类”中把这些问题归并到别的类型中去。

明程大位《算法统宗》虽然专立“盈朒”一章，而所设的问题都明白指出“盈”和“不足”的数量。《九章算术》的盈不足术，汉朝以后的数学家只看作解盈亏类问题的特殊方法，不再看它为解决一般算术题的万能算法了。

《九章算术》的盈不足术，不知在什么时候流传到西方回教国家，为阿拉伯数学家所重视。他们叫它 hisab al khataayn，译成汉文应该是“契丹算法”。那时中国文化由西辽国人传到西方国家，因

而中国人被称为契丹。盈不足术叫做契丹算法，是有饮水思源的意义的。意大利数学家费抱那乞(Leonardo Fibonacci)撰算术书(1202年)，首先用拉丁语介绍这个算法，叫它 elchataym，那是阿拉伯语的音译。又叫它 regula augmenti et decrementi，竟像是汉文"盈不足术"的意译了。后来意大利算术书中有许多不同拼音的名称，例如：el-cataym(1494年)、regola helcataym(1556年)、regola del cattaino(1591年)等还保留中国算法的原意。

因为用盈不足术解一般算术问题须要通过两次的假设，所以在欧洲各国的算术书中后来都改称为假借法(regula falsi，reghel der valsches positien，rule of false position)。在十六、七世纪时期，欧洲人的代数学还没有发展到充分利用符号的阶段，这种万能的算法便长期统治了他们的数学王国。十六世纪末，利玛窦到中国，李之藻跟他学习西洋算术，所编《同文算指》书里有"叠借互征"法，就是利玛窦的老师丁先生(Clavius)原著里 regola del falso di doppia positione 的译文。

现在的中学同学都能依靠他的代数知识，用一次方程或二次方程解日常遇到的任何算术难题，再不须要借重盈不足术了。但是高等数学范围内，有些数字方程的实根不容易计算时，我们还要利用这个盈不足术推求这个实根的近似值。设 $f(x)$ 是一个在区间 $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ 上的单调连续函数，$f(a_1)=b_1$ 和 $f(a_2)=-b_2$，正、负相反，那末，方程 $f(x)=0$ 在 a_1、a_2 间的实根约等于

$$\frac{a_2 f(a_1)-a_1 f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}=a_2+\frac{(a_2-a_1)f(a_2)}{f(a_1)-f(a_2)}$$

$$=a_1+\frac{(a_2-a_1)f(a_1)}{f(a_1)-f(a_2)}。$$

事实上，这个公式所表示的 x 的近似值是经过二点 (a_1,b_1) 和 $(a_2,$

$-b_2$)的直线在 OX 轴上的截距，和曲线 $y=f(x)$ 的 OX 轴上截距相差很小[①]。在现在的高等数学教科书中，这种求方程实根近似值的方法叫做“假借法”，也叫“弦位法”。我们不要数典忘祖，这个方法应该叫做“盈不足术”。

---

① 在直角坐标平面上画一条曲线，它的方程是 $y=f(x)$，如图 15。这条曲线经过 $P_1(a_1,b_1)$ 和 $P_2(a_2,-b_2)$ 二点，和 OX 轴交于 L，OL 是方程 $f(x)=0$ 在 a_1、a_2 间的一个根，也就是我们要求的解。联接 P_1P_2，和 OX 轴交于 K。因 ΔP_1MK 和 ΔP_2NK 相似，所以

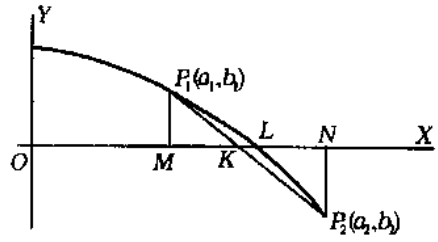


图 15

$$\frac{MK}{MP_1}=\frac{KN}{NP_2}=\frac{MN}{MP_1+NP_2},$$

得
$$MK=\frac{(a_2-a_1)b_1}{b_1+b_2}。$$

$$OK=OM+MK=a_1+\frac{(a_2-a_1)b_1}{b_1+b_2}。$$

如果 $f(x)$ 是一个一次函数，或 $f(x)=0$ 是一次方程，那末 $y=f(x)$ 的轨迹是一条经过 P_1、P_2 的直线，L 点和 K 点重合，OK 就是方程 $f(x)=0$ 的根。如果 $f(x)$ 不是一次函数，那末，$y=f(x)$ 的轨迹不是直线，OK 只能近似地等于 OL，所以说

$$a_1+\frac{(a_2-a_1)f(a_1)}{f(a_1)-f(a_2)}$$

是方程 $f(x)=0$ 在 a_1、a_2 间的一个根的近似值。

六 方 程

中国古代数学书中的所谓方程是联立一次方程组。例如《九章算术》方程章第一题："今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？"

设 x、y、z 依次为上、中、下禾各一秉的实的斗数，那末，这个问题是求解下列三元一次联立方程组：

$$3x + 2y + z = 39 \tag{1}$$

$$2x + 3y + z = 34 \tag{2}$$

$$x + 2y + 3z = 26 \tag{3}$$

上面这个联立方程组用算筹布置起来得右、中、左三行如图16。各行的上面三个筹表示上、中、下禾的秉数，也就是 x、y、z 的系数。下面的一个筹表示共有斗数，也就是常数项。刘徽注说："程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。"这里所谓"令每行为率"就是立出三个等式。"如物数程之"，就是说：有几个未知数，须列出几个等式。联立一次方程组各项的系数用算筹表示

图 16

时，有如方阵，所以叫做“方程”。古代算书中的“方程”和现在一般所谓方程是两个不同的概念。一组“方程”的每一行都包含至少两个未知数，用算筹在一定地位表示各个未知数的系数，和现今代数学中的分离系数法相仿。包含不止一个未知数的算式和联立方程组的概念，全世界要算《九章算术》方程章为最早。

联立一次方程组的解法，以上面所举的第一题为例，依照《九章算术》的“方程术”演算如下：

以(1)式内 x 的系数 3 遍乘(2)式各项，得

$$6x + 9y + 3z = 102 \tag{4}$$

从(4)式内，减去(1)式各对应项的二倍，或两度减去(1)式各项，得

$$5y + z = 24 \tag{5}$$

方程术的这种运算叫做“直除”。刘徽注解释“直除”的正确性说：“举率以相减，不害余数之课也。”就是说从一个等式的两端，减去另一个等式的两端，所得的结果仍是相等的，这就是得到原来方程组的一个同值方程组。同样，以(1)式内 x 的系数 3 遍乘(3)式各项，得

$$3x + 6y + 9z = 78 \tag{6}$$

从(6)式内直除(1)式得

$$4y + 8z = 39 \tag{7}$$

图 17

以上的演算步骤在筹算上是把中行(2)通过以 3 遍乘后的(4)式直除右行(1)后改成(5)式，把左行(3)通过以 3 遍乘后的(6)式直除(1)式后改成(7)式，如图 17。

其次，我们要以(5)式内 y 的系数 5 遍乘(7)式各项，得

$$20y+40z=195 \tag{8}$$

左行	中行	右行
		三
	四	二
四	一	一
一一	二四	三三
(10)	(5)	(1)

图 18

从(8)式内直除(5)式(在这里是四度减去)得

$$36z = 99 \tag{9}$$

因(9)式两端有公约数 9,以 9 约两端得

$$4z = 11 \tag{10}$$

筹式改换如图 18。

在图 18 的筹式内,左行只剩一个未知数 z。以 4 除常数项 11,便得下禾一秉的实 $z=2\frac{3}{4}$斗。这种先遍乘而后直除的消元方法和现在我们化简一个行列式时所取的演算方法相仿。例如把上列方程组的系数行列式化简如下:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{45}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{45}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

第三个行列式就是图 17 中的系数行列式,最后的行列式是图 18 中的系数行列式。

要求中禾和下禾一秉的实,还是用遍乘直除的方法。以图 18 左行(10)的下禾系数 4 遍乘中行(5)的各项,得

$$20y + 4z = 96。$$

直除(10)式得 $20y=85$。

以 5 约两端得 $4y=17$ (11)

以左行下禾系数 4 遍乘右行(1),得

$$12x + 8y + 4z = 156。$$

直除左行(10)得

$$12x + 8y = 145。$$

再直除中行(11)(在这里是两度减法)得

$$12x = 111。$$

以 3 约两端得

$$4x = 37。 \qquad (12)$$

筹式如图 19,故得

$$x=9\frac{1}{4},\quad y=4\frac{1}{4},\quad z=2\frac{3}{4}$$

图 19

从图 16 到图 19,方程组的筹算形式始终保持右、中、左三行,演算是相当便利的。《九章算术》方程章共计十八题,其中二元的八题,三元的六题,四元、五元的各二题,都用上述的演算方法解决。各个方程中的系数或常数项,有负数的也是用遍乘直除法消去任何预先指定的某项,只是在二方程要消去的项正负相反时,用相加来作"直除"罢了。从汉朝以后到宋、元各家,如《孙子算经》、《张丘建算经》(隋刘孝孙"细草")、杨辉《详解九章算法》、朱世杰《算学启蒙》等都用直除法解联立一次方程组。

刘徽《九章算术注》原则上是遵守直除法的。但在方程章第七题的注解中补充了一个新的解法。第七题是:"今有牛五、羊二,直金十两;牛二、羊五,直金八两。问牛、羊各直金几何?"这题用算筹列出方程组如图 20。刘徽的解法是:假令为同齐,头位为牛,当相乘左、右行定,更置右行牛十、羊四,直金二十两;左行牛十、羊二十五,直金四十两(如图 21)。牛数等同,金多二十两者,羊差二十一使之然也。以少行减多行,则牛数尽,惟

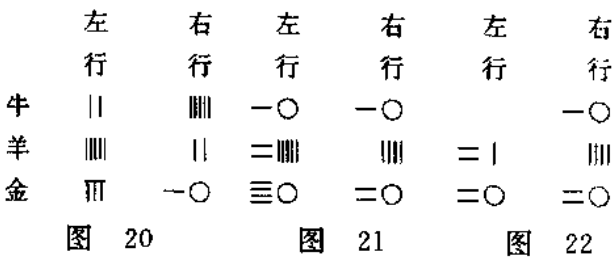


图 20 图 21 图 22

羊与直金之数见(如图 22),可得而知也。"[1] 这样用互乘对减的方法消去第一项,刘徽说可以推广到任何多元的方程组,但是他没有意思把直除法改掉。

秦九韶《数书九章》卷十七的第一题是一个联立三元一次方程组问题。他主张用互乘相消法消元,和现在中学代数教科书内的加、减消元法相同。并且在已经求出一个未知数的答数后,其他未知数的数值也用"代入法"计算,和中学代数学的方法相同。到明朝珠算术盛行,筹算法废弃不用,当时的数学家解联立一次方程组,演草须用笔记,于是普遍应用秦九韶的互乘相消法和代入法。

① 这段文字,传本《九章算术》有脱误,今依李潢、宋景昌校正。

七　正负数加减法则

如前一节所讲，方程的每一行都是由“群物总杂”组成的等式，其中可能有相反意义的系数，因而引起正、负数的概念。刘徽注说：“两算得失相反，要令‘正’、‘负’以名之。”例如“方程”章第四题：“今有上禾五秉，损实一斗一升，当下禾七秉。……”设 x、y 为上禾、下禾各一秉的升数，依据题意，我们有

$$5x - 11 = 7y,$$

移项后得

$$5x - 7y = 11。$$

在第一式内常数项是一个负数，在第二式内 y 的系数是一个负数。又，用直除法消元，减数大于被减数时也需要负数的概念来扩充减法的应用。因此，在《九章算术》方程章内，提出了正、负数的相反意义和正、负数的加、减法则。这在数学发展史上是一个无与伦比的伟大成就。

《九章算术》方程章第三题刘徽注说，用红色的算筹表示正数，用黑色的算筹表示负数。否则在布置算筹时正列的算筹表示正数，邪列的算筹表示负数。

《九章算术》“正、负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。”这是正、负数加、减法则的条文。“同名”、“异名”便是现在所谓同号、异

号。条文的前面四句的大意是：在两数相减时，二数同号则绝对值的差是余数的绝对值；二数异号则绝对值的和是余数的绝对值。减去的数如其是正数而大于被减数，余数得负号；如其是负数而绝对值大于被减数的绝对值，余数得正号。

设　　$b > a \geqslant 0$，　$b = a + (b - a)$，

则　　$a-b=a-[a+(b-a)]$

$=-(b-a)$。

在中间的式子里，a 和 a 对消，$+(b-a)$无可对消，改为负数，所以说“正无入负之”。

$$(-a)-(-b)=(-a)-[-a-(b-a)]$$

$$=+(b-a)。$$

在中间的式子里$-a$ 和$-a$ 对消，$-(b-a)$无可对消，改为正数，所以说“负无入正之”。

如果　$a > b \geqslant 0$，　$a = b + (a - b)$，

则　　$a-b=b+(a-b)-b=+(a-b)$，

$(-a)-(-b)=[-b-(a-b)]-(-b)$

$=-(a-b)$。

又　　$a-(-b)=a+b$，

$(-a)-(+b)=-(a+b)$

都是显而易见的。

条文的后面四句的大意是：在两数相加时，二数同号则和数的绝对值等于二绝对值的和；二数异号则和数的绝对值等于二绝对值的差。二数异号时其中正数的绝对值较大则和数取正号；其中负数的绝对值较大则和数取负号。

$a+b=a+b$，

$(-a)+(-b)=-(a+b)$。

$a>b\geqslant 0$ 时 $a+(-b)=b+(a-b)+(-b)=a-b$,

$(-a)+b=-b-(a-b)+b=-(a-b)$。

$b>a\geqslant 0$ 时 $a+(-b)=a+[-a-(b-a)]=-(b-a)$,

$(-a)+b=-a+[a+(b-a)]=(b-a)$。

有了这正、负数加、减法则后,直除法可以应用到任何联立一次方程组了。

东汉末,刘洪撰"乾象历"法(公元 206 年),在计算月球在黄道内外度数时,用着正、负数加、减法则。他说,正、负数"相并,同名相从,异名相消;其相减也,同名相消,异名相从,无对互之。"最后一句"无对互之"等于说"正无入负之,负无入正之",所以刘徽《九章注》说:"无入为无对也。"

正、负数概念和加、减法则在后来的开方法和天元术的发展中起着应有的作用,我们将在下面和它有关的几节里讲到。

八　平面积和立体积

面积和体积的计算法的起源很早。在《九章算术》编纂成书的时代，除有关圆面积的部分只能计算得到比较粗糙的近似结果外，一切直线图形的面积或体积的公式都是正确的。长方形的面积等于长乘阔，长方柱体的体积等于长、阔、高的连乘积，是两个不需证明的公理。其他平面积或立体积的计算公式，都是用直观方法推导出来。有些体积公式还经过代数运算而化简了的。古代数学家没有面积和体积的单位名称。如果长、阔、高都用尺做单位，那末，平面积或立体积也用尺做单位。因此“方边二尺”、“方幂四尺”和“立方八尺”三个“尺”字的意义是各不相同的。

平　面　积

在《九章算术》方田章里，三角形状的田叫做“圭田”，求它的面积，“术曰：半广以乘正从。”“广”是三角形底边的长，“从”（同“纵”）是三角形的高。这里说“正从”，就明确地指出那个高是和底边垂直的。刘徽注：“半广者，以盈补虚为直田（长方形田）也。亦可半正从以乘广。”在图 23 内，$EF=\frac{1}{2}BC$，三角形 ABC 的面积等于长方形

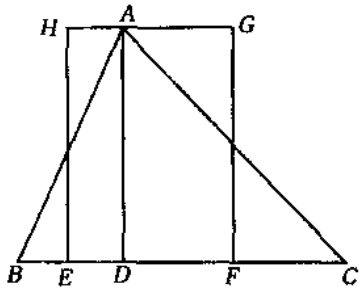


图 23

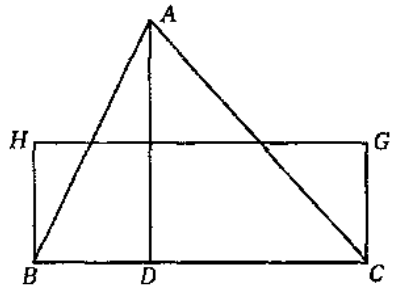


图 24

$EFGH$ 的面积，等于$\frac{1}{2}BC\times AD$。在图 24 内，$BH=\frac{1}{2}AD$，三角形 ABC 的面积等于长方形 $BCGH$ 的面积，等于$\frac{1}{2}AD\times BC$。

直角梯形的田叫做“邪田”，求面积“术曰：并两邪而半之，以乘正从若广。”在图 25 内 $AE=\frac{1}{2}(AB+DC)$，邪田 $ABCD$ 的面积等于长方形 $AEFD$ 的面积，等于$\frac{1}{2}(AB+DC)\cdot AD$。

一般的梯形田叫做“箕田”，可以看作两个邪田合成的田。上、下底为 a、b，高为 h 时，面积等于$\frac{1}{2}(a+b)h$（如图 26）。

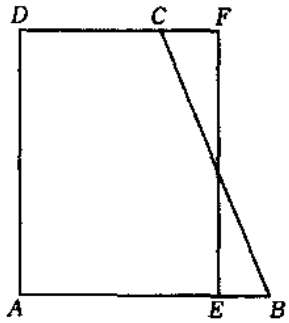


图 25

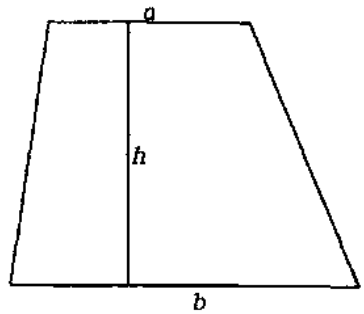


图 26

圆田"术曰：半周半径相乘得积步。"理论上是正确的。但是《九章算术》用"径一周三"作周、径的比率，由此得出的面积是不精密的。依照刘徽注，圆面积是半径平方的$\frac{157}{50}$倍；依照李淳风注，圆面积是半径平方的$\frac{22}{7}$倍。

弧田是一个截圆面，求面积术曰："以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。"设截圆面（图 27）的弦长为 c，矢高为 v，那面积

$$A = \frac{1}{2}(cv + v^2)。$$

这是一个经验公式，所得面积的近似值不大精密。中国古代数学家忽略角和弧的量法，后世的人虽然知道这个公式不可靠，也没有提出准确的算法。

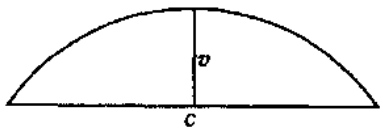


图　27

《五曹算经》（成书约在第三世纪）中又有"鼓田"和"四不等田"等近似公式。设鼓田（图 28）上广 a，中间广 b，下广 c，正从 h，那面积

$$A = \frac{1}{3}(a + b + c)h。$$

设四不等田（图 29）的四边顺次为 a、b、c、d，那面积

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}。$$

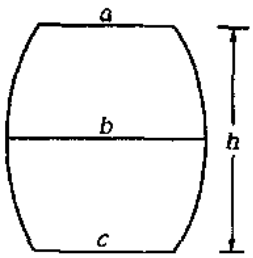


图　28

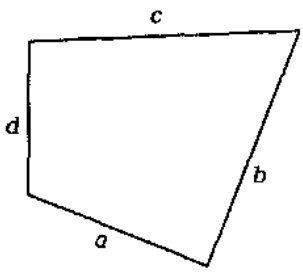


图　29

南宋秦九韶《数书九章》"田域类"里有"三斜求积"术，是已知三角形的三边长求面积的公式。设 a、b、c 为三边的长，A 为三角形

面积，那末

$$A^2=\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]$$

把右边的式子分解为四个因式，就可以化成所谓希隆公式①。秦九韶创设这个公式，在中国数学史上却是空前的。

立 体 积

《九章算术》商功章收集的都是些立体积问题。

1. 筑堤、开沟等土方的计算。如果剖面都是相等的梯形，上、下广是 a 和 b，高或深是 h，工程一段的长是 l，那末，这一段的体积是 $V=\frac{1}{2}(a+b)hl$。

2. "堑堵"是两底面为直角三角形的正柱体。设底面直角旁的

---

① 希隆(Heron)是亚历山大城公元第三世纪中的希腊数学家。他证明了下面的定理：

$$A^2=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}。$$

现在我们写成公式 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

如果把秦九韶公式的右边 $\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]$ 分解因式，作

$$\frac{1}{4}\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(b-a)^2]$$

$$=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)$$

就和希隆公式一致了。

两边为 a 和 b，堑堵高为 h，则体积等于 $\frac{1}{2}abh$。“阳马”是底面为长方形而有一棱和底面垂直的锥体。它的体积是 $\frac{1}{3}abh$。“鳖臑”是底面为直角三角形而有一棱和底面垂直的锥体，它的体积是 $\frac{1}{6}abh$。

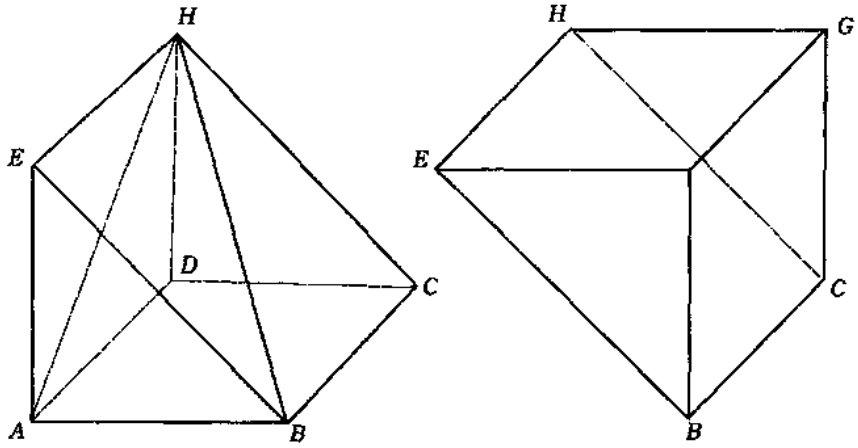


图　30

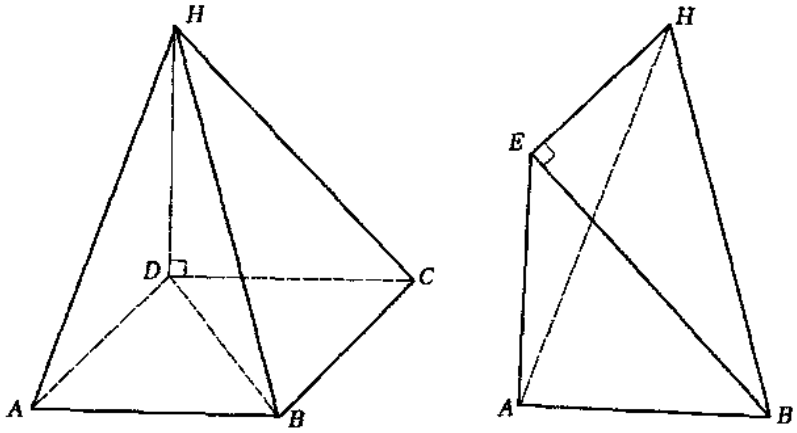


图　31

上述三个体积公式的证明，根据刘徽的注解，是用着具体模型的。斜解一个正立方体，得两个堑堵，如图 30，故堑堵的体积是立

方体积的二分之一。再解开左边的堑堵，如图 31，得一阳马和一鳖臑。阳马又可以对分为两个鳖臑。这三个鳖臑很容易看出是相等的。所以每一个鳖臑的体积是立方体积的六分之一，阳马的体积是立方体积的三分之一。

如果原来被分解的立体不是正立方体而是一个长方柱体 $a\times b\times h$，同样可以分解成六个体积相等的鳖臑，每一鳖臑的体积是 $\frac{1}{6}abh$。二鳖臑拼成一阳马，体积是 $\frac{1}{3}abh$。三鳖臑拼成一堑堵，体积是 $\frac{1}{2}abh$。

3. 正方锥体可以分解成四个阳马，故正方锥体体积是底方面积乘高的三分之一。正圆锥体可以内切于一正方锥体之内，它的水平剖面面积是正方锥体水平剖面面积的 $\frac{\pi}{4}$，故正圆锥体的体积是外切正方锥体的体积的 $\frac{\pi}{4}$。

4. “方亭”是正方棱台体。设上方边为 a，下方边为 b，截高为 h，则体积

$$V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h。$$

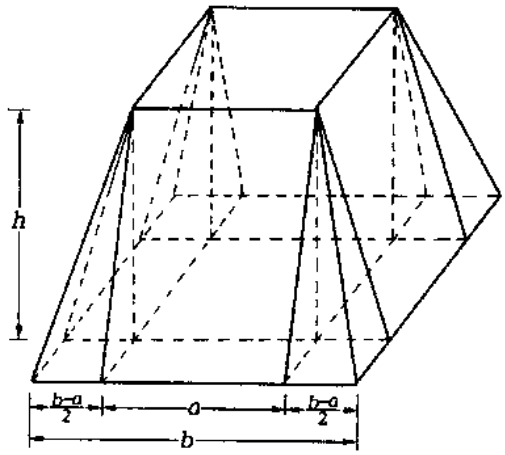


图 32

方亭可分解为一正方柱体、四堑堵和四阳马，如图 32，故体积

$$V=a^2h+4\times\frac{1}{2}\times\frac{b-a}{2}ah+4\times\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2h$$

$$=\frac{1}{3}[3a^2+3a(b-a)+(b-a)^2]h$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)h。$$

又得内切圆亭的体积

$$V = \frac{\pi}{12}(a^2 + b^2 + ab)h。$$

5."刍童"是上、下底面都是长方形的棱台体。设上、下底面为 $a_1 \times b_1$ 和 $a_2 \times b_2$，高为 h，则体积

$$V = \frac{1}{6}[(2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2]h。$$

把刍童仿方亭的例分解为一长方柱体、四堑堵和四阳马，如图 33。

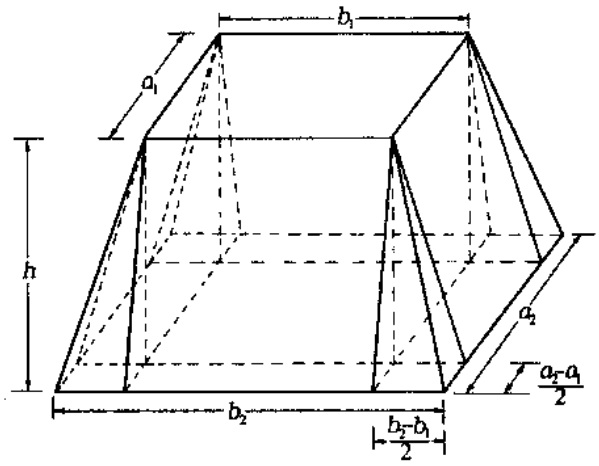


图　33

故得

$$V = a_1b_1h + 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)a_1h + 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)b_1h$$

$$+ 4 \times \frac{1}{3}\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)h$$

$$= \frac{1}{6}[6a_1b_1 + 3(b_2 - b_1)a_1 + 3(a_2 - a_1)b_1$$

$$+2(b_2-b_1)(a_2-a_1)]h$$

$$=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2]h。$$

6. 楔形体的三个侧面不是长方形而是梯形的叫做“羡除”。设一个梯形面的上、下广是 a、b，高是 h，其他二梯形的公共边长 c，这边到第一梯形面的垂直距离是 l，则体积

$$V=\frac{1}{6}(a+b+c)\times hl。$$

把羡除分解成一个堑堵和四个鳖臑，如图 34。堑堵 $ABCDFE$ 的体积是 $\frac{1}{2}ahl$，鳖臑 $ABGE$ 的体积是 $\frac{1}{6}\left(\frac{c-a}{2}\right)hl$，$ABHG$ 的体积是 $\frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)hl$。故

$$V=\frac{1}{2}ahl+2\times\frac{1}{6}\left(\frac{c-a}{2}\right)hl+2\times\frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)hl$$

$$=\left[\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}(c-a)+\frac{1}{6}(b-a)\right]hl$$

$$=\frac{1}{6}(a+b+c)hl。$$

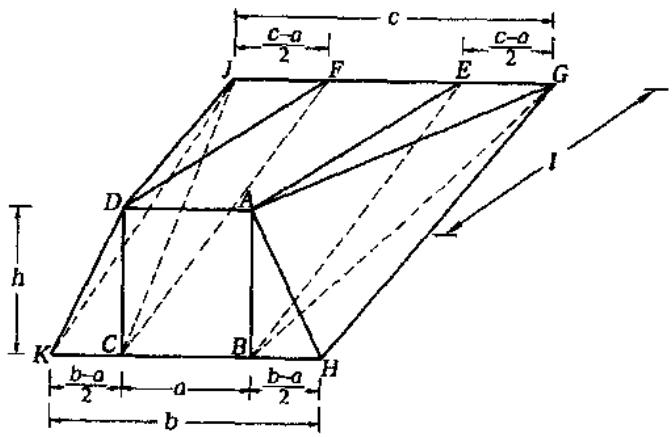


图 34

7. 在唐初王孝通所撰的《缉古算术》里，立体积的计算，除了《九章算术》商功章所有的公式以外，还有几个结合着建筑堤防的实际问题。假如河岸不是平地，堤防的底面是一个斜面而顶面是一个平面，那末，堤的垂直剖面是上底相同而高不相等的梯形。设低头的梯形面上底 a_1，下底 b_1，高 h_1，高头的梯形面上底 $a_2=a_1$，下底 b_2，高 h_2，两梯形面间的垂直距离为 l。

经过低头梯形的下底 GH，作平面 $GHIJ$ 和堤的顶面 $EFBA$ 平行，在这平面之上是一个平堤，它的体积是 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)h_1l$。在这个平面之下是一个羡除 $GHIJCD$，它的体积是 $\frac{1}{6}(2b_1+b_2)(h_2-h_1)l$。堤的土方的总体积便是这两个体积的和。

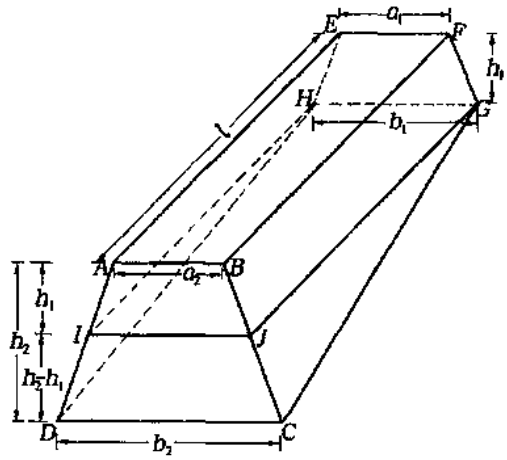


图　35

因为梯形剖面的两个斜边的斜率是相同的，王孝通又创设一个求堤的体积的比较简单的公式：

$$V=\frac{1}{6}\left[(2h_1+h_2)\frac{a_1+b_1}{2}+(2h_2+h_1)\frac{a_2+b_2}{2}\right]l。$$

九　开平方和开立方

《九章算术》少广章叙述开整平方和开整立方的演算步骤，相当详备。后来的数学家又推广少广章的方法，能够开“带从平方”和开“带从立方”，因而在中国古代算书里“开方”这个名词包括任何高次代数数字方程求正根的方法。这一节和次一节先讲唐朝以前开方术的发展史，后面我们还要讲到宋朝人的“增乘开方法”。

开　平　方　术

《九章算术》少广章的开整平方术摘录如下：

开方术曰：置积为实。借一算，步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算步之如初。以复议一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副从定法。复除，折下如前。

例如有平方积 55225，求方边的长。布置算筹𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤𝍥，这叫做“实”（被开方数）。另取一算筹放在实数的个位下边如图 36。除法筹式，先布置实、法二层；开平方筹式应当有实、法、借算三层。图

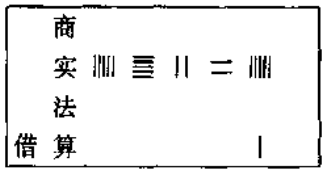


图　36

36 所表示的是一个有实、无法、有借算的筹式。用现在代数符号表示出来是一个方程 $x^2=55225$。

把这个借算向左移，每一步移过两位，移二步，停在实数万位之下，如图 37。这样，借算所表示的数值不是 x^2 而是 $10000x_1^2$。原方程变为

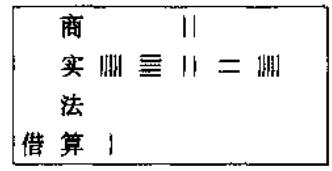


图　37

$$10000x_1^2=55225 \tag{1}$$

议得商 $x_1>2$，就在实数百位的上层放算筹||，这是平方根的第一位数码。

以初商 2 乘 10000 得 20000，用算筹布置于实数之下，借算之上，叫做“法”。再以初商 2 乘法 20000 得 40000，从实减去，余 15225，如图 38。

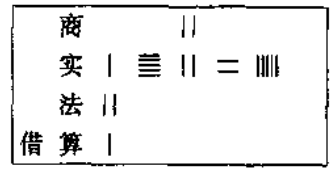


图　38

把法数加倍，向右边移过一位，变为 4000，叫做“定法”。把借算向右边移过二位，变为 $100x_2^2$，如图 39。这个筹式和代数方程

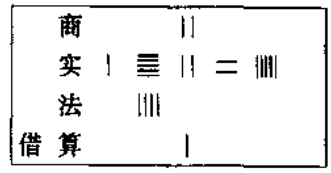


图　39

$$100x_2^2+4000x_2=15225 \tag{2}$$

有同样的意义。

议得次商 $x_2>3$，就以 3 作平方根的第二位数码，放在实数的十位之上。以次商 3 乘 100 得 300，另置于定法的右边，又加入定法，得 4300。以次商 3 乘 4300，从实减去，余 2325，如图 40。

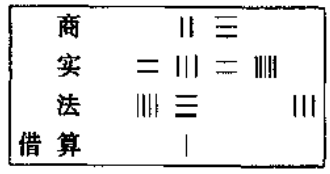


图　40

再以另置的 300 加入 4300 得 4600，向右边移过一位，变为

460，这是平方根第三位的定法。把借算向右边移过二位，变为 x_3^2，如图 41。这筹式和代数方程

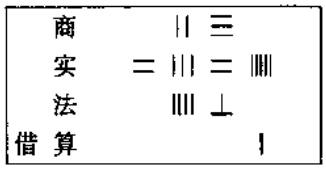


图 41

$$x_3^2 + 460x_3 = 2325 \qquad (3)$$

有同样的意义。

议得商的末位 $x_3=5$。以 5 乘 1 得 5，加入 460 得 465。以 5 乘 465，从实数内减去，没有余数。我们就得到 55225 的平方根是 235，如图 42。

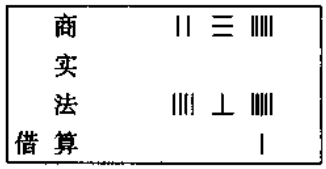


图 42

上面叙述的开方步骤是合理的。它是怎样发见的呢？注《九章算术》的伟大数学家刘徽曾经用几何图形去理解它。他用一个正方形的面积来表示被开方数。譬如说，这个正方形的一边长 $100a+10b+c$，把正方形划分为七个部分，如图 43。黄甲幂代表 $10000a^2$，黄乙幂代表 $100b^2$，黄丙幂代表 c^2。两个朱幂是以 $100a$ 为长、$10b$ 为阔的长方形。两个青幂是以 $100a+10b$ 为长、c 为阔的长方形。两个朱幂和一个黄乙幂合起来的面积是 $(200a+10b)10b=(2000a+100b)b$，括弧内的 $2000a$ 就是开方术里的第一个"定法"。两个青幂和一个黄丙幂合起来的面积是 $(200a+20b+c)c$，括弧内的 $200a+20b$ 就是开方术里的第二个"定法"。这样把全部面积归入下列三项

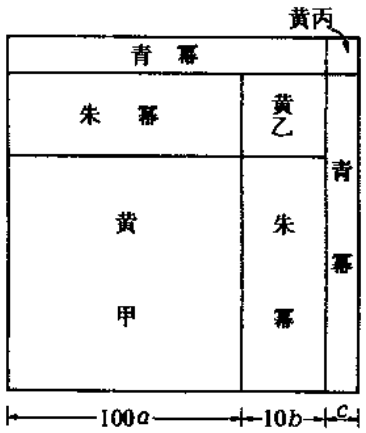


图 43

$$10000a^2 + (2000a + 100b)b + (200a + 20b + c)c$$

而总结成 $(100a+10b+c)$ 的平方。

如果被开方数不是一个整数的平方，《九章算术》少广章原术说："若开之不尽者为不可开，当以面命之。"设 $A=a^2+r, r>0$。"以面命之"是说平方根的奇零分数是以 a 做分母 r 做分子的分数，$\sqrt{A}=a+\frac{r}{a}$，这当然是不合理的。刘徽认为把 $a+\frac{r}{a}$ 自乘起来，和 A 相差很大。他介绍下列二法：

(1) $\sqrt{A}=a+\frac{r}{2a}$，

(2) $\sqrt{A}=a+\frac{r}{2a+1}$。

并且说用第一法，以 $2a$ 为分母还是太少，第二法以 $2a+1$ 为分母又是太多。他又提出一个把开方法继续下去追求十进小数的方法。这样得到的平方根近似值，精密度可以随意提高，当然最为合理。

被开方数是一个分数时，《九章算术》列出二法：

(1) $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$，

(2) $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{AB}}{B}$。

分母 B 开得尽时用(1)式，开不尽时用(2)式。

开　立　方　术

少广章"开立方术曰：

置积为实。借一算，步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二位。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍

下、并中，从定法。复除，折下如前。

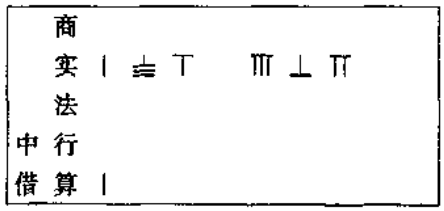


图 44

例如求 1860867 的立方根。先布置算筹 1860867 为实。下留二个空层，置借算 1 于最下层。把这个借算从个位上移到千位上，再移到百万位上，如图 44。这个筹式表示方程

$$1000000x_1^3=1860867 \tag{1}$$

议得商 $x_1>1$，置立方根的第一位数码 1 于实数百位之上。以 1 乘

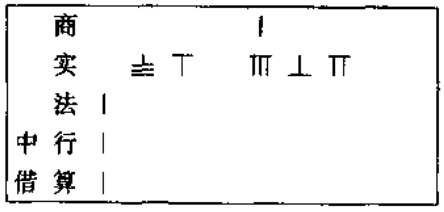


图 45

1000000 得 1000000，置于借算之上，称为“中行”。再以 1 乘中行得 1000000，置于中行之上实数之下，称为“法”。以 1 乘法，从实数内减去，余 860867，如图 45。

图 46

以 3 乘法向右移过一位作 300000，为“定法”。以 3 乘中行向右移过二位，作 30000。把借算向右移过三位。如图 46。这个筹式表示方程

$$1000x_2^3+30000x_2^2+300000x_2=860867 \tag{2}$$

复议得立方根的第二位数码是 2，置于实数十位之上。以 2 乘

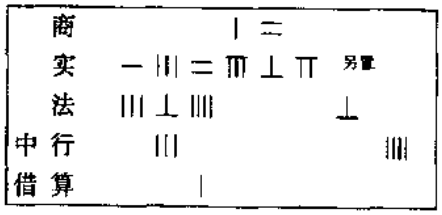


图 47

中行得 60000，另置于法的右边。以 2 平方乘借算得 4000，另置于中行右边。又以这二数并入定法得 364000 为法。以 2 乘法从实数内减去，余 132867，如图 47。

以 2 乘另置的下数得 8000，以 1 乘另置的上数得 60000，并入法数得 432000，向右移过一位作 43200，为定法。以 3 乘 2000 得 6000，并入中行得 36000，向右移过二位，作 360。把借算向右移三位。如图 48。这个筹式表示方程

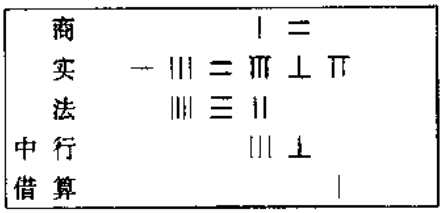


图　48

$$x_3^3+360x_3^2+43200x_3=132867 \tag{3}$$

再议得立方根的末位 3。以 3 乘中行得 1080，以 3 平方乘借算得 9，将二数并入定法得 44289 为法。以 3 乘法，从实数内减去，恰恰减尽，如图 49。就得 1860867 的立方根是 123。

图　49

刘徽用立体图形来证实这个开立方术是合理的。他解释图 46 的筹式时，用立体(如图 50)的前面右上角的小立方体表示借算 $1000x_2^3=(10x_2)^3$，称为“隅”；用前上、右上和前右的三条正方柱体表示“中行”的 $3\times100(10x_2)^2$，称为“廉”；用前面、上面、右面的三块正方柱体表示“法”$3\times100^2\times10x_2$，称为“方”。这七个立体积合起来是从原来立方体积 1860867 减去 100^3 所余的 860867。把这七个立体拆开放平，它们的厚薄相等，都是 $10x_2$，所以可以合并为以 $10x_2$ 为高，以 $3\times100^2+3\times100\times10x_2+(10x_2)^2$ 为底面积的柱体。因 3×100^2 为底面积的

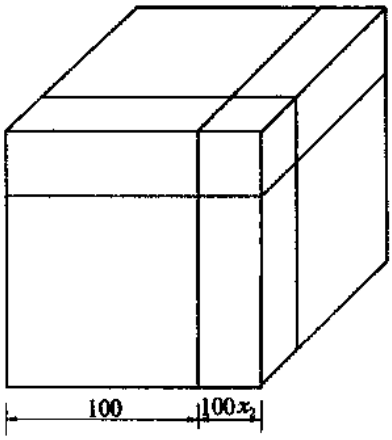


图　50

主要部分，用它去除总体积 860867 可以得到 $10x_2$ 的近似值，所以称为定法。议定立方根首二位是 120 后，余下来的体积是 $1860867-120^3=132867$。这个体积也可以看作一个“隅”、三条“廉”、三块“方”拼起来的立体。三块“方”的底面积 $3\times120^2=43200$，这又是求立方根第三位数码的定法。这样我们求得立方根第三位数是 3，而立方根是 123。

已审阅
子居 09-10-26, 17:49

一〇　开带从平方和开带从立方

在上节开平方术所举的例子里，议平方根的第二位和第三位数码时，我们的筹式是：

$$100x_2^2 + 4000x_2 = 15225 \tag{2}$$

和

$$x_3^2 + 460x_3 = 2325 \tag{3}$$

显而易见，(2)式的正根是 $10x_2=35$，(3)式的正根是 $x_3=5$。少广章开平方术虽然专为开整平方而建立，但可以利用来解决一般的数字二次方程问题。这种二次方程有一个正的一次项跟在二次项的后面，古人叫这个一次项为“从法”。解这种二次方程是开带“从法”的平方，简称为“开带从平方”。例如第三世纪初赵爽“勾股圆方图注”说：“以差实减弦实(从弦的平方内减去勾股差的平方)，半其余(为实)，以差(勾股差)为从法，开方除之，复得勾矣。”就是说：假如已知一勾股形的弦是 c，勾、股的差是 k，c 和 k 都是已给的数字，那末，开带从平方

$$x^2 + kx = \frac{1}{2}(c^2 - k^2),$$

就得到勾 $x=a$。

又例如《九章算术》勾股章第二十题：“今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？”“术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之

(2×20×1775=71000)，为实。并出南门步数(20+14=34)为从法，开方除之，即邑方。"就是说，设 x 为邑方步数，则

$$x^2+34x=71000。$$

开带从平方得 $x=250$ 步(请参阅下第十一节)。补作开带从平方时逐步筹式如下：

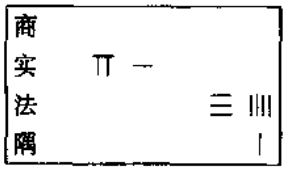


图 51

$x^2+34x=71000$

图 52

$10000x_1^2+3400x_1=71000$

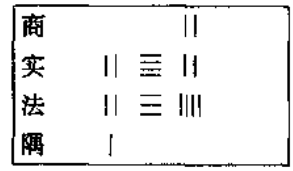


图 53

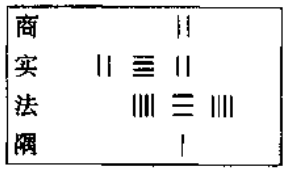


图 54

$100x_2^2+4340x_2=24200$

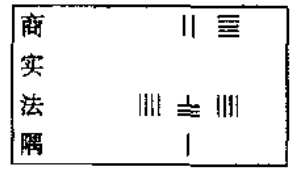


图 55

$x=250$

赵爽在他的"勾股圆方图注"里提出了一个已知长方形面积以及长、阔的和求长、阔的问题。设长方形面积是 q，长、阔的和是 p，他的解法是先求得长、阔的差等于 $\sqrt{p^2-4q}$，因而得到阔等于 $\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-4q})$，长等于 $p-\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-4q}$。这样解法是以面积图形为根据的。如图 56，在正方形 p^2 内减去四个长方形 $4q$，所余的是长阔差的平方。开平方即得长阔差。和、差相减折半得阔，从长阔和内减去阔得长。如果用代数符号表达出来，设 x 为阔，则

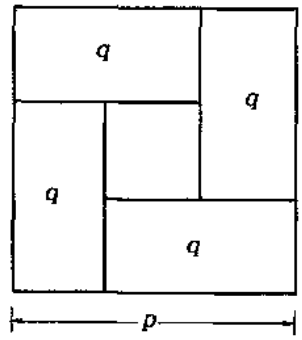


图 56

$$x(p-x)=q,$$

或
$$-x^2+px=q。$$

解二次方程得
$$x=\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-4q})。$$

上面的二次方程中 x^2 的系数是 -1，和带从平方不同，所以赵爽不用开带从平方法去求它的正根。

二次方程的这种解法，当然可以推广到 x^2 的系数是正的情形。唐朝一行在《大衍历》法（公元 727 年）里，解一个二次方程

$$x^2+px=q,\quad p>0,\quad q>0$$

用公式 $x=\frac{1}{2}[\sqrt{(p^2+4q)}-p]$（请参阅第二七节）。这种解法在数字计算方面不如开带从平方法直捷了当，故不为一般古代数学家所重视。朱世杰《算学启蒙》卷下“开方释锁”门有一个长方形问题，须解二次方程

$$-x^2+92x-2052=0。$$

他说这题用古法演算，先得 $\sqrt{92^2-4\times2052}=16$，再求得 $x=\frac{1}{2}(92-16)=38$。但他不主张用古法，以为“以天元演之，明源活法，省功数倍”，这是因为开带从平方法到十一世纪以后，已经发展到能解任何二次方程了。

在上节开立方术的例子里，议立方根的第二位和第三位数码时，筹式表达的方程

$$1000x_2^3+30000x_2^2+300000x_2=860867,$$

和
$$x_3^3+360x_3^2+43200x_3=132867。$$

都是有一次项和二次项的三次方程，显然，都可以利用少广章的开立方术求出它们的正根的。在祖冲之所撰的《缀术》（已失传）里似乎有这类三次方程的例子。《隋书·律历志》说祖冲之“又设开差

幂、开差立，兼以正、负[1] 参之。指要精密，算氏之最者也。”“开差幂”应该是开长、阔有差的长方形面积，“开差立”应该是开长、阔、高有差的长方柱体体积。假如阔是 x，长是 $x+k$，高是 $x+l$，则

$$x(x+k)=A \quad 或 \quad x^2+kx=A$$

是一个带从平方。

$$x(x+k)(x+l)=V \text{ 或 } x^3+(k+l)x^2+klx=V$$

是一个带从立方。如果 k、l 可以是负数，x^2 和 x 的系数都可能是负数，那末，开方时发生了新的困难。大概祖冲之是有办法克服它的，所以《隋书》上要这样推重他。

第七世纪初王孝通撰《缉古算术》。他所选的问题，大部分是要求三次方程的正根的。设有三次方程

$$x^3+ax^2+bx=c。$$

王孝通称常数 c 为“实”，x 的系数 b 为“方法”，x^2 的系数 a 为“廉法”，x^3 的系数恒等于 1。和刘徽“少广”章开立方术注所用术语大致相同。a、b、c 都是正数，b 有时等于 0。

① 传本《隋书》“负”字误作“圆”字。

一一 勾股测量

我们的祖先在远古时代就创造了矩作为测量的工具。矩就是现在工人所用的曲尺，是两条互相垂直的直尺做成的。《周髀算经》说：周朝初年（约公元前1100年）周公问商高用矩尺测量的方法，商高说："偃矩以望高，复矩以测深，卧矩以知远。"这就是说：把矩（图57）的一条直尺（AC）放平，另一条（CB）直立，从A仰视高处的P点，视线AP和CB交于D，那末，根据相似三角形AMP和ACD的相当边成比例的道理，知道

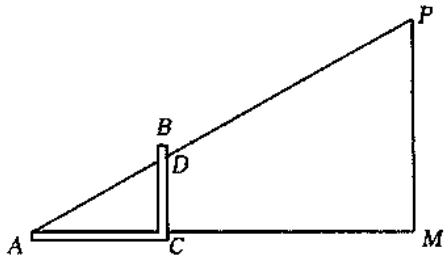


图 57

$$高\ MP = \frac{CD \cdot AM}{AC}。$$

这里，$\frac{CD}{AC}$是仰角$\angle MAP$的正切值，但是在《周髀算经》或其他古代数学书里，没有提出过任何角度的函数名目。在直角三角形ACD内，AC边叫做"勾"，CD边叫做"股"，AD边叫做"弦"（在《周髀算经》里叫"径隅"），这直角三角形叫做"勾股形"。把直尺CB倒过来往下垂，就可以测量深处目的物的俯角正切值。把直尺CB放在水平面上，就可以测量远处两目的物间水平角的正切值。适当的

应用矩尺，可以测量任何目的物的高、深、广、远，所以商高总结说："智出于勾，勾出于矩。"

《周礼》"大司徒"篇说，平地上竖立高八尺的"表"（标竿），夏至日日中影长一尺五寸。古代天文学家多用立表测日影的方法来决定一年中的节气。《周髀算经》说："周髀长八尺，夏至之日晷一尺六寸。髀者，股也；正晷者，勾也。"这是用勾的长短来表示太阳的高度，似乎有取用仰角的余切值的意思。

利用相似勾股形的测量工作，在《九章算术》的勾股章里有第十七到第二十四的八个例题。第二十四题："今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问井深几何？"

已知（图 58）$CB=CA=5$ 尺 $=50$ 寸，$CD=4$ 寸，求井深 BP。按照术文，解得

$$BD=CB-CD=50-4=46 \text{ 寸。}$$

$$BP=\frac{BD\cdot CA}{CD}=\frac{46\times 5}{4}=57\frac{1}{2} \text{ 尺。}$$

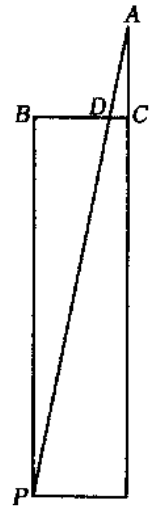


图 58

第十九题："今有邑方不知大小，各中开门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木。问邑方几何？"

已知（图 59）$CD=30$ 步，$BE=750$ 步，求方边 $2AC$。按照术文，解得

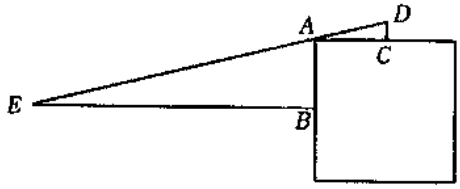


图 59

$$2AC=\sqrt{(4\times CD\times BE)}$$
$$=\sqrt{(4\times 30\times 750)}$$
$$=300\text{ 步。}$$

第二十题："今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？"

已知(图 60)$CD=20$ 步，$EB=14$ 步，$BF=1775$ 步，求 EC。因

$$CD\cdot BF=CA\cdot BD$$
$$=\frac{1}{2}EC(CD+EC+EB),$$

或 $$EC(EC+20+14)=2\times 20\times 1775。$$

设 $$x=EC$$

则 $$x^2+34x=71000。$$

开带从平方，得 $$x=250\text{ 步。}$$

又勾股章第十五题为勾股形容方问题，已知(图 61)勾 a，股 b，则内容正方形边长为$\frac{ab}{a+b}$。

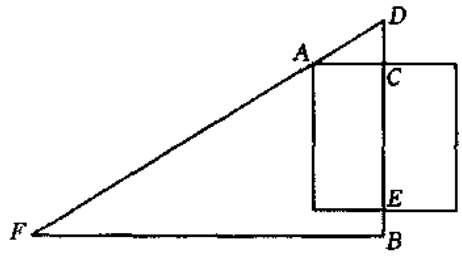


图 60

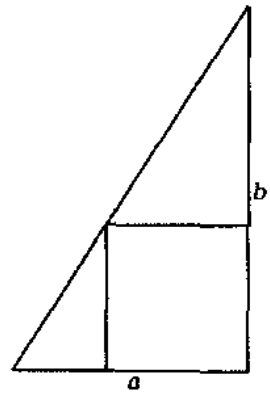


图 61

一二 重 差 术

《周髀算经》里原来有夏至日测量太阳高出地面的方法。在南北相距一千里的两处地方，各立高八尺的“表”，夏至日日中量这二表的影长，北表影长一尺六寸，南表影长一尺五寸，影长相差一寸。由此计算夏至日太阳高出地面约为$\frac{80}{1}\times1000=80000$里。因为地面是球面，不是平面，用这种方法来测量太阳的高是不合理的。但是用这种方法来测量地平面上几里路以内目的物的高、深、广、远却是准确的。凡不知道目的物的远近，要量它的高，必须两次“偃矩”测望；量它的深，必须两次“复矩”测望；量二目的物间的距离，必须两次“卧矩”观测。东汉时代的数学家叫这种测量方法为重差术。三国末刘徽举了九个例题，编写“重差”章，附在《九章算术》勾股章的后面。因为它的第一题是一个测量海岛的问题，这个重差章的单行本在唐朝以后就有《海岛算经》的名称。

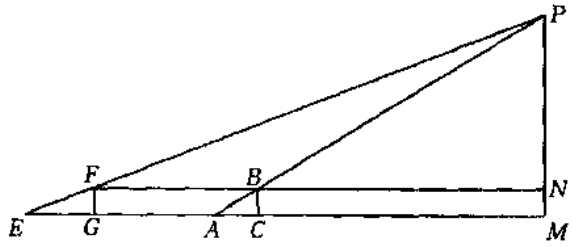


图 62

《海岛算经》第一题（图 62）：“今有望海岛（MP）。立两表（CB、GF）齐高三丈，前后相去

(GC)千步。令后表与前表参相直。从前表却行(AC)一百二十三步,人目著地,取望岛峰,与表末参合。从后表却行(EG)一百二十七步,人目著地,取望岛峰,亦与表末参合。问岛高(MP)及去表(CM)各几何?"

已知 $CB=GF=3$ 丈,$GC=1000$ 步,$AC=123$ 步,$EG=127$ 步,求岛高 MP 和岛远 CM。

因
$$NP\cdot EG=FN\cdot GF,$$
$$NP\cdot AC=BN\cdot CB。$$

二式相减,得

$$NP(EG-AC)=GC\cdot CB,$$
$$NP=\frac{GC\times CB}{EG-AC}。$$
$$MP=\frac{GC\times CB}{EG-AC}+CB,$$
$$CM=BN=\frac{AC\times NP}{CB}=\frac{GC\times AC}{EG-AC}。$$

所以刘徽的术文说:"以表高(CB)乘表间(GC)为实,相多($EG-AC$)为法,除之。所得加表高(CB),即得岛高。求前表去岛远近者,以前表却行(AC)乘表间(GC)为实,相多($EG-AC$)为法,除之,得岛去表里数。"

又第三题(图 63):"今有南望方邑,不知大小。立两表(C、E),东西去六丈,齐人目,以索连之。令东表与邑东南隅及东北隅参相直。当东表之北却行(CB)五步,遥望邑西北隅(N),入索东端(DC)二丈二尺六寸半。又却北行去表(CA)十三步二尺,遥望邑西北隅,适与西表相参合。问邑方及邑去表各几何?"

已知 $CD=2.265$ 丈,$CB=2.5$ 丈,$EC=6$ 丈,$CA=6.7$ 丈,求邑方 MN 和邑远 CM。

在图上作 DL 和 EA 平行，则

$$CL=\frac{CA\cdot CD}{CE}。$$

$$BL=CL-CB=\frac{CA\cdot CD}{CE}-CB。$$

$$BA=CA-CB,$$

因 $$\frac{MN}{CD}=\frac{BN}{BD}=\frac{BA}{BL},$$

故 $$MN=\frac{BA\cdot CD}{BL}。$$

又 $$LA=CA-CL$$

$$=CA-\frac{CA\cdot CD}{CE},$$

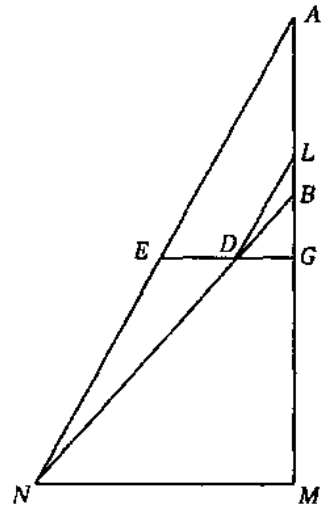


图 63

因 $$\frac{CM}{CB}=\frac{DN}{BD}=\frac{LA}{BL},$$

故 $$CM=\frac{LA\cdot CB}{BL}。$$

在这个问题的解法里，用到相似斜三角形的相当边的比例。其他问题用着三次或四次测望的解法，每一题都可以启发读者的思维。在秦九韶《数书九章》里，还有更复杂的重差术问题。

一三　勾股弦定理和它的应用

《周髀算经》的开卷第一章记着商高回答周公的话。他说："故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。"这是说，如果直角三角形直角旁二边的长是 3 和 4，那末它的斜边必定是 5。反过来说，三角形三边的长成 3∶4∶5 连比时，必定是一个勾股形。我们可以想象，古人利用这个勾股形的特征来决定二个互相垂直的方向。但是我们不能根据这一个特例，就断定在周朝初年（公元前 1100 年）勾股弦定理已经发现了。

《周髀算经》是一部西汉末、东汉初（公元第一世纪）的天文学书。书内应用着勾平方加股平方等于弦平方的公式，但没有证明。在东汉初年，勾股弦定理和从它出发导来的许多有用公式已经建立起来了。当时的数学家就把勾股章作为《九章算术》的第九章。那时勾股算术的主要内容要以赵爽的"勾股圆方图注"说得最为简明。赵爽字君卿，大约是三国吴人（第三世纪初）。"勾股圆方图注"是他所写的《周髀注》的一部分。原有的图早已失传，现在传本《周髀算经》里所附的图是后来的读者杜撰出来的，和注文的意义不大符合。我们依据注文补绘下面五个图形，用来说明他的勾股算术。

1."勾股各自乘，并之为弦实。开方除之即弦。"赵爽用"弦图"

来证明这个定理，他所谓“弦实”是弦平方的面积，“弦图”是以弦为方边的正方形。在“弦图”内作四个相等的勾股形，各以正方形的边为弦，如图 64。赵爽称这些勾股形面积为“朱实”，中间的小正方形面积为“黄实”。设四个勾股形的勾是 a，股是 b，弦是 c，那末，1 个朱实是 $\frac{1}{2}ab$，4 个朱实是 $2ab$，黄实是 $(b-a)^2$。所以 $c^2=2ab+(b-a)^2=a^2+b^2$。这就证明了

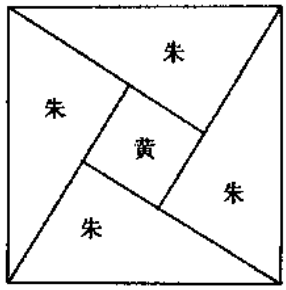


图 64

$$a^2+b^2=c^2,\quad c=\sqrt{a^2+b^2} \tag{1}$$

刘徽在《九章算术》勾股章注中说：“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，……合成弦方之幂。”这是勾股定理的另一个证明。所绘的“青出朱入图”和赵爽的“弦图”不同。可惜刘徽的图早已失传，难以查考了。

2. 在“弦图”内划去一个以股 b 为方边的正方形，余下来的是一个曲尺形，它的面积是 $c^2-b^2=a^2$，赵爽叫它“勾实之矩”，如图 65。如果把这曲尺形的“勾实之矩”依虚线处剪开，拼成一个长方形，那末，它的长是 $c+b$，宽是 $c-b$。所以

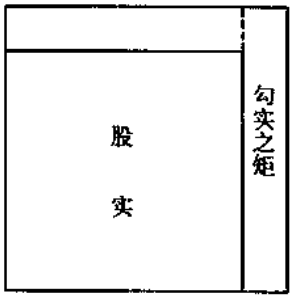


图 65

$$a^2=(c+b)(c-b),$$

$$a=\sqrt{(c+b)(c-b)} \tag{2}$$

又 $$c+b=\frac{a^2}{c-b},\quad c-b=\frac{a^2}{c+b},$$

故 $$c=\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)},\quad b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)} \tag{3}$$

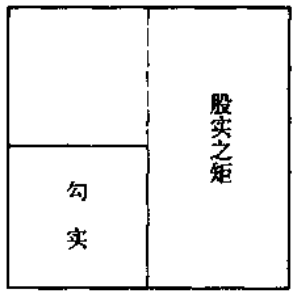


图　66

3. 同样在"弦图"内划去一个以勾 a 为方边的正方形，余下来的是一个面积等于 b^2 的曲尺形，称为"股实之矩"，如图 66。把这"股实之矩"依虚线处剪开，拼成一长方形，它的长是 $c+a$，宽是 $c-a$。所以

$$b^2=(c+a)(c-a),$$

$$b=\sqrt{(c+a)(c-a)} \tag{4}$$

又 $c+a=\dfrac{b^2}{c-a}$，　$c-a=\dfrac{b^2}{c+a}$，

故
$$c=\frac{(c+a)^2+b^2}{2(c+a)},\quad a=\frac{(c+a)^2-b^2}{2(c+a)} \tag{5}$$

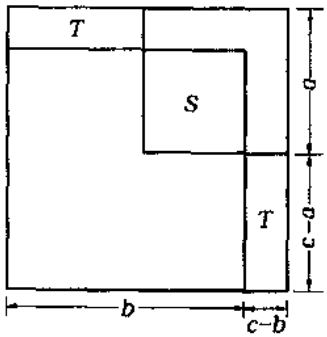


图　67

4. 把图 66 旋转 180°，合在图 65 的上面，就是图 67。图中小正方形 S 的边长是 $a+b-c$。左上角和右下角的二长方形的边长各是 $c-a$，宽是 $c-b$，面积 $T=(c-a)(c-b)$。

因　$a^2+b^2-S=c^2-2T$，

故　$2T=S$，

$$2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2。$$

所以
$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-b=a,$$
$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-a=b,$$
$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)=c \tag{6}$$

5. 在图 64 的"弦图"之外再加上四个"朱实"，拼成一个以 $a+b$ 为方边的正方形，如图 68。这个正方形的面积比两个"弦实"($2c^2$)少一个"黄实"$(b-a)^2$，所以

$$(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2。$$

因得 $a+b=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}$,

$$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2} \quad (7)$$

勾、股、弦和它们的"和"$a+b$,$c+a$,$c+b$,"差"$b-a$,$c-a$,$c-b$,共计九种。已知九种中的任意二种求解这个勾股形的问题就有$\frac{1}{2}\times9\times8=36$种。依据赵爽的公式可以解决其中24种问题。《九章算术》勾股章的第一题到第十四题全是这类性质的应用问题。刘徽的注也引用了赵爽的话。

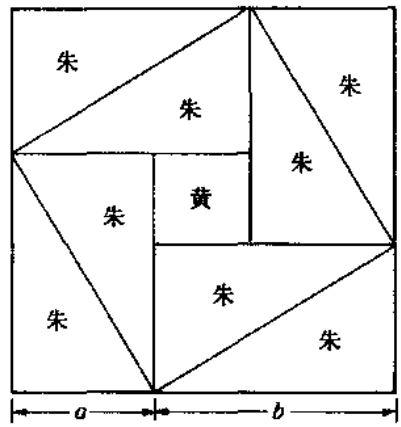


图 68

例如第六题:"今有池方一丈,葭生其中央,出水一尺。引葭赴岸,适与岸齐。问水深、葭长各几何?""答曰:水深一丈二尺,葭长一丈三尺。"

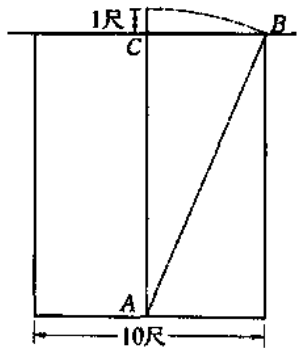


图 69

解:在 ABC 勾股形内(图 69),设勾 $CB=a$,股 $AC=b$,弦 $AB=c$,已知 $a=5$ 尺,$c-b=1$ 尺,因 $c+b=\frac{a^2}{c-b}$,

所以 $b=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}-(c-b)\right]=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=12$ 尺。

$$c=b+(c-b)=13 \text{ 尺。}$$

第九题:"今有圆材,埋在壁中,不知大小。以锯锯之,深一寸,锯道长一尺。问径几何?""答曰:材径二尺六寸。"

解:在勾股形 ABC 内(图 70),设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$。已知 $a=5$ 寸,$c-b=1$ 寸,而 $CE=c+b=\frac{a^2}{c-b}=25$ 寸。故 $ED=(c+b)+(c-b)=25+1=26$ 寸。

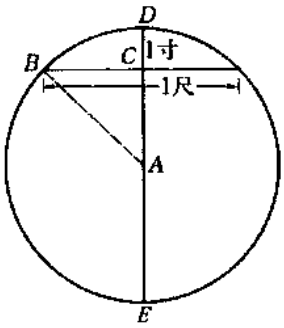


图　70

第十二题："今有户不知高广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问户高、广、邪各几何？""答曰：广六尺，高八尺，邪一丈。"

解：在勾股形 ABC 内（图 71），设户广 $BC=a$，高 $AC=b$，邪 $AB=c$。已知 $c-a=4$ 尺，$c-b=2$ 尺。因而 $a+b-c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}=4$ 尺（参阅本节 4），$a=4+2=6$ 尺，$b=4+4=8$ 尺，$c=4+4+2=10$ 尺。

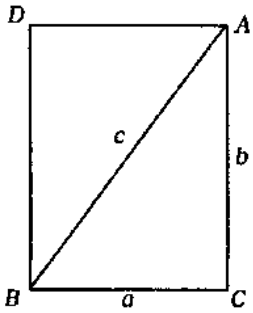


图　71

第十三题："今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问折者高几何？""答曰：四尺二十分尺之十一。"

解：在勾股形 ABC 内（图 72），已知 $CB=a=3$ 尺，$CE=CA+AB=b+c=10$ 尺，因而 $c-b=\frac{a^2}{c+b}=\frac{9}{10}$ 尺，所以 $b=\frac{1}{2}[(c+b)-(c-b)]=\frac{1}{2}\left(10-\frac{9}{10}\right)=4\frac{11}{20}$ 尺。

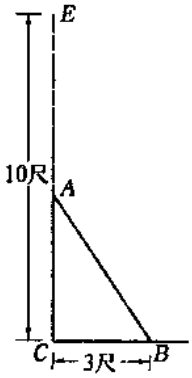


图　72

印度婆罗笈多（Brahmagupta）所著书（628 年）中有一个折竹问题和上面第十三题相仿，婆斯加罗（Bhaskara）所著书（1150 年）中有一个莲花问题和第六题相仿，但题中数字都经过改换。

后来元朝朱世杰的《算学启蒙》里创设了公式

$$\sqrt{2(c+a)(c+b)}=a+b+c。$$

清朝的数学家又增添

$$\sqrt{2(c-a)(c+b)}=b+c-a,\ \sqrt{2(c+a)(c-b)}=a-b+c$$

二公式，然后上述的三十六种问题都可以解决了。

如果把 $a+b+c$，$a+b-c$，$a-b+c$，和 $b+c-a$ 四种并入上述的九种共计十三种，那末，已知十三种中任意二种求解勾股形的问题就有七十八种。为了要解决全部的问题，项名达撰《勾股六术》(1825 年)、宋演撰《勾股一贯述》(1878 年)等又添补几个有用的公式。有许多问题是要解二次方程来解答的。

唐初王孝通撰《缉古算术》开始用 ab 积或 ac 积、bc 积为问题中的一个已知数，解勾股形问题都需要求出一个三次方程的正根。例如《缉古算术》第十七题，已知 $ac=A$，$c-b=k$，求 b。按照他的“自注”，用符号演算如下：

$$A^2=a^2c^2,$$

$$\frac{A^2}{2k}=\frac{a^2c^2}{2(c-b)}=\frac{1}{2}(c+b)c^2$$

$$=\left(b+\frac{k}{2}\right)(b+k)^2$$

$$=b^3+\frac{5}{2}kb^2+2k^2b+\frac{1}{2}k^3。$$

开带从立方 $\quad x^3+\frac{5}{2}kx^2+2k^2x=\frac{A^2}{2k}-\frac{1}{2}k^3$

即得 $\quad x=b$

元初的数学家李冶、朱世杰等运用天元术或四元术，还可以解决关于勾股形的更为复杂的问题。

一四　勾股形的各种容圆

《九章算术》勾股章第十六题："今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何？"这是一个勾股形内切圆的问题。解题所用的公式是圆径 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$。依据刘徽的注，这个公式是用面积证明的。从圆心作三边的垂线，并作和三顶点的联线，分整个勾股形为六个小勾股形。将分割开来的六个小勾股形重新拼凑为一个长方形，如图 73，则该长方形的底为 $\frac{1}{2}(a+b+c)$，高为圆半径 $\frac{1}{2}d$。把四个相等的勾股形，同样分割拼凑，可以合成一长方形，它的长是 $a+b+c$，高是 d，而面积是 $2ab$，即 $(a+b+c)d=2ab$，所以 $d=\frac{2ab}{(a+b+c)}$。这样，圆径公式就得到了证明。

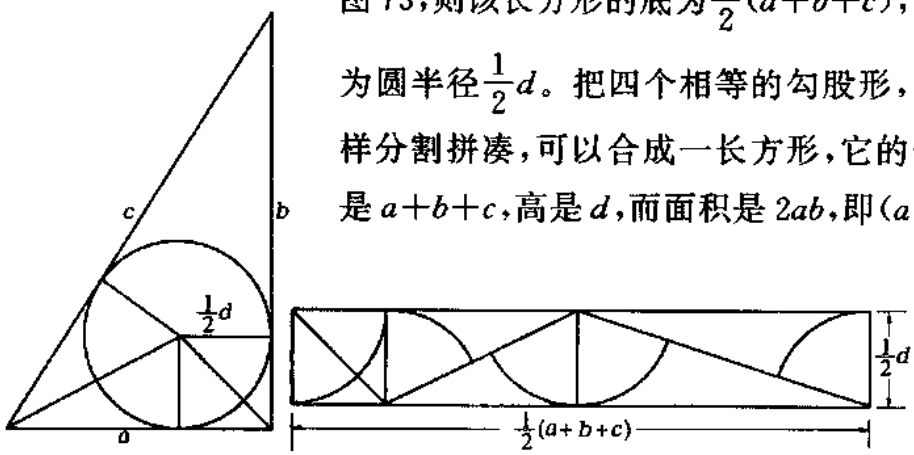


图　73

刘徽还说圆径 d 等于 $a+b-c$，他大概知道恒等式 $(a+b-c)$

$(a+b+c)=2ab$ 是成立的。

在十三世纪中，李冶深入研究切于勾股形边线的圆，写成《测圆海镜》十二卷。这是中国数学史上的一个辉煌的成就。

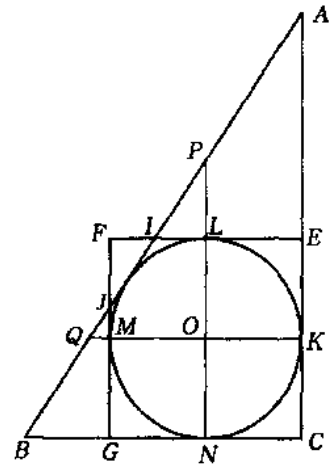


图 74

《测圆海镜》开卷有一个附图，图上有圆 $KLMN$ 内切于勾股形 ABC。过圆心 O 作和 CB 边、CA 边平行的线 KQ、NP，和圆交于 M、L。过 M、L 作圆的切线 GF、EF，和弦 AB 交于 J、I 两点。这样在图上有九个相似的勾股形，各和圆有特殊的关系。九种容圆的名目和圆径的公式列表如下：

勾股形	容圆种类	圆径公式
ABC	勾股容圆	$d=\frac{2ab}{a+b+c}=a+b-c$
AIE	勾外容圆	$d=\frac{2ab}{b+c-a}=a-b+c$
JBG	股外容圆	$d=\frac{2ab}{a-b+c}=b+c-a$
JIF	弦外容圆	$d=\frac{2ab}{a+b-c}=a+b+c$
PQO	勾股上容圆	$d=\frac{2ab}{c}$
AQK	勾上容圆	$d=\frac{2ab}{b+c}$
PBN	股上容圆	$d=\frac{2ab}{a+c}$
PIL	勾外容圆半	$d=\frac{2ab}{c-a}$
JQM	股外容圆半	$d=\frac{2ab}{c-b}$

已知图上任意两个不相等的线段的长，都有法推算圆径。为了要解决这类问题，李冶于上述“九容”公式之外，又创设了几百个表示各线段间关系的恒等式，丰富了勾股算术的内容。

《测圆海镜自序》说：“老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎。”第十一卷第十八题附注：“此问系是‘洞渊测圆门’第一十三，前答亦依洞渊细草。”洞渊究竟是人名还是书名，现在无可查考。第七卷又引《钤经》勾外容圆法。《钤经》是石信道的著作，也早已失传了。可见当时研究勾股形各种容圆的不止李冶一家，《测圆海镜》一定是一部后来居上的作品，所以能够流传到现在。

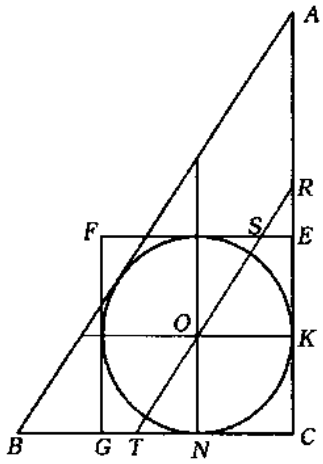


图　75

《测圆海镜》第二卷第五题的解法说：“此为弦上容圆也。以勾、股相乘，倍之为实，以勾、股和为法。”弦上容圆应是心在勾股形的弦上，而切于勾、股的圆。但是图中九个勾股形的弦都不通过圆心，所以这个弦上容圆不在“九容”之内。《测圆海镜》图上原来有以圆半径为勾的勾股形，和以圆半径为股的勾股形。但是它们的边线都不和圆相切，所以没有“勾弦上容圆”或“股弦上容圆”的名目。

清末李善兰于1876年前后，在《测圆海镜》的图上多画了一条通过圆心 O 而和 AB 弦平行的直线，如图75。设这条直线和 CA 交于 R，和 EF 交于 S，和 CB 交于 T。这样，又增添四个和原勾股形相似的勾股形，才做到考虑周密的地步。

勾股形	容圆种类	圆径公式
ROK	勾弦上容圆	$d=\frac{2ab}{b}=2a$
OTN	股弦上容圆	$d=\frac{2ab}{a}=2b$
RTC	弦上容圆	$d=\frac{2ab}{a+b}$
RSE	弦外容圆半	$d=\frac{2ab}{b-a}$

勾、股、弦和它们的和、差共有十三种，对应着十三个相似的勾股形，因而产生十三种容圆的方式。各以十三种中的一种除勾、股相乘积的二倍，即得各种容圆的圆径。

一五 圆 周 率

关于圆周率，中国古代相传有“径一周三”的说法。到东汉初年的《九章算术》里，圆面积和圆柱、圆锥的体积还是用 $\pi=3$ 来计算。例如“方田”章圆田面积的求法用公式 $S=\frac{3}{4}D^2$ 或 $S=\frac{1}{12}P^2$，式内 D 是圆径，P 是圆周。

西汉末，刘歆为王莽造圆柱形的标准量器“律嘉量斛”。我们从它的铭文上记录的直径、深度和容积，计算出刘歆取用的周率大约是 3.1547。东汉天文学家张衡取用 $\pi=\sqrt{10}$，三国吴天文学家王蕃取用 $\pi=\frac{142}{45}$。以上三个周率近似值都凭经验得来，没有理论根据。

第一个把推求圆周率近似值的方法放在理论基础上面的是魏末晋初注解《九章算术》的刘徽。他首先看出圆内接正六边形的一边和半径相等，周长是半径的六倍，“径一周三”只是正六边形周径的比率。以半径乘圆内接正六边形的一边，三倍之得圆内接正十二边形的面积，用公式 $S=\frac{3}{4}D^2$ 计算，只能得到内接正十二边形的面积。把内接正多边形的边数，从六边形起，屡次加倍，所得的面积逐渐增大。圆内接正多边形的边数愈多，它的面积和圆面积相差愈少。刘徽说：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与

圆(周)合体而无所失矣。觚面之外,犹有余径。以面乘余径,则幂出弧表。若夫觚之细者,与圆合体,则表无余径。表无余径,则幂不外出矣。"这一段话说明:圆内接正 n 边形任何一边 PQ 的中点 T 和 PQ 弧的中点 R 之间有一个距离 TR,以 PQ 乘 TR,所得的长方形有一部分在圆内,而其他部分突出圆外,如图 76。设 S_n 表示圆内接正 n 边形面积,S_{2n}表示圆内接正 $2n$ 边形面积,S 为圆面积,则

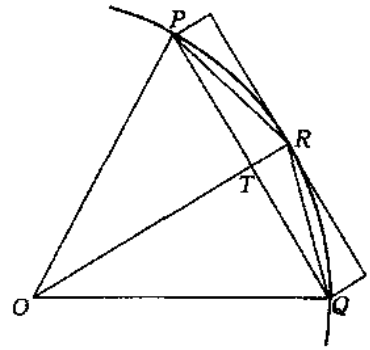


图 76

$n\,PQ\cdot TR=2(S_{2n}-S_n)$,

$$S_n+2(S_{2n}-S_n)=S_{2n}+(S_{2n}-S_n)>S。$$

因而有下列不等式

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)。$$

当 n 无限地增大时,显然 $S_{2n}-S_n$ 趋于零,因而确定 S_{2n}趋于 S。

假设圆的半径是 r,圆内接正 n 边形的一边长是 l_n,则内接正 $2n$ 边形的面积 $S_{2n}=n\times\frac{rl_n}{2}$。

刘徽已知圆内接正六边形每边长和半径相等。设半径$OP=1$尺$=1000000$ 忽,则$PT=500000$ 忽。

$$OT=\sqrt{OP^2-PT^2}=866054\frac{2}{5}\text{ 忽},$$

$$TR=OR-OT=133945\frac{3}{5}\text{ 忽},$$

$$PR^2=PT^2+TR^2=267949173445(\text{方})\text{ 忽}。$$

PR就是圆内接正十二边形的一边。由此可得圆内接正二十四边形的面积。

仿此推算,刘徽求得圆内接正 24 边形、正 48 边形、正 96 边形

每边的长，因而得

$$S_{96}=313\frac{584}{625}(\text{方})\text{寸}，\quad S_{192}=314\frac{64}{625}(\text{方})\text{寸}。$$

$$S_{192}-S_{96}=\frac{105}{625}(\text{方})\text{寸}，$$

$$S_{192}+(S_{192}-S_{96})=314\frac{169}{625}(\text{方})\text{寸}。$$

所以 $314\frac{64}{625}<100\pi<314\frac{169}{625}$（$100\pi$ 是圆的面积）。

刘徽舍去不等式两端的分数部分，即取 $100\pi=314$ 或

$$\pi=\frac{157}{50}。$$

他说，这个周率$\frac{157}{50}$还是太小，一个准确的周率应该是：

$$100\pi=314\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=314\frac{4}{25}，$$

$$\pi=\frac{3927}{1250}。$$

刘徽又继续推算圆内接正多边形的面积，算出正 3072 边形的面积，因而证实上述结果的准确性。

周率$\frac{3927}{1250}$化为小数表示是 3.1416。印度第五世纪中的数学家阿耶婆多（476～？年）采用周率 $\pi=\frac{3927}{1250}$，而不加说明，大概是从中国传去的。

当边数无限地增大时，圆内接正多边形的面积趋近于圆面积。公元前五世纪中的希腊数学家安提丰（Antiphon）最早发现这个定理，但没有能够计算出 π 的近似值。公元前三世纪中，阿几米德以为圆周长介于圆内接多边形周长和外切多边形周长之间，他算出 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$。中国理论数学的发展远在希腊数学的后面，而刘徽得到的成就超过和他同时代的数学家，这是值得夸耀的。要理

解刘徽所以有这样辉煌成就的道理，我们必须指出：(1)刘徽的不等式只需用圆内接正多边形面积而不要外切形面积，所以能够事半功倍；(2)我国祖先早用地位制记数，乘方、开方都能正确地迅速地完成，计算工作比希腊人要容易得多。

刘徽求得周率近似值后约二百年，南朝刘宋的祖冲之进一步推算出更精密的圆周率。可惜他写的《缀术》早已失传，他的推算方法难以详细叙述。《隋书·律历志》记录，"宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五；约率：圆径七，周二十二。"根据《隋书》我们知道祖冲之化一丈为100000000微，他逐步计算正多边形面积准确到至少九位有效数码，比刘徽多二位。假定他的计算方法和刘徽相同，他算出

$$S_{6144}=314159251\text{ 方厘},$$

$$S_{12288}=314159261\text{ 方厘}。$$

$$S_{12288}+(S_{12288}-S_{6144})=314159271\text{ 方厘}。$$

因而得出 $314159261<100000000\pi<314159271$。

用小数来表示，我们把上式写成：

$$3.1415926<\pi<3.1415927。$$

但是古代数学家习惯用分数表示有奇零的数字，祖冲之用下列两个圆周率近似值

约率： $\pi=\frac{22}{7}$，

密率： $\pi=\frac{355}{113}$。

$\pi=\frac{22}{7}$不是祖冲之的创造，在祖冲之幼年的时候，何承天已经采用

过这个近似值了。密率$\frac{355}{113}$约等于3.1415929，准确到小数第六位。他怎样得到这个辉煌成就，现在研究祖国数学遗产的人们各有各的臆见，还没有得到定论。

十四世纪中赵友钦从圆内接正方形算起，推求圆内接正8、16、32、……16384边形的面积，最后证明祖冲之周率$\frac{355}{113}$是一个精密的近似值。

一六　球的体积

中国古代把球叫做“立圆”，又叫做“浑”，又叫做“丸”。《九章算术》少广章有已知“立圆”体积求径的算法：“术曰：置积（立方）尺数，以十六乘之，九而一，所得，开立方除之，即丸（立圆）径。”设 D 表示球径，V 表示球体积，则《九章》原术是

$$D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}。$$

也就是说

$$V=\frac{9}{16}D^3。$$

这个公式的来历说明如下：《九章算术》一贯用圆周率 $\pi\approx3$，圆面积是外切正方形面积的四分之三，直径和高相等的圆柱体体积是外切正立方体体积的四分之三。《九章算术》的编写者又认为球的体积也是它的外切圆柱体体积的四分之三，所以球体积是外切正立方体体积的十六分之九。这个没有理论基础的球体积公式流传到印度，为印度数学家所采用，这是印度数学取法于中国古代数学的一个证明。

少广章的刘徽注首先批判这个算法的错误，他说，依照“径一周三”，求正立方体内切圆柱体体积，所得太小；取圆柱体体积的四分之三作为内切球的体积，又是太大。“互相通补，是以九与十六之

率，偶与实相近。”球和外切立方体体积的比是不容许直观地发现的。他又说，取方边一寸的立方形棋子八枚，拼成一个方边二寸的立方体，如图 77。设 A、A' 为立方体的前面和后面的中心点，B'、B 为左面和右面的中心点。AA' 和 $B'B$ 二线正交于立方体的中心 O。以 AA' 作轴，OB 为半径，作一圆柱面，又以 $B'B$ 作轴，OA 为半径，作一圆柱面。这两个圆柱面所包含的立体的共同部分，如图 78 所示。

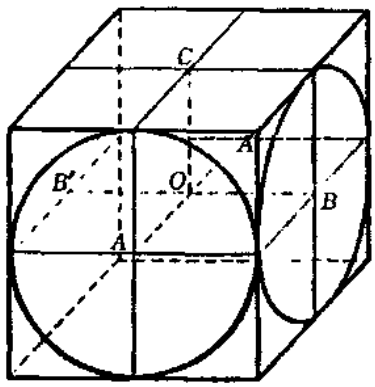


图 77

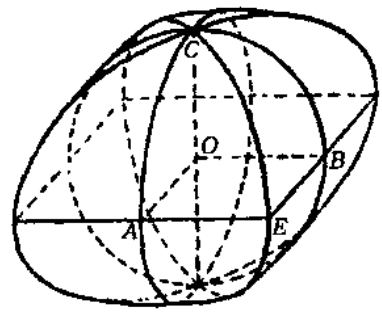


图 78

因为它的外表像两把上下对称的正方形的伞，刘徽给它提一个名称叫“牟合方盖”。古人叫伞做“盖。”“牟”与“侔”字通，有相等的意义。在这个牟合方盖里，可以内切一个半径一寸的球，球的体积应得是牟合方盖体积的 $\frac{\pi}{4}$。这个牟合方盖的体积不等于球外切圆柱体的体积，所以，刘徽断定“少广”章里这个算法是错误的。但是他没有找到牟合方盖体积的求法，只是十分谦虚地说：“欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。”这种提出存在的问题，启发别人钻研的作风，必然会促使真理的迅速发现。

二百年后，刘宋时代的祖冲之终于解决了刘徽提出的问题。祖冲之取刘徽所用八个立方棋子中的一个棋子 $OABC$。这个棋子在

上述两个圆柱面内的部分，是牟合方盖全体的八分之一，如图 79。设 $OP=z$，过 P 作平面和 $OAEB$ 平行，$PQRS$ 的面积是牟合方盖的一个水平剖面积的四分之一。因 $OS=OQ=OA=r$，故 $PS=PQ=\sqrt{r^2-z^2}$。正方形 $PQRS$ 的面积是 r^2-z^2。因而牟合方盖的剖面积是 $4r^2-4z^2$。这里，$4r^2$ 是一个常量，就是内切球径的平方 D^2；$4z^2$ 是一个变量，从 $z=0$ 时 $4z^2=0$，到 $z=\frac{D}{2}$ 或 $-\frac{D}{2}$ 时 $4z^2=D^2$。牟合方盖的任何水平剖面积既然是两个面积 D^2 和 $4z^2$ 的差，它的体积也可以理解作两个立体积的差。这两个立体积：一个是水平剖面积 D^2 而高是 D 的正立方体体积，另一个是两个正方锥所组成的体积，正方锥的底面积是 D^2 而高是 $\frac{D}{2}$，两个正方锥体积是 $2\times\frac{1}{3}D^2\times\frac{D}{2}=\frac{1}{3}D^3$。所以牟合方盖的体积是 $D^3-\frac{1}{3}D^3=\frac{2}{3}D^3$。直径为 D 的球体积是 $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}D^3=\frac{\pi}{6}D^3$。祖冲之的圆周"约率"$\pi=\frac{22}{7}$，故球体积 $V=\frac{11}{21}D^3$。

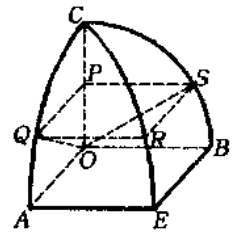


图 79

祖冲之所写的《缀术》在北宋时已经失传，现在根据唐初李淳风等的《九章算术注释》所引他的儿子祖暅的话，叙述上面关于球体积公式的史料。祖冲之父子在刘徽《九章算术注》的基础上进一步钻研。校正了《九章算术》旧术的错误，他们的成就比圆周率的计算更加伟大。

他们根据"幂势既同，则积不容异"的原则，认识到牟合方盖的体积，同一个立方体内挖去两个正方锥的体积相等。这和在他们一千年之后，意大利数学家卡伐里列(Cavalieri)所提出的公理有相仿的意义。

一七　度量衡单位的十进制

劳动人民为了生产事业的需要，选择适当的度量衡单位和便利的进法。在秦以前的书籍中，我们常常见到各种度量衡单位名称，但因考证困难，无法确定它们的实际分量。不同地区的古代人民各有他们的度量衡制度，大小单位间有二进的，有四进的，也有八进、十进、十二进、十六进的，十分紊乱。公元前221年秦朝统一以后，中央政权颁布“一法度，衡石，丈尺”的法令，并发给度量衡的标准器，命令郡县人民一体遵用。西汉依照秦朝制度没有改变。汉平帝元始年间(公元1年到5年)王莽当权，他叫刘歆修正度量衡制。据《汉书·律历志》所记，当时规定日常应用的度量衡单位是：

长度　1引＝10丈＝100尺＝1000寸＝10000分，

容量　1斛＝10斗＝100升＝1000合＝2000龠，

重量　1石＝4钧＝120斤，1斤＝16两，1两＝24铢。

根据那时颁发的标准量器“律嘉量斛”的尺寸和重量，我们知道1尺约等于现在的0.69市尺，1升约等于0.20市升，1斤约等于0.45市斤。《汉书·律历志》在讨论“备数”的一节里，还说：“度长短者不失毫厘，量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫。”这说明为了精密的计算，那时的数学家还创造了比一分、一龠、一铢更微小的度量衡单位。

《九章算术》方田章刘徽注于计算圆内接正多边形边长时，尺以下采用寸、分、厘、毫、秒、忽六个单位，都是十进位。流传本的《孙子算经》把“秒”字改成“丝”字，因而现在我们通用的长度单位是：

$$1\text{丈}=10\text{尺}=10^2\text{寸}=10^3\text{分}=10^4\text{厘}$$
$$=10^5\text{毫}=10^6\text{丝}=10^7\text{忽。}$$

《孙子算经》上的容量单位是：

$$1\text{斛}=10\text{斗}=10^2\text{升}=10^3\text{合}=10^4\text{抄}$$
$$=10^5\text{撮}=10^6\text{圭}=6\times10^6\text{粟}$$

斛原本是量十斗米的量器。后世升、斗的实际分量增大，量粮食改用五斗的斛子，故改用1石为10斗的单位名称。

衡制的微小单位，从汉以后沿用1铢=10絫=100黍。汉、魏、六朝最小的钱币名为“五铢”，而实际只有它的一半重。到唐朝武德四年(公元621年)开始铸“开元通宝”钱，明白规定每枚重二铢四絫，凡十枚重一两。这种“制钱”通行得很久，到后来，人民以一“钱”作为等于十分之一两的单位名称，并且借用长度单位分、厘、毫、丝、忽等为钱以下十进小数名称。北宋淳化三年(公元992年)，政府规定钱、分、厘、毫的衡制单位和铢絫黍制参用。宋朝人又废去钧、石二个重量单位，采用一担作为100斤的通称。

中国度量衡制到宋朝以后，除斤两仍旧是十六进之外，一概都是十进位。人民以十进法记数，度量衡单位改为十进，可以避免无谓的麻烦。《夏侯阳算经》(唐韩延所引)里，凡除数是10或10的乘幂的除法叫做“步除”。他举例说明步除的意义说，“如斛中求斗，斗中求升，升中求合，合中求勺，勺中求抄；及丈中求尺，尺中求寸，寸中求分。”这证明度量衡单位改为十进是中国古代数学家们有意识的改进。

西洋各国古代各城市所用度量衡单位名目繁多，单位间进法

杂乱无章，都不用十进法。直到十八世纪末，法国议会始有十进制度量衡单位的规定。靠当时革命政府的大力推动，到1840年才在法国国内开始通行。到本世纪，大多数国家都采用公尺、公升、公斤作度量衡的标准单位。

一八　十进小数

古人记数，碰到单位之下还有奇零的数字，常常用分数来表示。例如：一个阴历月平均约有 29.53 日，西汉初年的《四分历》术用 $29\frac{499}{940}$日来表示，汉武帝时代的《太初历》术用 $29\frac{43}{81}$日来表示。刘徽《九章算术》方田章注，在已知半径一尺的圆面积约为 $314\frac{4}{25}$ 方寸之后，知直径 200 寸的圆，周长约为 $628\frac{8}{25}$寸，它们的比是 $628\frac{8}{25}/200=\frac{15708}{5000}$，约分后是$\frac{3927}{1250}$。假如用现代小数法计算，我们有 628.32：200＝3.1416，就要简便些。

刘徽又于求面积 75 方寸的正方形方边时，先化 75 方寸为 750000000000 方忽，开平方得方边 866025 忽，而方面积还有余数 699375 方忽。他把“借算”再退二位，继续开方，得方边的第七位数码 4。用这个“4”为分子，10 为分母，约分得$\frac{2}{5}$忽。故得方边“八寸六分六厘二秒五忽，五分忽之二”。少广章开平方术刘徽注于计算到平方根的个位后，如果还有余“实”，他说，“加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细。”这种无名的微数实在就是个位下的十进位小

数。中国度量衡制单位从汉以后逐渐改为十进，后世的数学家没有能够体会刘徽“微数”方法的用意，去更进一步创造一种十进位小数的记法，却添设了更小的十进位名数来表达精密的计算。

唐中宗时代，南宫说造《神龙历》(公元 705 年)，一个阳历年 365.2448 日是“期周三百六十五日，余二十四，奇四十八”，一个平均阴历月 29.5306 日是“月法二十九日，余五十三，奇六”。他以百分之一日为“余”，百分之一“余”为“奇”。八十年后，曹士芳造《符天历》术，也叫做“万分术”，是以一日分为一万分，用四位数字表示日数的奇零部分的。这两种先进的记数法在当时都没有被普遍采用。一直到元朝郭守敬等的《授时历》法方才规定以一日为一百刻，一刻为一百分，一分为一百秒。周天弧度一度也是一百分，一分为一百秒。分、秒虽然仍旧是名数，但是和十进位小数相近了。

古代钱币以制钱一文为最低单位，一文之下，不再分析。唐朝韩延《算书》(伪《夏侯阳算经》)有一个问题的答案，用度量衡制的分、厘、毫、丝、忽十进位名数来表示制钱一文以下的奇零小数。又该书卷下有一题，解答时化绢三丈七尺五寸为匹(四丈为一匹)以下的小数，得 0.9375 匹，不为这四位数另立名目，这和现在的小数记法差不多。

南宋秦九韶《数书九章》卷十二有一个计算复利息的问题，答案是：“末后一月钱，二万四千七百六贯二百七十九文，三分四厘八毫四丝六忽七微(无尘)七沙(无渺)三莽一轻二清五烟。”用现在小数法记出来是：24706279.3484670703125 文。

杨辉《田亩比类乘除捷法》所举例子中，有的化二尺为步后四分(1 步＝5 尺)，有的化六两为斤后三分七厘五毫。元朱世杰《算学启蒙》卷首记录：“小数之类：一，分，厘，毫，丝，忽，微，纤，沙，……”沙以上是十进，沙以下又添尘、埃、渺、漠、模糊、逡巡、须臾、瞬息、

弹指、刹那、六德、虚、空、清、净十五名，都是万万进。这无疑是受到佛经中印度微细单位名目的影响的。

度量衡制逐渐改为十进位后，一斤十六两还保留旧时进法，计算时有些麻烦。杨辉《日用算法》(1262年)为了简化计算，编造有斤价求两价的歌诀："一求，隔位六二五；二求，退位一二五；三求，一八七五记；四求，改曰二十五；五求，三一二五是；六求，两价三七五；七求，四三七五置；八求，转身变作五。"朱世杰《算学启蒙》内"斤求两"法有"一退六二五，二留一二五，三留一八七五，……十四留八七五，十五留九三七五"十五句。其中"一退六二五"是说$\frac{1}{16}=0.0625$，把原有的1退去而在它的右边安放625；"二留一二五"是说$\frac{2}{16}=0.125$，把原有的2改作125。歌诀内"六二五"、"一二五"等数字都是十进小数。

蒙古人兀鲁伯(1393～1449)统治中亚细亚的时期，在他的属员中有一个数学大家阿尔卡希(Al-Kashi，? ～1456年)，他计算圆周和半径的比准确到十六位小数，并且用数码

整数	分数
6	2831853071795865

明确地表达出来。在欧洲，德国数学家鲁道尔甫(Christoff Rudolff)于1530年解答一复利息问题，开始用十进位小数，并且用一直竖隔开整数部分和小数部分。1617年英国人讷白尔(John Napier)的对数表用一点"."作整数和小数的分界点，这就是现在小数点的起源。

根据上面这些史料，我们知道：在世界数学史上，十进位小数法很迟才得到发展，还是中国数学家的贡献要算最多而且最早。

一九　四舍五入法

用有理数来表示一个实际数量的近似值，是难免有误差的。要使这个表示近似值的有理数相当简单而它的误差尽量减少，古代劳动人民很早就有相当于现在的“四舍五入”的办法。例如公元前第二世纪中，《淮南子·天文训》上用十二个整数表示十二律管的长度。他们假定黄钟律管的长是81，那末林钟54，太簇72，南吕48，姑洗64，都是正确的整数。应钟$42\frac{2}{3}$进作43；蕤宾$56\frac{8}{9}$进作57；大吕$75\frac{23}{27}$进作76；夷则$50\frac{46}{81}$进作51；夹钟$67\frac{103}{243}$退作67；无射$44\frac{692}{729}$进作45；中吕$59\frac{2039}{2187}$进作60；都是用四舍五入法写成整数。其中应钟四十三，流传本的《淮南子》书误作“四十二”；夹钟六十七，误作“六十八”，但《宋书·律历志》引这一节，这两个数字都没有错。

《九章算术》均输章第一题：甲、乙、丙、丁四县共出运粮米车一万辆，用衰分法（配分比例）求各县应出的车辆。因车辆必须是整数，算草结果的奇零部分须要用四舍五入法处理。

甲　　县　$10000\times\frac{125}{376}=3324\frac{176}{376}\approx3324$

乙、丙县　$10000\times\frac{95}{376}=2526\frac{224}{376}\approx2527$

丁　　县　$10000\times\frac{61}{376}=1622\frac{126}{376}\approx1622$

均输章的原术是“有分者，上下辈之”。刘徽注说：“辈，配也。车、牛、人之数不可分裂，推少就多，均赋之宜。”“推少就多”是上下分配的解释。

天文历法的计算工作要算出足够精密的有效数字，尽量删除无谓的奇零分数。三国时魏国杨伟的《景初历》术（公元237年）首先明确地提出“半法以上排成一，不满半法废弃之”的规则。“法”是除数，也就是分母。这是说分子大于分母的一半时，把分数进成一，分子小于分母的一半时舍去它。隋刘焯的《皇极历》法（公元600年）把这个规则说得更简捷，他说：“过半从一，无半弃之。”中国古代天文学家习惯上在一个不足近似值的后面注一“强”字，在一个过剩近似值的后面注一“弱”字。所以刘焯又说：“半以上为进，以下为退。退以配前为强，进以配后为弱。”

秦九韶《数书九章》卷五，“均分梯田”题，解一个二次方程得正根 $40\frac{52284}{58709}$步。他在答案的分数部分之后添注“大约百分步之八十九分”，也就是用近似值40.89来表示这个正根。这和现在我们用百分数来表示两个数之比的近似值是有同样意义的。

中国十三世纪以后实用算术采用十进位小数，因而对于不必要的奇零数的处理方法，须要重点说明十进位小数的四舍五入法。程大位《算法统宗》卷一说：“今但有畸零者至于毫忽，以五收之，以四去之。”这等于说：不必要的奇零数大于五的进入前面一位，小于五的舍去它。

二〇　筹算乘除捷法

古代筹算乘除法，如本书第二节所讲，都要排列算筹上、中、下三层，乘法列相乘数于上、下层，积数于中层；除法列被除数于中层，除数于下层，商数于上层。演算手续都很繁重。唐、宋两朝的数学家为了适应当时工商业发展的需要，编写实用算术书，对于乘、除算法力求简捷。天文学家的数字计算更加繁重，尤其需要寻求速算方法。北宋沈括(1030～1094)《梦溪笔谈》卷十八说："算术多门，如求一、上驱、搭因、重因之类皆不离乘、除。惟增成一法稍异其术，都不用乘、除，但补亏就盈而已。假如欲九除者增一便是，八除者增二便是。"又说："算术不患多学，见简即用，见繁即变，不胶一法乃为通术也。"他提到的这些乘、除捷法，大概起源于唐朝而普及于宋朝。《唐书·经籍志》和《宋史·艺文志》里记录的实用算术书很多，现在大都失传，不可详考。只有唐朝韩延算书(伪《夏侯阳算经》)和南宋杨辉的《乘除通变本末》三卷(前两卷叫《乘除通变算宝》，是杨辉自己著的，末一卷叫《法算取用本末》，是他和史仲荣合著的)现在有传本，还保存关于乘、除捷法的宝贵史料。

韩延算书卷下，问题的解法中，用一位乘、除来替代多位乘、除的例子很多。例如乘数为35时，以5乘后再以7乘；除数为12时，折半后再6除。这种分解乘数(或除数)为两个一位因数先后乘(或

除)的方法,在宋朝算术书中叫做“重因”。

韩延算书卷下第三十一题,求 34636×14 的乘积,用“身外添四”法。原书没有算草,现在补出如下:

列算筹|||≡丅≡丅为被乘数。见被乘数末位是丅,呼“四六二十四”,十位 2 加在丅上,个位 4 加到右边,得|||≡丅≡ 84。见被乘数的十位是≡,呼“三四十二”加上,得|||≡丅 504。见被乘数的百位是丅,呼“四六二十四”,加上得|||≡ 8904。见被乘数的千位是≡,呼“四四十六”,加上得||| 64904。见被乘数首位是|||,呼“三四十二”,加上得 484904,即为乘积。

又如乘数为 17 时,用“身外添七”计算;乘数为 144 时,用“身外添四四”计算;乘数为 102 时,用“隔位加二”计算。凡乘数的首位数码是 1 的都可应用这个方法。只要排列一层算筹,便可很快的算出乘积。同样,除数的首位是 1 的,可以用减法替代除法。例如卷下第二十七题:436752÷12 用“身外减二”法计算,补立算草如下:

列算筹≡|||丄丌≡||为被除数。见被除数首二位是≡|||,以 12 除得商首位 3,呼“二三如六”,从被除数第二位里减去,得 3 丌丄丌≡||。见被除数第二位丌,议定商次位 6,呼“二六十二”,减去,得 36 ≡丌≡||。又议得商第三位 3,呼“二三如六”,减去,得 363 亍≡||。现在余数的第一位是亍,表示 11,上面两横是 10,下面一竖是 1。又议得商第四位 9,呼“二九十八”,减去,得 3639 丄||。最后议得商末位 6,呼“二六十二”,减尽,得 36396,即是所求的商数。

南宋杨辉在他的《乘除通变算宝》里,系统地叙述唐、宋相传的“加法代乘”和“减法代除”的方法。加法代乘五术是:(1)乘数是 11、12、……19 的“加一位”;(2)乘数是 111、112、……199 的“加二位”;(3)乘数可分解为二因数,都可用加法代乘的用“重加”;(4)乘

数是101、102、……109的“隔位加”；(5)乘数是21、22、……29或201、202、……299的“连身加”。此外，杨辉还有“身前因”法，乘数是21、31、……91的可以用它。这大概就是沈括所说的“上驱”。减法代除四术是：(1)“减一位”，(2)“减二位”，(3)“重减”，(4)“隔位减”。上面所举韩延算书“身外减二”的例是“减一位”除法的特例。

乘数(或除数)首位是1的，可以用加法(或减法)来代乘(或除)，首位不是1的，也可以把乘数(或除数)加倍或折半，使它首位变成1，然后用加(减)法计算。这种变通办法，唐、宋数学家叫它“求一”。杨辉《乘除通变算宝》里有“求一代乘除”法，编造的歌诀中有“五、六、七、八、九，倍之数不走。二、三须当半，遇四两折纽”等句子。例如237000×56，见乘数首位是5，把乘数加倍，被乘数折半，得118500×112，用“加二位”(加一二)法代乘。又如13272÷56，把除数、被除数同时加倍，得26544÷112，用“减二位”代除。

沈括所说的“增成”代除法，就是后来“九归”歌诀的前身，我们现在还无法考证它的创作时代。杨辉在《乘除通变算宝》里，叙述他的“九归捷法”，他在当时流传的四句九归古括的基础上，创造了新的歌诀三十二句，抄录如下：

归数求成十：九归，遇九成十；八归，遇八成十；七归，遇七成十；六归，遇六成十；五归，遇五成十；四归，遇四成十；三归，遇三成十；二归，遇二成十。

归除自上加：九归，见一下一，见二下二，见三下三，见四下四；八归，见一下二，见二下四，见三下六；七归，见一下三，见二下六，见三下十二，即九；六归，见一下四，见二下十二，即八；五归，见一作二，见二作四；四归，见一下十二，即六；三归，见一下二十一，即七。

半而为五计：九归，见四五作五；八归，见四作五；七归，见

三五作五；六归，见三作五；五归，见二五作五；四归，见二作五；三归，见一五作五；二归，见一作五。

定位退无差。

上列七归歌诀中，依照“见一下三”，“见二下六”的例，“见三”应得“下九”，但是下一位的“九”中，还可以“遇七成十”，所以改作“见三下十二”，后来的珠算口诀又改作“七三四十二”。六归的“见二下十二”，四归的“见一下十二”，三归的“见一下二十一”，都可以仿此解释。

杨辉以为除数是二位数时，也可编造特殊的口诀来做除法。例如他的“八十三归”口诀是：“见一下十七，见二下三十四，见三下五十一，见四下六十八，见四一五作五，遇八十三成百。”有被除数𝍠𝍠𝍠〇𝍠，以 83 除，补草如下：

见首位𝍠，即“下三十四”，得 2 ⊥𝍠𝍠〇𝍠。见次位⊥，即减“四一五作五”，余𝍠别求，得 2 5 𝍠 𝍠𝍠𝍠。见所余的𝍠，“下三十四”得 27 𝍠𝍠𝍠𝍠。又“见四一五作五”，得 275 𝍠𝍠。“遇八十三成百”，得 276 为商数。

这种利用特制的口诀作多位除法，杨辉叫它“穿除”，又叫“飞归”。飞归法虽是容易理解，但总不如后来归除法能够普遍应用。

元朱世杰《算学启蒙》记录九归口诀三十六句：

> 一归如一进，见一进成十。二一添作五，逢二进成十。三一三十一，三二六十二，逢三进成十。四一二十二，四二添作五，四三七十二，逢四进成十。五归添一倍，逢五进成十。六一下加四，……九归随身下，逢九进成十。

这些口诀和现在通行的珠算九归口诀大体相同了。

元朝数学家的归除法，22908÷83 用“八归三除”法演算，算草如下：

列被除数𝍠𝍠𝍠〇𝍠。见首位𝍠，呼“八二下加四”，得 2 ⊥𝍠

〇Ⅲ，除去“二三如六”，得 2 ⊥|||〇Ⅲ。见余数首位⊥、呼“八六七十四”，得 27 Ⅱ〇Ⅲ，减去“三七二十一”，得 27 ||||≡Ⅲ。见余数首位||||，呼“八四添作五”，得 275 ≡Ⅲ，减去“三五十五”，得 275 ≡|||。见余数首位≡，呼“逢八进成十”，又除去“一三如三”，得 276。

除数为多位数时，估计商数有时发生困难，朱世杰在《算学启蒙》卷上“九归除法”门已有确定商数的方法，但没有明白写出运算口诀来。到十四世纪中贾亨的《算法全能集》和《丁巨算法》(1355年)里，都把这种估计商数的方法，编成“撞归”“起一”口诀。后来在珠算书里改编如下：

一归：见一无除作九一，无除起一下还一；

二归：见二无除作九二，无除起一下还二；

三归：见三无除作九三，无除起一下还三；

……

九归：见九无除作九九，无除起一下还九。

例如 22908÷276，利用撞归起一口诀归除，演草如下：

列被除数||二Ⅲ〇Ⅲ。见首位是||而次二位二Ⅲ小于 76，不够除，呼“见二无除作九二”，得 9 ≡Ⅲ〇Ⅲ，余数首二位，≡Ⅲ还是小于“七九六十三”，不够除，呼“无除起一下还二”，得 8 ⊥Ⅲ〇Ⅲ。除去“七八五十六”，再除“六八四十八”，得 80 Ⅲ二Ⅲ。见余数首位是Ⅲ，呼“逢八进四十”，得 840 二Ⅲ，余数二Ⅲ小于 4×76，呼“无除起一下还二”，得 83 ||二Ⅲ，除去“三七二十一”，“三六十八”，除尽。得商 83。

有了撞归起一口诀以后，筹算的多位除法确实是简化了。唐、宋相传的“求一”、“减法”和杨辉“飞归”等捷法，只在解特殊问题时有用处，不须要多费工夫熟练它。本节所讲简化筹算乘、除法的发展过程，大约是从第八世纪到第十四世纪，有七百年的历史。

二一 珠 算 术

中国古代人民用算筹演算，本来是相当合适的，后来，积累唐、宋两朝数学工作者的智慧，乘、除方法得到简化。乘法只要列出被乘数和乘数，把被乘数逐步改变成所求的积数；除法只要列出被除数和除数，把被除数逐步改变成所求的商数。

筹算乘、除法原来都要“三重张位”的，现在只在同一横行里演算，为后世的珠算术创造条件。十四世纪中的数学家编造了简单明了的归除歌诀，念出来毫不费力。乘、除演算时利用这些纯熟的口诀，便意识到手中的算筹运用起来不太灵便。在这个时期里，劳动人民根据他们的实际经验，创造珠算盘来减轻演算工作，是可以理解的。

最早的珠算术书没有流传下来，创造珠算盘的年代和地区都很难考证。程大位《算法统宗》卷十三“算法源流”条记录的数学书籍，大部分是宋朝的刻本。其中有“盘珠集”、“走盘集”两种，可能是珠算术书。但书已失传，它们的内容和著作年代就无法肯定下来。

元末陶宗仪《南村辍耕录》(1366 年)“井珠”条有“算盘珠”“拨之则动”的比喻，可以证实在元朝末年珠算法已经在江、浙一带流行了。

明朝初年，中国珠算盘流传到日本。日本伊势的山田市现在还

保存着一个珠算盘，盖板反面有“文安元子年”(1444 年)的标题。这个珠算盘左边有十四档，右边有十档，中间留一档地位的空格。每档横梁上二珠，横梁下五珠，算珠体扁圆形，和中国现在通行的相仿。算珠分左、右两组，可能是中国珠算盘的最初形式。左边放被乘数或被除数，右边放乘数或除数，作多位乘、除的计算比较方便。

在十四、十五世纪中，珠算术已在中国各地为大众所欢迎。但古代相传的筹算术还没有废掉，士大夫阶级所写的数学书仍停留在使用算筹的阶段。现在有传本的珠算术书以柯尚迁的《数学通轨》(1578 年)四卷为最早。程大位《新编直指算法统宗》十三卷，翻刻本最多，流传最广。《数学通轨》卷一有“初定算盘图式”，画一个十三档的珠算盘。《算法统宗》也有一个十五档的算盘图式。

珠算盘发明后，一切筹算术的四则运算方法就转变为珠算术的四则运算方法。筹算术书不记录加减法的口诀，在珠算书中就添补上加法口诀(如“一上一”，“一下五除四”，“一退九进一十”，“二上二”，“二下五除三”，等等)和减法口诀(如“一去一”，“一上四去五”，“一退十还九”，“二去二”，“二上三去五”，等等)。多位乘法有破头乘、留头乘、隔位乘、掉尾乘等不同方式，而以留头乘法最为便利。多位除法利用撞归法和起一法，在珠算盘里演算更加简捷。

开平方和开立方也可以在珠算盘内演算，所有步骤和筹算术相同。只要把方法、廉法放在被开方数的右边，所得的商数放在被开方数的左边，把原来的四层或五层的数字左右并列做一层罢了。如果珠算盘档数不够多，用寻常珠算盘三、四个接连起来，也可以解决问题。

筹算乘法，例如 87×96，除法，例如 $8352\div96$，或 $8352\div87$，在演算过程中，某一位数大于 9 而不便进入左边的时候须要多用

表 5 的算筹来表示它。创造珠算盘的作者因此在横梁之上安上两颗算珠，横梁之下安上五颗算珠，每档算珠表示的数可以多到 15，一般的乘、除演算就没有困难了。日本珠算盘横梁上只放一颗算珠，实际乘、除时是有许多不便的。算珠的上二下五制另有一个作用是便于斤两的加、减法。《算法统宗》卷四有“一退十五成斤”、“二退十四成斤”等“积两成斤”的口诀。

二二　数　　码

古人演算用筹，不用纸笔，没有数码和表示空位的符号，也很方便。通用数目字如一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等，笔画简单，极容易书写。而且无论用算筹记数或文字说明都遵从地位制，也没有用数码记数的要求。公元第七世纪中，印度天文学说传入中国，印度的地位制数码也跟着进来。在唐朝太史监服务的印度天文学家瞿昙悉达在他所编的《开元占经》(公元 718 年)里，介绍过“天竺算字法样”，包括印度的九个数码和表示空位的点“·”。这九个数码的写法和中国字书法体制不同，所以人民没有去理会它，很快就失传了。

北宋司马光(1019～1086)撰《潜虚》一卷，用

作为记十以内数字的符号。除用古文的×字和隶书的十字外，其他都取算筹记单位数的象形。

现在有传本的唐以前的数学书，都没有演草时布置算筹的图式。后世数学进步，演草步骤比较繁复，著书的数学家要指导读者演算的途径，常常摹绘逐步算草用筹的形式。演算时碰到数字计算简单的，还可以从图上的筹式直接演草。纸上演算时，算草中的每一个不同的单位数字，加上一个表示空位的符号，就组成一套数码。

十三世纪四十年代，李冶在河北，秦九韶在浙江，二人各自著书，详草都用数码，并且都用“〇”表示数字的空位。由此可知“〇”的采用和中国数码的创始一定在1240年以前。印度阿拉伯数码也用“0”表示空位。我国十三世纪中数码采用“〇”，会不会是外国传入的呢？据严敦杰同志考证：这个“〇”是宋朝天文学家创作的，不需要从外国传人。《唐书》、《宋史》叙录各家历法，都用“空”字表示天文数据的空位。南宋蔡沈《律吕新书》记录“林钟律数”118098作“丑林钟十一万八千□□九十八”，“南吕律数”104976作“卯南吕十□万四千九百七十六”。《金史》记录的“大明历”法数据有“四百〇三”，“五百〇五”，“三百〇九”等例子。中国古代原有用□形表示文字中间空格的习惯。后来为了书写方便，将这个□形顺笔改作〇形。在数字中间的〇形便是一个表“零”的符号，这和印度阿拉伯数码的“0”是殊途同归的。

元李冶《测圆海镜》、《益古演段》、朱世杰《算学启蒙》、《四元玉鉴》等书，演天元术详草所用数码，都取算筹记数的形式，仅添设一个“〇”表示空位。每一个数码也和筹算一样，有纵、横二式。但为了便于书写，横画和直竖是长短不齐的。

天元术数码：纵式 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 〇

横式 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱 〇

天元式里常常有负数。在数字的个位数码上加一斜捺，就表示这个数是一个负数，例如 𝍲表示“－2”，𝍥𝍯𝍳表示“－680”。

和李冶书同一时代，南宋秦九韶《数书九章》和杨辉的数学著作所用数码中，𝍤、𝍭改作×，𝍣、𝍬改作〇、𝍳，𝍥、𝍮改作𝍴、𝍵。其他都仿照筹算形式书写。

南宋数码：纵式 𝍠 𝍡 𝍢 × 〇 𝍥 𝍦 𝍧 𝍴 〇

横式 𝍩 𝍪 𝍫 × 𝍳 𝍮 𝍯 𝍰 𝍵 〇

南宋人的数码为了便于书写，便扬弃了北方数码完全象形的式样。X是原来古文的五字，现在借用作四的数码，大概取其有四面分歧的意义。〇、ㅇ代表五加零，又、乂代表五加四，写起来都比较简便。

元朝至元四年(1267年)西域天文学传人中国，明朝洪武十八年(1385年)又有阿拉伯人的土盘算法传入。在这个时期里，印度阿拉伯数码虽一再流传到中国，但都没有被采用。十五世纪中吴敬撰《九章算法比类大全》，介绍当时流行的"铺地锦"乘法。这个"铺地锦"无疑是由阿拉伯人传来的土盘算法中的一种乘法。但在吴敬书里，他用九个数目字来代替土盘数码。例如有一题："今有丝三千六十九两八钱四分，每两钞二贯六百三文七分五厘。

共钞	三千		六十	九两	八钱	四分	两价
	六		一 二	一 八	一 六	八	二贯
七千	一 八		三 六	五 四	四 八	二 四	六百
九百							
九十	九		一 八	二 七	二 四	一 二	三文
三贯	二 一		四 二	六 三	五 六	二 八	七分
	一 五		三	四 五	四	二	五厘
	九十	五文	九分				

图 80

问总钞几何？""答曰：七千九百九十三贯九十五文九分。"算草用"铺地锦"乘法，先画方格和对角线如图80。横写被乘数于上方，纵写乘数于右方。呼"九九"数，填写逐位相乘的积数于相当的格子里。然后从右下角个位起，把斜行里的数码依次并合起来，所得的和数便是乘积。

程大位《算法统宗》卷十三也有"铺地锦"乘法。但他和吴敬不同，是用南宋数码演草的。例题435×5678=2469930，演草如图81。《算法统宗》卷十三还有所谓"一笔锦"算法，加、减、乘、除都可用笔写的数码演草。所用的数码也是南宋传下来的一

套。

明朝以后的南宋数码，表示一、二、三的数码兼取纵、横二式，其他数码都单用横式。中国人画圆圈，习惯上是从右上角起顺时针方向旋转一周，因而到清朝数码ㄊ由笔顺写成ㄊ形，数码×也由笔顺写成ㄨ形。现在的商家还在应用。

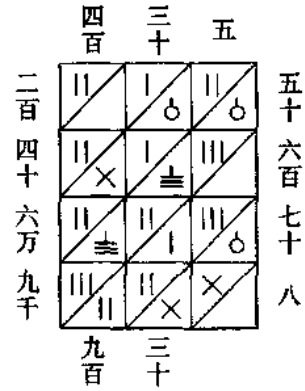


图 81

清代数码：一 二 三 × ㄊ ⊥ ⊥ ⊥ ㄨ ○

十六世纪末，意大利天主教士利玛窦来到中国，宣扬西洋笔算方法，印度阿拉伯数码再一次传入中国。李之藻向他学习西洋算法，编译《同文算指前编》二卷、《通篇》八卷，于1613年出版。全书用九个数目字一、二、三、四、五、六、七、八、九和“○”号来演算。十七世纪初年以后三百年中，所有翻译西文科学书籍和学习西洋算法的人都用这几个字作数码。

清朝末年，西洋人在中国沿海各地设立教会的中、小学校。他们自编数学课本，重点介绍他们自己应用的数码，此后印度阿拉伯数码渐渐在全国范围内通行起来。

二三　开方作法本源图

我们在前面第九节里，讲到《九章算术》的开平方术和开立方术，也讲到刘徽注用几何图形解释这两个方法。根据刘徽的注解，古代数学家们不难体会到下列二恒等式

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

的代数意义，并且把它推广到 $x+a$ 的四次幂、五次幂等的展开式。北宋仁宗时代(1023～1063)，贾宪发现了二项式高次幂(指数为正整数的)展开式的各项系数所遵循的规律，是可以理解的。贾宪的履历我们知道的很少。根据王洙(997～1057)的《谈录》，知道他是当代天文学家楚衍的弟子，曾任左班殿值官职。根据《宋史·艺文志》，知道他写过一部《黄帝九章算法细草》。又根据杨辉《详解九章算法·纂类》所引，知道《黄帝九章算法细草》的“少

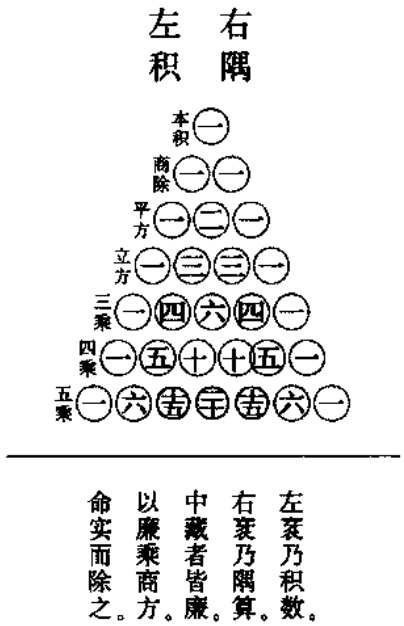


图　82

广”章有“开方作法本源”图。贾宪的书早已失传。传本杨辉书也没有他所引的“开方作法本源”图。只在明朝《永乐大典》(1407 年)抄录的杨辉《详解(九章)算法》中,保存着这份宝贵的遗产(图 82)。

在这个图下边的注解,前面三句话说明:每一层里的数字表示$(x+a)^n$展开式的各项系数。左边邪线上各个“一”字是“积”a^n是系数,右边邪线上的各个“一”字是“隅”x^n的系数,中间的许多数字是“廉法”(包括“方法”在内)$a^{n-r}x^r$各项的系数$(0<r<n)$。(“邪”字原作“衰”,《永乐大典》本误抄作“袤”。)后面二句话说明这些系数的作法和“增乘开方法”的关系,这一问题我们留待下一节讨论。

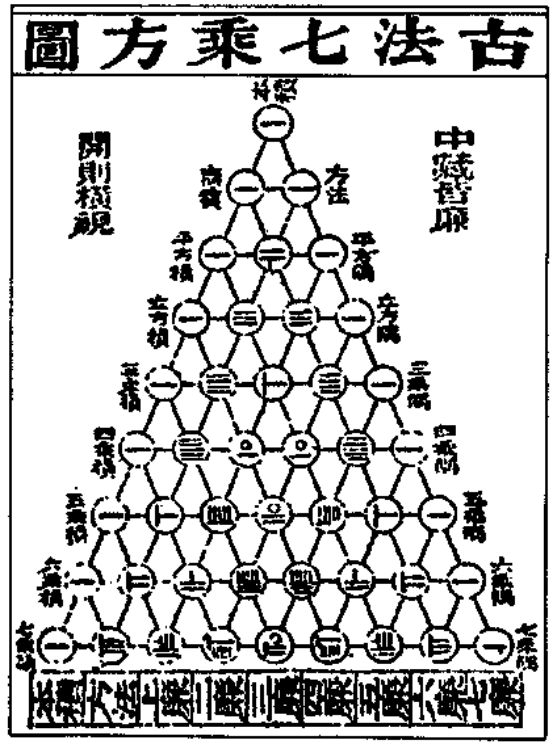


图 83

杨辉说,这个图“出释锁算书,贾宪用此术”。宋、元时代的数学家求数字高次方程正根的方法叫做“开方”,又叫做“释锁”。大概在杨辉写书之前,已经有几种讨论开方术的数学书采用了这个“开方作法本源”图,而以贾宪《黄帝九章算法细草》为最早。因此,我们应该把这个有世界意义的重要发现归功于十一世纪中的贾宪。

在杨辉书之后,元朝朱世杰《四元玉鉴》卷一有“古法七乘方

已审阅
子居 09-10-26, 17:49

图”(图 83)[①]。朱世杰写书在贾宪之后至少有二百五十年，所以叫它“古法”。明朝的数学书如吴敬《九章算法比类大全》、程大位《算法统宗》等都有和杨辉书所引形式相同的“开方作法本源”图。

十五世纪中，中亚细亚的阿尔卡希列出一个二项定理系数表，但他不用二等边三角形式对称的排列，而采用直角三角形的形式。

1527 年德人阿披纳斯(Petrus Apianus)出版一本实用算术书，在封面上印着一个二项定理系数表，形式和朱世杰的“古法七乘方图”差不多。此后，德人司梯斐尔(Stifels)(1544 年)、意人他他伊亚(Tartaglia)(1556 年)、法人巴斯噶(Pascal)(1654 年)等对于二项定理系数各有研究，列出不同形式的表格。其中巴斯噶比较有名，因而有“巴斯噶三角形”的名称。

---

① 朱世杰的古法七乘方图比贾宪的开方作法本源图多列两层，并且添上了几根斜线。从这些斜线上，可以看出每个系数和在它上一层的系数存在着联系。例如第七层各数表示$(x+a)^6$的展开式$x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$各项的系数。第二项系数 6 可以理解为上一层第一、二项系数之和，1+5；第三项系数 15 可以理解为上一层第二、三项系数之和，5+10，等等。又，第七层第二项系数 6 可以用左边第一斜线上的六个 1 相加得到；第三项系数 15 可以用第二斜线上的 1、2、3、4、5 相加得到；第四项系数 20 可以用第三斜线上的 1、3、6、10 相加得到，等等。如果$(x+a)^n$的展开式用$x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+C_n^na^n$来表示，那末，表示上面的两种联系的公式是$C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_n^{r-1}$和$C_n^r=C_{r-1}^{r-1}+C_{r-2}^{r-1}+\cdots\cdots+C_{n-1}^{r-1}$。

二四　增乘开方法

在十一世纪中，贾宪为《九章算术》写一部细草，在少广章内添写了开平方和开立方的新法。这种新法开方术很容易推广到数字高次方程正根的求法，为十三世纪中天元术的发展建立起良好的条件。贾宪《黄帝九章算法细草》现已失传，我们根据杨辉《详解九章算法》征引的材料，可以知道一些贾宪的伟大成就。他的开平方和开立方各有两种方法，一种叫"立成释锁法"，一种叫"增乘开方法"。分别叙述如下：

立成释锁开平方法用算筹布置"实"、"方法"、"下法"三层，开立方法，布置"实"、"方法"、"廉法"、"下法"四层，演算步骤大致和《九章算术》少广章术相同。"释锁"是宋朝数学家解方程的代用名词。古代天文学家为预推各项天文数据列出来的表格叫做"立成"。因此，贾宪所谓"立成释锁法"应该解释作：利用一种表格上的数字来解决一般的开方问题。我们以为"开方作法本源"图就是贾宪开方法的"立成"。开平方法和开立方法用到这图的第三层和第四层。如其推广到求四次、五次或六次幂的根时，就要用到这图的第五、第六或第七层了。

增乘开方法的运算规则，不论平方、立方以至任何高次幂的求根都可以通用。例如增乘开立方法的术文是：

(1)实上商置第一位得数。(2)以上商乘下法置廉，乘廉为方，除实讫。(3)复以上商乘下法入廉，乘廉入方。(4)又乘下法入廉。(5)其方一，廉二，下三退。(6)再于第一位商数之次，复商第二位得数，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实讫。(7)复以次商乘下法入廉，乘廉入方。(8)又乘下法入廉。(9)其方一，廉二，下三退，如前。(10)上商第三位得数，乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实适尽，得立方一面之数。

上面是立方根为三位数的整立方的增乘开方法则。术文中"实"、"方"、"廉"、"下法"和《九章算术》少广章刘徽注意义相同。"商"是商议所得的立方根的第一位、第二位或第三位数字。"入"是加入。逐步演算时须要随乘随加，所以叫做"增乘开方法"。现在还取第九节开立方的例子，求 1860867 的立方根，依照增乘开方法补草如下：

先用算筹布置"实"1860867，方空，廉空，下法(也叫隅)是1000000，并议得"商"100，如图 84。此后，第(2)、第(3)、第(4)、第(5)、……第(10)各步演算的筹式如图 85、图 86、图 87、图 88、……图 93。

从实践中看出增乘开立方法要比"少广"章原术容易掌握，数字计算更为简捷，并且这种开方法可以应用到任何高次幂的求根。例如求六次幂的根，或求方程 $x^6-k=0$ 的正根，《永乐大典》本杨辉《详解(九章)算法》所引有"增乘方法求廉草"一段文字，我们可以用代数符号解释如下：

先议得根的第一位数字为 a，设 $x=a+x_1$，把方程 $x^6-k=0$ 变为 $(x_1+a)^6-k=0$，或 $x_1^6+6ax_1^5+15a^2x_1^4+20a^3x_1^3+15a^4x_1^2+6a^5x_1-k+a^6=0$，这个方程里从左到右各项的数字系数，可以在"开方作法本源图"的第七层内查出，用立成释锁法算出 $6a$、$15a^2$、

商						1	
实	1	8	6	0	8	6	7
方							
廉							
隅	1						

图 84

商						1	
实		8	6	0	8	6	7
方	1						
廉	1						
隅	1						

图 85

商						1	
实		8	6	0	8	6	7
方	3						
廉	2						
隅	1						

图 86

商						1	
实		8	6	0	8	6	7
方	3						
廉	3						
隅	1						

图 87

商						1	
实		8	6	0	8	6	7
方	3						
廉		3					
隅			1				

图 88

商						1	2
实		1	3	2	8	6	7
方		3	6	4			
廉			3	2			
隅				1			

图 89

商						1	2
实		1	3	2	8	6	7
方		4	3	2			
廉			3	4			
隅				1			

图 90

商						1	2
实		1	3	2	8	6	7
方		4	3	2			
廉			3	6			
隅				1			

图 91

商						1	2
实		1	3	2	8	6	7
方			4	3	2		
廉					3	6	
隅							1

图 92

商					1	2	3
实							
方			4	4	2	8	9
廉					3	6	3
隅							1

图 93

$20a^3$、$15a^4$、$6a^5$ 作为求次商 x_1 的廉法和方法，但算草相当繁复，很费工夫。用增乘开方法演算，通过下列(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)各步，最后得到(7)，这样就简便得多。

$-k$	$-k+a^6$	$-k+a^6$	$-k+a^6$	$-k+a^6$	$-k+a^6$	$-k+a^6$
	a^5	$6a^5$	$6a^5$	$6a^5$	$6a^5$	$6a^5$
	a^4	$5a^4$	$15a^4$	$15a^4$	$15a^4$	$15a^4$
	a^3	$4a^3$	$10a^3$	$20a^3$	$20a^3$	$20a^3$
	a^2	$3a^2$	$6a^2$	$10a^2$	$15a^2$	$15a^2$
	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
1	1	1	1	1	1	1
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

在(2)内 a 的各次幂系数都是1,就是开方作法本源图的左边斜线上的各个"一"字。(3)内 a 的五次幂以下的系数,自下而上是1、2、3、4、5、6,和本源图左边第二斜行自上而下的数字相同。(4)内 a 的四次幂以下的系数1、3、6、10、15和本源图内第三斜行的数字相同。(5)内的系数1、4、10、20,(6)内的系数1、5、15,(7)内的系数1、6,也各和本源图第四、第五、第六斜行的数字相同。经过这样对证之后,我们认为增乘开方法和开方作法本源图的确有密切的联系。在开方作法本源图内,$(x+a)^n$ 展开式的各项系数是可以由 $(x+a)^{n-1}$ 展开式中相邻两项的系数相加得出来的($C_{r-1}^{n-1}+C_r^{n-1}=C_r^n$)。这种逐步相加得出 n 次幂展开式的系数的办法用到求 n 次幂的正根的方法中,就是增乘开方法。所以在开方作法本源图的下边有"以廉乘商方,命实而除之"两句话,那是说:以商乘廉入方;以商乘方,从实中减去。增乘开方法的要诀全在这里。

原来《九章算术》"少广"章的开平方术和开立方术,是可以利用来开带从平方和带从立方的。贾宪的增乘开方法当然也可以用来求任何高次方程的正根。有了增乘开方法之后,中山刘益撰《议古根源》,就用它解决数字高次方程问题。《议古根源》书已失传,时代不可详考。杨辉《田亩比类乘除捷法》援引《议古根源》书里二十一

个问题的解法，其中有二次方程$-x^2+312x=6912$，和四次方程$-x^4+52x^3+128x^2=4096$，都用增乘开方法求得正根。杨辉“自序”说：(刘益)“引用带从开方，正负损益之法，前古所未闻也。”大概刘益是第一个把贾宪的增乘开方法扩充到求任何高次方程的正根的。贾宪、刘益的增乘开方法是用算筹演草的。如果不用算筹改写数码，并且写成横式，那末，这个开方法和英国人和纳(Horner)的求数字方程正根的方法(1819年)完全相同，而时代要早六百余年。

在秦九韶《数书九章》内，用增乘开方法解高次方程的例子很多。并且在卷五的第一题，列出方程

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$

后，记录增乘开方法每一步演草的筹式。摘录如下：

(1)布置算筹，如图94。“益隅”是指x^4的系数是负的，“从上廉”是指x^2的系数是正的，“实”常常是负数。

(2)把上廉向左移四位，隅向左移八位，商得第一位8，放在实数百位的上边，如图95。

40642560000	实
0	虚方
763200	从上廉
0	虚下廉
1	益隅

图 94

8	商
40642560000	实
0	方
763200	从上廉
0	下廉
1	益隅

图 95

(3)以商8乘益隅得-800000000，置负下廉。以8乘负下廉，和原有的上廉相消，得1232000000为上廉。以8乘上廉得9856000000为方。以8乘方得正积78848000000。以负实消正积，翻得正实38205440000。如图96。

(4)以8乘益隅，并入下廉，得-1600000000。以8乘下廉，和上廉原有的正数相消得-11568000000为负上廉。以8乘上廉和

原有的方相消，得－82688000000 为负方。如图 97。

(5)以 8 乘益隅，并入下廉得－2400000000。以 8 乘下廉，并入上廉得－30768000000。如图 98。

(6)以 8 乘益隅，并入下廉得－3200000000，如图 99。

8	商
3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	正实
9 8 5 6 0 0 0 0	方
1 2 3 2 0 0	上廉
8 0 0	负下廉
1	益隅

图　96

8	商
3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	正实
8 2 6 8 8 0 0 0 0	负方
1 1 5 6 8 0 0	负上廉
1 6 0 0	负下廉
1	益隅

图　97

8	商
3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	正实
8 2 6 8 8 0 0 0 0	负方
3 0 7 6 8 0 0	负上廉
2 4 0 0	负下廉
1	益隅

图　98

8	商
3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	正实
8 2 6 8 8 0 0 0 0	负方
3 0 7 6 8 0 0	负上廉
3 2 0 0	负下廉
1	益隅

图　99

(7)把方法向右移一位，上廉移二位，下廉移三位，隅移四位，如图 100。以方法约实，续商得第二位 4。

(8)以次商 4 乘益隅，并入下廉得－3240000。以 4 乘下廉，并入上廉得－320640000。以 4 乘上廉，并入方得－9551360000。以 4 乘方，和正实相消，恰恰消尽。即得 840 为方程的一个正根。如图 101。

8 4	商
3 8 2 0 5 4 4 0 0 0 0	正实
8 2 6 8 8 0 0 0 0	负方
3 0 7 6 8 0 0	负上廉
3 2 0 0	负下廉
1	益隅

图　100

8 4 0	商
	实空
9 5 5 1 3 6 0 0 0	负方
3 2 0 6 4 0 0	负上廉
3 2 4 0	负下廉
1	益隅

图　101

二五 天 元 术

中国数学家在很早的时期，就知道怎样利用代数方法解决实际问题。从问题中的已知条件列出一个包含一个未知数的方程，求这个方程的正根，便得到所求的未知数。列方程的步骤叫做“造术”，解方程的步骤叫做“开方”。一般的说，“开方”只是一件繁琐的计算工作，而“造术”是需要更高的技巧的。在十一世纪以后，增乘开方法减轻了“开方”的手续，十三世纪中天元术的发展又克服了“造术”的困难，中国的代数学于是具备了比较完整的体系。

在介绍天元术之前，让我们举例说明古代代数学的“造术”方法。第七世纪初，王孝通撰《缉古算术》，其中二十个问题的“造术”都需要高度技巧的。例如第十五题：

> 假令有勾、股相乘幂七百六、五十分之一，弦多于勾三十六、十分之九。问三事各多少？

用 a、b、c 来表示勾股形的勾、股、弦。这个问题是：已知 $ab=706\frac{1}{50}$，$c-a=36\frac{9}{10}$，求 a、b、c。王孝通解题的“术”是：“幂自乘，倍多数而一，为实。半多数为廉法，从。开立方除之，即勾。以弦多数加之即弦，以勾除幂即股。”这是说，列出三次方程

$$x^3+\frac{c-a}{2}x^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)},$$

或 $$x^3+18\frac{45}{100}x^2=6754\frac{258}{1000}。$$

求它的正根，得$x=14\frac{7}{20}$，就是a。那末$c=14\frac{7}{20}+36\frac{9}{10}=51\frac{1}{4}$，$b=706\frac{1}{50}\div14\frac{7}{20}=49\frac{1}{5}$。

上面这个三次方程是怎样列出来的呢?根据他的自注："勾、股相乘幂自乘即勾幂乘股幂之积。故以倍勾弦差而一，得一勾与半差，再乘勾幂为方。故半差为廉*，从，开立方除之。"用符号来表示，就是

$$(ab)^2=a^2b^2,$$

$$\frac{a^2b^2}{2(c-a)}=\frac{a^2(c^2-a^2)}{2(c-a)}=a^2\cdot\frac{c+a}{2}=a^2\left(a+\frac{c-a}{2}\right)。$$

故 $$a^3+\frac{c-a}{2}a^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)}。$$

作者先认定a为所求的未知数，利用勾股算术把$\frac{b^2}{2(c-a)}$表示作$a+\frac{c-a}{2}$，然后列出解题的"开方"式子。这种思想过程本来相当复杂，又完全用文字说明，是不容易使一般读者体会的。在增乘开方法发明以后，数学家要克服"造术"的困难，终于找着立方程的窍门。有了天元术，中国数学才获得新的发展。

天元术的起源大概是十三世纪初年的前后。最初的著作都已失传，创作者的名字和年代不可详考。流传下来的书有李冶《测圆海镜》十二卷、《益古演段》三卷、朱世杰《算学启蒙》三卷、《四元玉鉴》三卷等。下面根据李冶的书，简单的介绍天元术的内容。

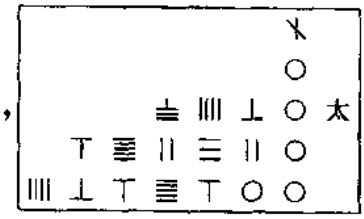
---

* 钱宝琮此依孔继涵微波榭本。后来，作者对这段文字作了校勘，见本书第四卷《校点算经十书》。

立“天元一”为所求的未知数，和现在代数术中，设 x 为未知数的意义相同。依据问题中已给的数据立出一个天元开方式，也和现在代数术中列方程的步骤大致相同，比花剌子模人的代数学要进步得多。从问题中的某些已给条件立出一个天元式（代数式），也就是这个天元的一个函数。又应用其他条件立出这个函数的另一表达式。把这两个表达式相减，就得到一个一端是 0 的方程。在天元术里，这叫做“同数相消”或“如积相消”。

凡天元表达式于一次项的旁边记一“元”字，常数项的旁边记一“太”字。《测圆海镜》书中，太项列在元项之下，元下必是太，太上必是元，故天元式旁记“元”字的就不再记“太”字，记“太”字的也不再记“元”字。元上一层为元的二次项，又上一层为三次项，每上一层即增一次。太下一层为元除常数，又下一层为元二次除常数，每下一层即以天元多除一次。所以太下各项表示有负指数的幂。天元式的各项系数是正的不需要正号，系数是负的要在数字的个位上加一捺。例如

表示 x^2-3x+2，



表示 $-x^2+8460+652320x^{-1}+4665600x^{-2}$。开方式就是一个天元式等于 0 的方程，但没有等于 0 的符号表示。

《九章算术》少广章开平方术须要“借一算”代表未知数的二次幂，开立方术须要“借一算”代表未知数的三次幂。现在“立天元一”代表未知数，这未知数任何次幂都有了表示方法，不但铺平了“造术”的道路，开方式的形象也更加明朗了。

两天元式的相加或相减，遵守《九章算术》方程章的正负术。两天元式相乘：先以甲式的某项遍乘乙式各项，再以甲式的他项遍乘

乙式各项，随即加入前所已得的乘积，因而也叫做“增乘”。这里必须用到“同号相乘得正，异号相乘得负”的原则，但各书没有明白写出来。天元术没有分式的表示方法。凡天元式被天元除，只把旁记的“元”字（或“太”字）移上一层；被天元平方除，把所记的字移上二层。如果一天元式被另一天元式除而得不到整式的商，那末，把除式寄在旁边，只用被除式作为某函数和除式的相乘积。以除式乘这个函数的另一表达式，如积相消得开方式，是一个整式方程。

例如《测圆海镜》卷七第二题：

假令有圆城一所，不知周径。或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之。问径几何？

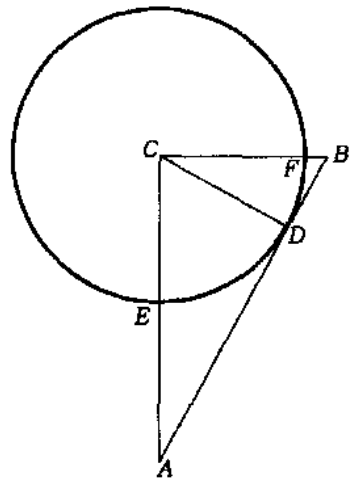


图 102

如图 102，C 为圆心，CD 为半径。甲在 B，丙在 A，AB 线切圆于 D 点。已知 $EA=135$ 步，$FB=16$ 步，求 CD。

又法：二行相乘得数，又自之，为三乘方实。并二行步，以乘二行相乘数，又倍之为从。二行相并数以自乘于上，又二行相减数自乘，减上位为第一廉。第二廉空。一益隅。益积开之得半径。其第一廉只是四段二行相乘数。

设 $EA=a$，$FB=b$，则李冶这个方法所列的方程是

$$-x^4+4abx^2+2ab(a+b)x+(ab)^2=0。$$

以 $a=135$，$b=16$ 代入得

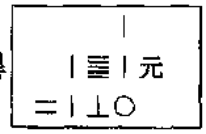
$$-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0。$$

求它的正根，得 $x=120$ 步，即是城半径。

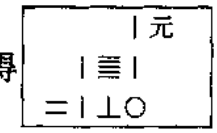
草曰，立天元一为半城径，副置之。上加南行步，得

为股。下位加东行步，得

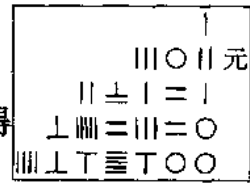
为勾。勾股相乘得



为值积一段。以天元除之，得

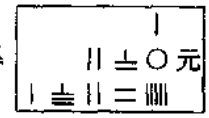


为弦。以自之，得

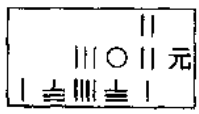


为弦幂，寄左。乃以勾自之，得

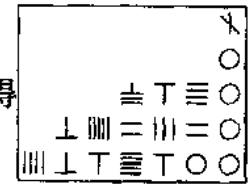
，又以股自之，得



，二位相并，得



，为同数。与左相消，得



。益积开三乘方，得一百二十步，即半城径也。

用代数符号翻译如下：

设 x 为半径 CD，则 $x+16$ 为勾 CB，$x+135$ 为股 CA。

因

$$AB \cdot CD = CB \cdot CA，即 cx = (x+16)(x+135),$$

故

$$c = \frac{(x+16)(x+135)}{x} = x + 151 + 2160x^{-1},$$

$$c^2 = x^2 + 302x + 27121 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2}。$$

但

$$c^2 = a^2 + b^2 = (x+16)^2 + (x+135)^2$$

$$= 2x^2 + 302x + 18481。$$

二式相等，相减得

$$-x^2 + 8640 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2} = 0,$$

或

$$-x^4 + 8640x^2 + 652320x + 4665600 = 0。$$

求得正根 $x=120$。

中国数学家在草创天元术的时期里，天元式的表达方式各家不同，有的把天元放在太数的上边，也有把天元放在太数的下边。李冶《测圆海镜》算草中用前者的方式，他于十一年后写《益古演段》时，又改用后者的方式，把天元的诸乘幂顺次放在太数之下，和古代的开方式顺序相同。后来，郭守敬、朱世杰等都依照这个顺序表达天元开方式。

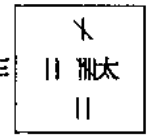
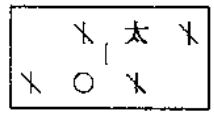
二六 四 元 术

在公元第一世纪中，《九章算术》的方程术已能解决联立多元一次方程组问题。继承这个优越的传统思想，十三世纪中的代数学家掌握了天元术以后，便很快的把它扩充到多元高次方程组的解法。因未知数可以有四个之多，后人把扩充后的天元术叫做“四元术”。祖颐为朱世杰的《四元玉鉴》撰“后序”(1303 年)，说：

> 平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生(世杰)演数有年，探三才之赜，索《九章》之隐，按天、地、人、物立成四元。

依据祖颐“后序”，我们知道李德载用天、地二元造术，刘大鉴创始用天、地、人三元，朱世杰创始立天、地、人、物四元。天元术获得突飞猛进的发展，是十三世纪中山西、河北两地数学家的辉煌成就。可惜祖颐所举的书大都失传，只有朱世杰的《四元玉鉴》三卷现在还有传本，我们可以知道一些四元术的内容。

四元术用筹式表示多元整式或多元方程。在常数项的右旁记一“太”字。天元和天元的乘幂依次顺列于太项之下，地元和它的乘

幂依次顺列于太项之左，人元和它的乘幂依次顺列于太项之右，物元和它的乘幂依次顺列于太项之上。天的 m 次幂和地的 n 次幂的乘积列在左下角太项之下第 m 列、之左第 n 行的方格里。天、人二元幂的乘积列在右下角的各相当格子里，人、物二元幂的乘积列在右上角，地、物二元幂的乘积列在左上角，如图 103。其他相乘积如天物、天地人等无可位置的，可以权宜处理，寄在合适的夹缝里。例如方程 $2x+2y-u-4=0$ 用等式表示作  。方程 $-xy^2+xyz-y-x-z=0$ 用筹式表示作  。这是一种多元高次方程的分离系数表示法。对于列方程步骤和逐步消元，演算过程都很便利。只是因它限于四元，如其有更多的元，便无法布置了。

地^{2}物	地物	物	人物	人^{2}物
地^2	地	太	人	人^2
天地^2	天地	天	天人	天人^2
天^{2}地^2	天^{2}地	天^2	天^{2}人	天^{2}人^2
天^{3}地^2	天^{3}地	天^3	天^{3}人	天^{3}人^2

图 103

天元术解题，因只有一个未知数，故立出一个天元开方式。四元术是联立多元方程组解题，多立一元必须多立一个等式，等式的个数和元数常相等。解题时必须用消元法，使四元四式消去一元后变为三元三式，三元三式消去一元后变为二元二式，二元二式消去一元就得到一个只含一元的开方式。《四元玉鉴》有“假令四草”，据四个例子说明列方程和消元的步骤。但文字过于简略，读者很难了解作者的原意。清罗士琳撰《四元玉鉴细草》(1838 年)，李善兰撰《四元解》(1845 年)，陈棠撰《四元消法易简草》(1899 年)，各有注释。对于“假令四草”消元法的原则性，各家的注释是一致的。但在细节方面还有不同的见解，不容易得到结论。现在把“假令四草”中

第三题的原术和它的解释叙述如下：

今有股弦较除弦和和与直积等。只云勾弦较除弦较和与勾同。问弦几何？”“答曰：五步。

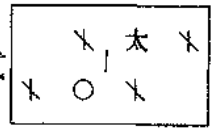
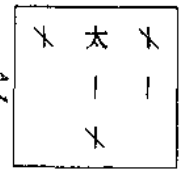
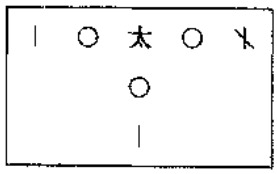
设以 a、b、c 代表勾、股、弦，则弦和和是弦 c 加勾股和 $a+b$ 的和 $a+b+c$，弦较和是弦 c 加勾股较 $b-a$ 的和 $-a+b+c$，直积是勾、股相乘积 ab。问题指示：已知

$$(a+b+c)\div(c-b)=ab \tag{1}$$

$$(-a+b+c)\div(c-a)=a \tag{2}$$

$$a^2+b^2=c^2 \tag{3}$$

求弦 c。解联立三元方程组，得 $c=5$。

草曰，立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，三才相配求得今式  ，求得云式  ，求得三元之式  。

设 x、y、z 代表 a、b、c，化(1)、(2)、(3)式为整式方程，

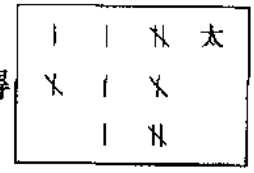
得“今式” $x+y+z-xy(z-y)=0$，

$$-xy^2+xyz-y-x-z=0 \tag{4}$$

得“云式” $-x+y+z-x(z-x)=0$，

$$-y-x^2+x+xz-z=0 \tag{5}$$

得“三元之式” $y^2+x^2-z^2=0$ (6)

以云式剔而消之，二式皆人易天位，前得  ，后

得 。

现在要先消去 y(地元)。把(5)式分为二部得

$$y = -x^2 + x + xz - z \tag{5'}$$

把(6)式分为二部，

$$y^2 = z^2 - x^2 \tag{6'}$$

以(5′)、(6′)的右边代入(4)式，得

$$-x(z^2 - x^2) + xz(-x^2 + x + xz - z)$$
$$-(-x^2 + x + xz - z) - x - z = 0。$$

化简得 $x^3 + x^2 - 2x - x^3z + x^2z - xz + x^2z^2 - 2xz^2 = 0$。

以 x 约之，得

$$x^2 + x - 2 - x^2z + xz - z + xz^2 - 2z^2 = 0。$$

改写作 $(-z + 1)x^2 + (z^2 + z + 1)x + (-2z^2 - z - 2) = 0$ (7)

又以(5′)的右边自乘，和(6′)相消，得

$$(-x^2 + x + xz - z)^2 - (z^2 - x^2) = 0。$$

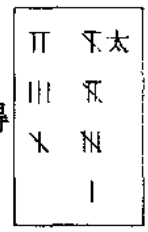
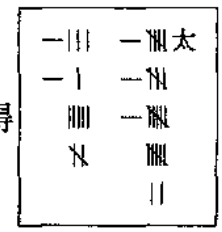
化简得

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^3z + 4x^2z + x^2z^2 - 2xz^2 - 2xz = 0。$$

以 x 约之，并改写作

$$x^3 + (-2z - 2)x^2 + (z^2 + 4z + 2)x$$
$$+ (-2z^2 - 2z) = 0 \tag{8}$$

以上(7)、(8)二式就是术文中的“前式”和“后式”。因为要消去 x 而得出只含 z 的开方式，所以把筹图顺时针向旋转 90°，使人元移到天元的地位。

互隐通分相消，左得  ，右得  。

其次我们要消去 x，先消去它的高次项。以 $(-z+1)$ 乘(8)式各项，以 x 乘(7)式各项，相减得

$$(z^2-z-3)x^2+(-z^3-z^2+3z+4)x$$
$$+2z^3-2z=0 \tag{9}$$

再以 z 乘(7)式各项，和(9)式相加，得

$$-3x^2+(4z+4)x-z^2-4z=0 \tag{10}$$

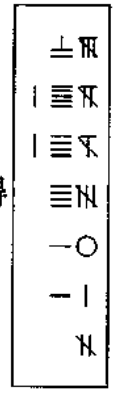
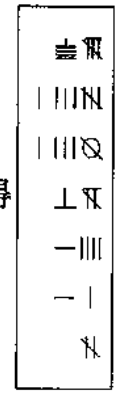
以 $(-z+1)$ 乘(10)式，以 3 乘(7)式相加，得

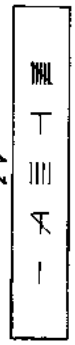
$$(-z^2+3z+7)x+z^3-3z^2-7z-6=0 \tag{11}$$

以 $(-z^2+3z+7)$ 乘(7)式，以 $(-z+1)x$ 乘(11)式，相减得

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+2z^4$$
$$-5z^3-15z^2-13z-14=0 \tag{12}$$

(11)式就是术文中的“左式”，(12)式就是“右式”。

内二行得  ，外二行得  ，内外相消，四约之，得

开方式  ，三乘方开之，得弦五步，合问。

把上面所得“左”、“右”二式并列，内二行相乘是

$$(z^3-3z^2-7z-6)(-2z^3+5z^2+11z+13)$$
$$=-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78$$

外二行相乘是

$$(-z^2+3z+7)(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)$$
$$=-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98$$

相减得 $4z^4-24z^3+16z^2+24z-20=0$

以 4 约之，得 $z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0$ (13)

这是最后的人元开方式。开得正根 $z=5$，合问。

二七　等差级数、垛积术和招差术

古代数学家很早就注意到等差级数问题和等比级数问题。关于等差级数，《九章算术》均输章中提出三个例题，有比较深入的研究。列举如下：

1.“今有金箠长五尺，斩本一尺重四斤，斩末一尺重二斤。问次一尺各重几何？”

这一题，《九章算术》原来的解法走了弯路。依照刘徽注的解法是：第一尺（本）重四斤，第五尺（末）重二斤，相差的 2 斤是四个差数的总和。以 4 除 2 斤得相邻二尺重量的差$\frac{1}{2}$斤。故中间三尺各重 $3\frac{1}{2}$斤、3 斤、$2\frac{1}{2}$斤。这是一个有首项、末项、项数求公差的问题。

2.“今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等。问各得几何？”

这题的解法：先假定甲、乙、丙、丁、戊五人分得钱的比率（列衰）是 5∶4∶3∶2∶1，那末，甲、乙所得和丙、丁、戊所得的比是（5＋4）∶（3＋2＋1）＝9∶6。6 少于 9，相差 3。如果五人分钱的比率各加 3 而成 8∶7∶6∶5∶4，那末，8＋7 恰等于 6＋5＋4。它们的和是 30。依照配分比例（衰分术）计算：甲得$\frac{8}{30}\times5=1\frac{1}{3}$钱，乙得

$\frac{7}{30}\times5=1\frac{1}{6}$钱，丙得$\frac{6}{30}\times5=1$钱等等。

3.“今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问中间二节欲均容各多少？”

这题的解法：以$\frac{4}{3}$升为下三节每节容量平均数，也就是下第二节所容的量。以$\frac{3}{4}$升为上四节每节容量的平均数。$9-\frac{3}{2}-\frac{4}{2}=5\frac{1}{2}$节。上下相离$5\frac{1}{2}$节，两节容量的差$\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$升。以$5\frac{1}{2}$除$\frac{7}{12}$升，得相邻二节容量的差$\frac{7}{66}$升，这就是等差级数的公差。故下第一节容量是$\frac{4}{3}+\frac{7}{66}=1\frac{29}{66}$升，以次各节的容量是$1\frac{22}{66}$斤、$1\frac{15}{66}$斤、$1\frac{8}{66}$斤、$1\frac{1}{66}$斤、$\frac{60}{66}$斤、$\frac{53}{66}$斤、$\frac{46}{66}$斤、$\frac{39}{66}$斤。

第五世纪末，《张丘建算经》卷上有二个等差级数问题。一个是已知首项a、末项l、项数n，求总数S，他建立了公式

$$S=\frac{1}{2}(a+l)n$$

来计算。另一个是已知首项a、项数n、总数S，求公差d，他的公式是

$$d=\left(\frac{2S}{n}-2a\right)\div(n-1)。$$

唐、宋二朝的天文学家大都假定日、月、五星在天空中的行动是等加速（或等减速）运动，每日经行的路程是等差级数。唐朝一行《大衍历》法计算行星在n日内共行分（弧度单位）数S，取用下列公式：

$$S=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right),$$

式内a为第一日所行分数，就是等差级数的首项。d为每日多行的

分数，就是公差。在等减速运动时，d 是个负数。

在已知 S、a、d 求日数 n 时，一行的算法是

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a-b}{d}\right)^2+\frac{8S}{d}}-\frac{2a-d}{d}\right]。$$

这显然是二次方程 $n^2+\frac{2a-d}{d}n=\frac{2S}{d}$ 的正根。

宋沈括《梦溪笔谈》卷十八有隙积术，开始研究高阶等差级数的求和法。他说："隙积者谓积之有隙者，如累棋、层坛及酒家积罂之类……缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失于数少。"设垛积的上底是 $a\times b$，下底是 $a'\times b'$，都列成长方形。高 h 层。$a'-a=b'-b=h-1$。他创立一个正确的求和公式：

$$ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots+a'b'$$
$$=[(2a+a')b+(2a'+a)b'+a'-a]\frac{h}{6}。$$

《九章算术》商功章原有刍童体积公式。刍童上底 $a\times b$ 方尺，下底 $a'\times b'$ 方尺，高 h 尺，它的体积是

$$V=[(2a+a')b+(2a'+a)b']\frac{h}{6}\text{ 立方尺}$$

垛积的个数比刍童体积立方尺数多 $\frac{1}{6}(a'-a)h$。

杨辉《详解九章算法》提出几个垛积问题，比附在立体积问题的后面，他叫它们"比类"题。除了沈括的隙积公式外，他提出了

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots\cdots+a'^2$$
$$=\left(a^2+a'^2+aa'+\frac{a'-a}{2}\right)\frac{a'-a+1}{3},$$

和 $$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)。$$

这二个公式实在是沈括公式的二个特例。我们要特别注意的是他还提出一个三角垛公式

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

或
$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}。$$

沈括、杨辉等提出的级数和等差级数不同，它们的逐项差数不是相等的，但逐项差数的差数是相等的。从这些高阶等差级数的研究中，十三世纪初年前后的数学家发明了招差术。元王恂、郭守敬等撰《授时历》法用招差术推算太阳按日经行度数和月球按日经行度数。朱世杰《四元玉鉴》卷中"如象招数"门也采用招差术解决高阶等差级数求和问题。例如第五题：

今有官司依立方招兵，初(日)招方面三尺，次(日)招方面转多一尺。……已招二万三千四百人。……问招来几日？

题目指示第一日招 $3^3=27$ 人，第二日招 $4^3=64$ 人，第三日招 $5^3=125$ 人，等等，问几日后共招到 23400 人。依据他的"自注"，知道他是用招差术立出解题的方程式的。先列表如下：

积数	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
上差	27	64	125	216	343	512	
二差	37	61	91	127	169		
三差	24	30	36	42			
下差	6	6	6				

表内：$S_0=0, S_1=27$，$S_2=27+64$，$S_3=27+64+125$，……

上差：$S_1-S_0=27$，$S_2-S_1=64$，$S_3-S_2=125$，……

二差：$64-27=37$，$125-64=61$，$216-125=91$，……

三差：$61-37=24$，$91-61=30$，$127-91=36$，……

下差：$30-24=6$，$36-30=6$，$42-36=6$，……

下差是常数，故是最后的差数。依招差术计算，到第 n 日招到的总

人数是

$$S_n=27n+37\frac{n(n-1)}{2!}+24\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$
$$+6\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}。$$

式内各项的系数 27、37、24、6 是表内上差、二差、三差、下差各行的第一个数字。朱世杰设 $m=n-3$，已知 $S_n=23400$，上式化为

$$27(m+3)+\frac{37}{2}(m+3)(m+2)+4(m+3)(m+2)(m+1)$$
$$+\frac{1}{4}(m+3)(m+2)(m+1)m=23400。$$

化简得 $$m^4+22m^3+181m^2+660m-92736=0。$$

用增乘开方法求得 $m=12$，故 $n=15$ 日。

在《四元玉鉴》卷中，“茭草形段”门，朱世杰扩充了杨辉的三角垛求和公式，建立起属于

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)}{p!}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{(p+1)!}$$

类型的一系列的公式，作为研究一般高阶等差级数的基本公式。“果垛叠藏”门和“如象招数”门又提出属于下列类型的公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}\cdot(n-r+1)=\frac{n(n+1)\cdots(n+p+1)}{(p+2)!},$$

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}\cdot r=\frac{n(n+1)\cdots(n+p)[(p+1)n+1]}{(p+2)!},$$

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)\cdots(r+p-1)}{p!}[r+(r+1)+\cdots+n]$$
$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+p+1)[(p+2)n+1]}{(p+3)!}。$$

“如象招数”门结合招差术和上列类型的公式，解决了错综复杂的应用问题。

朱世杰开辟了丰富多采的园地以后，四百年中很少发展。到十八世纪初年后，陈世仁(1676～1722)撰《少广补遗》一卷，董祐诚(1791～1823)撰《堆垛求积术》一卷，李善兰(1811～1882)撰《垛积比类》四卷，在垛积术方面取得了更大的收获。

二八　剩余定理和大衍求一术

《孙子算经》卷下有一个一次同余式问题：

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？答曰：二十三。术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。

这个问题用整数论里的同余式符号[1] 表达出来，是：

设 $N\equiv2(\mathrm{mod}3)\equiv3(\mathrm{mod}5)\equiv2(\mathrm{mod}7)$，求最小的数 N。

按照术文的前半段，这问题的解是

$$N=2\times70+3\times21+2\times15-2\times105=23。$$

依据术文的后半段，下列一次同余式

---

① $N\equiv M(\mathrm{mod}A)$表示整数 N 以整数 A 除得整数商后还有余数（余数可以是 0），和整数 M 以 A 除得整数商后的余数是相同的。因此 N、M 二数之差必能为 A 所整除，即 $N-M\equiv0(\mathrm{mod}A)$。例如 $23\equiv2(\mathrm{mod}3)$，$23-2=21$ 能为 3 所整除。mod 是英文 modulus 的简写，读作“模”。$N\equiv M(\mathrm{mod}A)$读作“N 对于模 A 和 M 同余”。

$$N\equiv R_1(\mathrm{mod}3)\equiv R_2(\mathrm{mod}5)\equiv R_3(\mathrm{mod}7)$$

的解是　$N\equiv 70R_1+21R_2+15R_3(\mathrm{mod}105)$。

以 3 除 N，右边第二、三两项都被除尽，只有第一项会有余数 R_1，故 $N\equiv R_1(\mathrm{mod}3)$。同样，以 5 除 N，只有第二项会有余数 R_2；以 7 除 N，只有第三项会有余数 R_3。故 $N\equiv R_2(\mathrm{mod}5)\equiv R_3(\mathrm{mod}7)$。这个问题颇有猜谜的趣味，解法也很巧妙。流传到后世，有“秦王暗点兵”、“剪管术”、“鬼谷算”、“韩信点兵”等名称，作为人民文娱活动中的一个游戏题目。

孙子的解法为什么要用 70、21、15 三数呢？这是因为

$$70=2\times5\times7\equiv1(\mathrm{mod}3),$$

$$21=3\times7\equiv1(\mathrm{mod}5),$$

$$15=3\times5\equiv1(\mathrm{mod}7)。$$

70、21、15 三数各以 3、5、7 除，余数都是 1。因此，推广孙子“物不知数”问题的解法，我们可以有以下的定理：

设 A、B、C 是互质的正整数，R_1、R_2、R_3 各为小于 A、B、C 的正整数。$N\equiv R_1(\mathrm{mod}A)\equiv R_2(\mathrm{mod}B)\equiv R_3(\mathrm{mod}C)$。如果我们找到三个整数 α、β、γ 满足下列同余式

$$\alpha BC\equiv1(\mathrm{mod}A),\beta AC\equiv1(\mathrm{mod}B),\gamma AB\equiv1(\mathrm{mod}C)$$

那末，　$N\equiv R_1\alpha BC+R_2\beta AC+R_3\gamma AB(\mathrm{mod}ABC)$。

这个定理在西洋到欧拉(L. Euler，1707～1783 年)才得重新发现。所以现在西洋数学史家称它为“中国剩余定理”。

我们现在还不能考证明白《孙子算经》的著作年代。根据书里的一些资料，只能说它是一部第三、四世纪中的作品。中国古代天文学家假定远古时代有一个甲子日，那一年的冬至节和十一月的合朔都恰恰在这一日的子时初刻。有这么一天的年度叫做“上元”，

从“上元”到本年经过的年数叫“上元积年”。在已经知道本年的冬至节时刻和十一月初一合朔时刻的条件下，推算“上元积年”是一个一次同余式问题。从第三世纪初年以后，各家历法为了编订历书的便利，都要用着符合这个历法的“上元积年”。大概从这个时代起，天文学家是知道怎样应用剩余定理的。我们认为《孙子算经》里的“物不知数”问题不是作者向壁虚造的，而很可能是依据当代天文学家的实际算法写出来的。

从汉末到宋末一千余年中，虽然有很多的天文学家熟悉一次同余式的解法，但是在秦九韶写《数书九章》之前，没有人把它的理论基础给以应有的发展。秦九韶是南宋末年的一个四川人，他少年时，曾跟父亲到杭州(1224～1225)，跟当时在太史局供职的天文学家学习，掌握了“上元积年”的计算方法。二十余年后，他写成他的杰作《数书九章》十八卷，第一、二卷详论一次同余式的解法。他说：“数理精微，不易窥识。穷年致志，感于梦寐。幸而得知，谨不敢隐。”我们现在只有通过秦九韶的著作，才能得知祖国的天文学家和数学家在整数论方面的伟大成就。

下面我们重点提出《数书九章》书中一次同余式解法的两个要点，并且附加证明。

1. 设 A 和 G 是两个互质的正整数，求整数 α 满足同余式

$$\alpha G\equiv 1(\mathrm{mod}A) \tag{1}$$

《孙子算经》里没有说到计算 α 的一般法则。在秦九韶书中，这个 α 叫做“乘率”，推算“乘率”的方法叫做“大衍求一术”。这个解一次同余式的求一术和前面第二〇节所讲乘、除捷法中的“求一术”是截然不同的。

如果 $G>A$，设 $G=Aq_0+G_1$，$G_1<A$，那末，同余式

$$\alpha G_1 \equiv 1 \pmod{A} \tag{2}$$

是和(1)式同价的。

用 G_1、A 二数辗转相除，得到一连串的商数 q_1、q_2、…q_n，到第 n 次的余数 $r_n=1$ 为止，但 n 必须是一个偶数。如果 r_{n-1} 已经等于 1，那末，以 1 除 r_{n-2} 得商 $q_n=r_{n-2}-1$，余数 r_n 还是等于 1。和辗转相除同时，按照一定的规则，依次计算 k_1、k_2……k_n。

$$\left.\begin{array}{ll} A=G_1q_1+r_1 & k_1=q_1 \\ G_1=r_1q_2+r_2 & k_2=q_2k_1+1 \\ r_1=r_2q_3+r_3 & k_3=q_3k_2+k_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,(r_n=1) & k_n=q_nk_{n-1}+k_{n-2} \end{array}\right\} \tag{3}$$

最后得到的 k_n 是所求的 α 的一个值。证明如下：

设 $l_2=q_2$，$l_3=q_3l_2+1$，$l_4=q_4l_3+l_2$，……$l_n=q_nl_{n-1}+l_{n-2}$。从上面(3)式里，我们有

$$r_1=A-q_1G_1=A-k_1G_1$$

$$r_2=G_1-q_2r_1=G_1-q_2(A-k_1G_1)=k_2G_1-l_2A$$

$$r_3=r_1-q_3r_2=(A-k_1G_1)-q_3(k_2G_1-l_2A)=l_3A-k_3G_1$$

……

$$r_{n-1}=l_{n-1}A-K_{n-1}G_1$$

$$r_n=k_nG_1-l_nA$$

或　　$k_nG_1=r_n \pmod{A}$

当 $r_n=1$ 时，$k_n\equiv\alpha$，我们有 $\alpha G_1\equiv 1 \pmod{A}$。

上述求 α 值的算法和现在代数学书中解一次不定方程 $G_1x=Ay+1$ 的方法差不多，只是 $\alpha=k_n$ 是从 q_1 起，顺次算到 q_n 止所得的 k_n，而 x 是从 q_n 算起，逆推到 q_1 止所得的结果。$x\equiv\alpha \pmod{A}$ 是

绝对正确的①。

2. 在《数书九章》中，一次同余式

$$N \equiv R_1 (\mathrm{mod} A) \equiv R_2 (\mathrm{mod} B) \equiv R_3 (\mathrm{mod} C) \tag{4}$$

里的 A、B、C 三个整数不一定是互质数。如果

$$A = ad^p, B = bd^q, C = cd^r, q \leqslant p, r \leqslant p \tag{5}$$

a、b、c、d 是互质的正整数，p、q、r 是正整数，只要 $R_1 - R_2$ 能被 d^q 除尽，$R_1 - R_3$ 能被 d^r 除尽，(4)式还是有解的。

依据条件(5)，A、B、C 三数的最小公倍数是 Abc。如果我们能找出三个乘率 α、β、γ 满足同余式

$$\alpha bc \equiv 1 (\mathrm{mod} A),$$

$$\beta AC \equiv 1 (\mathrm{mod} b),$$

$$\gamma Ab \equiv 1 (\mathrm{mod} c),$$

那末，

$$N \equiv R_1 \alpha bc + R_2 \beta Ac + R_3 \gamma Ab (\mathrm{mod} Abc) \tag{6}$$

便是(4)式的解。证明如下：

$$N \equiv R_1 (\mathrm{mod} A)$$

是很容易证实的。因为

$$N - R_2 \equiv R_1 \alpha bc + R_2 (\beta Ac - 1) + R_3 \gamma Ab (\mathrm{mod} Abc)$$

---

① 例如解同余式 $67x \equiv 1 (\mathrm{mod} 96)$。以 67、96 二数辗转相除

$$96 = 67 \times 1 + 29, 67 = 29 \times 2 + 9, 29 = 9 \times 3 + 2, 9 = 2 \times 4 + 1$$

得 $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 4$。依照大衍求一术得 $k_1 = q_1 = 1, k_2 = q_2 k_1 + r = 2 \times 1 + 1 = 3, k_3 = q_3 k_2 + k_1 = 3 \times 3 + 1 = 10, k_4 = q_4 k_3 + k_2 = 4 \times 10 + 3 = 43$。故 $67 \times 43 = 1 (\mathrm{mod} 96), x = 43 (\mathrm{mod} 96)$。在中学代数教科书里，解不定方程 $67x = 96y + 1$ 时，也用辗转相除法依次得出商数 1，2，3，4。由此计算 $c_1 = q_4 = 4, c_2 = q_3 c_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13, c_3 = q_2 c_1 + c_1 = 2 \times 13 + 4 = 30, c_4 = q_1 c_3 + c_2 = 1 \times 30 + 13 = 43$。也得 $x = 96p + 43$，p 为任意的整数。

k 的计算和 c 的计算顺序相反，而 $k_4 = c_4 = 43$，结果是相同的。

$$\equiv 0 \pmod{b}。$$

又　$$N-R_2\equiv R_1(\alpha bc-1)+R_1-R_2+R_2\beta Ac+R_3\gamma Ab \pmod{Abc}$$

$$\equiv 0 \pmod{d^q}。$$

所以　$N-R_2\equiv 0 \pmod{bd^q}$，

或　$N\equiv R_2 \pmod{B}$。

同样可证　$N\equiv R_3 \pmod{C}$。

秦九韶在他的著作中，加深了一次同余式解法的理论基础，并且扩大了它的应用范围。在《数书九章》问题中有多至八个联立一次同余式的问题。

元、明两朝实行的《授时历》法不须要推算“上元积年”，一次同余式解法在天文工作者方面没有实际的需要，因而很少人注意到秦九韶的光辉成就。到十九世纪初年，中国数学家们重视宋、元时代的数学遗产，并且加以发扬光大。于是有张敦仁的《求一算术》(1803 年)、骆腾凤的《艺游录》(1815 年)、时曰醇的《求一术指》(1873 年)、黄宗宪的《求一术通解》(1874 年)等专门著作。《求一术通解》二卷是一部后来居上的作品，理论部分比秦九韶书讲得清楚，数字计算也比较简捷。

二九　百鸡问题

第五世纪末，元魏的张丘建在他编写的《算经》里提出一个不定方程问题——世界数学史上有名的“百鸡问题”。

今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？”

答曰：鸡翁四，母十八，雏七十八。又答，鸡翁八，母十一，雏八十一。又答，鸡翁十二，母四，雏八十四。

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。

这个问题包含三个未知数而只能列出两个方程，所以是不定方程问题。《张丘建》原有术文太简略，无法解决这个问题。设 x、y、z 为鸡翁、母、雏只数，依据题意列出下列二方程：

$$x + y + z = 100 \tag{1}$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \tag{2}$$

以 3 乘(2)式各项，减去(1)式各项，得

$$14x + 8y = 200,$$

或

$$7x + 4y = 100 \tag{3}$$

又

$$z = 100 - z - y \tag{4}$$

因 x、y、z 都是小于 100 的正整数，我们可以用一次同余式原理，把(3)式写成

$$7x \equiv 100(\mathrm{mod}4) \equiv 0(\mathrm{mod}4),$$

故

$$x \equiv 0(\mathrm{mod}4)。$$

设

$$x = 4t,$$

代入(3)式，得

$$y = 25 - 7t。$$

再代入(4)式，得

$$z = 75 + 3t, \quad t = 1,2,3。$$

我们还可以作后面这样解释：在(3)式中，$4y$ 和 100 都是 4 的倍数，x 能被 4 整除是显而易见的。用 $x=4,8,12$，代入(3)、(4)两式，即得 $y=18,11,14$；$z=78,81,84$。因 y 不能是负数，故 x 不大于 12。《张丘建算经》中的三组答案，和增减答数的术文，很可能是这样得出来的。

第六世纪中，北周甄鸾在《数术记遗》中记录几个“不用算筹，宜以心计”的问题，其中二题是百鸡问题，系数和《张丘建算经》题略有不同。以代数方程表示出来是：

$$(1)\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+4y+\dfrac{1}{4}z=100 \end{cases} \quad 答\ x=15,\quad y=1,\quad z=84。$$

$$(2)\begin{cases} x+y+z=100 \\ 4x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 \end{cases} \quad 答\ x=8,\quad y=14,\quad z=78。$$

第二题应该有两组答案，甄鸾少列了 $x=16$，$y=3$，$z=81$ 的一组。

杨辉《续古摘奇算法》引《辩古通源》（已失传）一题：“出

钱一百买温柑、绿橘、扁橘共一百枚。只云，温柑一枚七文，绿橘一枚三文，扁橘三枚一文。问各买几何?”“答曰：温柑六枚，计四十二文；绿橘十枚，计三十文；扁橘八十四枚，计二十八文。”这题的解应该有四组答案，杨辉书中只列一组是不完全的。

张丘建、甄鸾、杨辉等先后提出了“百鸡问题”，明、清数学家还曾提出多于三元的“百鸡”类型的问题，但都没有给它一个一般的解法。到十九世纪，宋、元数学复兴以后，才有把这个类型的问题和求一术（一次同余式解法）结合起来的讨论。

三〇　中国古代数学的特征

中国古代数学的绝大部分是自己发展的。无论在算术、代数或几何部分都有它的特色。从古代数学史研究中，不难看到有很多方面的数学思想和数学方法发展得特别早，传播到国外，印度和阿拉伯数学的历史发展多少受到些它的影响。也有些数学思想和方法发展得很迟，直到十七世纪初年以后，西洋数学传入中国，才弥补了古代数学的不足。如果进一步研究古代数学的某些部分为什么发展得特别早，其他部分为什么比较迟，我们就必须深入讨论中国数学发展的特征，同国外的数学发展做好比较研究的工作，才可以得到一些结论。现在把几条主要的特征列举如下：

1. 自古以来记数法严格地遵从十进位制。口语或文字表示一个数字都遵从十进位制，简单明了，小学生学习起来不会有困难。而且单音节字发音简捷，乘法口诀（如“九九八十一”等）、归除口诀（如“三一三十一”等）、斤求两口诀（如“一退六二五”等）等都极容易熟练，应用起来非常方便。有些数字计算还可以心算算出准确的结果。这些是推动数学教育的有利条件。

2. 从十进位制的记数法出发，劳动人民很自然地逐渐改进度量衡制，促成度量衡单位十进位制的实现[17]和十进位小数法的引用[18]（方括号内数字指本书的第几节）。

3. 自古以来用地位制记数。无论口语或文字表达一个数字都遵守地位制。例如说："三万四千四百一十六"，"万"、"千"、"百"、"十"四个字表示十进位制的位次，三、四、四、一、六表示各位的数码。如果省略了万、千、百、十，单说"三四四一六"还是可以了解为三万四千四百一十六的。因此，不论古代用算筹记数，或近代用算珠记数，都利用了地位制。日常生活中需要的数字计算，古代用筹算，近代用珠算，加、减、乘、除都很便利[2][21]。

4. 分数算法很早就有完整的体系，用算筹演算除法，除不尽时便以余数为分子，除数为分母，组织一个分数。这样就明确规定了分子在上、分母在下的分数记法。因此，分数的加、减、乘、除法得到发展。最大公因数和最小公倍数也得到应用[3]。算术中各种"应用问题"，包括各种比例问题在内，都有了合理的解法[4]。

在中国古代数学中，地位制记数法不但利用于记一个数字的各位数码，并且利用来表示一个算式中的各项数字，也就是现在代数学中的分离系数法。下列5、6、7、8、9五条说明地位制在代数学发展中所起的作用。

5. 开方式用分离系数法表达。《九章算术》少广章开平方术中"借一算"表示未知数的平方幂，开立方术中"借一算"表示未知数的立方幂，就有用分离系数法表示开方式的意义。在开方过程中，减根后的二次或三次方程，都利用数字的地位制表达出来[9]。因此，带从的平方和带从的立方都有了直接的开法[10]。十一世纪以后的增乘开方法更推广到求数字高次方程的正根[24]。这些都是开方式的合理化表达法引起的辉煌成就。

6. 分离系数法还利用来表达包含几个不同未知数的方程。《九章算术》方程章解联立一次方程组问题，每一个多元方程都用分离系数法表达。消元时也用分离系数法计算[6]。十三世纪中，

数学家能解联立二元、三元或四元的高次方程组，所有算式也都用分离系数法表达[26]。

7. 最早认识负数的存在。《九章算术》方程章方程中，未知数的系数有负数的，也有常数项是负数的。例如第八题中有一个方程用代数符号表达出来是

$$-5x+6y+8z=-600。$$

左边第一项和右边的常数项用黑色的筹（或斜列的筹）表示。它们是负数，不同于其他的两个正数，也是在分离系数法中指示出来。消元时必须分别消去项系数的正、负而用加法或减法，因而建立了正、负数加、减法则[7]。后来，数字高次方程用分离系数表达，各项系数有正有负，用增乘开方法演算也没有困难[24]。

8. 十一世纪中发现"开方作法本源"图（指数为正整数的二项定理系数表）[23]，并且研究了它的构造原则，因而发明增乘开方法[24]。十三世纪中的招差术和垛积术也可能利用了这些构成二项定理系数的公式[27]。开方作法本源图也是分离系数法的重要表现。

9. 十三世纪中发明天元术和四元术[25][26]。天元术和四元术也是利用分离系数法的伟大成就。花剌子模人谟哈默特在第九世纪初年写了一部代数书，十二世纪中译成拉丁文，引起欧洲代数学的新发展。西洋数学史家怀疑中国的天元术也受到伊斯兰数学的影响。实际上，花剌子模人的代数学是用文字推论，而中国的天元术是用算筹或数码演算的；代数学方程的两端不许有负数项，而天元术开方式各项有正有负；代数学只能解一次或二次方程，而天元术能解任何高次方程。总之，天元术的发展有它的历史根源，同花剌子模人的代数学体系截然不同，不可混为一谈。

10. 汉朝的数学家用盈不足术解决算术难题。后来，这种算法

不被重视。但盈不足术传到阿拉伯和欧洲后，却有它的光荣历史[5]。

11.《孙子算经》"物不知数"问题、《张丘建算经》"百鸡问题"和秦九韶的"大衍求一术"都是世界数学史上的先进成就[28][29]。

12. 面积的计算起源于田地的量法。《九章算术》方田章以长、宽相乘得长方形的面积作为一个公理。三角形、梯形等都用"以盈补虚"法补成长方形而后求其面积[8]。有关线段的几何定理也用面积图形来证明。例如《九章算术》少广章的开平方术[9]、勾股章的勾股容圆术[14]等等。

13. 体积的计算起源于工程建筑。《九章算术》商功章以长、阔、高连乘得长方柱体的体积作为一个公理。把长方柱体分解为二堑堵，又分解堑堵为一阳马、一鳖臑。容易证明堑堵体积为长方柱体体积的二分之一，阳马体积为长方柱体的三分之一，鳖臑体积为长方柱体的六分之一。古代数学家以长方柱体、堑堵、阳马、鳖臑为基本立体。一般的直线形的立体都可以用这些基本立体拼凑起来，它的体积就是所含基本立体体积的和。体积公式的简化是需要一些代数技能的，代数学的发展引起了应起的作用[8]。

14. 勾股测量。古人于平地上竖立标竿测量太阳的影子。标竿的高(股)和影子的长(勾)常成正比例。推广这种从经验中得来的知识，便有古代的勾股测量法[11]。再进一步的发展便有重差术的成就[12]。

15. 勾股弦定理。中国在什么时代发现勾股弦定理，现在很难考证明白。第一世纪中已经有有关勾、股、弦和勾股形面积的许多定理。第三世纪初，赵爽"勾股圆方图注"用面积图形证明这些定理的正确性。中国古代的"勾股术"是建立在几何图形的基础上的。但勾股术后来的发展是代数学的一个重要部分，不再为几何图形所

局限[13][14]。

16. 关于圆周率。刘徽体验到圆内接正多边形的边数愈多，它的面积愈接近于圆面积，创立了一个符合“极限存在准则”的不等式，$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$，式内 S 为圆面积，S_n、S_{2n}为圆内接正 n、$2n$ 边形的面积。他计算圆内接正 3072 边形面积，得到单位圆面积近似值 3.1416，准确到第四位小数。祖冲之又更精密地推算，得到 $3.1415926<\pi<3.1415927$ 的结果。这都是有世界意义的光辉成就[15]。

17. 关于圆锥和球的体积。刘徽在解释《九章算术》商功章圆亭术时，说：“从方亭(方锥台)求圆亭(圆锥台)之积，亦犹方幂中求圆幂。”这样说明圆亭体积是外切方亭体积的$\frac{\pi}{4}$，圆锥体积是外切方锥体积的$\frac{\pi}{4}$。他又在少广章开立圆术注中根据同样的原则说：“合盖者，方率也。丸(球)居其中，圆率也。”球体积是外切牟合方盖体积的$\frac{\pi}{4}$。后来，祖冲之发现牟合方盖的水平剖面面积等于立方体内挖去两个正方锥体的水平剖面面积，因而得出牟合方盖体积是$D^3-2\times\frac{1}{3}D^2\times\frac{D}{2}=\frac{2}{3}D^3$，所以球体积是$\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}D^3=\frac{\pi}{6}D^3$[16]。

计算尺发展史

李　俨

编 者 说 明

本书由上海科学技术出版社于1962年10月初版，1965年6月重印。主要叙述计算尺的发展历史，从十七世纪发明对数开始，直至二十世纪中叶的三百余年间，凡计算尺的逐步演变与改进均概括无遗，其间并扼要的插入计算尺的原理与用法。

《李俨钱宝琮科学史全集》编辑委员会

前　言

计算尺虽发明于三百余年以前，但直至近百年内始发展成为在科学研究及技术设计中不可缺少的计算工具。计算尺的运算对象是数字，惟数的大、小主要用对数尺度的长短来表达，故计算尺的创造是紧随着对数的发明而有成就的。

自从十七世纪早期，讷白尔发明对数以后，不久即由甘特与吴德等先后创制对数尺度及原始形式的计算尺。其后又经历了二百余年的继续发明与创造，始发展成为今日常见的一种可以化繁就简，应用非常便捷的重要计算工具。计算尺的发展也是随着生产需要和工艺革新而逐渐进步的，现在探索它的发展过程，确是非常有意义的事。

计算尺最早于清代康熙年间（约 1680 年前后）即已传入我国，当时称为假数尺，曾用象牙制成模型，藏于皇宫之内，并未向外流传，至今遂成为故宫博物院的历史文物珍品①。可惜二百余年来封建皇朝不知重视此项富有实用价值的计算工具，更谈不到有何发展可能，即此已足以回顾在此长时期内，我国科学技术落后情况的一斑。1841 年计算尺又再度传至我国，于是有邹伯奇所著《邹征君

① 严敦杰："故宫所藏清代计算仪器"，《文物》，1962 年 3 月号，19～24 页。

遗书》中的《对数尺记》一卷，首次介绍计算尺的用法，但所谈的还不是近代形式的计算尺，仍未受人重视。

二十世纪初期，欧、美各国及日本的计算尺，已发展至相当繁复而精美的程度，且已成为流行的文化商品，于是在我国学术界中也逐渐有人应用，但所用的均是高价的国外产品，国内尚不能自制。又隔了近三十年，至1930年乃偶有仿制，大都因陋就简，失去精密意义。1949年前后，国内计算尺的发展，始略具端倪，而在人民政府大力提倡并十分重视科学技术工作以后，计算尺的制造与改进乃有跃进成就，可见计算尺的发展是与科学技术的进步密切相关的。

本书自发明对数时期起，叙述至最近时期为止，前后约近三百五十年，内容虽偏重于欧、美各国的计算尺发展情况，但亦未尝不思包罗近十余年来我国学者对这方面的成就。只因我国关于计算尺的文献资料非常缺乏，且搜集亦颇不易，因此很感踌躇。幸赖老友顾济之(世楫)同志亲自在上海方面进行了短时期的调查访问，充实了若干内容。本书中“7. 一九四九年前后，我国计算尺的发展情况”一节，即由他在上海调查后编写列入的。

本书以叙述计算尺的发展历史为主体，在介绍各阶段的发展过程中，或多或少的插入了计算尺的原理和用法，使读者更能因此而获得实用知识。编写本书时虽所费时间并不多，但搜集资料及查对文献等却很费事。初稿完成以后，又经历了半年以上时间，进行补充、修改并绘制插图等事。此项工作由上海科学技术出版社的编辑及绘图同志襄助居多，既承副总编辑顾济之同志亲自担任本书的编校整理工作，曾从多方面提供宝贵意见，并对原稿酌情增删，又承绘图组同志把插图改绘加工，使符合出版要求，应在此表示十分感谢。

本书只是一本计算尺的发展简史，限于本书体例，并为读者方便起见，不可能把收集到的有关资料胪列无遗。近年来国外计算尺的类型，亦颇有新的发展，例如折叠尺度计算尺、筒形计算尺、螺线形计算尺和其他专用计算尺等均已由试制阶段而成为商品，拟再进一步探索其经过情况，留待再版时作为补充资料，本书内暂从缺略。

解放前后，我国各地出版了不少种有关计算尺的书籍和论文，其中以解释计算尺的用法居多。兹根据北京图书馆收藏的书目以及其他方面的资料，编成附录三及附录四，缀于书后，以备读者探索或参考。

本书中错误或不足之处，统请读者尽量指示或提出批评意见，作者谨先在此表示竭诚接受并衷心感谢。

李　俨

1962 年 4 月 30 日，北京

目　录

前　言…… 645
1. 对数发明的前后 …… 653
2. 计算尺的尝试 …… 661
3. 十七世纪计算尺的设计 …… 673
4. 十八、十九世纪计算尺的改进 …… 683
5. 十九世纪计算尺输入中国 …… 691
6. 二十世纪计算尺的成就 …… 694
7. 一九四九年前后国内计算尺的发展情况 …… 703
附录一　计算尺发展史年表…… 710
附录二　外文人名音译对照表…… 713
附录三　近十年来有关计算尺的出版物(中文部分)…… 715
附录四　计算尺和其他算尺、算图论文目录 …… 717
编校后记…… 723
索　引…… 729

插 图 目 录

图 1. 发明对数的原始设想
图 2. 加减计算尺示意
图 3. 加减代乘除,1～10 的对数尺度示意
图 4. 加减代乘除,1～10 及 10～100 的对数尺度示意
图 5. 圆形计算尺示意
图 6. 圆形计算尺的运用示意
图 7. 甘特型计算尺示意
图 8. 应用倒尺解二次数字方程示意
图 9. 用 A,C,D 尺度解三次数字方程示意
图 10. 小型计算尺正面示意
图 11. 小型计算尺反面示意
图 12. 北京故宫博物院所藏甘特型计算尺
图 13. 北京故宫博物院所藏假数尺
图 14.《数理精蕴》书中介绍的假数尺之一
图 15.《数理精蕴》书中介绍的假数尺之二
图 16. 孟海姆型计算尺的尺度排列示意
图 17. 莱士型计算尺正面及滑尺正、反面的尺度排列示意
图 18. 奥·柯斯多型双面计算尺正、反面的尺度排列示意

已审阅
子居 09-10-26, 17:49

图 19. 克飞尔士公司重对数多型双面计算尺正、反面的尺度排列示意
图 20. 邹伯奇所著《对数尺记》中介绍的对数尺之一
图 21. 邹伯奇所著《对数尺记》中介绍的对数尺之二
图 22. 表示重对数尺度的连续性
图 23. 重对数尺度的分段排列情况示意
图 24. 矢量
图 25. 直角三角形
图 26. C 尺度与 P(H′)尺度互相对应情况
图 27. “学士”6171 型矢量重对数双面计算尺正、反面尺度排列示意

1　对数发明的前后

十六世纪中叶以后，欧洲经过产业革命，受到生产刺激，科学随着发展，繁复的计算需要有简易的处理。

1544 年斯提斐尔[1] 就有此项概念。他在 1544 年出版的《完全算术》一书中，曾经提到：

> 如何使等差级数内的加数，可和等比级数内的乘数相对应，又减数可和除数相对应？

换言之，即两数相乘，如何可用相加的方法来处理？两数相除，如何可用相减的方法来处理？可是一时还没有方法满足这个概念的要求。

十六世纪时，因三角术中有下面两个公式，即

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

及

$$\sin A\cdot\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

具有加减可以代乘除的形式。

例如：求 0.173,65×0.990,27 的积，

查表：

---

① Michael Stifel，1486(或 1487)～1567。

$$\sin 10^\circ = 0.17365, \quad \cos 8^\circ = 0.990,27,$$

由公式，知

$$\sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ = \frac{1}{2}(\sin 18^\circ + \sin 2^\circ)。$$

查表：

$$\sin 18^\circ = 0.30902, \quad \sin 2^\circ = 0.03490,$$

于是： $\sin 18^\circ + \sin 2^\circ = 0.34392,$

$$\frac{1}{2}(\sin 18^\circ + \sin 2^\circ) = 0.17196,$$

亦即： $0.17365 \times 0.99027 = 0.17196,$

实际 $0.17365 \times 0.99027 = 0.1719603855。$

这个方法称做“积化和差术”[①]。

十六世纪中雷玛莱斯[②]、丁先生[③]、毕的斯克斯[④]各人都讨论过此项算法，并且在十七世纪，也随西洋历法输入中国。《崇祯历书》内《测量全义》(1631 年)就有此项记载。以后中算家梅文鼎(1633～1721)另有著作(如《环中黍尺》五卷，1700 年)讨论此事。不久即发明对数术来代替上述加减代乘除的工作[⑤]。

讷白尔[⑥]在 1614 年的著作《对数规范》[⑦]中曾说到对数计算的

---

① Prosthaphaeresis.

② Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus，? ～1600.

③ Christophor Clavius，1537～1612，从利玛窦原译而来。Clavius 拉丁文的解释为“钉”，谐音作“丁”。

④ Bartholomaeus Pitiscus，1561～1613.

⑤ 参看严敦杰《中算家的积化和差术研究》(1949 年)，和李俨《中算史论丛》，第三集，513～518 页，北京，科学出版社(1955 年，＊见本书第七卷第 485～490 页。——编者)。

⑥ John Napier，1550～1617.

⑦ *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.*

做法。如图 1，令：AB 两直线上，开始有两点 L 和 N，都由 A 向 B 进行。起始进行速度约相同，假令为$\frac{AB}{n}$，而 n 为任意数。就中 L 点每次以$\frac{AB}{n}$的等速度在 AB 线上进行；而 N 点每次的速度，则逐渐减少。速度减少的规律，以由某点至 B 的距离，再除以 n 作准。因此 $L_1, L_2, L_3, \cdots$ 和 $N_1, N_2, N_3, \cdots$ 互相对照。在 t 时间后，L 点到 Q 处，N 点到 P 处，讷氏称 NP 为 LQ 的相对数(log)。这是等差数和等比数互相对应的原则。

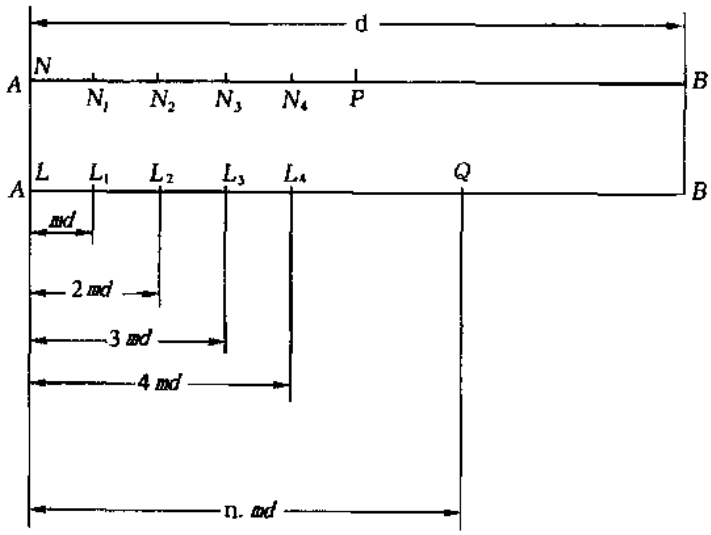


图 1 发明对数的原始设想

用数学式来表示，得

$$AB : AN_1 = N_1B : N_1N_2 = N_2B : N_2N_3$$
$$= N_3B : N_3N_4 = \cdots = 1 : m。$$

因此：

$$AN_1 = m \cdot AB = m \cdot d,$$
$$N_1B = d - md = d(1 - m)^1;$$
$$N_1N_2 = m \cdot N_1B = md(1 - m)^1,$$

$$N_2B = N_1B - N_1N_2 = d(1-m)^2;$$
$$N_2N_3 = m \cdot N_2B = md(1-m)^2,$$
$$N_3B = N_2B - N_2N_3 = d(1-m)^3;$$
$$N_3N_4 = m \cdot N_3B = md(1-m)^3,$$
$$N_4B = N_3B - N_3N_4 = d(1-m)^4;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

如用数字来表示，

令： $d = 10^7, m = 10^{-7}$；

如 $AB(=NB) = d(1-m)^0 = 10^7 = 10000000$，

则 $N_1B = d(1-m)^1 = 10^7(1-10^{-7}) = 9999999$，

$N_2B = d(1-m)^2 = 10^7(1-10^{-7})^2 = 99999980000001$，

$N_3B = d(1-m)^3 = 10^7(1-10^{-7})^3 = 99999970000003$，

……

如令 AB 长度为正弦九十度(sin90°)或正切四十五度(tan45°)的值。

并令为 10^7，即：

$$d = AB = 10^7 = \sin 90° = \tan 45°,$$

x=在 T 时间，L 点进行的路程，其量为等差数，

y=在 T 时间，N 点进行的路程，其量为等比数。

令 $m=10^{-7}$，

则 $md=1=L$ 与 N 两点最起始进行的速度，

$d-y=N$ 点在 T 时间距 B 终点的距离。

于是 L 点对着 N，L_1 点对着 N_1，L_2 点对着 N_2，L_3 点对着 N_3，…等等。如令对数的符号为 log，

即： N 点处对数值是 $\log 10^7(1-m)^0$，

N_1 点处对数值是 $\log 10^7(1-m)^1$，

N_2 点处对数值是 $\log 10^7(1-m)^2$，

N_3 点处对数值是 $\log 10^7(1-m)^3$。

于是在图 1 中，两直线相对应的情形如下：

N，	0，	$AB(=NB)$，	$\log 10^7(1-m)^0$；
N_1，	1，	N_1B，	$\log 10^7(1-m)^1$；
N_2，	2，	N_2B，	$\log 10^7(1-m)^2$；
N_3，	3，	N_3B，	$\log 10^7(1-m)^3$；

……。

在 T 时间内，又分成 n 数极多的短时间 t，则在短时间 $0, t, 2t, 3t, 4t, \cdots, nt$ 的终点，x 进行的距离，各为 $0, md, 2md, 3md, \cdots, n \cdot md$。

每次 $d-y$ 之值，各为 $d, d(1-m), d(1-m)^2, d(1-m)^3, \cdots, d(1-m)^n$。

即到 T 时，

$$x = n \cdot md,$$

$$y = d - d(1-m)^n = d - d\left(1 - \frac{x}{nd}\right)^n$$

$$= d - d\left[1 - \frac{x}{d} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{x^2}{n^2d^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{x^3}{n^3d^3} + \cdots\right]。$$

如 $n \to \infty$，

$$y = d - d\left(1 - \frac{x}{d} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{d^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{d^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^n}{d^n}\right)。$$

因在讷白尔时，曾经算出：

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}_{n\to\infty}=2.71828\cdots=e,$$

又算出级数：

$$1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^3x^3}{3!}+\cdots+\frac{a^nx^n}{n^n!}_{n\to\infty}=e^{ax}。$$

所以上面

$$\left(1-\frac{x}{d}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{d^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{d^3}+\cdots+\frac{1}{n!}_{n\to\infty}\cdot\frac{x^n}{d^n}\right)$$

括弧内的级数，可写成 $e^{\left(-\frac{x}{d}\right)}$，

故 $$y=d-d\cdot e^{\left(-\frac{x}{d}\right)}。$$

式中 $e=2.718,28\cdots$，称做讷白尔对数的底。

因 $$\frac{d-y}{d}=e^{\frac{x}{d}}$$

或 $$-\frac{x}{d}=nap.\log\frac{d-y}{d}$$

构成对数计算方法。对数值既经算出，有了这真数的对数值，就实际满足加减代乘除，乘除代乘方和开方的要求。

就上面的推导，可总结得：

(1)**对数定义** 设 b 为任何有限正数($b\neq1$)，且 $b^x=N$；则 x 称为 N 以 b 为底的对数，记录成：

$$\log_bN=x。$$

(2)**对数性质**

如 $$\log_bb=1;\quad \log_b1=0;$$

$$\log_b0=\begin{cases}+\infty & (0<b<1),\\ -\infty & (1<b<\infty)。\end{cases}$$

$$\log_b(MN)=\log_bM+\log_bN;$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N;$$

$$\log_b N^p = p\log_b N;$$

$$\log_b \sqrt[r]{N^p} = \frac{p}{r}\log_b N;$$

$$\log_b b^p = p; \quad b^{\log_b N} = N;$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}。$$

(3)**对数种类** 对数分做两类：

(甲)自然对数(双曲线对数，或讷白尔对数)以 $e=2.71828\cdots$ 为底(通常以 a 或 e 代表 $2.71828\cdots$)。$\log_e N$ 又常简记作 $\ln N$。

(乙)常用对数(巴理知[1]对数)以 10 为底。$\log_{10} N$ 又常简记作 $\log N$。现在通常用此项对数。如：

$$\log_{10}(M \cdot N) = \log_{10} M + \log_{10} N。$$

例如求 0.17365×0.99027

查表：

$$\log 0.17365 = \bar{1}.2396748$$

$$\log 0.99027 = \bar{1}.9957536$$

相加得 $\bar{1}.2354284$

再查表知乘积为 0.171,960,4，因它的对数为 $\bar{1}.2354284$，

即：$0.173,65 \times 0.990,27 = 0.171,960,4$。

与讷白尔同时代，1617 年，另有巴理知，他亦研究对数。在 1624 年完成巴理知对数表，就是以 10 为底的。在荷兰，佛拉哥[2]曾于 1628 年复刻巴理知对数表，以后此表即流传到中国。因当时来

① Henry Briggs，1556～1630.

② Adriaen Vlacq，1600～1655.

中国的波兰教士穆尼阁[1]，在1653年曾介绍佛拉哥复刻的巴理知对数表给薛凤祚[2]（淄川人，1600～1680），称做《比例对数表》，表中载明：

$$\log 1602 = 3.204662,$$

$$\log 1603 = 3.204933,$$

等等，和现在以10为底的六位对数表相同。当时距1628年不过二十五年。薛凤祚是中国学者介绍对数表以及三角函数对数表的第一人。他曾根据穆尼阁所传授的历算术编《历学会通》，分成正集、续集、外集等三集[3]，其中最早序文在清顺治九年（1652年），较晚序文在清康熙三年（1664年）[4]。

① Jean Nicolas Smogolenski，1611～1656.

② 薛凤祚生卒年见韩梦周《仪甫先生两河清汇叙》。

③ 《历学会通》各集目录见李俨《中算史论丛》第二集，第277～279页，北京，科学出版社（1954年。＊见本书第六卷第682～684页。——编者）。

④ 对数的发明和东来历史，可参看李俨《中算史论丛》第三集，第69～190页，北京，科学出版社（1955年。＊见本书第七卷第82～191页。——编者）。

2　计算尺的尝试

要尝试计算尺，先需要有一种加减计算尺。如在两组纸条或木片上各绘有相等的尺度，如图 2 的 a 和 b 尺度，即可应用。现在要将两数〔3〕和〔5〕相加，先在 a 尺度上找出〔3〕的数字，又在 b 尺度上，以 0 点移在这一点〔3〕的对面，再沿着 b 尺度，找出〔5〕的数字，最后即可在它下面的 a 尺度上得到答数〔8〕，即说明

$$3+5=8。$$

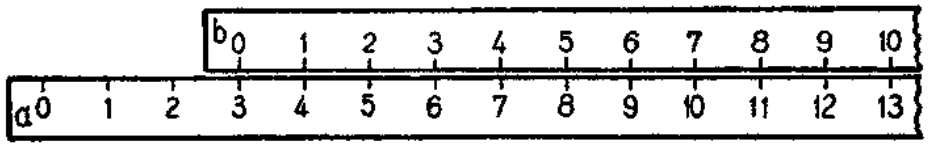


图 2　加减计算尺示意

如要从 8 减去 5，先在 a 尺度上找出〔8〕的数字，次将 b 尺度上的〔5〕数字，放在〔8〕的上面。再次，于 b 尺度 0 点下面找出答数〔3〕，即说明

$$8-5=3。$$

现在我们拟利用对数的原理，试制一个加减可以代乘除的尺度。第一步需要有一个对数尺度。如拟制 1 到 10 的对数尺度，先以 1 到 10 的真数在对数表上查出它相对应的对数值，如表 1 所

示。有了这种对照表，即可制成图 3 中 C 及 D 两尺度。用此尺度，加减可以代乘除。

表 1 真数及对数对照表($x=100\log u$)

真数 u	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.5	4.0
对数 x	0	7.9	14.6	20.4	25.5	30.1	34.2	38.0	41.5	44.7	47.7	54.4	60.2
真数 u	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	
对数 x	65.3	69.9	74.0	77.8	81.3	84.5	87.5	90.3	92.9	95.4	97.8	100.0	

在这两组纸条或木片上，有了距离不相等的对数尺度，如拟将 2 和 3 或 4 相乘，先在 D 尺度上找出注有数字〔2〕的线，并以 C 尺度上的始点〔1〕的线，与此〔2〕的线对齐，再沿着 C 尺度找出注有数字〔3〕或〔4〕的线，于是可在它们相对的 D 尺度上得到答数〔6〕或〔8〕，即

$$2 \times 3 = 6,$$

$$2 \times 4 = 8,$$

余类推，如图 3 所示。

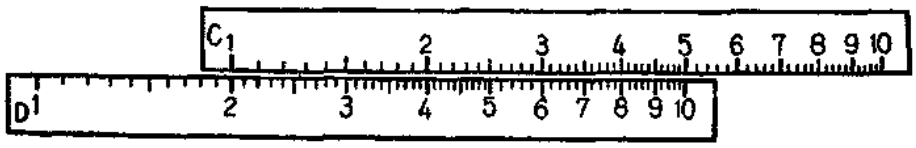


图 3 加减代乘除，1～10 的对数尺度示意

如要 6 被 3 除，先在 D 尺度上找出数字〔6〕的线，次将 C 尺度上数字〔3〕的线与〔6〕的线对齐，于是对准 C 尺度上始点〔1〕的线下面，在 D 尺度上找出答数〔2〕，即

$$6 \div 3 = 2。$$

同理，

$$8 \div 4 = 2,$$

$$10 \div 5 = 2,\text{等等},$$

如图 3 所示。

图 3 所示 C 和 D 尺度，只刻了从 1 到 10 的一段，如用于 2×7 或 3×4 时，则答数将在 D 尺度范围以外，这又说明 C 和 D 尺度最好再延长些①。但在一般计算尺上，C 和 D 尺度并不需要延长，可用 C 尺度的终点〔10〕，对准 D 尺度上的被乘数，同样可在 C 尺度上的乘数下，在 D 尺度上读得乘积，不过须进一位作为答数。在大多数计算尺上另备 A 和 B 尺度，其长度恰为 C 和 D 尺度的一半，因此可以容纳 1～10 及 10～100 数值，如图 4 所示，于是

$$3 \times 4 = 12,$$

$$3 \times 6 = 18,$$

可以在 A 尺度上直接读得乘积 12 和 18。

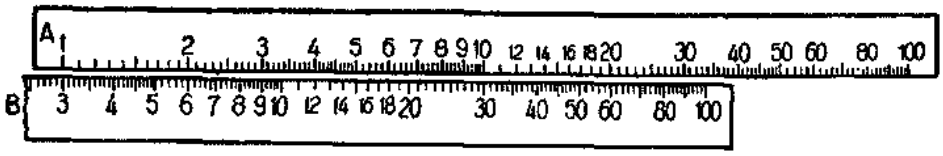


图 4 加减代乘除，1～10 及 10～100 的对数尺度示意

A 和 B 尺度的长度既是 C 和 D 尺度的一半，故按对数原理，A 和 B 尺度上的数值均与 C 和 D 尺度上数值的平方相对应。

十七、十八世纪时，数学家设计计算尺是同时设计“直线形计算尺”和“圆形计算尺”的。因圆形计算尺，比直线形计算尺，另有可取处。如上面说过，有两个尺度 C 和 D，各刻 1～10 的尺

① C，D 尺度实际不需要延长，乘、除计算亦可在 A，B 尺度上进行。下文还有由 $\sqrt{10}$ 或 π 开始的 CF，DF 折尺度，以补这缺点。

度，则 3×6＝18，和 8×8＝64 等的答数，将在 1～10 尺度之外，所以 D 尺度必须延长到 100，即加长一倍。如用圆形计算尺，因为可以“周回旋转”，尺度便不必加长，只在运用时注意“定位”即可。如图 5 是用两个相同的尺度，画在圆弧上套在一起，可以相对转动，其用法完全与直线形计算尺相同。

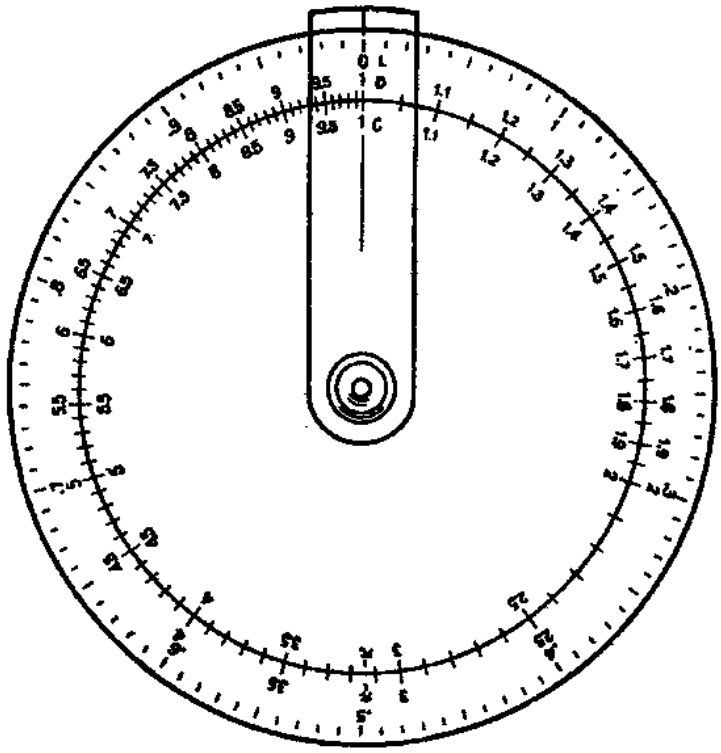


图 5　圆形计算尺示意

在进行计算时，可以看到 3×6＝18 及 3×9＝27 等等，如图 6 所示，是没有什么困难的，这便是圆形计算尺可取的优点。

圆形计算尺还有其他优点，它可以在同心圆上加绘各种尺度，

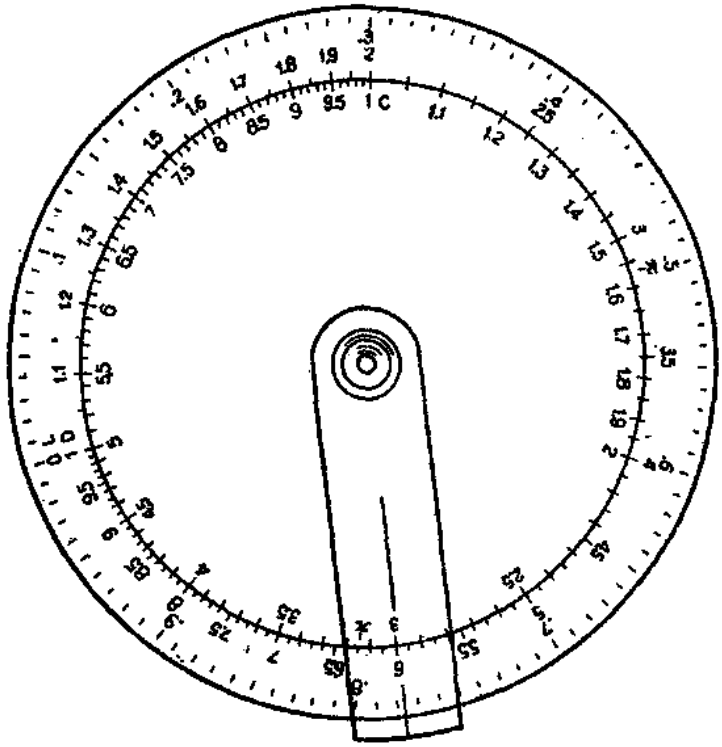


图 6 圆形计算尺的运用示意

制成专用的换算器，以及各项工业机械的工作时间计算器等①。

十七世纪发明对数以后，最先做着上面所说加减代乘除的计算尺度，是 1620 年甘特②的尝试。甘特曾在英国牛津大学毕业，任哥莱斯哈姆③学院教授。甘特在对数发明(1614 年)后，先以 10 为底，算出 $\log \sin x$，$\log \tan x$ 数值，又于 1620 年尝试在一个尺度上，刻着真数的对数值，以及正弦和正切的对数值(即“对数定值数”和“正弦对数”，“正切对数”的数值)等。根据这样刻成的尺度，可以照

① 现在供实际使用的有“机床切削用量圆形万能计算尺”等。

② Edmund Gunter，1581～1626.

③ Gresham.

上面所说的原则，进行乘除计算。他所试制的尺度，长约二英呎，原备演算航海问题之用，大体如图 7 所示。尺面上刻有真数、对数，和三角函数正弦、正切等的对数值，以及其他数值。

1628 年英人温盖[①]亦设计了和甘特类似的计算尺都是固定的，没有滑尺。

中国约于 1680 年前后，早已流传有甘特型计算尺，题有“康熙御制”字样，现藏故宫博物院。又于 1723 年刻本《数理精蕴》书中曾介绍假数尺（下文第三节末另述），上距甘特和温盖约近一世纪。

又中国广东南海人邹伯奇（1819～1869）在他所著的《对数尺记》（1873 年刊本）中亦有另行设计的记载，上距甘特和温盖已二世纪又半（下文第五节另述）。

在欧洲，则 1675 年大数学家牛顿[②]，曾应用甘特或温盖的二、三条对数尺即计算尺来解二次和三次数字方程。

用计算尺解二次和三次数字方程的意义也很明显，今举例说明如下。

（1）求解二次方程

$$x^2 + bx + c = 0。$$

设它的二根为 x_1 和 x_2，此二根如为有理数，则上式可改写为

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0。$$

其中：$c = (-x_1) \times (-x_2)$，　$b = (-x_1) + (-x_2)$。

如在 D 尺度上确定 c 数后，再让 C 尺度在 D 尺度上左右滑动，使 $c = x_1 \times x_2$，即在 C 尺度上假定一数（x_1 或 x_2），使对着 D 尺度上的 c 数，则 C 尺度上的 1（或 10）对着 D 尺度上的数，即 x_1 或

① Edmund Wingate，1593～1656.

② Isaac Newton，1642～1727.

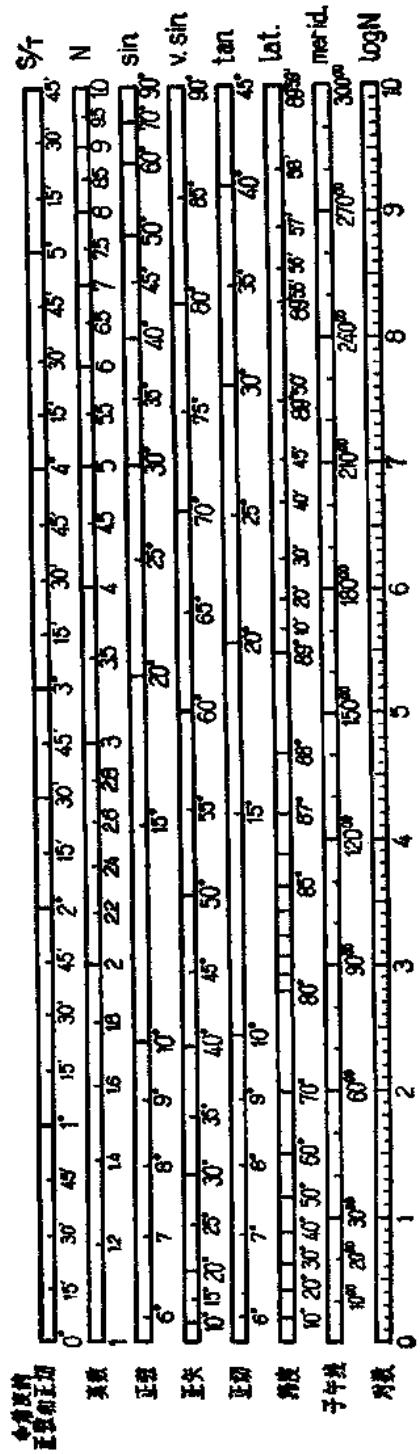


图 7 甘特型计算尺示意

x_2。同时要求 x_1 与 x_2 的和或差必须与 b 数相等，因此常要滑动C尺度，试读 x_1 和 x_2 二数。如此所得即为所求的二根。

例如 $x^2+bx+c=0$，　$x=x_1,x_2$

$x^2-9x+18=0$，　$x_1=3$，　$x_2=6$

$x^2+9x+18=0$，　$x_1=-3$，　$x_2=-6$

$x^2-3x-18=0$，　$x_1=-3$，　$x_2=6$

$x^2+3x-18=0$，　$x_1=3$，　$x_2=-6$。

上面各例，说明数字之外，还要注意正负号。如能改用倒尺，也同样可以计算。以倒尺求解"二次数字方程"根值时，可用两个相同的尺度，一个放在寻常位置，如图8中的D尺，另一个C尺放在颠倒位置，称为"滑尺倒放"，同样可以左右滑动。图8仅是示意性质。现在大多数计算尺上均另有C的倒数尺度CI，则可不必把C尺度倒放。

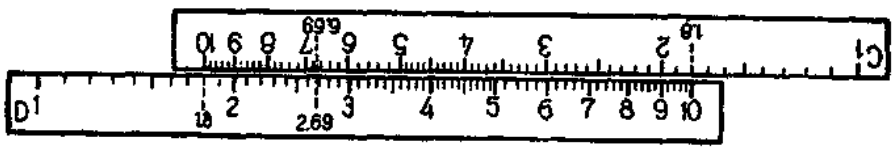


图8　应用倒尺解二次数字方程示意

如求 $x^2-4x-18=0$ 的二根 x_1 和 x_2，先以倒放的C尺的1(或10)对准D尺的18(即方程中的 c 值)，如图8所示。次沿着D尺的2,3,4,5,6…刻度线向右，同时沿着倒放的C尺上的刻度线向左，在D尺上相近〔3〕的左方及在倒放的C尺上相近〔7〕的右方，求得二数，使其差数为-4，即相当于方程中的 b 值，

亦即　$b=-6.69+(+2.69)=-4$，

于是：　$x_1=6.69$，　$x_2=-2.69$。

同理$x^2+7x+12=0$， $x_1=-3$， $x_2=-4$；

$x^2-3x-9=0$， $x_1=4.85$，$x_2=-1.85$

都可同样求得。

(2)求解三次方程

$$y^3+py^2+qy+r=0。$$

先以$\left(x-\frac{p}{3}\right)$代$y$，化上式成

$$x^3+ax+b=0;$$

其中

$$a=q-\frac{p^2}{3},$$

$$b=\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r。$$

计算时，再化为

$$x^2+\frac{b}{x}=-a$$

则可如前例求得各根。

例如，求解三次数字方程

$$x^3-13x+17=0$$

的x_1，x_2及x_3三根，先以x除上式，得二次方程形式的

$$x^2+\frac{17}{x}=13。$$

有了二次方程形式的方程，即可求得它的二根x_1和x_2。如前例，先以倒放后C尺的1(或10)，如图9，对准D尺上的17。次在D尺上求得一数2.475(x_1)，而在上面，倒放的C尺上求得

$$\frac{17}{x_1}=\frac{17}{2.475}=6.87。$$

同时从A尺上对准D尺上2.475处，求得2.475的平方为6.13($x_1^2=6.13$)，于是$6.13+6.87=13$与要求相符，故$x_1=2.475$为

所求的第一根，如图 9 所示。用同样方法，可求得第二根 $x_2=-4.135$。

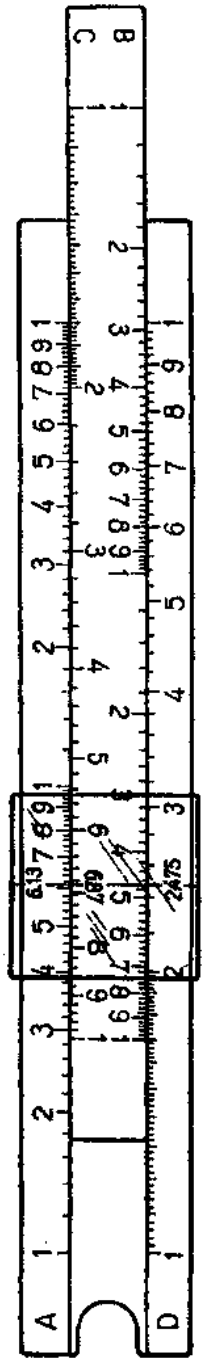


图 9 用A,C,D尺度解三次数字方程示意

又因 $x^3-13x+17=0$ 式中 x^2 项系数为 0，故知

$$x_1+x_2+x_3=0。$$

于是第三根

$$\begin{aligned}x_3&=-(x_1+x_2)\\&=-(-4.135+2.475)\\&=1.660。\end{aligned}$$

亦可从 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-b$ 求得 $x_3=\dfrac{-b}{x_1\cdot x_2}$，

即 $x_3=\dfrac{-17}{2.475\times(-4.135)}=1.660$。

以上即说明牛顿于 1675 年用三条对数尺度（例如上述的 A，C（倒放）及 D 尺度）解三次方程的方法。三次方程 $x^3+ax+b=0$ 的三个根 x_1,x_2 和 x_3 求得后，再以 $y=x-\dfrac{p}{3}$ 依次代入，即可求得三次方程 $y^3+py^2+qy+r=0$ 的三个根 y_1,y_2 和 y_3。

例如：求解三次数字方程

$$y^3+4.8y^2+1.02y-3.59=0。$$

先以 $x-1.6$ 代 y 化简，或以

$$a=1.02-\frac{4.8^2}{3}=-6.66$$

及 $b=\dfrac{2\times4.8^3}{27}-\dfrac{4.8\times1.02}{3}-3.59$

$$= 2.97$$

代入 $x^2+ax+b=0$ 式，

得 $$x^3 - 6.66x + 2.97 = 0,$$

即 $$x^2 + \frac{2.97}{x} = 6.66。$$

用上述D.C及A三种尺度，将C尺度的1对准D尺度的2.97，再在D尺度上求得 $x_1=2.32$，则在A尺度上求得 $2.32^2=5.38$，又在倒放的C尺度上求得 $\frac{2.97}{2.32}=1.28$，相加得 $6.66(=a)$，与要求符合，故 $x_1=2.32$。

用同法得 $x_2=0.46$， $x_3=-(x_1+x_2)=-2.78$。

既得 x_1, x_2 和 x_3，再代入 $y=x-1.6$，

即得 $y_1 = 0.72$， $y_2 = -1.14$，和 $y_3 = -4.38$。

甘特型计算尺是一条一条分散的，用手将它贴合着，互相滑动来作计算，不是和现在的计算尺一样，将“滑尺”插在固定尺中间，互相滑动，所以运用时还不方便。合于理想的要求，须使各条尺度原则上要贴合着，而在进行计算时又可相对滑动。此项进一步改良的设计，直到1630年和1632年英人特雷姆[1]和吴德[2]始有成就。

特雷姆是伦敦的数学教员，他在1630年写了一册30页的关于“圆形计算尺”的说明书。此书定名为《Grammelogia》直译作《数学环》。现在英国剑桥[3]大学图书馆尚藏有一本原书。这本小册子未谈到“直线形计算尺”。此书出版二、三年后，至少有四次重版，每次都有增补。例如剑桥大学图书馆另藏有一本1630年印本的《数

① Richard Delamain.

② William Oughtred, 1574～1660.

③ Cambridge.

学环》,即增补有 17 页。又伦敦英国博物院和牛津[1]大学的博来因[2]图书馆,又分别收藏有 1632、1633 年印本的《数学环》,页数已由 30 页增加到 113 页。

特雷姆对于自己发现的《数学环》十分自负,他在 1630 年致书给当时英王查理一世[3]说:《数学环》方法和普通算法之比,有如马力和人力之比。实际上此项《数学环》也只是就甘特的计算尺原则加以改善,应用对数尺度制成两个圆盘,一个贴住另一个,又可相对转动以便计算而已。

前文所述,和特雷姆同时又有吴德,他是一个事务员,对研究数学具有兴趣,写有几种数学教科书,曾首先说到自然对数。在 1618 年,来特[4]译本的《讷白尔对数表》,其中不记名的附卷中,开始说自然对数,又说到内插法[5],疑是吴德所记。所用内插法是以 72 个正弦的对数,求其余的对数。又在表中以 $\log 10=2.302584$,现在书中则以 $\log_e 10=2.302584$。

吴德曾襄助特雷姆研究数学,他著有《比例圆》一书,说明他所设计的"圆形计算尺"。此书于 1632 年曾由他的学生奥·和事德[6]由拉丁文译成英文。吴德的圆形计算尺较特雷姆圆形计算尺为进步,因系两面的,最多有八个圆环,互相套着,可以相对转动。

---

① Oxford.

② Bodleian.

③ King Charles Ⅰ.

④ Edward Wright.

⑤ interpolation.

⑥ William Foster.

3　十七世纪计算尺的设计

在说明1630年特雷姆和1632年吴德新计算尺的设计以前，先就计算尺的构成部分作一介绍。

此时计算尺的构成部分，包括：

（甲）一支中间有槽而固定的尺，称做“固定尺”，上面的称做“上尺”，下面的称做“下尺”。

（乙）在固定尺中间一条槽内，插有可以左右移动的尺，称做“滑尺”。另有：

（丙）一个在固定尺上可以左右移动的小玻璃框，称做“滑标”。在滑标的玻璃框的玻璃板上，中间刻有一条或二条直线，称做“标线”或“发线”。不过此项现代式构成部分，特别“滑标”是迭经演变方有成就的。

先举一个最简单的计算尺，就是长125毫米的小型计算尺，如图10及图11所示的图形为例。其中固定尺的正面上刻有$D(N)$，$A(N^2)$及$K(N^3)$尺度，均系对数尺度；另有0～10的L尺度，系普通尺度，可求得$\log N$。滑尺的正面上刻有$C(N)$，$CI\left(\frac{1}{N}\right)$及$B(N^2)$尺度，均系对数尺度，滑尺的反面上刻有$S$（正弦），$T$（正切）及$S/T$（小角度正弦与正切）合用的尺度，均系对数尺度。

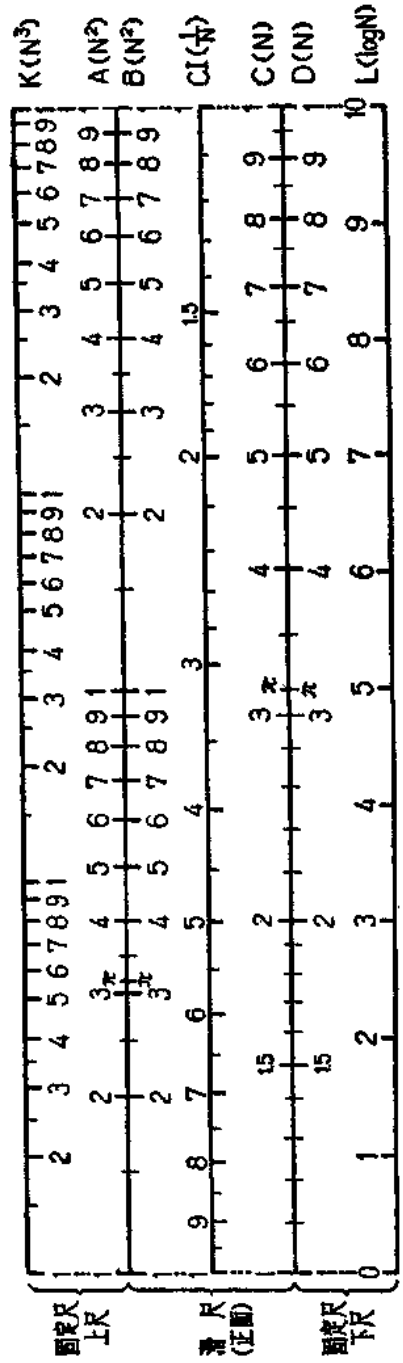


图10 小型计算尺正面示意

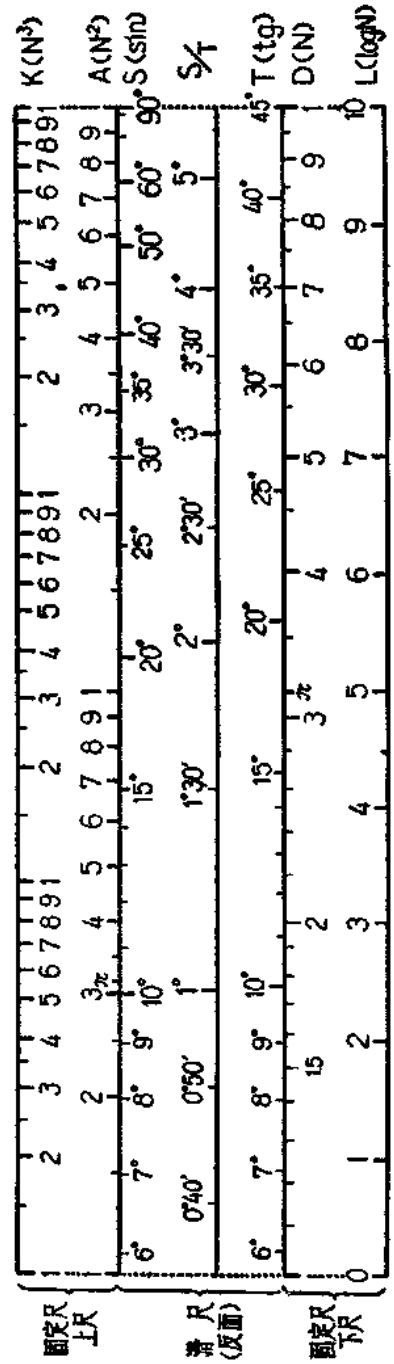


图11 小型计算尺反面示意

因 C 和 CI，A，K，L 以及 S，T，S/T 等尺度，都是互相对照的，不需要移动滑尺，即可求得相应的数值。例如 $N=2$，对照着 $\frac{1}{N}=0.5$，$N^2=4$，$N^3=8$，$\log N=\log 2=0.301$ 等等。

又如 $\mathrm{tg}20°=0.364$， $\mathrm{tg}45°=1.000$；

$\sin 20°=0.342$， $\sin 90°=1.000$；

又因 $\sin 0°34'=0.0099$， $\sin 5°43'=0.0996$；

$\mathrm{tg}0°34'=0.0099$， $\mathrm{tg}5°43'=0.1001$

在 5°以下小角度的 sin 和 tg 数值是相等和近似的，例如：

$$\sin 2° = \mathrm{tg}2° = 0.035。$$

因此可另刻 S 与 T 合用尺度，以便查看这小角度区间的正弦或正切的对照近似数值。

由于 1620 年甘特对计算尺有了初步尝试，以后十年，即 1630 年特雷姆和博朗[①]都作了一些改进设计[②]。其中较重要的改进，即在一条大尺槽中间插入可以左右移动的小“滑尺”，或在一个圆形板槽内镶有可以周回转动的小圆形板。特雷姆首先设计的“圆形计算尺”，中间镶有可以转动的圆板，在前文亦已提及。同时期较有成就的，当推 1633 年吴德[③] 所设计的“圆形和直线形计算尺”。数学史家现在都推定吴德是计算尺发明家，因为计算尺到吴德时，确开展了一个新局面。上距讷白尔发现对数，亦不过二十年。吴德在 1620 年即设计新的计算尺，到 1632 年才正式发表。他的学生特雷

① Thomas Brown.

② 参看 D. E. Smith：《数学史料》(*A Source Book in Mathematics*)，第 1 版，pp. 156～159，New York，1929 年，书内引 F. Cajori：《*A History of the Logarithmic Slide Rule*》，New York，1909 年。

③ 参看 D. E. Smith：《数学史料》前书 pp. 160～164，内引 F. Cajori：《*A History of the Logarithmic Slide Rule*》，New York，1909 年。

姆虽然发表新式计算尺较早二年，也是学习他的成就。

吴德的“圆形计算尺”，将平面圆分做八层，每层记数。最外一层(即第一层)，相当于直线形计算尺的最下层。

第一层记sin5°45′～sin90°的度数，

相当于对数值 $\bar{1}.0008$～0.0000，

真数值 0.1002～1.0000；

第二层记 tg5°45′～tg45°的度数，

相当于对数值 $\bar{1}.0030$～0.0000，

真数值 0.1007～1.0000；

第三层记 tg45°～tg84°17′的度数，

相当于对数值 0.0000～1.0000，

真数值 1.0000～10.0000；

第四层记 1～10 的真数值 N，

第五层记 0～1 的对数定值数 $\log_{10}N$，

第六层记 tg84°17′～tg89°26′的度数，

相当于对数值 1.0000～2.0000，

真数值 10.0000～100.0000。

第七、八层记 tg0°34′～tg5°43′的度数，

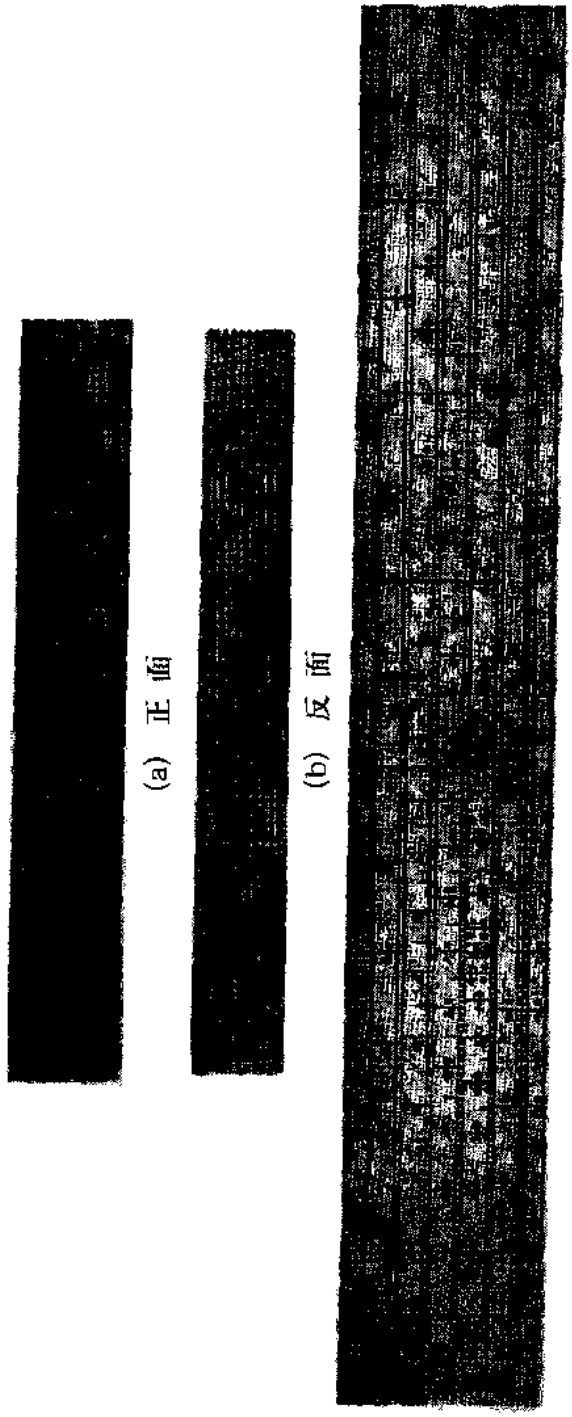
sin0°34′～sin5°44′的度数，

相当于对数值 $\bar{2}.0000$～$\bar{1}.0000$，

真数值 0.0100～0.10000。

吴德之后，又有人对计算尺的设计加以改善。例如在 1654 年，毕沙溪[①]曾就吴德大、小尺的配备上改善，使小尺在原则上，留在大尺的槽内，可以左右滑动。又将原来长二英呎的计算尺缩短成十英吋左右，以便携带。

① Robert Bissaker.



(a) 正面

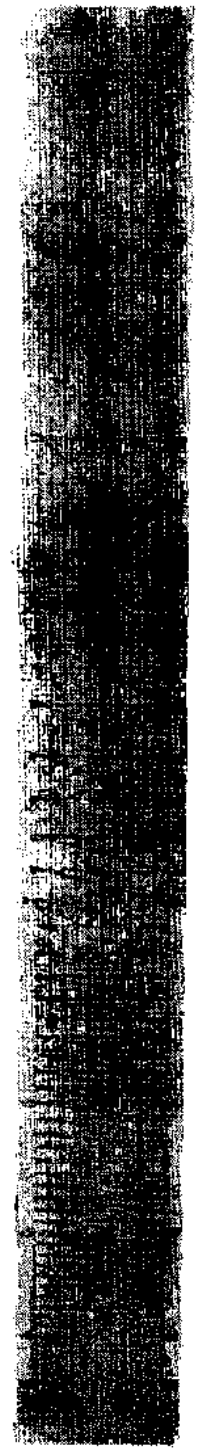
(b) 反面

(c) 正面放大

图12 北京故宫博物院所藏甘特型计算尺（约于1680年前后由中国仿制）
原物长19厘米，宽3厘米

(a) 假 数 尺

(b) 正弦假数尺(正面)



(c) 切线假数尺(反面)

图13 北京故宫博物院所藏假数尺
原物长35厘米，宽4厘米

1657 年，派脱立奇[1]发现计算尺可以两面记数，并拟在大、小尺中间再套一个中型的尺度。此项中型尺度因应用不便，未曾广泛采用。

在此时期，大数学家牛顿亦重视当时流行计算尺的设计，曾用三条对数尺度，解二次数字方程和三次数字方程，并建议另加“滑标”，以便作指示之用。

1677 年，克盖谢尔[2]则累积前人的经验，再加改进，首先以木材制造。1682 年，以“克盖谢尔型计算尺”名义，在市上出售，这是第一种市售的计算尺，上面还没有“滑标”的设备。

到 1683 年，埃弗拉德[3]为求革新起见，计划创造一种计算尺，将“滑标”放在固定尺的上面和下面，即大尺上下各有一个滑标可以滑动。又将计算尺改名为“滑动尺”[4]，以符事实。此后“滑动尺”的名称是被采用了，可是上下安插“滑标”的方法还未广泛应用。直到 1851 年中间一个小型“滑标”出现后，在配合计算各种问题上，方有成就。

十七世纪末期，即 1697 年，汉特[5]以为在“固定尺”和“滑尺”，即大、小尺上，可酌量刻记多种多样的数值，如圆周率“π”刻线，立方数“K”尺度等等。有了 K 尺度，于是配合 A，D 尺度，可以不必移动滑尺，很容易求得 N^3，$N^{\frac{1}{3}}$，$N^{\frac{2}{3}}$ 及 $N^{\frac{3}{2}}$ 的数值。

汉特又曾了解“滑尺”可以倒插入固定尺之内，称做：“滑尺倒

---

① Seth Partridge.

② Coggeshall.

③ Thomas Everard.

④ Slide Rule.

⑤ William Hunt.

放”①。

掌握“滑尺倒放”原则，不独$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{a^3}$；$\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$等各项数值，以及$a\times b\times c$，$\frac{a}{b\times c}$，$\frac{a\times b}{c}$形式的乘除都容易算出，即二次或三次数字方程的有理数根，亦容易求解。汉特的“滑尺倒放”建议虽然是十八世纪应用“倒数尺度 CI”② 的最先倡议者，可是在当时未曾得到各方面的注意。

中国约于 1680 年前后亦已有假数尺和正弦及切线假数尺。现在北京故宫博物院即藏有此项假数尺的牙制模型③。每尺列一数，称“康熙御制”，如图 12 及 13 所示。

至 1723 年刻本的《数理精蕴》书中，除记明八线对数表之外，并于下编卷四十，介绍假数尺的作法如下：

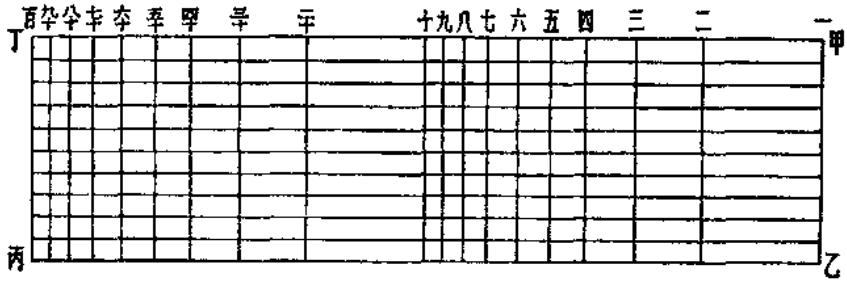


图 14 《数理精蕴》书中介绍的假数尺之一

（根据原书复绘缩制）

① 参看（苏）巴诺夫著，浦允南译：《怎样使用计算尺》，第 63～77 页，“滑尺倒放”，上海机电图书出版社（1954 年）；或（苏）巴诺夫著，李学荣译：《计算尺》，第 67～84 页，上海商务印书馆（1954 年）。

② 1795 年伯秦（A. Beghin）最先设计倒数尺度 CI。

③ 假数尺模型共分二组：其一，即甘特型计算尺，长 19 厘米，宽 3 厘米；其二，具有假数尺，正弦假数尺（反面有切线假数尺），长 35 厘米，宽 4 厘米。

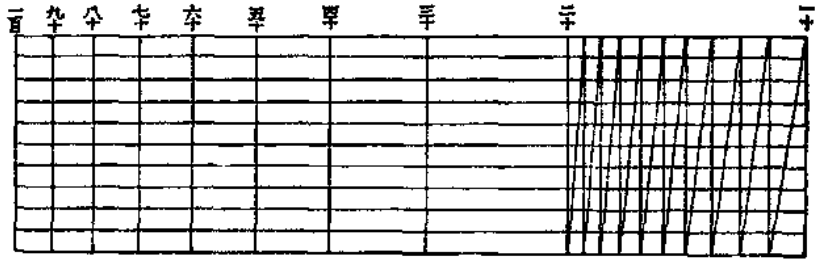


图 15 《数理精蕴》书中介绍的假数尺之二

（根据原书复绘缩制）

假数（即对数，下同）尺：按分厘尺二百分之度，作甲丁、乙丙二平行线，又作甲乙、丁丙二线，令成直角。乃取假数表内自一至一百所对之假数，于分厘尺上取其度（如二之假数为〇．三〇一，则为 3 寸零 1 厘。）截甲丁、乙丙二边，依所截点作线，与甲乙边平行，又将甲乙、丁丙二边各平分为十分，作线与甲丁平行。自一十以上，又依分厘尺法，于各平行线之间，悉作斜线，则斜线与直线相交之处，即其间零数之度。如一〇至一一之斜线，其与第一直线相交之处，即一〇一也。故假数虽止于一百，而可以当一千之用。若尺止长一尺，则如上图截去自一至九之数，从一十起至一百止。盖十之假数为一，而百之假数为二。今既截去一尺，则假数即减去首位之一，取其零数作寸、分、厘、毫。用时则以十为单。总之假数尺虽始于一十终于一百，小之则可以为单、为零①，大之则可以为千、为万，皆因假数之首位，虽递加一数，而其后之零数皆同，故可以进退为用。

① 此处原文的零（0）字恐有误，本句似宜改为：……小之则可以为 1，为 0.1，为 0.01；大之则可以为 1000，为 10000，……；因 $\log 0.1=\bar{1}.0000$，$\log 0.01=\bar{2}.0000$，$\log 0=-\infty$。前二个数的对数定值数相同，后一个数（0）的对数定值数并不相同（济之附注）。

惟在比例分明，加减详审，则其用自无穷也。

《数理精蕴》下编，卷四十，复引有：正弦假数尺，切线假数尺，割线假数尺。

4 十八、十九世纪计算尺的改进

自十七世纪发明计算尺，到现在已有三百余年的历史。随着时代和社会的需要，曾逐渐演变。如前所述，最初是应用对数原理，以两尺贴合应用，实际只是一个尺度。1633 年吴德虽已有若干层圆尺可以配合运用，设计还不周全。1677 年克盖谢尔发表有“滑尺”的计算尺，1682 年在市上有克盖谢尔型计算尺出售，此项计算尺虽尚未有“滑标”，但已是第一个市售的计算尺。

以后厂家不断改进，各科学家亦为着自己的需要，特制各项计算尺。如 1722 年英国伦敦数学计算仪器行业者瓦纳[1]曾改善“克盖谢尔型计算尺”配以平方和立方数。其余如 1775 年瓦特[2]曾设计精密计算应用的计算尺，称做“沙护[3]型计算尺”。同时罗伯孙[4]也为航海工程师设计一种“航海专用计算尺”。

十八世纪还有很多数学家重视此项工作，如克来安[5]在 1720

---

① John Warner.

② James Watt，1736～1819.

③ Soho.

④ John Robertson，1712～1776.

⑤ Jean Baptiste Clairant.

年设计“圆形计算尺”，又来护孙[1]在 1787 年前后，设计各种形式的计算尺，并曾继续亚当姆[2]在 1748 年已有的“螺线型计算尺[3]”，另行设计新的螺线型计算尺。

十八世纪欧洲文具厂家所制造的计算尺多是金属制品。教育家亦在数学教科书上介绍此项新工具，可是大型教学用的计算尺还未出现。到十九世纪，制造计算尺方始转变为机械化，并采用木制，代替金属制，产量亦大大跃进。教学应用的大型计算尺亦同时出现。

十九世纪初期，1815 年，英国医学博士古格脱[4]首先发现“重对数尺度 LL”[5]。有了重对数尺度，于是求某一数的任意次方，以及任意次方根和求某数的自然对数等，便容易得多。

LL1，LL2，LL3 重对数尺度是一个从 $e^{0.01}$ 到 e^{10} 的长尺度，分为三段，其中：

LL1 段自 $e^{0.01}=1.010$ 到 $e^{0.1}=1.105$，

LL2 段自 $e^{0.1}=1.105$ 到 $e=2.718$，

LL3 段自 $e=2.718$ 到 $e^{10}=22,026$。

重对数尺度和 C 或 D 尺配合应用，可以作以下的运算：

(甲)求 e 的正数次乘方；

(乙)求自然对数值(真数在 1.01 到 22,026 之间)；

(丙)求任何数的乘幂和方根。

又 LL1I，LL2I，LL3I 重对数尺度，是 LL1，LL2，LL3 相对的

---

① William Nicholson，1753～1815.

② George Adams.

③ Spiral Slide Rule.

④ Peter M. Roget.

⑤ Log-Log scale.

倒数尺度。有了 LL1I,LL2I,LL3I 尺度,更可以作以下的运算:

(丁)求 e 的负数次乘方;

(戊)求任何小数的乘幂和方根[1]。

十九世纪中叶,即 1850 年,法国军人孟海姆[2]确定将"滑标"镶在他所设计的孟海姆型计算尺中间,可以左右滑动[3],不久即被各文具厂家所欢迎。最先在 1880 年,法国革莱特厂[4]开始制造孟海姆型计算尺,尺度的布置情形如图 16 所示。

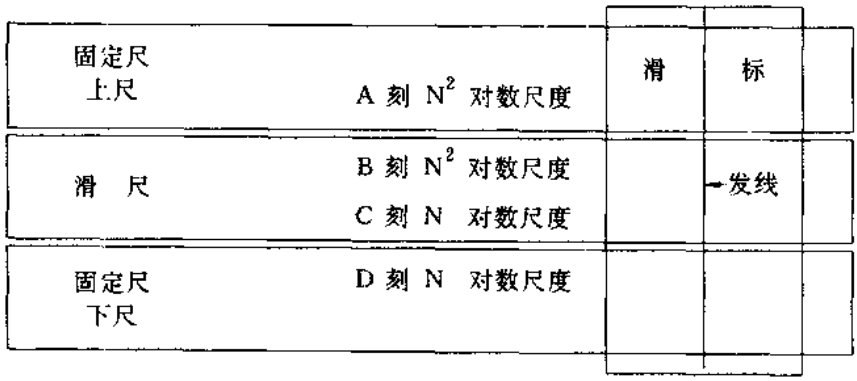


图 16 孟海姆型计算尺的尺度排列示意

孟海姆型计算尺可算是十九世纪中叶的标准计算尺。

上面所述孟海姆型计算尺为欧洲各厂家所广泛采用,所以 1890 年德国飞伯厂[5]亦制造孟海姆型计算尺,以后莱士[6]厂又改进为双面刻尺度的莱士型计算尺。

莱士型计算尺的尺度布置如图 17 所示。上述莱士型计算尺配

---

① 参看"6. 二十世纪计算尺的成就",内另有举例说明。

② Amédée Mannheim,1831~1906.

③ 又据传说,此新"滑标"是 1857 年巴黎另一人发明的。

④ Tavernier=Gravet.

⑤ A. W. Faber Co..

⑥ Rietz Co..

上“滑标”，是和前文“3、十七世纪计算尺的设计”节内所介绍以及现在简单的计算尺完全相同。

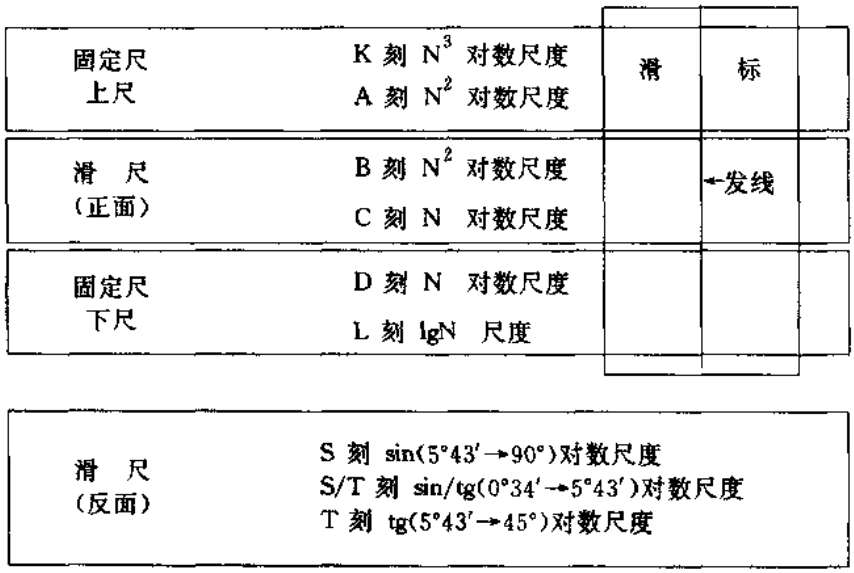


图 17 莱士型计算尺正面及滑尺正、反面的尺度排列示意

在此时期，对计算尺设计最有贡献的，当推奥·柯斯[①]。1897年他在孟海姆型计算尺上配合 K，CI 尺度之外，再配合 CF，DF，CIF 各项尺度，首先定名为多型孟海姆型计算尺。以后更加改进，定名为多型双面计算尺[②]。

现在就 CF，DF 的作用加以说明。前面已说过普通“直线型计算尺”内 C 和 D 尺度，只刻从 1 到 10 的一段，如 2×7 或 3×4 等等，则答数落在 D 尺度范围以外。这就说明 C 和 D 尺度需要改进。为补救这个缺点起见，上述 2×7 或 3×4 的计算，亦可在 A，B 尺度上进行，但 A，B 尺度刻度较密，得数不易准确。

① William Cox.

② Polyphase Duplex Slide Rule.

1817 年伯朋[1]建议并设计将 C,D 尺度上由 $\sqrt{10}$到 $\sqrt{10}$的各数,另刻成 CF,DF 尺度,称做"折尺度",列在上面,如 A,B 尺度之例,和 C,D 尺度相对照。此项 CF,DF 尺度的 1 是放在计算尺的中点,于是 C,D 和 CF,DF 各数的对照情形如下:

$$\text{DF}: \sqrt{10}\cdots\cdots 1\cdots\cdots \sqrt{10}$$

$$\text{CF}: \sqrt{10}\cdots\cdots 1\cdots\cdots \sqrt{10}$$

$$\text{C}: 1\cdots\cdots \sqrt{10}\cdots\cdots 10$$

$$\text{D}: 1\cdots\cdots \sqrt{10}\cdots\cdots 10$$

因此 2×7 与 3×4 可直接在 CF,DF 尺上进行,它的答数可在 CF,DF 尺度范围以内。又因 CF,DF 尺的刻度和 C,D 相同,亦和 C,D 尺度同样精密。

奥·柯斯采用伯朋的建议,制成多型双面计算尺时,上述折尺度是用 π 来代替 $\sqrt{10}$的,如图 18,虽意义和上面相同,其实用 $\sqrt{10}$ 比较合理。

有了 CF,DF 尺度,在进行乘除数,以及乘除联合运算时,可尽量节省"滑尺"的滑动次数,因此不仅在计算上节省时间,并且可以减少错误。

例如:在求 $$\frac{4.75\times 51}{16.5}$$

这样的乘除运算时,如只有 C,D 尺度,则首先进行 4.75÷16.5 运算,先置 C:165 在 D:475 上,可得到约数。

$$\frac{4.75}{16.5}=0.288,$$

再进行0.288×51,即得$\frac{4.75\times 51}{16.5}=14.7$。但在C尺度上看不到

① Sylvanus Bevan.

（正面）

固定尺 上尺	DF 刻 $\pi\to\pi$ 对数尺度	滑	标	
滑　尺	CF 刻 $\pi\to\pi$ 对数尺度 CIF 刻 CF 倒数的对数尺度(红) C 刻 1→10 对数尺度		←发线	
固定尺 下尺	D 刻 1→10 对数尺度			

（反面）

固定尺 上尺	K 刻 $1\to10^3$ 对数尺度 A 刻 $1\to10^2$ 对数尺度	滑	标	
滑　尺	B 刻 $1\to10^2$ 对数尺度 S 刻 sin(5°43′1→90°)对数尺度 T 刻 tg (5°43′→45°)对数尺度 CI 刻 C 倒数的对数尺度(红)		←发线	
固定尺 下尺	D 刻 1→10 对数尺度 L 刻 lg(1→10)尺度			

图 18　奥·柯斯多型双面计算尺正、反面的尺度排列示意图

C：51 的数字，即 51 已在 C 尺度的范围以外，必须先将“发线”对准 C：1，再将“滑尺”向左移动，使 C：10 对准“发线”，另在 C：51 下，求出 D：147。定位后得到

$$\frac{4.75\times51}{16.5}=14.7。$$

如有 CF，DF 尺度，则因上述$\frac{4.75}{16.5}$所得$\frac{4.75}{16.5}=0.288$ 在 CF：1 的对面，DF 尺度同样可以看到 DF：0.288，所以只将“发线”对准 51，即可在 DF 尺度上看到 DF：147，定位后即得

$$\frac{4.75\times51}{16.5}=14.7,$$

不必移动“滑尺”。

总的来说，C，D 尺度和 CF，DF 尺度联合运用，再配合 CI 或 CIF 尺度时，即 $a\times b\times c$，$\frac{a}{b\times c}$，$\frac{a\times b}{c}$等乘除算法，一定可以减少

“滑尺”的滑动次数，既省时间，又不易错误，不多举例也可了然。

1897 年奥·柯斯设计的多型双面计算尺是现代式的计算尺。正反面的尺度排列情况，如图 18 所示。

1900～1909 年美国克飞尔士公司所制造的重对数多型双面计算尺即按照奥·柯斯多型双面计算尺略加演变而得，其正、反面的尺度排列形式如图 19[1] 所示。

（正面）

固定尺 上尺	K 刻 $1\to10^3$ 对数尺度 DF 刻 $\pi\to\pi$ 对数尺度	滑	标
滑　尺	CF 刻 $\pi\to\pi$ 对数尺度 CIF 刻 CF 倒数的对数尺度 CI 刻 C 倒数的对数尺度 C 刻 $1\to10$ 对数尺度		←发线
固定尺 下尺	D 刻 $1\to10$ 对数尺度 L 刻 $\lg(1\to10)$尺度		

（反面）

固定尺 上尺	LL0 刻 $e^{0.001}\to e^{0.01}$对数尺度 A 刻 $1\to10^2$ 对数尺度	滑	标
滑　尺	B 刻 $1\to10^2$ 对数尺度 S 刻 $\sin(5°43'1\to90°)$对数尺度 T 刻 $\mathrm{tg}\ (5°43'\to45°)$对数尺度 C 刻 $1\to10$ 对数尺度		←发线
固定尺 下尺	LL3 刻 $e\to e^{10}$对数尺度 LL2 刻 $e^{0.1}\to e$ 对数尺度 LL1 刻 $e^{0.01}\to e^{0.1}$对数尺度		

图 19　克飞尔士公司[2]重对数多型双面计算尺正、反面的尺度排列示意

十九世纪末期，以及二十世纪初期，世界著名的计算尺制造厂家，除上述德国的飞伯厂，美国的克飞尔士公司，法国的革莱特厂

① 图 18 及图 19 的 CF 及 DF 尺度，两端是 $\pi\to\pi$，是美国厂家采用的方式，至今未变。我国及日本厂家所制的计算尺均改用 $\sqrt{10}\to\sqrt{10}$，比较合理。

② Keuffel & Esser Co..

之外，还有德国的列斯提来厂[1]，英国的特维[2]厂，日本的逸见[3]厂及理研[4]厂等。各厂家所制造的计算尺，曾广泛的输往世界各国。

① Nestler.

② Davis.

③ Hemmi.

④ Relay.

5 十九世纪计算尺输入中国

十九世纪西洋数学第二次输入中国，李善兰(1811～1882)在1859年曾和伟烈亚力[1]共译棣么甘[2]所著的《代数学》[3]十三卷。

查棣么甘在1841年又曾著专书介绍“直线形和圆形计算尺”，并讨论计算尺上“滑标”放大问题，以及计算尺理论。计算尺亦于此时再输入中国，所以邹伯奇[4] 所著书内，曾有《对数尺记》一卷(1873年刊本)。又马良自称“求在我者”亦有《尺算征用》(1891)一书，说明新式计算尺如何计算乘除，开平方、立方以及计算利息诸数[5]。

邹伯奇所介绍的对数尺[6] 是吴德以前的计算尺。此项计算尺的截面为正方形，长为二百厘米。每尺各刻四条尺度，如左右二尺所记。“左尺一”及“右尺一”均是平分尺度，代表$\log N$值；其他“左尺二”和“右尺二”的一半是对数尺度，代表N值；尚有“右尺二”的

---

① Alexander Wylie，1815～1887.

② Augustus De Morgan，1806～1871.

③ *Elements of Algebra.*

④ 字特夫，广东南海人，1819～1869。

⑤ 见李俨《中算史论丛》第二集，第188页(*见本书第六卷第586页。——编者)。

⑥ 邹伯奇所制的计数尺模型，以及他的遗著，于1954年由邹孟才、邹孟道献给广州市博物馆，参看《文物参考资料》，1954年8月期，第150页。

一半与“左尺三”,“左尺四”和“右尺三”,“左尺四”是诸三角函数及其他数的对数值,如图 20 及 21 所示。计算时,左、右尺互相对照,上下移动,即可进行加减和乘除。这是最初尝试而尚未成熟的计算尺,可是邹伯奇当时尚未知另有新式计算尺已经成功,以为此项计算尺已有七项好处(七善),而主要工作意义,是可以加减代乘除。

邹伯奇所著《邹征君遗书》(有 1873 年刊本)第四种是《对数尺记》一卷,介绍计算尺,书内分五段,即:(一)形制,(二)界画,(三)致用,(四)诸善,(五)图式。

他介绍对数尺时称:“用木二条,长短取便,……尺有四面,面方(面宽度)皆等,分划各线。”

如左尺一有:平分数,

左尺二有:对数总线,

左尺三有:正弦,余弦;余割,正割,

左尺四有:正切,余切;余切,正切。

右尺一有:平分数,

右尺二有:各物同重异积,

各面同幂异边,

各体同积异边,

有:对数总线,

右尺三有:正割,余割;余弦,正弦,

右尺四有:正切,余切;余切,正切。

在邹伯奇所著《对数尺记》以前,尚有张作楠(1772～?)所著《翠薇山房算书》五卷中的《对数尺用法》一卷①。因此书未曾刊布,

① 见李俨著《中算史论丛》第二集,第 191 页,所引《金华县志》卷十五,1915 年排印本(*见本书第六卷第 590 页。——编者)。

无从了解详细内容如何，只能猜想是说明《数理精蕴》书中的假数尺而已。

到马良《尺算征用》(1891 年)所介绍的计算尺，则是新式的(计)算尺。其中称“固定尺”为“根槽”，称“滑尺”为“游表”，或为“槽尺”。并说明称：

> 其尺之制，刳木为槽，槽内陷置游表，表与槽凹，施牝牡笋，虽斗合密切，而移展自如。

此项计算尺长约八寸。

书中并附八线表，介绍正弦、余弦和正切、余切的数值。此计算尺除可算乘除、开平方数之外，并可开立方数，及算三角函数数值，是根据当时西洋厂家新制莱士型计算尺而做说明的。

6　二十世纪计算尺的成就

二十世纪计算尺的成就，计有下列数项：

第(一)项是“重对数尺度”的广泛应用；

第(二)项是“矢量”以及“双曲线对数尺度”的发明。

以上两项都是值得记录的成就。

1923 年伯士特[①]教授设计在计算尺上刻双曲线对数尺度。1929 年文伯士[②]教授设计“矢量重对数双面计算尺”[③]。

第(一)项　重对数尺度的广泛应用

重对数尺度虽然是 1815 年古格脱所发现，前已述及，但直到二十世纪，各国厂家方广泛制造此项重对数尺度，即刻有 LL 尺度的计算尺。它的利用遂被大大推广。美国克飞尔士公司在 1909 年方开始出售有 LL1，LL2，LL3 尺度的计算尺。1924 年又添有 LL0 的尺度，所以值得再介绍如下：

---

① Buchstein.

② M. P. Weinbach.

③ Log-Log Vector Duplex Slide Rule.

此项重对数尺度记有 LL1,LL2,LL3,以及 LL0,LL00 和它的倒数 LL/1,LL/2,LL/3 以及 LL/0,LL/00 或 LL1I,LL2I,LL3I 等符号,其中 LL3 或作(LL),LL2 或作(LU)。

此项重对数尺度是对照 C 或 D 尺度上的某数 x 而刻的 e^x 尺度。这尺度是由几段组成的,如

LL0 段 1.001～1.01,对着 C 或 D 尺上的 0.001 到 0.01;

LL1 段 1.01～1.105,对着 C 或 D 尺上的 0.01 到 0.1;

LL2 段 1.105～e(=2.718),对着 C 或 D 尺上的 0.1 到 1;

LL3 段 e～2.2×10^4,对着 C 或 D 尺上的 1 到 10。

这说明 LL0,LL1,LL2 和 LL3 实在是一条连续的尺度,C 或 D 尺也可看做由 0.001～10 的四个连续段所组成,不过每段代表不同的位数,如图 22 所示。

普通计算尺只记 LL1,LL2,LL3,并将 LL3 尺度刻在 C 或 D 尺下面的固定尺上,依次而下是 LL2 及 LL1,并于右边标明 x,e^x,$e^{0.1x}$,$e^{0.01x}$字样,如图 23 所示。

重对数尺度的用法可分为:(a)不抽动滑尺,和(b)抽动滑尺二类。

(a)不抽动滑尺　便可求得某数的自然对数值及 10 次乘幂与 10 次方根以及 e 的大、小数乘方等。

〔例一〕　置发线于 LL3 尺的 20.1 上,就可在 C 或 D 尺上求得 3,意即 $\ln 20.1=3$。

于是　用 LL3 和 C 或 D 尺度时,求得的自然对数值在 1～10 之间;

用 LL2 和 C 或 D 尺度时,求得的自然对数值在 0.1～1 之间;

用 LL1 和 C 或 D 尺度时,求得的自然对数值

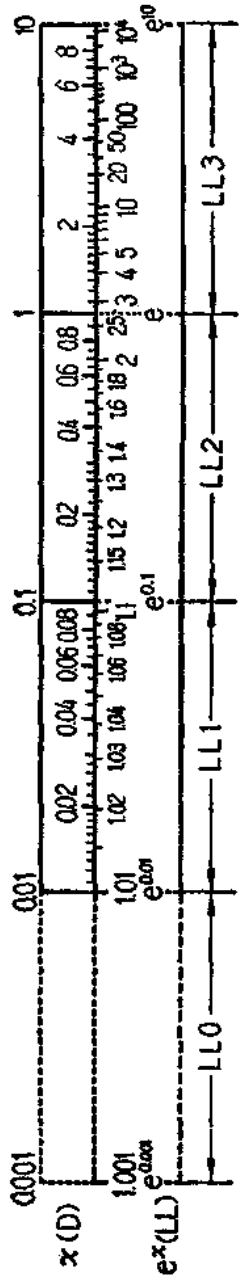


图22 表示重对数尺度的连续性

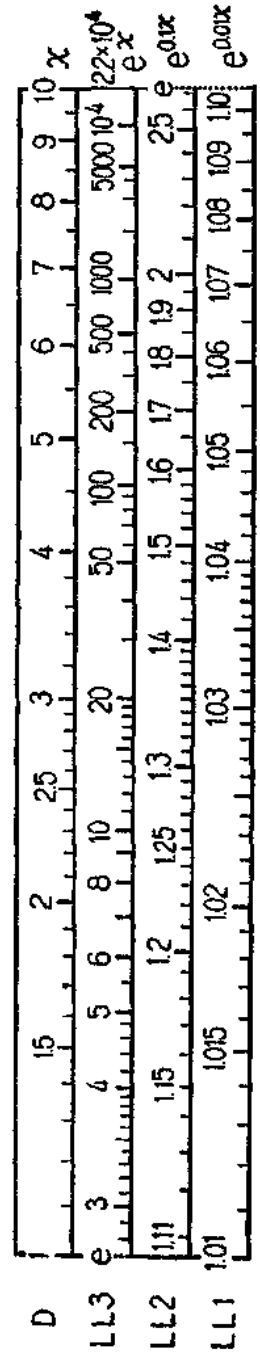


图23 重对数尺度的分段排列情况示意

在 0.01～0.1 之间。

〔例二〕 求某数的 10 次乘幂。可置发线于 LL1 或 LL2 尺的某数上，即可于 LL2 或 LL3 尺上读得某数 10 次乘幂的答数。如：

$$1.204^{10}=6.4,\quad 1.443^{10}=39.2。$$

〔例三〕 求某数的 10 次方根，可置发线于 LL2 或 LL3 尺的某数上，即可于 LL1 或 LL2 尺上读得某数 10 次方根的答数。如：

$$\sqrt[10]{1.16}=1.015,\quad \sqrt[10]{3.4}=1.13,$$

$$\sqrt[10]{4.41}=1.16,\quad \sqrt[10]{75}=1.54。$$

〔例四〕 求 e 的大数(大于 1)的各次乘方。可置发线于 C 或 D 尺上的某次乘方数上，即可于 LL3 尺上读得 e 的某次乘方值。如：

$$e^2=7.39,\quad e^{2.3}=9.99,\quad e^3=20.1。$$

〔例五〕 求 e 的小数(小于 1)的各次乘方。

如求 e 十分之一小数的各次乘方，则置发线于 C 或 D 尺上的某小数乘方数上，即可在 LL2 尺上读得其乘方值。如求 e 百分之一小数的各次乘方，同样置某小数值于 C 或 D 尺上，惟须在 LL1 尺上求其相应的乘方值。如：

$$e^{0.23}=1.259,\quad e^{0.336}=1.4,\quad e^{0.023}=1.0233。$$

同理：可以求 e 的某次方根数，求 e^{-n} 值，求解方程 $e^x=a$，求解方程 $e^{\frac{1}{y}}=a$，均不必抽动“滑尺”即可求到答数①。

(b)抽动滑尺 更可发展其他方面的运用，今举例说明如下：

〔例六〕 求 a^x 值。

---

① 以上各例，见李俨著《计算尺用法》(第 7 版第二次印刷)，第 23～25 页，上海商务印书馆，1957 年 2 月。

如求 3^4，先置发线于 LL3 尺的 3(=a)线上，抽动滑尺，使 C 尺上的 1 对准发线，移动滑标，使发线对准 C 尺上的 4，即可在 LL3 尺上读得 81，即 $3^4=81$，此时 $x=4$。

如 $x=\frac{1}{10}\times 4=0.4$，则可在 LL2 尺上读得 1.552，即 $3^{0.4}=1.552$，此时 $x=0.4$。

又如 $x=\frac{1}{100}\times 4=0.04$，则可在 LL1 尺上读得 1.0449，即 $3^{0.04}=1.0449$。

〔例七〕 求 $a^{\frac{1}{x}}$ 值。

如求 $1728^{\frac{1}{3}}$，先置发线于 LL3 尺的 1728(=a)线上，抽动滑尺，使 C 尺上的 3(=x)对准发线，移动滑标的发线，对准 C 尺上的 1，即可在 LL3 尺上读得 12，即

$$1728^{\frac{1}{3}}=12。$$

〔例八〕 求解方程 $a^x=b$。

此法，即上面〔例五〕的反算 x。如求解 $1.124^x=1.296$，得 $x=2.22$。求解 $40^x=10$，得 $x=0.624$①。

〔例九〕 求任何底的对数。

如求 $\log_{10}150$，先置发线于 LL3 尺的 10(=b)线上，抽动滑尺，使 C 尺上的 1 对准发线，移动滑标的发线到 LL3 尺的 150 上，即可在 C 尺上读得 2.18，即

$$\log_{10}150=2.176。$$

同理， $\log_9729=3$， $\log_381=4$， $\log_31.552=0.4$。

---

① 如求 a^{-x}，则可根据 $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ 原理算出，即先求得 a^x 后，再以 1 被 a^x 除，即得 a^{-x} 值。

第(二)项 “矢量”及双曲线尺度的应用

三角函数之外，还有双曲线函数，以 $\sinh x$ 代表双曲线正弦；$\tanh x$ 代表双曲线正切；$\cosh x$ 代表双曲线余弦。另有“复数”的双曲线函数。其次则为“矢量”。

如图 24，矢量 $\overline{A}$ 的大小为 r，幅角为 θ，水平分矢量与垂直分矢量各为 x 与 y；显然 $\overline{A}$ 可用极坐标式，指数式，或直角坐标式等不同形式表示如下：

$$\overline{A} = r \cdot \arg\theta = re^{j\theta}$$
$$= r(\cos\theta + j\sin\theta) = x + jy。$$

“矢量”在数、理与工程问题中，用处甚多。

(1)化直角坐标式为极坐标式　如图 24，

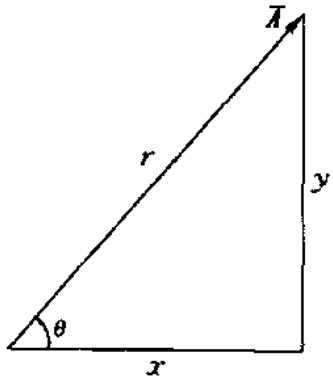


图 24　矢　量

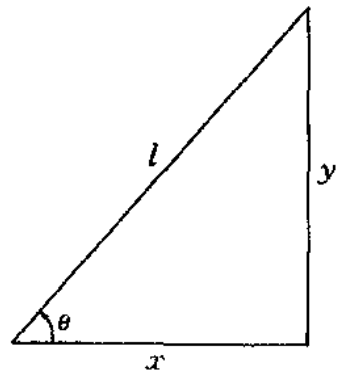


图 25　直角三角形

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta},$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{y},$$

$$= 90° - \tan^{-1}\frac{x}{y}。$$

(2)化极坐标式为直角坐标式　即由 $r \cdot \arg\theta$ 变为 $x+jy$，或由 $r(\cos\theta+j\sin\theta)$ 变为 $x+jy$。可从三角公式得：

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

即

$$\frac{r}{\sin 90°} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{x}{\cos\theta}。$$

在此时期还有一种 P 尺度①，和 C 或 D 尺度相对照。这 P 尺度是表示函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，即由 $x^2+y^2=1^2$（见图 25）得来。

如图 26，C 尺度上的数值与 P 尺度上的数值的对应情况如下：

C	1	1.34	8	10
P	0.995	0.991	0.6	0

例如：求 $x=0.85$ 时的 y 值，即

$$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(0.85)^2}$$

$$= \sqrt{1-(0.1\times 8.5)^2} = 0.527。$$

有了这样刻度的计算尺，只须在 C 尺度上的 8.5 处，就可在 P 尺度上读得 0.527。

从上述的 P 尺度，复演变为 H′ 及 H 尺度。H′ 尺度是正对着 C 尺度的一个尺度，其关系式为：

$$H' = \sqrt{1-(0.1C)^2}。$$

图26　C尺度与P（H′）尺度与相对应情况

① 意即 Pythagorean 尺度。

已审阅
子居 09-10-26, 17:49

C 尺度与 H′尺度互相对应的数值如下表：

C	1.2	5	8.5	9.8
P 或 $H'=\sqrt{1-(0.1C)^2}$	0.9927	0.865	0.527	0.2

根据同理，由上海胡汝鼎及曹凤山两位教授倡制了 H2 和 H3 尺度。H2 尺度是正对着 C 尺度的一个尺度，其关系式为

$$H2 = H = \sqrt{1 + (0.1C)^2}。$$

C 尺度与 H2 尺度互相对应的数值如下表：

C	1.2	1.85	5	9.8
$H=\sqrt{1+(0.1C)^2}$	1.0074	1.017	1.118	1.4

H3 尺度可以说是 H2 尺度的延伸，其关系式为：

$$H3 = \sqrt{1 + C^2}。$$

用 P 或 H′尺度，可以求解一元二次方程 $x^2+bx+c=0$。因一元二次方程的二个根为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

或

$$x = \frac{-b \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{c}}{b}\right)^2}}{2},$$

于是求解

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

以 $b=-5$，$c=6$，$\sqrt{c}=2.45$，$\frac{2\sqrt{c}}{b}=0.98$

代入上式得

$$x = \frac{5 \mp 5\sqrt{1 - (0.1 \times 9.8)^2}}{2}。$$

从C尺度上9.8处可直接从H′尺度上读得0.2，即

$$\sqrt{1-(0.1\times 9.8)^2}=0.2,$$

于是

$$x=\frac{5\mp 5\times 0.2}{2}=\frac{5\mp 1}{2},$$

即

$$x_1=2,\quad x_2=3。$$

二十世纪计算尺的成就，除上述以外，还有其他的革新。新的记号和新的刻线，陆续在计算尺上出现。每一个新记号，即代表新的创造，至新的刻线或将新记号刻在固定尺和滑尺上面，或在“滑标”的原有“标线”或“发线”的左右边另添“红色发线”，以便读得辅助数值，或在单面计算尺的后面左、右角上另加划线，作为正弦、正切，以及小角正弦、正切读数之用。

7　一九四九年前后国内计算尺的发展情况

十七世纪末叶及十九世纪中叶，计算尺两度传入我国后，均未受到重视，也未尝作为可供实用的计算工具。因此，一直至距今三十年以前，国内并无计算尺的发展情况可言。二十世纪初期输入我国的计算尺，均系美国、德国及日本各厂家所制造的商品，售价奇昂。当时应用计算尺的人虽并不甚多，但由于价值昂贵，且从形式来看，好像仿制并不困难，故于1930年前后，即有商人依照德国飞伯厂的单面计算尺型式自行制造。制造时先将样尺照相制版，印刷于厚纸片上，涂以透明塑胶保护层，作为尺面，然后粘贴于木制尺身上，可云因陋就简，只求形似，还谈不到精美，且尺度亦不易十分准确。

国内制造计算尺的厂家，以上海四达尺厂为最早。该厂自1931年创立后，1934年即仿制计算尺，克服了不少困难，至1938年方试制成功。此时正在抗日战争初期，上海沦陷，因局势紧张而中途停顿。1945年抗战胜利后，由于在反动政府统治时期，币值混乱，外货倾销，虽有不少小企业家有意设厂自制计算尺，以供当时需要并杜塞漏卮，但均未能长期维持生产，有的仅昙花一现而已，故在1949年以前，国内并无大规模生产计算尺的工厂。根据最近调查探询所得的结果，在1945～1949年的一段时期内，上海一地

共有生产计算尺的工厂约十余家，均系规模甚小，历时甚短，现在甚至厂址亦已无从查考。

在解放以前，制造计算尺工厂中值得特别提出的为上海算器厂。该厂成立于1947年，以专门制造“上序式新算尺”为主要业务。“上序式新算尺”是一种新创造的算尺，并不是仿制性质；发明者为胡上序同志，当时尚在初中求学一位年青学生，在他的长辈鼓励和指导之下，再接再厉的进行研究而有此成就，复经曹凤山教授审定后，遂设厂自行制造。

上序式新算尺与一般计算尺的形式并不相同。它没有中间的“滑动尺”，尺身的构造较简单。在尺的正面印有五个区段，总长25英吋的对数尺度（称为公用式）；或十个区段，总长80英吋的对数尺度（称为特长式）。因此尺身虽不长，而可以读得较多位有效数字。在区段对数尺的左、右两端各附印示行数，左端顺序向下，右端顺序向上，以便在运算时可以确定答数应在哪一行读得。上序式新算尺系采用印刷方式制造，惟在制版前先把原始尺度放大数倍绘成样尺，然后照相缩小，故颇能保持一定的精确度。

上序式新算尺上并不具备普通计算尺的“滑标”，而以透明塑料薄片制成的上、下二滑标代替。此项滑标，既可以单独滑动，也可以合并滑动。“上滑标”的左、右端刻“蓝标线”，“下滑标”的左右端刻“红标线”，两标线的距离，公用式为5英吋，特长式为8英吋。

上序式新算尺既有上述种种特点，故运用的方式与普通计算尺亦不同，惟借对数尺度加减代替乘除运算的基本原理并无二致。上序式新算尺的反面，附印矢量、重对数、正弦、正切等尺度，均不是这种新尺的重要部分，且不能与主尺联合运用。上序式新算尺虽有结构简单，读数精确等优点，但运用时不甚方便，故经试制成功，由上海算器厂生产约数千支后，即未继续制造。

胡汝鼎教授除指导“上序式”新算尺的设计制造工作外，又鉴于国外计算尺上的 P 及 Q 尺度，还有运用不十分灵便等缺点，曾于 1947 年创制了可起替续作用的 H 尺度，也是一项显著的改进，但当时并未实际制造。

解放以前，或更远在抗日战争(1937～1945)以后的一段时期内，上海还有一种称为“江氏计算尺”的商品，系由浙江金华英士大学的江德曜讲师所创造。这种算尺分甲、乙两种，把十六条比较常用的尺度集中排列在单面上，其中也包括矢量及重对数尺度。单面计算尺的构造比双面计算尺简单，故制造较易。尺面亦系照相制版后印成，惟尺度经过改排次序，与外货计算尺的形式并不相同，据悉当时系由上海新和文具工业社专制，售价甚廉，颇受应用者欢迎。

解放以后，人民政府特别重视工农业生产和文化教育事业，当时社会人士响应党和政府的号召，以实际行动在各方面努力生产并注意创造发明，于是国内计算尺的发展情况遂非常显著而与旧时代迥不相同。

1952 年春，华东区高等教育管理局在上海召开教育用品座谈会，会上曾专题研究计算尺的供应与制造。当时曹凤山教授在会上推荐胡汝鼎教授进行研究。1952 年 5 月胡教授向华东高等教育局提出制造计算尺规划书，并建议放弃国内以前仿制时所用的印刷尺面方式，改用照相制版后加热压制方式。尺身用竹材制造，尺度压制于塑胶尺面上，一切外观俱可与国外产品相仿。此项规划经华东高教局接受后，随即在上海创办计算尺实验工厂，试制成 53250 型双面计算尺，在尺上初次采用了胡教授创制的 H 尺度。

1954 年华东高教局以计算尺的生产任务委托公私合营鼎丰仪器厂办理，继续生产鼎丰 5471 型计算尺，实际上与 53250 型完

全相同。自 1954 年至 1958 年，鼎丰仪器厂连续制造计算尺，每年最高产量曾达六万支，除在国内供应需要外，还曾销售至印度及南洋各地，颇博好评。

鼎丰仪器厂生产的计算尺有 5471，5651，5652，5653，5751，5810，5851，5901 等各种类型，除 5901 型是 12.5 厘米短尺外，其余均是 25 厘米长尺，而 5651 型是当时国产计算尺中改用刻线方式制造的新成就。惜因刻线制造时成本过高，于 5851 型再应用一次后，未能普遍推广。鼎丰厂生产的长尺或短尺均是矢量重对数双面型计算尺，每一类型在尺度条数及其安排方面均略有区别，且或多或少有若干改进。例如为避免误读有效数值及准确辨认靠近尺端的读数起见，曾就尺面所刻数字及分划线等，作了许多独特的新创造，使应用者更感方便。

在国内其他各地，注意计算尺的制造与改进者尚不乏人，有如南京工学院梁治明教授、厦门大学陈允敦教授、天津大学王守融教授等，均曾提过不少意见而各有相当贡献，尤以王教授研究并试制“计算尺半自动刻线机”，更有显著成就。

圆形计算尺的仿制，在国内尚不多见。上海虽有一、二种产品，如华立换算盘等，但均流传不广。长春生产的“于振善计算尺”，亦系一种圆形计算尺。国内制造的特殊用途计算尺，如“上浆率计算尺”、“水暖计算尺”等，虽有不少是自行设计的，但品种繁多，不胜枚举。

解放以后，除鼎丰仪器厂制造计算尺的成绩比较显著外，还有不少私人投资的小型工厂，也有相当贡献，其中以制造特种类型的计算尺为多。他们曾接受测量、水利、航空、国防等机关的委托，承制特别设计的计算尺，专供各该机关自用，故事后很难详细调查。根据粗略估计，这些小工厂约有七、八家，但至今还在生产计算尺

的。仅存“学士工艺社”和“求范仪器图案工业社”两家，均已公私合营，成为四达尺厂的卫星工厂，受上海市仪表局及仪表公司的领导。

学士工艺社创办于1954年初，仅有规模极小的生产工场，设备非常简单，至今仍用加热压制方式生产“学士”5851型矢量重对数双面计算尺，尺身用红木制造，尺面与鼎丰厂的5851型完全相同，为目前市上出售计算尺中比较新型的一种。在1958至1960年间，该社最高年产量曾达12000支。曹凤山教授又于去年为该社设计6171型计算尺，现已试制成功并投入生产，故“学士”6171型是国内产品中更新型的计算尺，具备各种型式的优点，且运用时亦非常方便。

“学士”6171型矢量重对数双面计算尺的正、反面共刻28条尺度，其排列形式如下：

（正面）

固定尺上尺	lg ln 1 I(红)	$e^{-0.01} \leftarrow e^{-0.1}$
	lg ln 2 I(红)	$e^{-0.1} \leftarrow e^{-1}$
	lg ln 3 I(红)	$e^{-1} \leftarrow e^{-10}$
	DF	$\sqrt{.10} \rightarrow \sqrt{10}$
滑尺	CF	$\sqrt{.10} \rightarrow \sqrt{10}$
	CIF(红)	$\sqrt{10} \leftarrow \sqrt{.10}$
	H2($\sqrt{1+(.1C)^2}$)	
	H3($\sqrt{1+C^2}$)	
	CI(红)	$0.1 \leftarrow 1$
	C	$1 \rightarrow 10$
固定尺下尺	D	$1 \rightarrow 10$
	lg ln 3	$e \rightarrow e^{10}$
	lg ln 2	$e^{0.1} \rightarrow e$
	lg ln 1	$e^{0.01} \rightarrow e^{0.1}$

（反面）

固定尺上尺	sh2	0.1→1
	sh3	1→10
	K	1→1000
	A	1→100
滑尺	B	1→100
	sin2〔cos 2(红)〕	0.1→1
	H'2 ($\sqrt{1-(.1\ C)^2}$)(红)	
	tg2〔ctg 3(红)〕	0.1→1
	tg3〔ctg 2(红)〕	1→10
	C	1→10
固定尺下尺	D	1→10
	DI(红)	0.1←1
	lg	0→1
	th2	0.1→1

图 27 “学士”6171 型矢量重对数双面计算尺

正、反面尺度排列示意

求范仪器图案工业社创办于 1950 年，亦系私人投资，工场即设于家庭内，地位尚宽敞，设备颇简单。创办人罗庆蕃今已逝世，生前是一位机械工程师，因业余爱好计算尺而研究试制，曾费了不少时间与精神，于 1952 年方试制成功。历年来的生产量较少，且早期曾以大部分生产能力用于制造特种计算尺。该社的产品为“求范万用双面计算尺”，尺身用柚木制造，外表与国外产品相仿，每年产量约 4000 支。

鼎丰仪器厂于 1958 年以后改变生产任务，不再制造计算尺。当时以制造计算尺业务移归四达尺厂，惟四达尺厂并未立即继续生产，直至 1961 年下半年始筹备恢复计算尺的制造业务，并拟改用机器刻线方式生产新型计算尺，以冀达到更精密的高度水平。目前正在自造刻线机器，据云预计于 1962 年下半年可以投入生产。

计算尺属于精密文化用品的一种，制造时并不简易，因必须保持高质量标准。据四达尺厂提出的三项质量要求为：(1)尺度准确，(2)分划清晰，及(3)尺身不变。如能完全符合这三项要求，即系优秀的高质量计算尺，当然还需要考虑外形美观，坚固耐用及造价低廉等问题。目前四达尺厂已注意这些问题，并有专人从事研究，例如为保证尺身不变，曾以竹材进行加工处理，并作抗热、抗潮等试验，有了一定成绩。预计在党和各级政府机关的关怀与领导下，并得到有经验的专家们的指导与协助，以及工人同志的积极努力，我国计算尺的发展前途是无限量的。

附录一 计算尺发展史年表

1544 年　斯提斐尔(M. Stifel,1486 或 1487～1567)提出对数概念,并在这一年所著《完全算术》书中,说到这概念。

1614 年　讷白尔(John Napier,1550～1617)在《对数规范》中正式发表对数法。

1617 年　巴理知(Henry Briggs,1556～1630)亦发见对数法。

1620 年　甘特(Edmund Gunter,1581～1626)曾试作计算尺。

1624 年　巴理知发表常用对数表。

1628 年　佛拉哥(Adriaen Vlacq,约 1600～1655)曾复刻巴理知对数表。

1628 年　温盖(Edmund Wingate,1593～1656)亦试作计算尺。

1630 年　特雷姆(Richard Delamain)写《数学环》说明计算尺。

1632 年　吴德(William Oughtred,1574～1660)写《比例圆》说明圆形计算尺。

1653 年　穆尼阁(J. N. Smogolenski,1611～1656)介绍佛拉哥复刻巴理知对数表给薛凤祚(淄川人,1600～1680)为对数输入中国之始。

1654 年　毕沙溪(Robert Bissaker)改善吴德的计算尺。

1657 年　派脱立奇(Seth Partridge)开始设计(有滑尺的)现代型的计算尺。

1662 年　此时输入巴理知的《比例四线新表》(即正弦、余弦、正切、余切的对数表)薛凤祚亦收入所著《历学会通》之内。

1675 年　牛顿(Isaac Newton,1642～1727)曾应用计算尺来解二次数字方程及三次数字方程。

1677 年　克盖谢尔(Coggeshall)再对上述计算尺进行改善。

约 1680 年　中国亦应用假数尺,正弦、正割、正切假数尺。

1682 年　克盖谢尔发表"克盖谢尔型计算尺"。

1697 年　汉特(William Hunt)和他人设计在计算尺上记明 π 刻线,又设计立方数(K)尺度。

1718 年　年希尧校刻《八线假数表》一卷等书,梅文鼎(1633～1721)曾为这书著序。

1720 年　克来安(Jean Baptiste Clairant)另设计圆形计算尺。

1722 年　瓦纳(John Warner)曾改善"克盖谢尔型计算尺"。

1723 年　是年出版的《数理精蕴》,正式介绍假数尺,正弦、正割、正切假数尺。

1748 年　亚当姆(George Adams)设计螺线型计算尺。

1775 年　瓦特(James Watt,1736～1819)曾设计精密计算应用的计算尺,称做沙护(Soho)型计算尺。

1775 年　罗伯孙(John Robertson,1712～1776)曾设计航海专用计算尺。

1787 年　来护孙(William Nicholson,1753～1815)设计各种形式的计算尺

1795 年　伯秦(A. Beghin)设计倒数尺度 CI。

1815 年　古格脱(Peter M. Roget)设计"重对数尺度"。

1817 年　伯朋(Sylvanus Bevan)建议用折尺度即用 $\sqrt{10}$ 开始,

以后也有用 π 开始的。

1832 年　佛劳哥(Woollgar)设计函数 $a \cdot \phi(x)$ 专用计算尺，以后 P 尺度等都由此演出。

1850 年　孟海姆(Amédée Mannheim，1831～1906)设计将“滑标”镶在计算尺中间。

1873 年　邹伯奇(1819～1869)著《对数尺记》，在同年《邹征君遗书》内刻出。

1880 年　法国革莱特厂(Tavernier＝Gravet)开始制造孟海姆型计算尺。

1890 年　德国飞伯(A. W. Faber)厂亦制造孟海姆型计算尺。

1891 年　中国马良以“求在我者”笔名著《尺算征用》。

1897 年　奥·柯斯(William Cox)改善孟海姆型计算尺，定名为多型双面计算尺。

1900 年　美国克飞尔士公司(Keuffel & Esser Co.)亦制造多型双面计算尺。

1909 年　上述公司开始制造重对数的各项计算尺。

1923 年　伯士特(Buchstein)设计刻有“双曲线对数尺度”的计算尺。

1929 年　文伯士(M. P. Weinbach)教授设计重对数矢量双面计算尺。

1930 年后　世界各厂家尚陆续制造有矢量对数(Versalog)的各项计算尺和轻重工业专用的各种各式计算尺，以后再专文详述。

附录二 外文人名音译对照表

西文人名译成中文，至今不易统一。有的因国籍不同，原文读音不同，而误译成各别的中文，以致造成纷歧；亦有中文音虽近似而字则互异。我国翻译西文数学书籍，可以追溯至四百年以前，当时有译自拉丁文的，有译自希腊文的，也有译自英、法文的，因此译名颇不一致。最特殊的如译 Christphor Clavius 为丁先生，已于书中（见第 2 页）脚注说明来源。其余与现在读音不相同的译名尚多，很难一一解释。本书中涉及的西文人名，凡古书中已有译名的，悉从旧译名，以免两歧，其他均系新译名，可能并不妥当。西文人名均在初见时加脚注于页末，表示原文。兹为便于检查起见，另列外国人名音译对照表如下：

〔注〕下列人名以首字笔画为序，首字相同者以第二字笔画为序，同笔画者以、一 ⅂ ⅃ 丿 为序*。

二 画

丁先生（Christophor Clavius，1537～1612）

四 画

文伯士（M. P. Weinbach）

巴理知（Henry Briggs，1556～1630）

---

* 按简化字笔画作了个别调整。——编者

牛顿(Isaac Newton,1642～1727)

五 画

汉特(William Hunt)

古格脱(Peter M. Roget)

瓦纳(John Warner)

瓦特(James Watt,1736～1819)

甘特(Edmund Gunter,1581～1626)

六 画

讷白尔(John Napier,1550～1617)

亚当姆(George Adams)

毕沙溪(Robert Bissaker)

毕的斯克斯(Bartholomaeus Pitiscus,1561～1613)

伟烈亚力(Alexander Wylie,1815～1887)

七 画

来特(Edward Wright)

来护孙(William Nicholson,1753～1815)

克来安(Jean Baptiste Clairant)

克盖谢尔(Coggeshall)

吴德(William Oughtred,1574～1660)

伯士特(Buchstein)

伯朋(Sylvanus Bevan)

伯秦(A. Beghin)

佛拉哥(Adriaen Vlacq,约1600～1655)

佛劳哥(Woollgar)

八 画

孟海姆(Amédée Mannheim,1831～1906)

罗伯孙(John Robertson,1712～1776)

九 画

派脱立奇(Seth Partridge)

英王查理一世(King Charles I)

十 画

埃弗拉德(Thomas Everard)

特雷姆(Richard Delamain)

十二 画

温盖(Edmund Wingate,1593～1656)

棣么甘(Augustus De Morgan,1806～1871)

博朗(Thomas Brown)

斯提斐尔(Michael Stifel,1486或1487～1567)

十三 画

雷玛莱斯(Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus,? ～1600)

奥·和事德(William Foster)

奥·柯斯(William Cox)

十六 画

穆尼阁(Jean Nicolas Smogolenski,1611～1656)

附录三 近十年来有关计算尺的出版物（中文部分）

1. 樊恒铎:《计算尺的原理与用法》,上海中国科学图书仪器公司,1949 年。
2. 李俨:《计算尺用法》,上海商务印书馆,1951 年。
3. 朱彦频编译:《计算尺原理及其用法详解》,北京中华书局,1952 年。
4. 何祚丰编:《怎样使用计算尺》,上海大东书局,1954 年。
5. (苏)巴诺夫著,浦允南译:《怎样使用计算尺》,上海机电图书出版社,1954 年。
6. (苏)巴诺夫著,李学荣译:《计算尺》,上海商务印书馆,1954 年。
7. 赫颖举:《计算尺使用法》,北京人民邮电出版社,1956 年。
8. 陈世仁:《算尺原理及用法》,上海商务印书馆,1956 年。
9. 赵绍先、那玉恒:《三角计算尺》,北京建筑工程出版社,1957 年。
10. 黄绪瑞:《怎样使用计算尺》,郑州河南人民出版社,1958 年。
11. (苏)列德涅夫著,徐润炎、陆智常同译:《使用计算仪器与计算工具的数学实习》,北京高等教育出版社,1958 年。
12. (苏)谢明嘉耶夫著,陈振基译:《计算尺简明指南》,北京科学普及出版社,1958 年。
13. 余宁生:《算尺讲义》,清华大学,1959 年。
14. 内蒙古自治区教育厅教研室:《计算尺》,(高中二年代数补充教材),呼和浩特内蒙古人民出版社,1959 年。
15. 张大克:《常用计算工具用法浅说》,沈阳辽宁人民出版社,1959 年。
16. 安徽省宿县农业专科学校编:《经济计算》,北京农业出版社,1961 年(书

分三部分 1. 算盘,2. 计算机,3. 计算尺)年。

以上十六种系根据北京图书馆参考组编印的《馆藏数学书目(中文部分)》——计算工具及计算机——内的资料摘录而得。

1. 计算尺说明书,上海四达尺厂编,1938 年。
2. 上序式"公用与特长"新算尺用法说明书,胡上序编,上海算器厂,1946 年。
3. 于振善尺算法,于振善创作,安文辉编辑,晋察冀新华书店,1948 年。
4. 于振善尺算法课本,于振善撰,北京工人出版社,1951 年。
5. 于振善尺算解法研究,田永寿编撰,河北省人民出版社,1951 年。
6. 于振善尺算法,段学复编,上海商务印书馆,1952 年。
7. 计算尺说明书,长春新春人民公社数学计算仪器厂编,未记出版年月。
8. 矢量、重对数双面计算尺的原理同用法,曹凤山编,华东高等教育管理局计算尺实验工厂,1953 年。
9. 5471 型矢量重对数双面计算尺用法说明书,曹凤山编,上海鼎丰仪器厂,1954 年。
10. 求范万用双面计算尺用法说明书,曹凤山编,上海求范仪器图案工业社,1960 年。
11. 6171 型矢量重对数双面计算尺用法说明书,曹凤山编,上海学士工艺社,1961 年。
12. 6211,6251,5961 矢量重对数双面计算尺用法说明书,曹凤山编,上海地方国营南汇计算尺厂,1962 年。

以上十二种,系属于计算尺说明书性质,且仅系个人收集到的部分资料,不包括年代较久的出版物。如蒙读者提供其他资料,请列举编著者,书名,出版者,出版年份等,以便在修订时补充。

附录四 计算尺和其他算尺、算图论文目录

（1920～1960）

著　　者	论文题目	期刊·书报名	出版年月（卷·期）
曾世英	二次方程式计算器	科　学	1920.（5卷3期）
翁天麟	分数计算盘	科学画报	1934.4.（1卷18期）
王宝舆	用普通计算尺解高次方程	工程界	1937.4（3卷4期）
	盖革米勒计算器	科　学	1939.（23卷10期）
曾一平	于振善尺算的理论研究	新科学	1950.1.（1卷4期）
刘　谈	环形计算尺	科学画报	1951.5.
赵访熊	于振善尺算法的理论基础	科学通报	1951.11.（2卷11期）
徐达玲	向量计算盘	科学画报	1952.2.
黄宝焘	斤两计算盘	科学画报	1952.9及10.
	车螺丝用的简便转尺	机械工人	1953.7.
王彦玲	三角函数变化盘	科学画报	1953.8.
	计算材料重量的简便算尺	机械工人	1953.10.
曾力生	测点计算尺	工程建设	1954.8.
李继文	视距计算盘的改进	工程建设	1954.11.
巴鳌洛夫	切削用量计算盘	机械译丛	1955.1.
李鑫宗	苏联切削用量计算器的原理与改进	机械制造	1955.（9期，11期）
	螺旋线计算盘原理及其应用	中南土建学报	1956.1.
陆振声	CI尺在乘方和开方上应用的推广	厦门数学通讯	1956.3.

著　者	论文题目	期刊,书报名	出版年月(卷,期)
陈允敦	计算尺制造技术研究报告	厦门大学学报(自然科学)	1956.5.
曹宇平	用对数计算尺的平方尺标作乘除运算时的定位	数学通报	1956.5.
赵访熊	算尺	科学大众	1956.5.
于振善	尺算运算法两则	厦门数学通讯	1956.6.
任常平	钢筋混凝土梁板计算尺	工程建设	1956.6.
冶金部有色冶金设计院	钢筋混凝土计算尺制造与使用介绍	经验报导	1956.6.(3期)
陈元亨	解一元二次方程的滑尺	数学通讯	1956.9.
孙秋庭	近子午线圆型计算尺的原理与说明	人民交通(航运版)	1956.10.
周宁华	电计算尺	无线电	1956.11.
煤炭部沈阳设计分院	水暖计算尺	经验报导	1956.12.(13期)
魏宗舒	对数计算尺的构造原理和应用	数学教学	1957.1.
邹道卿	三角函数计算器	中华放射学杂志	1957.2.
方　侠	关于对数计算尺的两个教案	数学通报	1957.4.
吴忠仁,张国权	实用灰铁件浇口计算器	铸　工	1957.6.
纳查洛夫	铜合金浇注系统计算尺	铸　工	1957.8.
管希仲	计算尺使用方法	数学通报	1957.8.
王　静	三用计算盘	公　路	1957.9.
纳查洛夫	钢铸件浇注系统计算尺	铸　工	1957.10.
山东省莱阳一中	计算尺-经纬仪的制作和运用	数学教学	1957.11.
梁钧铭	视距测绘仪介绍	工程建设	1957.11.
青　萍	拉力试验伸长率计算尺的说明和应用	机械制造	1957.(8卷5期)

著　者	论文题目	期刊，书报名	出版年月(卷，期)
郭汉中	量距计算盘	建筑技术	1957.(总49期)
鲍德政	心电图算尺	心电图的原理和应用	1957.
天津市建设委员会测量队	视距改正器	技术革新资料汇编(测量专辑)	1958.
蔡家骏	用标尺和方形图开平方	数学通报	1958.1.
王守谦	解二次方程图尺	数学通报	1958.1.
纳查洛夫	铸铁件浇注系统计算尺	铸　工	1958.2.
葛云书	关于使用计算尺进行乘除时的定位问题	数学通报	1958.2
许金科	普通计算尺的构造	机械工人	1958.4.
早川元彦	管内压力损失的计算尺	工程建设	1958.4.
张有良	复对数尺原理及用法	数学通报	1958.5.
程乾定	碳钢铸件浇注系统计算器	铸　工	1958.6.
徐德俊	气象公报计算尺	解放军报	1958.6.
孙振华(译)	管道水力计算用的计算尺	土木工程	1958.7.(3卷7期)
王大权	铸铁配料计算尺	铸　工	1958.7.(6期)
	迅速准确的炮用计算尺	解放军画报	1958.7.
盛沛醴等	凝结水管计算尺	机械工厂设计	1958.8.
	介绍水电站发电量计算盘	水力发电	1958.8.
王侠飞	拉力试验伸长率尺算法	土木工程	1958.9.
张金铭	矿量体积计算尺	建筑技术快报	1958.9.
邢树钧等	七一型万能建筑结构计算尺	建筑设计	1958.10.
腾少脓	滑轮计算尺(1521)	全国医药卫生技术革新展览会资料索引	1958.12.
张　伟	孕产期计算标尺(1961)	全国医药卫生技术革新展览会资料索引	1958.12.

著　者	论文题目	期刊,书报名	出版年月(卷,期)
山西医学院附一院	紫外线计算尺(2302)	全国医药卫生技术革新展览会资料索引	1958.12.
北京医学院	心电图 X 值计算尺(2516)	全国医药卫生技术革新展览会资料索引	1958.12.
北京医学院	基础代谢计算尺(2519)	全国医药卫生技术革新展览会资料索引	1958.12.
陆风鸣	照度系数计算器	建筑设计	1958.12.(6 期)
	野外视距高程计算尺	测绘经验汇编第二集	1958.
全国测绘科学技术经验交流会	分段视距计算尺	技术资料第 6 册	1958.
全国测绘科学技术经验交流会	特种计算尺	技术资料第 6 册	1958.
全国测绘科学技术经验交流会	收敛角计算盘	技术资料第 6 册	1958.
全国测绘科学技术经验交流会	断面点中心距计算盘的操作方法	技术资料第 14 册	1958.
林平驷	我是怎样创造快速乘除计算图的	数学通报	1959.1.
吴泽济	领导学生自制"计算尺仪器"的过程	数学通报	1959.1.
陆振声	介绍几种计算尺的简捷使用法	数学教学	1959.1.
乐　毅	圆锥角换算器	机床与工具	1959.2.(4 期)
唐山煤炭科学院矿山测量研究室	改正数计算尺	测绘通报	1959.2.

著　者	论文题目	期刊，书报名	出版年月(卷，期)
严德裕	简易的锐角三角函数器	数学教学	1959.2.
高昌发	导线方位角计算盘	测绘通报	1959.2.
编　者	对"照度系数计算器"一文的意见	建筑设计	1959.2.
马庆忠	于振善尺算法的新发展	数学教学	1959.2.
李修梧	测量隔膜高低换算尺	中华放射学杂志	1959.3.
陈炳荣	快速四算器	数学通讯	1959.4.
禾　日	计算尺九歌	中学教师	1959.4.
程子明	自制计算尺的补充说明	数学通讯	1959.4
江门二中	关于对数计算尺教学的几点意见	中学数学	1959.6.
程子明	自制计算尺	华中师范学院学报(数学版)	1959.7.(2 期)
马庆忠	再谈"于振善尺算法的新发展"	数学教学	1959.7 及 8.
陈炳荣	一种计算器	中学数学	1959.8.
唐　煌	计算尺上解二次、三次方程式的简法	数学通讯	1959.8.
刘因哲	贫血分类计算尺	临床检验杂志	1959.10.
芦宇霆	小儿剂量计算尺	药学通报	1959.10.(7 卷 10 期)
吕文明	倾斜巷道测设腰线改正数计算尺	测绘通报	1959.11.(15 期)
毛希琳，吴桂秋	自制径向平方根求积仪介绍	仪器与实验技术	1959.12.
曾余敏	对"三角函数计算器"一文的一点补充	中华放射学杂志	1959.12.
钱启贤	坡度、等高、距离三用测量器	林业科学快报	1959.12.(52 期)
石　垒	教学对数计算尺的一些体会	数学教学	1959.12.
王正第	对数计算尺补充教材	中学数学	1959.12.

著　者	论文题目	期刊，书报名	出版年月(卷，期)
湖南省城市建设局设计公司	螺旋式视距计算盘简介	测绘通报	1959.(5卷1期)
陈耀藩	视距计算盘添制高程加减盘的装置	测绘通报	1959.(5卷1期)
韦品瑚	一种乘方、开方快速计算图	数学通报	1960.2.
刘志成	归心计算盘	测绘通报	1960.2.
一院煤气科	电滤器和洗涤塔选择算尺	机械工厂设计	1960.3.
一院设备科	烟道设计万能计算尺	机械工厂设计	1960.3.
林维勇，王显	照明设计联动计算盘	机械工厂设计	1960.4.
科，席与棠	部分计算工具简介	机械工厂设计	1960.4.
李子铎	万能三角计算尺	数学教学	1960.5.
马树纲	流速计算图尺	数学通讯	1960.6.
王化岩	圆形计算尺	科学大众	1960.6.
马庆忠	利用圆形计算尺计算三角问题	科学大众	1960.6.
	简易核算工具介绍	中国轻工业	1960.7.
赵　银	三角板开平方尺	数学通报	1960.7.
蒋宗彦	示教对数计算尺的制法	数学通报	1960.7.
王化岩	再谈圆形计算尺	科学大众	1960.8.
马庆忠	计算尺小数乘除定位法	科学大众	1960.8.
马庆忠	圆面积公式 $A=\frac{(2r)^2}{1.273}$ 是怎样得来的？	科学大众	1960.8.
党贵权	介绍简易三角高程尺	测绘通报	1960.(6卷9期)
王化岩	关于圆形计算尺问题	科学大众	1960.12.
李怡生	高程计算尺	水利部水利工作通讯	未详(第29期)

编校后记

我友李乐知(俨)先生曾负责陇海铁路工程数十年,劳绩卓著,而他研究中国数学史尤有独到的成就,历年来所撰有关中国数学史的著作,为学术界重视已久。近年他主持中国科学院自然科学史研究室后,复增订中算史著作和编写中国数学史话多种[①],对发扬我国古代科学文化和推进当前科学普及工作,都有巨大贡献。他对计算尺亦喜研究,十三年前所著《计算尺用法》一书,行销甚广。去年秋末,他以新著《计算尺发展史》稿寄交上海科学技术出版社,谋付剞劂。

编写这本书的意图及其内容,作者已在前言中详述,不必在此介绍。我觉得这本书不仅对计算尺的发明与发展经过情况叙述较详,且可使读者了解计算尺的原理与用法,一书而兼备两书的作用,甚合需要,遂建议本社接受出版。

计算尺现在虽已发展至接近完善阶段,但是否更无改进可言呢?当然,任何人未必能下此断语。计算尺上能读出的有效数字,

---

① 解放后出版的有:《中国算学史(修订本)》,商务印书馆出版;《中算史论丛》,《中国数学大纲》等九种,北京中国科学出版社出版;《中国古代数学史料》,上海科学技术出版社出版;《中国古代数学史话》等,中华书局出版。

一般仅准确至三、四位，但它有携带便利，用法简单等优点，故至今仍然是值得推广的计算工具，而作者编写这本《计算尺发展史》，对科学普及工作也是有一定意义的。

计算尺的应用不仅限于科学技术方面，计算尺的尺面刻度亦不一定要十分繁复，尽可为适应普通或特殊需要而制造成或简或繁的不同类型。惟有受到各方面重视以后，始能普遍推广，而发展前途亦更无限量。试一查三百年以来，欧、美各国的计算尺发明者与改进者，有的是事务员，有的是医学博士，有的是炮兵中尉，有的是仪器商，而数学家反并不甚多。国外社会人士重视计算尺的情况，于此可见一斑，深足引起我们注意而作为借鉴焉。

为了使本书提早出版起见，我有意地向组织上提出，拟亲自担任编校工作，更可从实践中体会一些处理稿件的具体情况。工作完成以后，复不揣谫陋，写成《编校后记》，向作者与读者请教。

我最初以为处理这本二万余字的稿件，不过费十日至半月时间，即可蕆事；讵知自 1961 年 10 月间初次接到来稿至编校整理完毕，历时在半年以上，其间为商讨内容而往返的信件不下四十余次，累计字数在三万以上，而稿本经修改后，寄请作者复核达三次之多，真非我初料所及。这正足以说明我对具体工作的体验尚不够深入，且不免存在着过低估计工作量的偏见。

作者对我所提出的疑问，始终在百忙中不嫌烦琐地尽速解答，使我获得不少新知识。同时作者更非常虚心和认真地考虑我的意见，一再修改并补充本稿内容，逐步提高质量，达到更好地为读者服务的共同要求。我于钦佩之余，深深体会到编辑工作者与作者之间，确有建立友谊关系的必要，而著作与编辑是两项性质不同的分工，有相得益彰的功效，因此更增强了我对编辑工作的信心。

我在编校工作中，主要对本稿提出了两点商榷意见：其一，外

国人名应如何准确地译成中文名称；其二，应否补充近十余年来国内计算尺的发展情况。

在着手编校工作初期，我即发现本稿内有许多译成中文的外国人名，与一般读音颇不相同。例如以 Christophor Clavius 译成丁先生，又以 Henry Briggs 译为巴理知，均使我怀疑不解。后经作者解释，始知丁先生[1] 系从利玛窦[2] 原译而来，巴理知及其他译名亦大都已见于我国早期出版的数学译本中。如《辞海》试行本译 Briggs 为布立格斯[3]，反易造成纷歧，因此作者主张以采用旧译名为宜。

目前一般翻译书籍中的外国人名或地名的中文译名往往不准确或不统一。我曾有不成熟的意见，认为凡属外国人名或地名，不妨一律保持原文，不必译成中文。这样既可避免纷歧与误译，又可以省注原文，岂不两便。但我的意见还待商榷，且对读者也许并不方便，故在本书中并未采用，遇有外国人的中文译名时，仍在页末加脚注，表示外文原名，并编列外文人名音译对照表作为附录二，以便查对。

原稿最后一节，作者对近十余年来国内计算尺的发展情况叙述得比较简略。其实，即以上海一地而论，由于党和政府重视科学技术工作，以及专家们的热心倡导，和工人同志们的积极努力，计算尺的制造与改进颇有显著成就。这些情况，我于早年本已略有所知，以为均值得作为史料以供日后回忆，故向作者建议，宜充实这一部分内容。经他赞同以后，遂进行了短时期的调查访问，改写成

---

① 按 Clavius 是拉丁文，原作钉解，利玛窦谐音译为丁，见徐光启、利玛窦合译《几何原本》序文。

② Matteo Ricci(1552～1610)，意大利传教士，明万历年间至中国。

③ 见《辞海》试行本 12 分册，第 8 页，1961 年。

最后一节文字。

这项工作，我很想努力做好，但限于时间及能力，仅上海一地的收获，亦未必符合理想，挂一漏万，知所难免。至于国内其他各地的情况，更因缺乏线索及平时不够注意，未能进行广泛调查，引为遗憾。只有待本书出版以后，得到广大读者的帮助与指示，再进一步探索，以图补充。

在编校工作中，我除提出上述两项意见外，其余本无足述，但我觉得润饰文字与核对资料二项工作似易而实难。我一向主张编辑工作者对原稿的文字风格应尽可能保持本来面目，不宜大量修改。如有必要，酌量润饰文字或损益标点符号等亦宜十分慎重。但我处理稿件时，往往自信力太强，不免对原稿文字改动太多，可见要掌握得恰如其分，亦颇不易。

核对资料，本是编辑工作者可尽的责任，但自惭学术荒芜，只能就自己有限的业务水平，发现疑点，择要查对而已。作者博览群书，费了很大劳动，搜集资料，写成书稿，而编辑工作者仅限于一隅之见，不明资料来源，很难发现问题，故核对资料工作，亦往往不易做好。这些有关编辑工作者的责任问题，尚待研究，兹不多赘。

我以为编辑工作者如对原稿内容发现疑问或有任何意见，必须向作者提出，求得解答；如对原稿文字或数据作了改动，均应得到作者同意。这是编辑工作者应尽及可尽的责任。在本书编校过程中，往来信件所以如此频繁，而修改后的稿本，复不嫌其烦地寄与作者多次复核，正为此耳。至于保证本书内容一无错误，不仅作者未尝自满，恐编辑工作者更不敢有此设想。书中如有缺漏或谬误之处，尚希读者见谅，并请批评指正为幸。

此外，我在编校工作中还有一项体会，认为值得向作者与编辑工作者提请共同注意的事，即插图必须精美与准确，并符合出版要

求。科学技术书籍中一般均附有较多插图，这些插图是书籍中的重要组成部分，甚至可以说比文字更为重要，不仅补文字表达的不足而已。

插图必须精美，虽属于外观问题，但书籍中的插图是读者首先最易接触到的内容，一览即可辨认其是否合适，不若文字须经仔细阅读后方能了解。插图精美主要体现在结构清晰、线条整齐、字体端正并具一致风格等几个方面，好像只是审美问题，但作者在考虑插图底稿或提供资料时，必须首先注意，而编辑工作者在审查插图质量时，更应充分重视这些要求。

插图准确实际上即是资料准确的一部分。这是作者应负主要责任而尽最大努力保证的事。但编辑工作者同样应负审查核对的责任。编辑工作者往往重视润饰文字及核对资料工作，而不甚注意审核插图质量，以致图文不符或图中资料不确切等，成为书中常见的缺点。

有时作者所绘的插图底稿或提供的资料，很可能并不符合出版要求，于是编辑工作者更应尽量考虑插图如何改善问题，包括重绘、缩放，以及更换、取舍等事，使插图达到精美、准确而具有一致风格的要求。这是编辑工作者较作者更有经验而可以负更多责任的事，且对提高书籍质量可起相当作用的一项具体工作，值得编辑同志们特别予以重视。

我在进行这本书的编校过程中，曾对插图改善工作尽了我可尽的责任，同时也得到绘图组同志的帮助，把插图加工、墨绘，使尽量符合制版条件。例如，有些插图底稿是要求作者重绘的，有一部分插图底稿则是我代绘后请作者核定的，更有若干插图则是我提出意见，经作者供给新资料后更换的，而如何缩成适当比例，亦曾请绘图组同志费神，作了一番考虑，然后决定的。因此本书的插图

数量虽不多，而这方面的工作量却相当大，且在编校过程中所费的时间亦不少。

在这本书稿的文字与插图已整理加工至接近完成阶段，我又特地为本书加编了一个索引。目前我国出版的科技书籍中，不论著作与翻译，一般均缺乏索引，读者每感觉不便。我以为在书末加附索引，是值得提倡并可推广的事，故在本书的编校过程中，作了一次尝试，以便在实践中有些较深的体会。

我觉得编列索引并不是困难的事，但须具备一定的专业知识，方能辨别在全书中应采取哪些资料列为索引，同时也须有适当的方法与顺序，否则往往在烦琐工作中，不易得到良好效果。我以为编列索引宜由作者负责，编成后作为书稿的一部分，编辑工作者如有能力担任此项工作，当然亦可代作者分劳，惟编得是否合适，仍应请作者复核后方能确定。

这本书稿字数既不多，故编列索引工作并不十分繁重，所费时间亦有限、惟因缺乏经验，也走了些弯路，以致编得并不完善，可能尚有漏注页码的地方，尚请读者见谅。编列索引必须在最后校读清样时方能进行，因此不免推迟一些出版时期，但我认为还是值得这样做的。

最后，我希望本书出版以后，能获得读者的重视，特别已编写同类书籍的作者的重视；更希望他们应作者的要求，对本书内容提出批评意见，应本人的要求，对编辑工作提出批评意见，以便不断改进，至所感幸。

顾济之（世楫）

1962.5.28

索　引

附注：1. 以首字笔画为序，首字相同者以第二字笔画为序，同笔画者以丶、一、丿、丨、丿为序。*

2. 以正文为限，前言，后记及附录中的名词均未编入。

二　画

丁先生　654　(2)

二次数字方程　668,679　(14,22)

53250 型双面计算尺　705　(46)

P 尺度　700　(41)

三　画

下尺　673　(19)

下滑标　704　(45)

三次数字方程　668,679　(14,22)

三角术　653　(1)

三角函数对数表　660　(7)

大型计算尺　684　(27)

于振善　706　(47)

于振善计算尺　706　(47)

上尺　673　(19)

上序式新算尺　704　(45)

上海算器厂　704　(44)

上海新和文具工业社　705　(46)

上滑标　704　(45)

飞伯厂　685,689,703　(28,32,44)

上浆率计算尺　706　(47)

小角度的正弦与正切　667,673　(13,19)

小型计算尺　673　(19)

四　画

六位对数表　660　(7)

* 本索引未按简体字重排，仍依原序。圆括弧中的页码是原书的。

文伯士 694 (36)
方根 684,695 (27,37)
王守融 706 (47)
尺算征用 691 (33)
双曲线正弦 699 (40)
双曲线正切 699 (40)
双曲线余弦 699 (40)
双曲线函数 699 (40)
双曲线对数 659 (6)
双曲线对数尺度 694 (36)
巴理知 659 (6)
巴理知对数 659 (6)
巴理知对数表 659 (7)
中型尺度 679 (22)
中算史论丛 654,691 (2,33)
中算家的积化和差术研究 654 (2)
水平分矢量 699 (40)
水暖计算尺 706 (47)
内插法 672 (18)
比例圆 672 (18)
比例对数表 660 (7)
牛顿 666,670,679 (12,16,22)
牛津大学 665,672 (12,17)

五 画

立方数 680 (23)
汉特 679 (23)
甘特 666,675 (12,21)
示行数 704 (45)
正切对数 665 (12)
正弦对数 665,672 (12,18)
古格脱 684,694 (27,36)
瓦纳 683 (26)
瓦特 683 (26)
对数 653,654,658 (1,2,6)
对数尺 691 (33)
对数表 659,660,661 (7,8)
对数值 656,657,661 (4,5,8)
对数尺记 666,691,692 (12,33,34)
对数尺度 661,673 (8,19)
对数尺用法 692,697 (34,39)
对数定义 658 (6)
对数性质 658 (6)
对数计算 654 (2)
对数规范 654 (2)
对数原理 661,663,683 (8,10,26)
对数种类 659 (6)
加减计算尺 661 (8)
四达尺厂 703 (44)
发线 673,688 (19,30)
矢量 694,699,704 (36,40,45)
矢量重对数双面计算尺 694 (36)
代数学 691 (33)
仪甫先生两河清汇叙 660 (7)

六 画

江德曜 705 (46)
亚当姆 684 (26)

有理数　666　(14)
列斯提来厂　690　(32)
毕沙溪　676　(22)
毕的斯克斯　654　(2)
多型孟海姆型计算尺　686　(29)
多型双面计算尺　686　(29)
自然对数　659,672,695　(6,18,37)
华立换算盘　706　(47)

七　画

完全算术　653　(1)
沙护型计算尺　683　(26)
来特　672　(18)
来护孙　684　(26)
折尺度　663,687　(9,29)
克来安　683　(26)
克盖谢尔　679,683　(23,26)
克盖谢尔型计算尺　679,683　(23,26)
克飞尔士公司　689,694 (31,32,36)
求在我者　691　(33)
求范万用双面计算尺　708　(49)
求范仪器图案工业社　707　(47)
李俨　654,691,697　(2,33,39)
李善兰　691　(33)
严敦杰　654　(2)
吴德　671,672,673,675,676,683,691　(17,18,19,22,26,33)
佛拉哥　659　(7)
伯士特　693　(36)
伯朋　687　(29)
伯秦　680　(23)

八　画

底　658　(5)
学士 6171 型计算尺　707,708　(47,48)
学士工艺社　707　(47)
环中黍尺　654　(2)
直角坐标式　699　(40)
直线形计算尺　663,671,686,691　(10,17,29,33)
陈允敦　706　(47)
孟海姆　685　(27)
孟海姆型计算尺　685　(28)
革莱特厂　685　(28)
固定尺　671,673,693　(17,19,34)
罗伯孙　683　(26)
罗庆蕃　708　(49)
垂直分矢量　699　(40)

九　画

计算尺　661,665,673,676,683,691,694,703　(8,12,19,23,26,33,36,44)
计算尺实验工厂　705　(46)
派脱立奇　679　(22)
英王查理一世　672　(18)
胡上序　704　(45)

胡汝鼎 701,705 (42,45,46)
标线 673 (19)
指数式 699 (40)
马良 691 (33)
复数 699 (40)
重对数 684,704 (27,45)
重对数尺度 684,694 (27,36)
重对数多型双面计算尺 689 (32)
红标线 704 (45)

十 画

根 668,670 (14,16)
根槽 693 (34)
真数 661,666 (8,12)
埃弗拉德 679 (23)
哥莱斯哈姆学院 665 (12)
乘幂 684,695 (27,37)
特维厂 690 (32)
特雷姆 671,672,673,675 (17,18,19,21)
倒数尺度 668,680 (14,23)
积化和差术 654 (2)
航海专用计算尺 683 (26)

十一 画

讷白尔 654,659 (2,7)
讷白尔对数 658,659 (5,6)
讷白尔对数表 672 (18)
梁治明 706 (47)
梅文鼎 654 (2)
理研厂 690 (32)
曹凤山 701,704,705,707 (42,45,46,47)
常用对数 659 (6)
张作楠 692 (34)
崇祯历书 654 (2)
假数尺 666,680,681,692 (12,24,25,34)
假数尺的作法 680 (24)
假数尺牙制模型 680 (24)

十二 画

温盖 666 (12)
游表 693 (34)
测量全义 654 (2)
普通尺度 673 (19)
博朗 675 (21)
博来因图书馆 672 (17)
棣么甘 691 (33)
斯提斐尔 653 (1)
极坐标式 699 (40)
莱士厂 685 (28)
莱士型计算尺 685,693 (28,35)
等比数 655,656 (2,4)
等差数 655,656 (2,4)
逸见厂 690 (32)
伟烈亚力 691 (33)

十三 画

蓝标线 704 (45)

数学环　671,672　(17,18)
数学史料　675　(21)
数理精蕴　666,680,692 (12,24,34)
滑尺　671,673,683,687,693 (17,19,26,30,34)
滑标　673,679,683,685,691,704 (19,22,23,26,27,33,45)
滑动尺　679,704　(23,45)
滑尺倒放　668,679　(14,23)
雷玛莱斯　654　(2)
鼎丰仪器厂　706　(46)
鼎丰 5471 型计算尺　706　(46)
鼎丰 5651 型计算尺　706　(46)
圆周率 π　679　(23)
圆形计算尺　664,665,671,672,684,691,706 (10,11,17,18,26,33,47)
邹伯奇　666,691　(12,33)
邹征君遗书　692　(34)
邹孟才　691　(33)
邹孟道　691　(33)
奥·和事德　672　(18)
奥·柯斯　687　(29)

十五　画

槽尺　693　(34)
剑桥大学　671　(17)

十六　画

辐角　699　(40)
穆尼阁　660　(7)

十七　画

韩梦周　660　(7)
薛凤祚　660　(7)
螺线型计算尺　684　(26)